



**MINISTERE DEL'ENSEIGNEMENTS SUPERIEURE
T
DELARECHERCHESCIENTIFIQUEUNIVERSITE
« Abbès LAGHROUR »DE
KHENCHELAFACULTEDESSCIENCES ETDE
TECHNOLOGIE**

Département de Génie Mécanique

N° de série:.....

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de Master(L.M.D)

Filière: Génie Mécanique
Spécialité: Génie des Matériaux
Thème

**Analyse Du Comportement Mécanique Des Poutres En
Composites Avancés FGM Reposent Sur Une
Fondation Élastique Variable**

Réalisé par:

- GOUASSEM MOHAMME
- KHELLOUFI AZIZ

Membres de jury:

Mr. BERKIA Abdelhak MAA
Mr.MESAUDI Issam MAA
Mr.KHADRAOUI Faicel MAA

Université de Khenchela Président
Université de Khenchela Examineur
Université de Khenchela Encadreur

Année universitaire 2021/2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قال الله تعالى:

﴿ إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لآيَاتٍ لِأُولِي الْأَبْصَارِ ﴿١٩٠﴾ الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَامًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَاطِلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ﴾ [آل عمران [190] :

وقال الله تعالى:

﴿ هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴾ [يونس [191] :

صدق الله العظيم

Dédicace

**Je dédie cet humble travail à mon cher père
(ma mère et mon père, que Dieu lui fasse
miséricorde), mes chers frères et mes chères
sœurs à tous mes amis, et je mentionne parmi
eux le professeur Riad Jaber et le professeur
Faudel Belkafeef et au âme de mon ami Zaki
Bu Hadidah, que Dieu lui fasse miséricorde**

Gouassem mohammed

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

إهداء

الحمد لله وكفى والصلاة على الحبيب المصطفى وأهله ومن وفى أما بعد الحمد لله الذي وفقنا لنتمين هذه الخطوة في مسيرتنا الدراسية بمذكرتنا هذه ثمرة الجهد والنجاح بفضلته تعالى اهدي هذا العمل الى روح ابي وحببي وصديقي الى من جرع كاس فارغا ليسقيني قطرة حب الى من حصد

الأشواق ليمهد لي الطريق ابي رحمة الله عليه

كما اهدي عملي هذا الى امي التي لم ترها اعيني التي فارقتنا وهي في عز شبابها امي التي كافحت من اجلنا

امي التي التي كانت تضحي بنفس والنفيس من اجل اولادها رحمة الله على روحك الطاهرة كما اهدي هذا العمل الى زوجة ابي التي كانت بمثابة الام الثانية شاركتنا افراحنا واحزاننا وقدمت لنا

كل ماتملك من اجل النهوض وبث روح الحياة حفظها الله ورعاها واطال عمرها كما اهدي هذا العمل الى زوجتي ورفيقة دربي التي شاركتني هموم الحياة حفظها الله ورعاها

والى ابنتي وحببية قلبي التي غمرت البيت فرحا حفظها الله من كل سوء

كما اهدي هذا العمل الى كل افراد عائلتي اخوتي واخواتي كبيرهم وصغيرهم كل باسمه كل في مقامه الذين لم

يخلو علينا شيئا اسأل الله ان يبارك لنا في اخوتنا وان يحفظهم من كل مكروه

كما أهدي هذا العمل الى ابناء اخي وابناء أخواتي حفظهم الله ورعاهم وأنار دربهم

وسدد خطاهم

خلوفي عزيز

Rmerciement

Tout d'abord, nous voudrions remercier et en premier lieu ELLAH, le Tout-Puissant et Miséricordieux qui nous a donné la force, la volonté et le courage de mener à bien ce travail. Nous sommes très reconnaissants aux deux garçons pour toute l'aide et le soutien qu'ils nous ont apportés tout au long de nos études. Nous remercions également les frères et sœurs et tous les membres des deux familles.

Cette recherche a été menée sous l'excellente direction de M. Khadraoui Faysal, Professeur à l'Université de Khenchela. Nous, les étudiants, tenons à lui exprimer notre grande gratitude pour avoir supervisé, dirigé et suivi les travaux lors de l'élaboration et de la rédaction de cette thèse, ainsi que pour nous avoir accordé sa confiance. Je tiens à le remercier vivement de m'avoir donné l'opportunité de travailler sur un sujet d'un tel intérêt.

Je tiens également à remercier les honorables professeurs du Département de génie mécanique qui nous ont donné tous les conseils et un soutien scientifique continu là où de nombreuses difficultés ont été surmontées.

Nous ne pouvons oublier de remercier tous les enseignants qui ont contribué de près ou de loin à notre formation depuis les classes primaires jusqu'à maintenant. Merci beaucoup à tous nos collègues des trois étapes pédagogiques.

Enfin, nous remercions tous nos amis, et tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.

Résumé:

Ce travail présente l'analyse du comportement statique des poutres en matériaux à gradient de propriété de type P-FGM, reposent sur une fondation élastique variable en utilisant une théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé à trois variables (théorie Raffinée). Les équations d'équilibre sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels. Les équations obtenues sont ainsi résolues par l'utilisation de la solution de Navier pour le cas d'une poutre simplement appuyée. Deux études sont présentées, comparative et paramétrique dont l'objectif de la première est de montrer la précision et l'efficacité de la théorie utilisée et la deuxième d'analyser le comportement mécanique de cette poutre sous l'effet de différents paramètres à savoir l'indice matériel (k), le rapport d'épaisseur (a/h) et le type de poutre.

ملخص

يقدم هذا العمل تحليل السلوك الثابت للحزم المصنوعة من مواد متدرجة لخاصية P-FGM ، تستند إلى أساس مرن متغير باستخدام نظرية تشوه القص عالية الترتيب ثلاثية المتغيرات (النظرية المكررة). يتم الحصول على معادلات التوازن من خلال تطبيق مبدأ العمل الافتراضي. وهكذا يتم حل المعادلات التي تم الحصول عليها باستخدام حل Navier لحالة الحزمة المدعومة ببساطة. تم تقديم دراستين مقارنتين ومحدويتين هدفهما الأول إظهار دقة وفعالية النظرية المستخدمة والثانية لتحليل السلوك الميكانيكي لهذه الحزمة تحت تأثير عوامل مختلفة وهي مؤشر المادة (k) ، نسبة السماكة (a/h) ونوع الأساس.

Liste des figures

Chapitre I : Généralités-Sur-les-Matériaux-Fonctionnellement-Gradués FGM

<i>Fig. I 1. Une vue de la microstructure des FGM.....</i>	<i>03</i>
<i>Fig. I 2. Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....</i>	<i>04</i>
<i>Fig. I 3. Différences structurelle entre les matériaux FGM et les composites traditionnels Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c).....</i>	<i>05</i>
<i>Fig. I .4.Schéma de la microstructure à gradation continue avec des constituants en métal-céramique (a) Microstructure à gradation progressive (b) Vue agrandie et (c) FGM en céramique-métal.....</i>	<i>06</i>
<i>Figure I.5.représentation schématique de la fonction matérielle dans les différentes structures (a) matériau homogène, (b) composite, (c) FGM.....</i>	<i>07</i>
<i>Figure I.6. Illustration des caractéristiques thermiques entre les composites CLC et FGM.....</i>	<i>07</i>
<i>Figure I.7. Variation graduelle dans l'os humain.....</i>	<i>09</i>
<i>Figure I.8 . Modèle d'un FGM(b), en comparant avec un composite classique(a).....</i>	<i>10</i>
<i>Figure I.9.Classification matériaux à gradient fonctionnel.....</i>	<i>13</i>
<i>Figure I.9.Principe de la méthode coulage en bande.....</i>	<i>14</i>
<i>Figure I.10. Principe de la méthode coulage séquentiel en barbotine.....</i>	<i>15</i>
<i>Figure I.11. Principe de la méthode projection plasma.....</i>	<i>16</i>
Chapitre II. : Introduction aux Théories des Poutres	
<i>Figure II. 5.1.Cinématique d'Euler Bernoulli.....</i>	<i>20</i>

Figure II. 6.1. Cinématique de Timoshenko.....22

Figure II. 7.1. Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.....24

Chapitre III : l'analyse du comportement statique des poutres en matériaux à gradient

Fig.III. 1.2. Les coordonnées et la géométrie de la poutre FGM.....28

Chapitre IV : Résultats-et-Discussions

Fig.VI. 1. Comparaison la Variation de contrainte axiale adimensionnelle σ_{xx} ($a/2, x$) à travers l'épaisseur de la poutre FG avec l'effet de la fondation élastique Linéaire $K_w=(0,100)$ et ($k = 0, 5, \text{inf}$) (a) Model 1 (HSDBT), (b) Model 2 (HSDBT), (c) (HBT).....44

Fig.VI. 2. Comparaison de la Variation de déplacement U_{xx} ($0, Z$) à travers l'épaisseur de la poutre FGM avec l'effet de la fondation élastique Linéaire $K_w=(0,100)$ et ($k = 0, 5, \text{inf}$) (a) Model 1 (HSDBT), (b) Model 2 (HSDBT), ((HBT)(b).....45

(b) Fig.VI. 3. comparaison la Variation dimensionnelle de la contrainte de cisaillement $\sigma_{xz}^-(0, z)$ à travers l'épaisseur de la poutre FGM avec l'effet de la fondation élastique (c) Linéaire.....46

Fig.VI. 4. Comparaison de la Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de l'indice de loi de puissance k avec un rapport (a/h) différent « $K_w=(0,100)$ et ($k = 0, 5, \text{inf}$) (a) Model 1 (HSDBT), (b) Model 2 (HSDBT), (c) (HBT).....47

Liste des tableaux

Chapitre II: Introduction aux Théories des Poutres

Tableau II. 1. Principales conditions aux limites pour les poutres.....19

Chapitre VI : Résultats-et-Discussions

Tableaux VI .1.Les propriétés des matériaux utilisés dans cette étude.....37

Tableaux VI .2:Les propriétés des matériaux utilisés dans cette étude.....38

Tableaux VI .3.Les déviations et les contraintes non dimensionnelles des poutres FGM sous une charge uniforme q pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k39

Tableaux VI .4. Comparaisons de la déflexion à mi-portée $w(a/2)$ d'une poutre FGM sur fondations élastiques sous une charge uniforme (MODEL 1).40

Tableaux VI .5.La flèche, les déplacements, Les contraintes axiales et tangentielles de la poutre FGM sous charge uniforme, avec l'effet de la fondation élastique Linéaire (MODEL 1).....41

Tableaux VI .7. La flèche, les déplacements, Les contraintes axiales et tangentielles de la poutre FGM sous charge uniforme, avec l'effet de la fondation élastique Linéaire (MODEL HBT).....43

Table des Matières

Dédicace	
Remerciement	
Résumé.....	I
ملخص.....	II
Listes des figures.....	III
Liste des Tableaux.....	VI
Introduction Générale.....	01
Chapitre I : Généralités-Sur-les-Matériaux-Fonctionnellement-Gradués FGM	
I.1.Introduction.....	03
I.2.Définition des Matériaux Fonctionnellement gradués	03
I.3.Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	05
I.4.Structures FGM dans la nature.....	08
I.5. Concept des matériaux FGM.....	09
I.6. Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel.....	10
I.7.Composition chimique des matériaux à gradient évalué.....	11
I.8.Matériaux à gradient fonctionnel de microstructure.....	12
I.9. Types de FGM.....	12
I.10. Fabrication des FGM.....	13
I.10.1.Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	13
I.10.2.Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	14
I.10.3.Compaction sèche des Poudres.....	15

I.10. 4. Projection plasma.....	15
I.10.5.Frittage et infiltration.....	16
I.11. Conclusion.....	17

Chapitre II: Introduction aux Théories des Poutres

II.1. Introduction.....	18
II.2.Définition d'une poutre.....	18
II.3.Conditions aux limites d'une poutre.....	18
II.4.Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres.....	19
II.5.Mdèle d'Euler Bernoulli (ClassicalBeamTheory- CBT).....	20
II.6.Modèle de Timoshenko (FSDBT).....	21
II.7.Théorie d'Ordre Elevé (HSDT).....	23
II.8.Conclusion.....	27

Chapitre III : l'analyse du comportement statique des poutres en matériaux à gradient

III .1. Introduction.....	28
III .2. Modèle mathématique.....	28
III.3. Champ de déplacement.....	29
III.4. Champ de déformation.....	29
III.5. Champ des contrainte.....	30
III.6. Les forces et les moment.....	31
III.7.Principe de Hamilton PTV.....	31
III.8.Solution analytique.....	36

Chapitre IV : Résultats-et-Discussions

VI.1.Résultats et discussions.....	37
------------------------------------	----

VI.2.Résultats et discussion.....	37
VI.2.1. Etudes comparativ.....	37
VI.2.2.Etudes paramétrique.....	39
VI.3. Conclusions.....	47
Conclusion générale	48
Références Bibliographiques.....	49

Introduction générale

Introduction Générale

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des nouveaux matériaux composites avancés leur spécificité c'est la variation continue de leurs propriétés matérielles d'une surface à une autre. Ces matériaux peuvent être fabriqués en variant le pourcentage des constituants de deux matériaux ou plus pour avoir une propriété graduée suivant la direction spatiale désirée. La gradation dans les propriétés des matériaux réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte trouvés dans les composites stratifiés. Les FGM ont acquis une application généralisée comme structures de barrière thermique, contre l'usure et comme revêtements résistant à la corrosion autres que le collage de matériaux différents. Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été proposé par le japonais M. Niino et ses collègues en les utilisant comme matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs nucléaires.

Les plaques fonctionnellement graduées (FGM) sont largement utilisées dans diverses branches de l'ingénierie telles que la mécanique, l'aérospatiale, la chimie, l'électricité, etc. Les avantages des structures FGM présentent une résistance thermique élevée et un changement graduel des caractéristiques du matériau le long du sens choisi. Pour une conception des plaques FGM utilisées dans un environnement à haute température, les contraintes thermomécaniques et les déflexions sont des paramètres importants à prendre en compte.

Depuis les années 80 du dernier siècle beaucoup de chercheurs se sont intéressés aux plaques fonctionnellement graduées (FGM), et plusieurs théories de plaques ont été proposées, à cet égard la théorie classique des plaques (CPT), c'est une théorie qui se base sur les hypothèses de Kirchhoff elle néglige donc l'effet de la déformation de cisaillement transversal, néanmoins elle fournit des résultats raisonnables pour les plaques minces. Il a été constaté aussi l'apparition de nombreuses théories de plaque de déformation de cisaillement qui représentent les effets de déformation de cisaillement transversal. La théorie de Reissnerou Mindlin [4] est connue comme la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), elle prend en compte l'effet de cisaillement transversal par le moyen d'une variation linéaire du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur.

Les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués est une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils

Introduction générale

constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales.

L'objectif de notre travail est Analyse Du Comportement Mécanique Des Poutres En Composites Avancés FGM Reposent Sur Une Fondation Élastique VariableCe travail présente l'analyse du comportement statique des poutres en matériaux à gradient de propriété de type P-FGM, reposent sur une fondation élastique variable en utilisant une théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé à trois variables (théorie Raffinée).

Un premier chapitre présente Généralités-Sur-les-Matériaux-Fonctionnellement-Gradués FGM Les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs) sont des matériaux de pointe dans la famille des composites d'ingénierie, constitués en deux ou plusieurs phases de composition continue et variable .Ces matériaux avancés avec des gradients de la composition, de la structure et/ou des propriétés spécifiques dans une direction préférée et/ou une orientation, sont caractéristiquement supérieurs aux matériaux homogènes constitués de différents composants similaires.

Un deuxième chapitre Introduction aux Théories des Poutres La théorie des poutres, ou théorie d'Euler-Bernoulli, est un modèle de base utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé.

Le troisième chapitre l'analyse du comportement statique des poutres en matériaux à gradient Dans le présent chapitre, une étude analytique du comportement statique et vibratoire des structures FGM a été présentée. D'abord une nouvelle approche analytique utilisant une théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique d'ordre élevé (HSDT) pour étudier la flexion et la vibration libre des plaques de matériau fonctionnellement gradué (FGM).

Le chapitre quatre Résultats-et-Discussions.

Chapitre I

Généralités-Sur-les-Matériaux-
Fonctionnellement-Gradués
FGM

I.1 Introduction

Le développement des matériaux composites a permis d'associer de propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : *Functionally Graded* [17] *Material* " *F.G.M* "). Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bi en déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques .

I.2. Définition des Matériaux Fonctionnellement gradués :

Un matériau fonctionnellement gradué est un matériau composite qui a des propriétés mécaniques variables en suivant une fonction dans une direction donnée, en général c'est l'épaisseur de la poutre, il est fabriqué en mélangeant les particules des phases de deux matières différentes, par exemple, métal et céramique. Autrement dit, un FGM est une classe des composites qui ont une variation continue des propriétés matériels d'une surface à une autre [18.19.20]

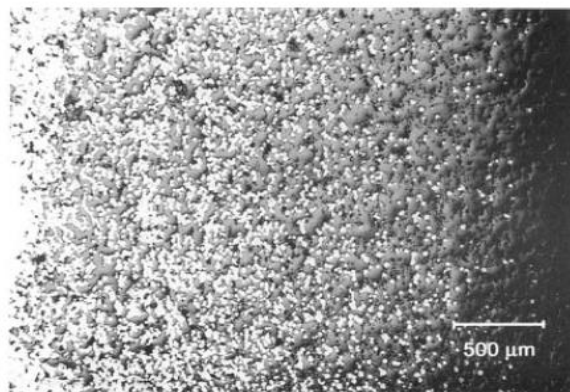


Fig. I 1. Une vue de la microstructure des FGM

Par la suite, une poutre fonctionnellement graduée est définie comme une poutre dont les fractions volumiques de deux ou trois matériaux varient continuellement en suivant une

fonction à travers l'épaisseur [21]. Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Fig. I 2. Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [22]

Le concept des matériaux à gradient de propriétés (FGM) caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à un changement morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels, des recherches ont été établis afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie. Leur but principal est pour l'usage d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique (navettes spatiales) et peut résister au milieu à haute température (turbomachines aéronautiques ou terrestres). Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développements dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur le secteur de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal. Beaucoup d'avantages sont prévus d'employer cette classe du FGM, par exemple, la face où le contenu est élevé en céramique peut fournir haute résistance à l'usure, alors que la face opposée où le contenu est élevée dureté et la force. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications

où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises simultanément [23.24.25]

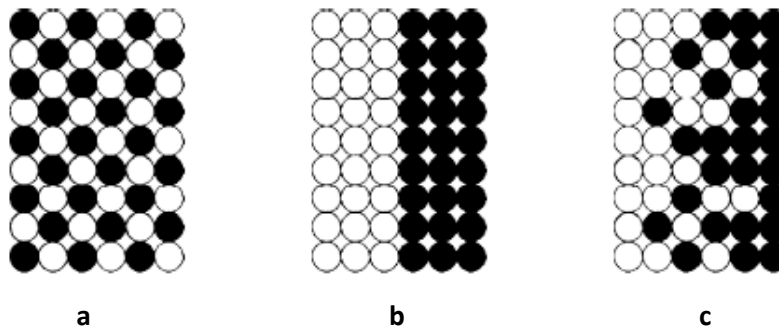


Fig. I 3. Différences structurelle entre les matériaux FGM et les composites traditionnels: Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

I.3. Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) est un nouveau concept pour la réalisation de propriétés et / ou de fonctions innovantes qui ne peuvent être obtenues avec des matériaux homogènes conventionnels. Dans sa structure la plus simple, il se compose d'un matériau d'un côté et de l'autre d'un second matériau, et une couche intermédiaire dont la structure, la composition et la morphologie varient doucement d'un matériau à l'autre de l'ordre du micron [1] voir (fig. I.4). Le concept de "matériau à gradient de propriétés" se réfère clairement à la réalisation de propriétés innovantes suivies d'une inhomogénéité qui ne peut être réalisée par des matériaux conventionnels homogènes, en mettant l'accent sur les deux caractéristiques essentielles suivantes. La première caractéristique essentielle consiste à adapter artificiellement la composition chimique et la microstructure à partir de la prédiction quantitative du profil de distribution des propriétés pour obtenir la fonction souhaitée. La deuxième caractéristique essentielle inclut la disponibilité de processus de fabrication qui a une bonne reproductibilité, en tant que technologie avancée pour le gradient de propriétés. Les procédés doivent pouvoir produire un profil précis de la composition chimique et doivent pouvoir être directement fabriqués à partir des résultats des calculs effectués par les concepteurs de matériaux.

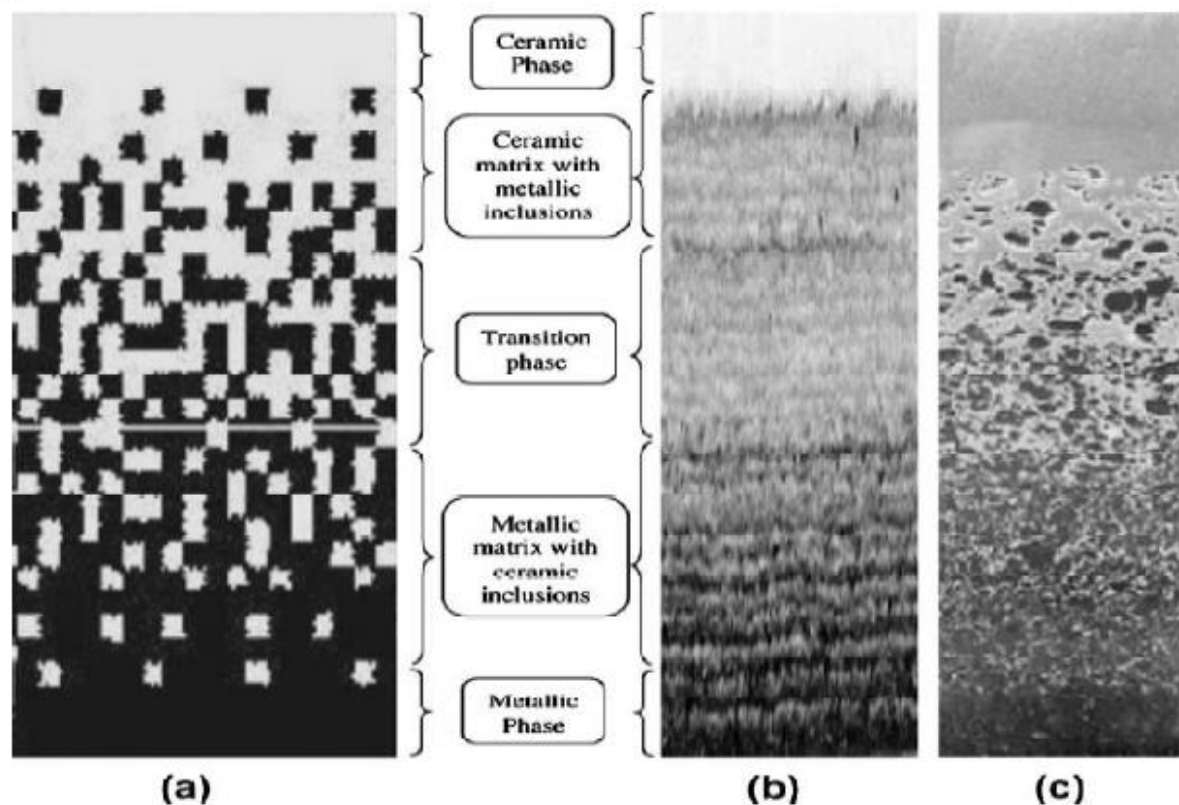


Fig. I .4:Schéma de la microstructure à gradation continue avec des constituants en métal-céramique (a) Microstructure à gradation progressive (b) Vue agrandie et (c) FGM en céramique-métal [2].

Le matériau à gradation d propriétés fonctionnelle (FGM) c'est un matériau révolutionnaire qui appartient à une classe de matériaux avancés avec des propriétés variables sur une dimension changeante [2]. La variation des propriétés en douceur d'un matériau à l'autre dans les FGMs élimine les interfaces pointues existant dans les matériaux composites où les défaillances sont déclenchée [3]. Il remplace cette interface pointue par une interface dégradée qui produit une transition en douceur d'un matériau à l'autre[1] possibilité de personnaliser un matériau pour une application spécifique Les propriétés de tels matériaux peuvent être décrites par la fonction $f(x)$. Dans les matériaux homogènes, cette fonction est constante comme dans (Fig I.5.a). Dans le cas d'une jonction de deux fonctions matérielles différentes, $f(x)$ a une forme de déformation (FigI.5.b). Dans les FGM, cette fonction matérielle doit être continue ou quasi-continue[5]

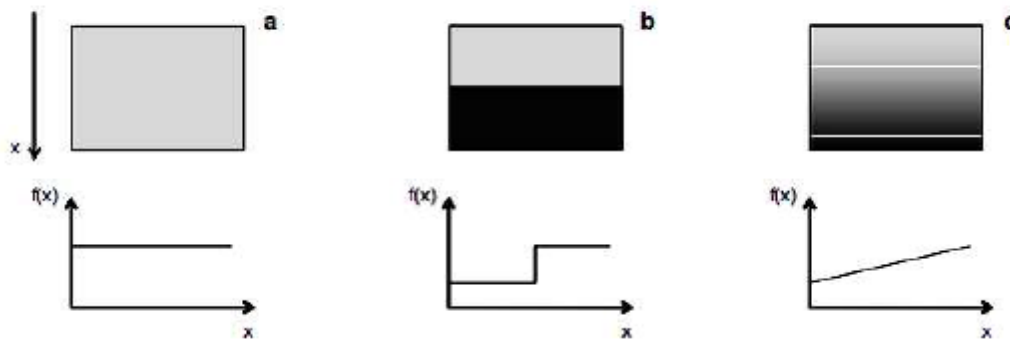


Figure I.5: représentation schématique de la fonction matérielle dans les différentes structures (a) matériau homogène, (b) composite, (c) FGM [5]

Au début du développement des matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle, le concept consistait à supprimer l'interface pointue (le saut dans les contraintes thermiques) qui existait dans le matériau composite traditionnel et à la remplacer par l'interface qui se modifiait progressivement, ce qui se traduisait par une modification de la composition chimique de ce composite. De l'illustration (Fig I.6) nous voyons que la FGM présente une distribution des contraintes thermique plus douce que celle des composites stratifiés classiques (CLC) [6]

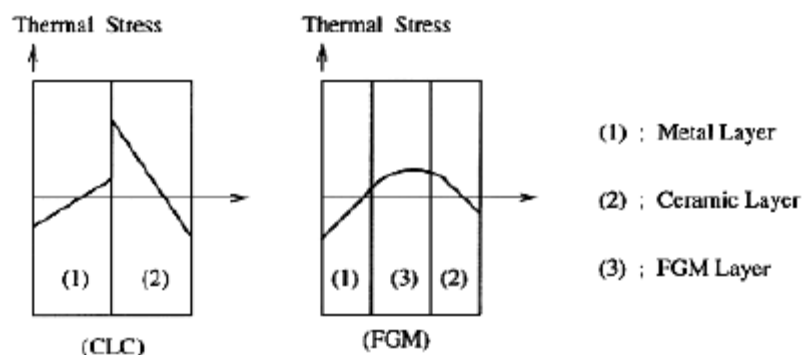


Figure I.6: Illustration des caractéristiques thermiques entre les composites CLC et FGM

Les principaux avantages de l'utilisation des FGM sont [7]:

1. la réduction des contraintes thermiques;
2. réduction des contraintes thermiques aux endroits critiques;
3. diminution des transitions de contrainte brusques à l'interface;
4. réduction du facteur d'intensité de contrainte (force motrice pour la propagation de fissure)
5. augmentation de la force de liaison interfaciale.

I.4.Structures FGM dans la nature

La nature a toujours été une source d'inspiration pour les chercheurs lorsque ces derniers sont confrontés par des problèmes d'ingénierie tel que les neurones dans le cerveau humain. Les chercheurs ont copié ce concept afin de résoudre plusieurs problèmes à travers l'utilisation des réseaux de neurones artificiels, les matériaux à gradient fonctionnel ne sont pas une exception, les plantes, les os et les dents sont parmi plusieurs exemples des FGM naturels [12]) Le bambou est un autre exemple d'un FGM naturel qui possède des propriétés à graduation continue caractérisé par une variation micro structurelle produite par les distributions non uniformes des ingrédients constituants. Les avantages de la variation continue dans les propriétés de ce matériau inclus la réduction de la concentration des contraintes ainsi qu'augmenter la force de collage [14]) La plupart des tissus et des organes humains sont constitués de FGM naturels, nous citons :

- La peau humaine qui a un système structurel complexe de multicouches (épiderme, le derme et l'hypoderme). Chaque couche possède différentes propriétés ainsi que différentes fonctions.
- Les articulations humaines sont constituées de tissus à gradient fonctionnel, tel que le tendon-à-os et le cartilage-à-os qui contient des ligaments permettant de connecter ces tissus.
- Le disque inter-vertèbre humain qui contient l'anneau fibreux, le noyau gélatineux et le cartilage en de plates [13]
- Le tissu des os contient une variation graduelle de la densité et la distribution des porosités.

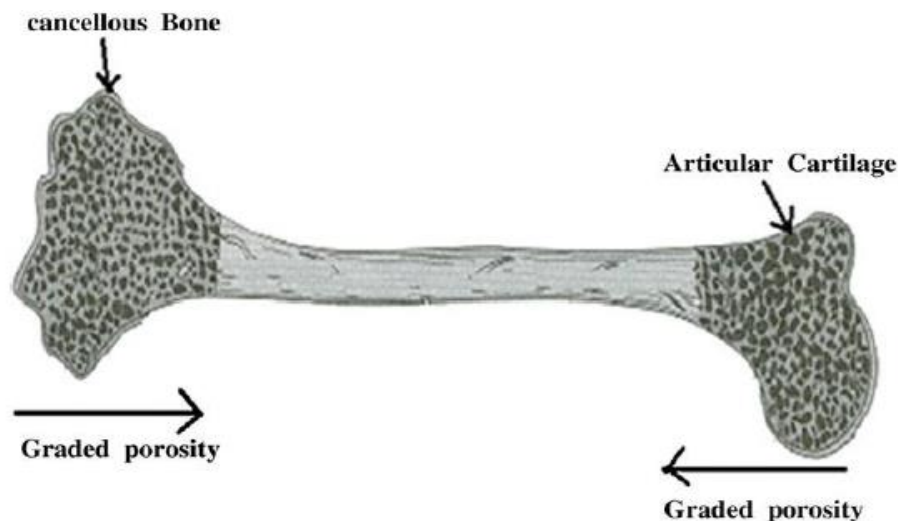


Figure I.7. Variation graduelle dans l'os humain[16]

- La surface de dents humaines est faite de matériel dur et résistant à l'usure, tandis que la partie interne est faite d'un matériau souple et doux qui aide à absorber le choc et aide à prolonger la vie de la partie extérieure dure. La transition de l'émail à dentine est fournie par des couches FGM intermédiaires, où la composition change progressivement d'un Matériau à l'autre. Ceci est la raison pour laquelle il y a un si haut intérêt de recherche dans la fabrication de plus d'implants médicaux comme des matériaux fonctionnellement gradués, parce qu'il a été découvert que les meilleures greffes sont souvent ceux qui se rapprochent le plus possible des tissus naturels[15]

I.5. Concept des matériaux FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc. Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas. En conséquence, les FGM [15] possèdent un certain nombre d'avantages excédant que les composés stratifiés, y compris une réduction potentielle

de contraintes membranaires et transversales à travers l'épaisseur, tendance d'efforts, absente ou sévèrement réduite de décollement, un effort résiduel amélioré, propriétés thermiques augmentées, une dureté plus élevée de rupture, et réduit facteurs d'intensité d'effort. [15]

I.6. Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel [10] [11]

Généralement les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

- Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure I.8 – a) ;
- 2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure I.8– b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z).

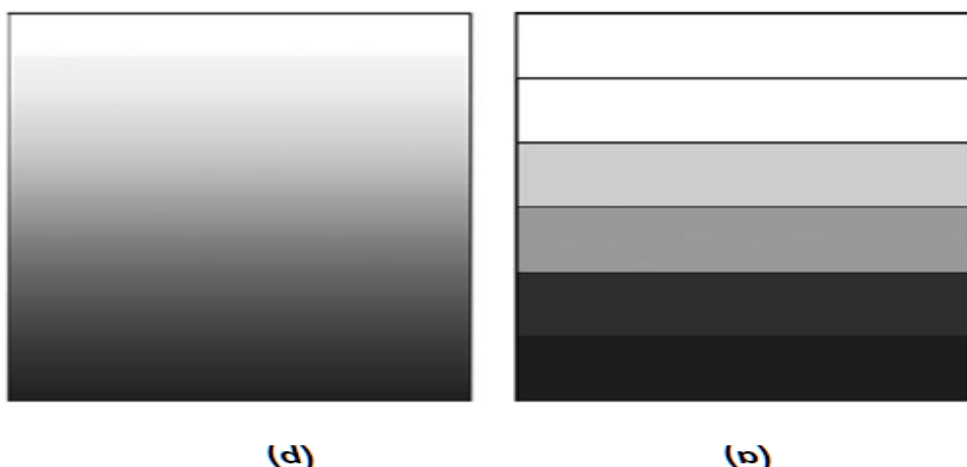


Figure I.8 : Modèle d'un FGM(b), en comparant avec un composite classique(a).

I.7.Composition chimique des matériaux à gradient évalué

C'est le type de matériaux fonctionnellement classés, où la composition chimique varie graduellement, en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait se faire sous la forme d'une seule phase, ou d'un matériau multi phase. Un FGM monophasé est produit lorsque le composite est produit en une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement pendant le processus de frittage. Le changement progressif dans la répartition des éléments chimiques en phase unique entraîne la formation du matériau à gradation fonctionnelle. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajouté à l'autre matériau serait soluble dans ce matériau sur une gamme de conditions de composition et de mélange. Un tel matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau à phase unique (mais avec une composition chimique variable) en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins fréquent. Les matériaux fonctionnellement classés les plus couramment utilisés sont ceux avec une composition chimique polyphasée [55,50]. Les phases et la composition chimique sont faites pour varier selon le volume en vrac du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui aideront à réaliser l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçu. Les différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication tels que le taux de refroidissement et le traitement thermique effectué sur ce matériau. Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM consiste à mettre la composition de poudre requise couche par couche, puis on procède à un compactage en poudre puis à un frittage. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront Chapitre II Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel «FGM» 19 pour former différents composés et phases chimiques. Ceux-ci varieront selon la position spatiale dans le matériau à gradation fonctionnelle

I.8.Matériaux à gradient fonctionnel de microstructure

Le matériau à gradient fonctionnel de microstructure est un autre type de FGM, où la microstructure est conçue de sorte que différentes microstructures sont produites dans le matériau, qui est amené à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation en microstructures peut être réalisée pendant le processus de solidification, de telle sorte que la surface de la matière est trempée, par exemple, lors de la

production d'une propriété de surface très dure du matériau. Le noyau du même matériau est autorisé à refroidir lentement, ce qui aiderait à produire des microstructures différentes de celles sur la surface du matériau vers la partie la plus interne. En outre, la gradation microstructurale peut être obtenue grâce à un processus de traitement thermique contrôlé. Par exemple, une microstructure variable peut être produite par un traitement thermique contrôlé d'une partie cylindrique en alliage de titane. On peut obtenir une microstructure à gradation fonctionnelle par d'abord permettre à un métal liquide, dont la température de fusion est inférieure à la température de fusion de l'alliage de titane, et de telle sorte que soit atteinte la température de recristallisation de l'alliage de titane lorsque ce métal fondu est exécuté dans un Chapitre Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel «FGM» 21 Type d'installation de l'échangeur de chaleur. Le métal liquide est autorisé à fonctionner pendant une certaine période de temps, puis retiré, puis la partie est autorisée à refroidir. La chaleur est transférée de la partie interne du cylindre à la partie externe. On s'attend à ce que la température de la partie la plus interne du cylindre soit beaucoup plus élevée que celle de la température la plus à l'extérieur

I.9: Types de FGM:

Au début du développement des matériaux à gradient de propriétés le concept consistait à supprimer l'interface pointue qui existait dans le matériau composite traditionnel et à la remplacer par l'interface qui se modifiait progressivement, ce qui se traduisait par une modification de la composition chimique de ce composite. A cet effet deux critères différents sont utilisés pour classer les matériaux fonctionnelle à gradient de propriétés. L'un est basé sur la structure du matériau et l'autre sur la taille des matériaux à gradient de propriétés manière Fonctionnelle. Comme le montre la figure I.8, les FGM peuvent être divisés en deux groupes Principaux basés sur la structure des matériaux: FGM structurée en continu et structurée de manière discontinue. Dans les FGM continues, il existe un gradient continu d'un matériau à l'autre. Cependant, en cas de FGM discontinue, le gradient de matière est fourni en couches. En fonction de la taille des matériaux, les FGM sont classées en deux types principaux: les FGM minces et les FGM massive. Les FGM minces ont des sections relativement minces, comme les revêtements de surface, tandis que les FGM massive constituent un volume complet de matériaux[15]

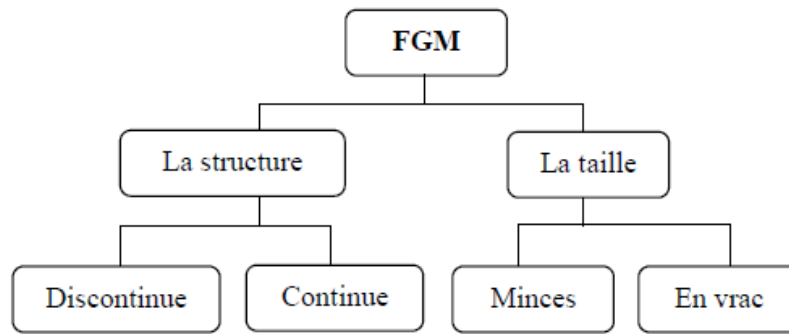


Figure I.9. Classification matériaux à gradient fonctionnel

I.9. Fabrication des FGM :

Les premières études sur les FGM portent sur leurs comportements, alors que les travaux sur les méthodes de fabrication de ce nouveau matériau ne prennent place dans ces recherches qu'après une décennie jusqu'à ce que la recherche systématique sur des processus de fabrication pour les matériaux à gradient de propriétés ait été effectuée dans le cadre d'un programme de recherche national sur FGM au Japon [Mortensen [14]]. Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau ou bien en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivantes s'attachent à les décrire et parlé de leurs utilisation dans l'industrie.

I.9.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support, ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés[11]

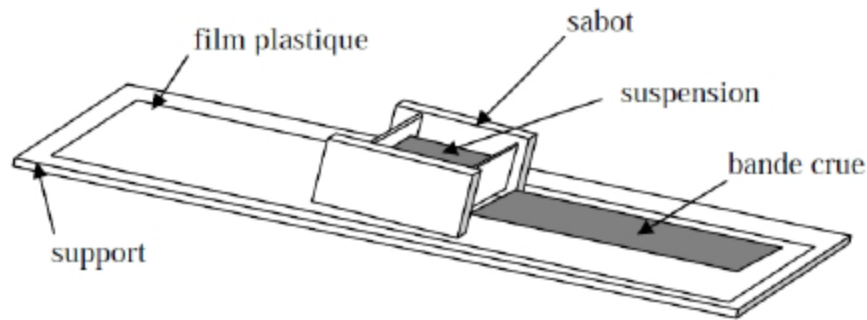


Figure I.9 Principe de la méthode coulage en bande.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression.

I.9.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique);
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

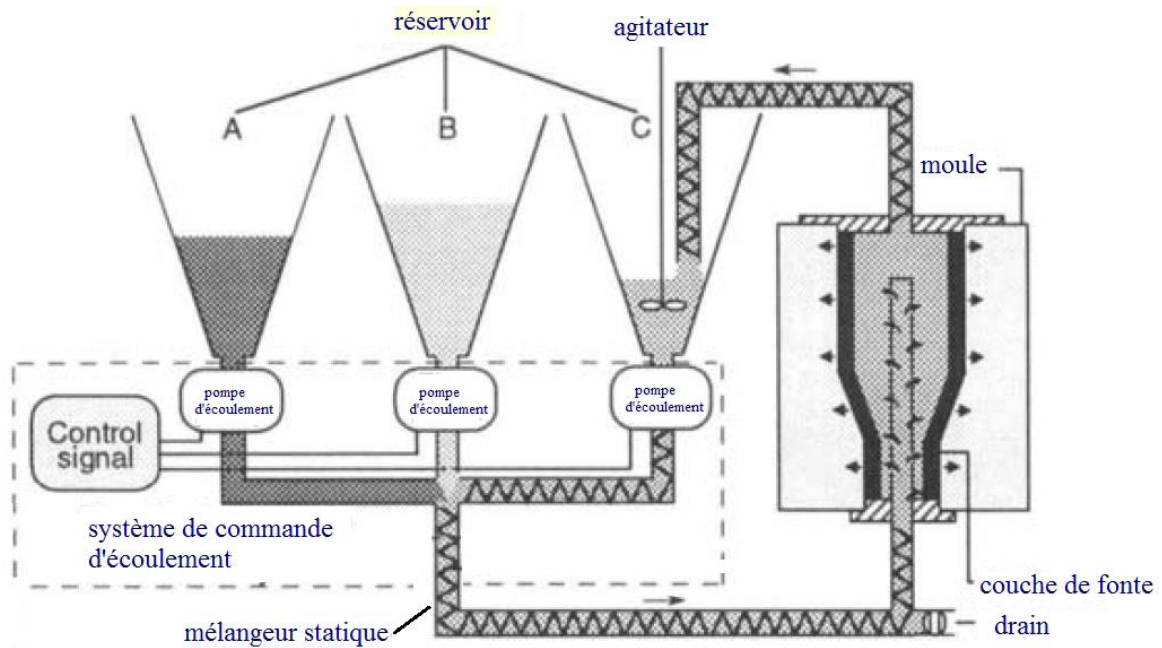


Figure I.10. Principe de la méthode coulage séquentiel en barbotine.

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches[10]

I.9.3 Compaction sèche des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délitage. La densification sera enfin l'étape finale. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle [12]

I.9. 4. Projection plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat [15]

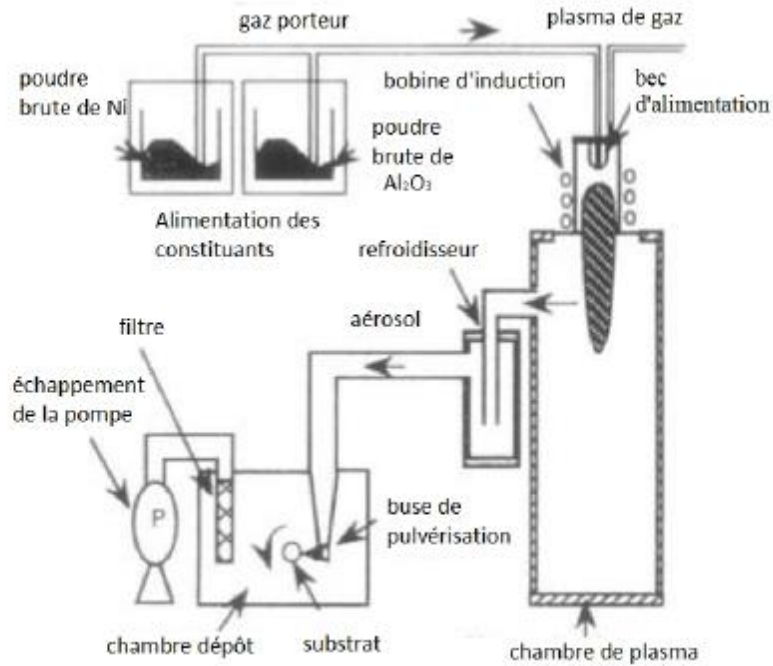


Figure I.11. Principe de la méthode projection plasma.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique .

I.9.5.Frittage et infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres. [14]

I.9.6. Conclusion :

Dans ce chapitre une synthèse sur les travaux connus dans la littérature des matériaux fonctionnellement gradués est illustrée. Un aperçu sur l'historique des matériaux FGM a été aussi présenté, ainsi que les différentes méthodes de fabrication. Enfin, les domaines d'application des FGM, à savoir : le génie civil, médecine,... etc. ont été présentés.

Chapitre II

Introduction aux Théories des Poutres

II.1. Introduction

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses: barres ou poutres, plaques et coques minces ou épaisses, parties massives. Les structures minces de type poutre, arc, plaque et coque sont très répandues dans le milieu naturel (feuilles d'arbres, mollusques, cellules vivantes, etc.) et dans les réalisations humaines les plus diverses (charpentes, voûtes, réservoirs, caissons, tabliers de ponts, carrosseries automobiles, coques de bateaux, ailes d'avions, etc.).

Pour chacun de ces constituants, on dispose de la formulation de la théorie de l'élasticité ou plasticité ou de modèles théoriques qui en sont dérivés (théorie des poutres, plaques et coques). L'analyse du comportement et la conception de ces structures sont des activités importantes sur les plans techniques et économiques.

Nous sommes intéressés uniquement, dans ce chapitre, à l'analyse vibratoire des structures de type « poutre ».

II.2.Définition d'une poutre

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisé pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses condition qu'elles respectent certaines conditions. Il est à noter que ce type d'élément appelé élément "barre" quand les forces extérieures sont axiales, et il est appelé "arbre" quand il est soumis à la torsion, ou quand il a un mouvement de rotation.

II.3.Conditions aux limites d'une poutre

Elles sont définies en considérant les quatre grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion qui représenté dans le tableau ci-dessous.

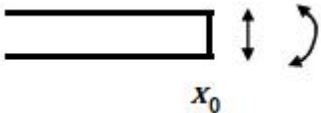
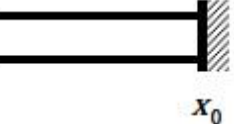

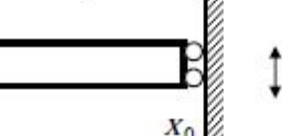
<p>Extrémité libre</p> 	<p>Pas de contraintes sur le déplacement et la rotation Le moment de flexion et la force cisaillement s'annulent</p>	$M(X_0, t) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial X^2}(X_0, t) = 0$ $M(X_0, t) = EI \frac{\delta^3 w}{\partial X^3}(X_0, t) = 0$
<p>Extrémité encastree</p> 	<p>Les déplacements transversal Et angulaires sont nuls en X_0</p>	$M(X_0, t) = 0$ $\theta(X_0, t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}; X_0 = 0$
<p>Extrémités simplement supportée X_0</p> 	<p>Le déplacement transversal est bloqué mais la rotation est libre Le moment de flexion est donc nul en X_0</p>	$M(X_0, t) = 0$ $M(X_0, t) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} = 0$ $X = X_0.$
<p>Extrémité guidée</p> 	<p>Le déplacement transversal Et libre et la rotation est bloqué la force cisaillement est donc nuls en X_0</p>	$\theta(X_0, t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0$ $M(X_0, t) = EI \frac{\delta^3 w}{\partial X^3}(X_0, t) = 0$ $X = X_0.$

Tableau II. 1. Principales conditions aux limites pour les poutres

II.4.Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres

- L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres [26] est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement".
- L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".
- L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.

- L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.

II.5.Modèle d'Euler Bernoulli (Classica IBeam Theory- CBT)

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire déflexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane. $U_{z,x}^0$

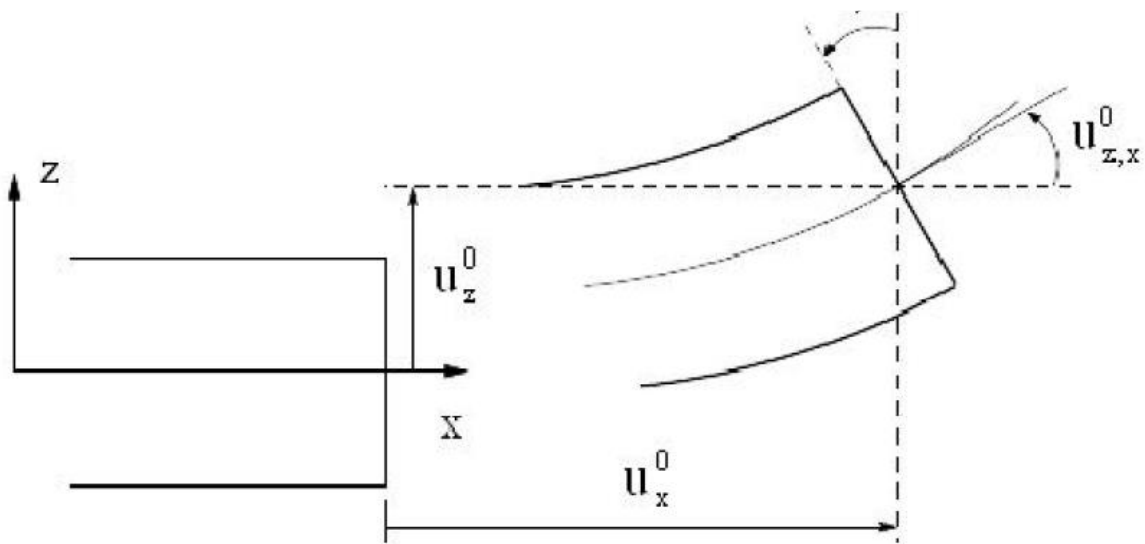


Figure II. 5.1.Cinématique d'Euler Bernoulli.

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CLBT), le déplacement d'un point « M » est donné par les deux composantes suivantes:

$$f(z) = 0$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CLBT), le déplacement d'un point « M » est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \left\{ \begin{array}{l} U(x, z) = U^0(x) - ZW_x^0(x) \\ W(x, z) = w^0(x) \end{array} \right\}$$

$U(x, z)$:représente le déplacement suivant X

$W(x, z)$: Le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$W_x^0(x) = \frac{\partial W^0}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$u^0(x)$ et $W^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z. Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale.

II.6.Modèle de Timoshenko (FSDBT)

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.6.1). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. [27]

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction $f(z)$ est égale à Z. Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

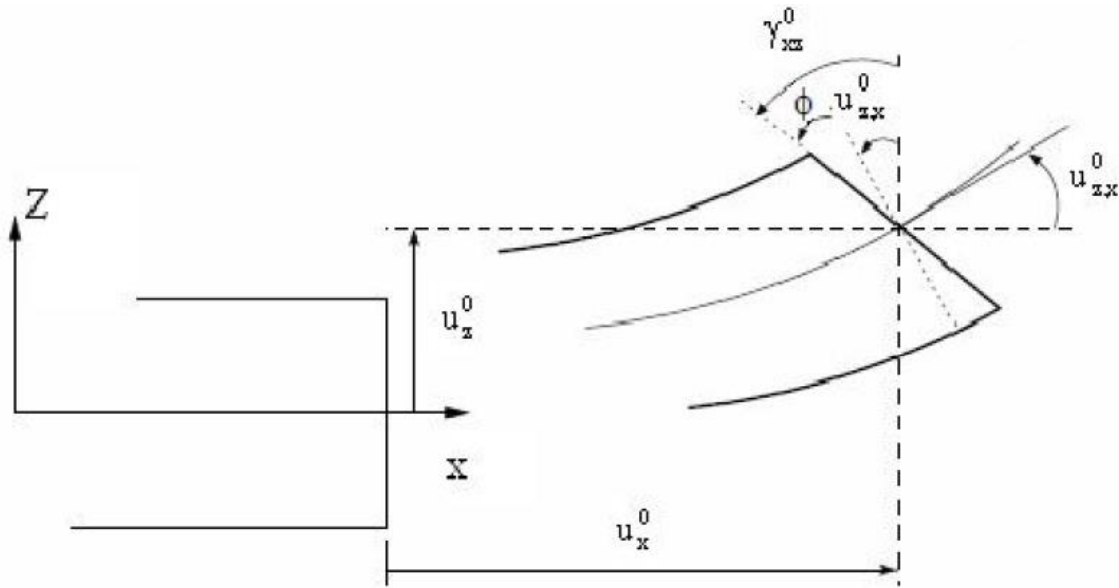


Figure II. 6.1 Cinématique de Timoshenko

D'après Timoshenko le déplacement s'écrit comme suit:

$$U(M) = \begin{cases} U(x, z) = U^0(x) - ZW_x^0(x) + Z\phi_x^0 \\ W(x, z) = w^0(x) \end{cases}$$

$$U(M) = \begin{cases} U(x, z) = U^0(x) + Z\gamma_{x,z}^0 \\ W(x, z) = w^0(x) \end{cases}$$

$\gamma_{x,z}^0$: C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre. Tel que

$$\gamma_{x,z}^0 = \phi^0(x) - w_x^0(x)$$

$\phi^0(x)$: C'est la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre. Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\begin{cases} \gamma_{x,z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = -w_x^0(x) + \gamma_{x,z}^0 + \phi^0(x) \\ \gamma_{x,z} = \gamma_{x,z}^0 \end{cases}$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{x,z} = G_{xz}\varphi'(x)$$

G_{xz} : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant. Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement. Cette contradiction mène à introduire un coefficient de correction ($k = 5/6$) pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par (Mindlin et Deresiewicz). « Cowper » et « Murty » ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient « k » pour différentes sections de la poutre.

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Le non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est "la théorie d'ordre élevé".

II.7 Théorie d'Ordre Elevé (HSDT)

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de " gauchissement ". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.7.1). La fonction $[f(z)]$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ le cisaillement.

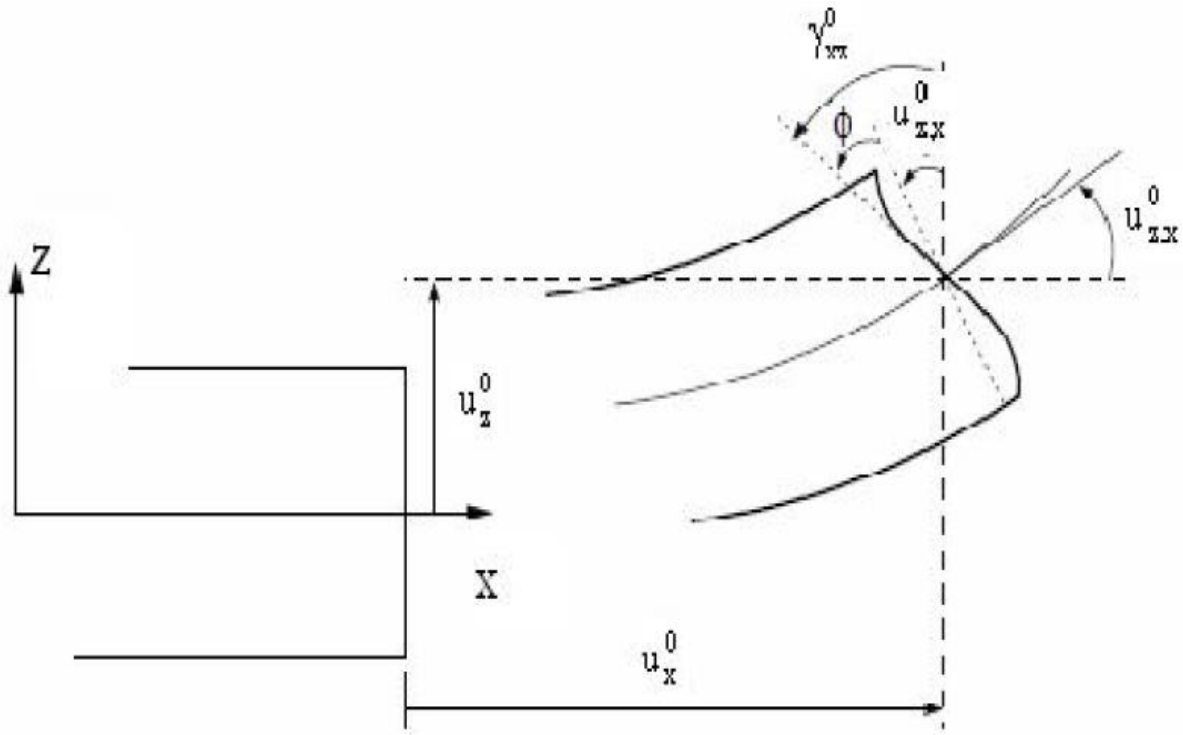


Figure II. 7.1 Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Ces théories sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses, où la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart des ces modèles utilisent un développement en série de Taylor [28], La précision augmente avec l'ordre de développement. Le champ de déplacement approché pour le troisième ordre, est de la forme [29]

$$u_0(x, z) = u_0 + z\psi(x) + z^2\zeta(x) + z^3\phi(x)$$

Pour introduire le phénomène de "gauchissement " il faut modifier le coefficient du terme cubique par une fonction (Z).

Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient:

$$U(M) = \begin{cases} U(x, z) = U^0(x) - ZW_x^0(x) + f(x)\varphi^0(x) \\ W(x, z) = w^0(x) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{x,z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = -w_x^0(x) + f'(z)\varphi^0(x) + w_x^0(x) \\ \gamma_{x,z} = f'(z)\varphi^0(x) \end{array} \right\}$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$f'(z)|_{z=\pm h/2} = 0$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition (III.13).

Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

- L'approche de [30]:

$$f(z) = \frac{1}{2}Z \left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{3}Z^3 \right)$$

- L'approche de [31]:

$$f(z) = \frac{5}{4}Z \left(1 - \frac{1}{3h^2}Z^3 \right)$$

- L'approche de [32]:

$$f(z) = z\alpha^{\frac{2z^2}{h^2}} \ln\alpha$$

- L'approche de [33]et [34]:

$$f(z) = Z \left(1 - \frac{1}{3h^2}Z^3 \right)$$

Dans le modèle de [35]le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal « w » est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

➤ L'approche de [36]:

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi}$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci dessous :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} = \frac{h}{\pi} \int_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= Z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots \right) \end{aligned}$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la

solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Récemment, [35] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = Z e^{\frac{z^2}{h^2}}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de [35] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

II.7 Conclusion

Dans cette partie de la thèse ; nous avons présenté des différents types des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).

On a présenté les différents modèles des poutres avec une approche monocouche. Le modèle monocouche équivalent est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Chapitre III

L'analyse du comportement statique des poutres en matériaux à gradient

III .1. Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des classes de composites qui ont une variation continue des propriétés matérielles d'une surface à une autre, ce qui conduit à éliminer la concentration des contraintes rencontrées dans les composites stratifiés. Les concepts des FGM ont été proposés par des chercheurs Japonais en 1984 . Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales , plusieurs études étaient faites sur FGM : Auciello et Ercolano, Banerjee, Civalek et Kiracioglu).Ce matériau (FGM) est largement utilisé dans plusieurs applications structurelles tels que; l'aéronautique, le nucléaire, le civil et l'automobile. Puisque les applications des ces nouveaux matériaux (FGM) ne cessent de ce développer, La poutre est considérée comme l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante dans la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines , ce qui a rendu nécessaire l'étude de leur comportement statique/dynamique. Les poutres sont utilisées comme composant structural dans plusieurs applications de construction et un grand nombre d'études peut être trouvé en littérature au sujet de la vibration transversale des poutres isotropes uniformes . Ouled Larbi a fait une Etude comparative des différentes théories à ordre élevé pour la vibration libre des poutres FGM .Plusieurs approches ont été développées pour établir une analyse appropriée des ces poutres en FGM. [39]

III .2. Modèle mathématique

Considérons une poutre rectangulaire en FGM (Fig. 1.2). Les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z lancé sur la surface moyenne de la poutre et dans la direction de l'épaisseur. [38]

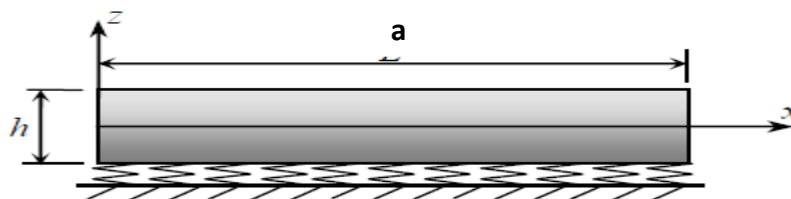


Fig.III. 1.2 Les coordonnées et la géométrie de la poutre FGM.

L'étude sera menée dans l'hypothèse des petites perturbations, les déplacements suivant les axes « x » et « z » d'un point arbitraire dans la poutre et noté respectivement par :

$u(x, z)$ et $w(x, z)$

La composante plane du déplacement $u(x, z)$ peut être dévisée en trois termes :

1. Le déplacement en membrane $u_0(x, z)$;

III.3. Champ de déplacement

Le déplacement du point à la cote z est :

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0 - Z \frac{\partial \omega_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \omega_s}{\partial x} \\ \omega(x, z) = \omega_b(x, z) + \omega_s(x, z) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où:

u : est le déplacement axial d'un point sur le plan médian de la poutre;

$u(x, z)$ et $\omega(x, z)$ sont des composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal d'un point sur le plan médian de la poutre, et $f(z)$ est une fonction de gauchissement qui détermine la distribution de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la poutre.

Les fonctions de gauchissement $f(z)$ sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites de contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, un facteur de correction de cisaillement n'est donc pas nécessaire.

III.4. Champ de déformation

Dans l'hypothèse des petites perturbations (petites déformations) le tenseur de déformations est s'écrit comme suit:

le champ des déformations en membrane-flexion:

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de l'équation (III.1) est donné par

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 \omega_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega_s}{\partial x} + \frac{\partial \omega_b}{\partial x} + \frac{\partial \omega_s}{\partial x} - \frac{\partial \omega_b}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

$$\gamma_{xz} = \left[1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right] \frac{\partial \omega_s}{\partial x} + \frac{\partial \omega_b}{\partial x} = g(z) \frac{\partial \omega_s}{\partial x}$$

Et écrire(III.2) à partir du formulaire(III.3) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 \omega_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x^2} \\ \gamma_{xz} = g(z) \frac{\partial \omega_s}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

ou hors de forme(III.4) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 - Z \varepsilon_{xx}^1 - f(z) \varepsilon_{xx}^2 \\ \gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^0 \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

III.5. Champ des contraintes

solide élastique est souvent caractérisé par une relation linéaire entre les tenseurs contraintes et déformations. Cette dépendance est appelée loi de Hooke :

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{III.5}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E(z)[\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{zz}] \\ \sigma_{zz} = E(z)[\varepsilon_{zz} + \nu \varepsilon_{xx}] \\ \tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (\gamma_{xz}) \end{cases} \quad \text{III.6}$$

Nous publions nous trouvons

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E(z)\varepsilon_{xx} + E(z)\nu \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} = E(z)\varepsilon_{zz} + E(z)\nu \varepsilon_{xx} \\ \tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (\gamma_{xz}) \end{cases} \quad \text{III.7}$$

Nous avons les constantes suivantes

$$\begin{aligned} C_{11} &= E(z) & C_{13} &= \nu E(z) \\ C_{55} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} & C_{33} &= C_{11} \end{aligned}$$

On en déduit la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 8})$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = C_{11} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 \omega_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x^2} \right] + C_{11} [0] \\ \sigma_{zz} = C_{11} [0] + C_{13} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 \omega_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x^2} \right] \\ \tau_{xz} = C_{55} g(z) \gamma_{xz}^0 = C_{55} g(z) \frac{\partial \omega_s}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{III. 9})$$

III.6. Les forces et les moment

$$N_{xx} = \int \sigma_{xx} dz \quad ; \quad N_{zz} = \int \sigma_{zz} g(z) dz$$

N_{xx} : L'effort normal au point x et z :

$$M_{xx} = \int z \sigma_{xx} dz \quad ; \quad P_{xx} = \int \sigma_{xx} f(z) dz$$

M_{xx} : Le moment au point x et z :

$$Q_{xz} = \int \tau_{xz} g(z) dz$$

III.7.Principe de Hamilton PTV

Le principe variationnel le plus généralement applicable est le principe de Hamilton, que l'on peut exprimer entre deux instants t_1 et t_2 , le mouvement d'un système conservatif s'effectue de telle sorte que[40]:

$$\iint \partial U_S + \partial U_f = 0 \quad (\text{III. 10})$$

∂U_S : énergie total de poutre

∂U_P : énergie de déformation du à la fondation élastique

$$\partial U_S = \iint_{A,Z} [\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dA dz - \int q(\delta \omega_b + \delta \omega_s) dA \quad (\text{III. 11})$$

$$\partial U_f = \int_A \left[K_\omega (\delta \omega_b + \delta \omega_s) + K_g \left(\frac{\partial \delta \omega_0^2}{\partial x} + \frac{\partial \delta \omega_s^2}{\partial x} \right) \right] dA \quad (\text{III. 12})$$

K_ω : rigidité de la fondation winkler

K_g : coefficients de winkler et pasternok

$$\begin{aligned} \partial U_S &= b \iint \sigma_{xx} [(\delta \varepsilon_{xx}^0 - Z \delta \varepsilon_{xx}^1 - f(z) \delta \varepsilon_{xx}^2) + \tau_{xz} [g(z) \gamma_{xz}^0]] dx dz \\ &= b \iint [(\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 - Z \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 - f(z) \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^2) + \tau_{xz} g(z) \gamma_{xz}^0] dx dz \end{aligned} \quad (\text{III. 13})$$

$$\partial U_S = b \left(\int [N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 - M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 - P_{xx} \varepsilon_{xx}^2 + \int Q_{xz} \gamma_{xz}^0] dx - \int q(\delta \omega_b + \delta \omega_s) dx \right)$$

$$= b \int N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 dx - b \int M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 dx - b \int P_{xx} \varepsilon_{xx}^2 dx + b \int Q_{xz} \gamma_{xz}^0 dx - b \int q(\delta \omega_b + \delta \omega_s) dx \quad (\text{III. 15})$$

$$\partial U_f = b \int_A \left[K_\omega (\delta \omega_b + \delta \omega_s) + K_g \left(\frac{\partial \delta \omega_0^2}{\partial x} + \frac{\partial \delta \omega_s^2}{\partial x} \right) \right] dx \quad (\text{III. 16})$$

Intégration par partie $UV' = UV - \int UV' dx$

$$[N_{xx}; M_{xx}; P_{xx}] = \int [1; Z; f(z)] \sigma_{xx} dz$$

$$Q_{xz} = \int \tau_{xz} g(z) dz$$

$$\int N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 dx \longrightarrow \int N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} dx \longrightarrow N_{xx} u_0 - \int \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u_0 dx \dots \dots \dots (III. 17)$$

$$\int M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 dx \longrightarrow \int M_{xx} \frac{\partial^2 \delta \omega_b}{\partial x^2} dx \longrightarrow M_{xx} \frac{\partial \delta \omega_b}{\partial x^2} - \int \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_b}{\partial x} dx \longrightarrow$$

$$- \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \delta \omega_b - \int \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \delta \omega_b dx \dots \dots \dots (III. 18)$$

$$\int P_{xx} \varepsilon_{xx}^2 dx \longrightarrow \int P_{xx} \frac{\partial^2 \delta \omega_s}{\partial x^2} dx \longrightarrow P_{xx} \frac{\partial \delta \omega_s}{\partial x^2} - \int \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_s}{\partial x} dx \longrightarrow$$

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} \delta \omega_s - \int \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} \delta \omega_s dx \dots \dots \dots (III. 19)$$

$$\int Q_{xz} \gamma_{xz}^0 dx \longrightarrow \int Q_{xz} \frac{\partial \delta \omega_s}{\partial x} dx \longrightarrow Q_{xz} \delta \omega_s - \int \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \delta \omega_s dx \dots \dots \dots (III. 20)$$

$$- \int q \delta \omega_b - \int q \delta \omega_s \dots \dots \dots (III. 21)$$

En différenciant l'équation (III. 17) et (III. 18) et (III. 19) et (III. 20) et (III. 21)

$$\delta u_0 = - \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = 0 \quad \delta \omega_b = \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - q = 0$$

$$\delta \omega_s = \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - q = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots 1 \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = q \dots \dots \dots 2 \\ \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} = q \dots \dots \dots 3 \end{array} \right. \quad (III. 22)$$

Maintenant, nous calculons chaque équation séparément

- Equation1

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = ??$$

$$N_{xx} = \int \sigma_{xx} dz = \int (C_{11} \varepsilon_{xx} + C_{13} \varepsilon_{zz}) dz = \int \left[C_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 \omega_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x^2} \right) \right] dz$$

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = \int \left[C_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - Z \frac{\partial^3 \omega_b}{\partial x^3} - f(z) \frac{\partial^3 \omega_s}{\partial x^3} \right) \right] dz$$

$$A_{11} = \int C_{11} B_{11} = \int C_{11} Z dz D_{11} = \int C_{11} f(z) dz$$

Remplacer dans l'équation 1 – (III. 22)

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 \omega_b}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^3 \omega_s}{\partial x^3} \dots \dots \dots (III. 23)$$

- Equation2

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - q = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = ??$$

$$M_{xx} = \int \sigma_{xx} Z dz = \int (C_{11} \varepsilon_{xx} + C_{13} \varepsilon_{zz}) Z dz = \int \left[C_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 \omega_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x^2} \right) Z \right] dz$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = \int \left[\left(C_{11} Z \frac{\partial u_0}{\partial x} - C_{11} Z^2 \frac{\partial^2 \omega_b}{\partial x^2} - C_{11} Z f(z) \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x^2} \right) \right] dz$$

$$B_{11} = \int C_{11} Z dz \quad F_{11} = \int C_{11} Z^2 dz \quad H_{11} = \int C_{11} Z f(z) dz$$

Remplacer dans l'équation 2 – (III. 22)

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - F_{11} \frac{\partial^4 \omega_b}{\partial x^4} - H_{11} \frac{\partial^4 \omega_s}{\partial x^4} \dots \dots \dots \text{(III. 24)}$$

- Equation3

$$\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - q = 0$$

$$\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} = ??$$

$$P_{xx} = \int \sigma_{xx} f(z) dz = \int (C_{11} \varepsilon_{xx} + C_{13} \varepsilon_{zz}) f(z) dz = \int \left[\left(C_{11} f(z) \frac{\partial u_0}{\partial x} - f(z) C_{11} Z \frac{\partial^2 \omega_b}{\partial x^2} - C_{11} f(z)^2 \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x^2} \right) \right] dz$$

$$H_{11} = \int C_{11} Z f(z) dD_{11} = \int C_{11} f(z) A_{66} = \int C_{11} f(z)^2 dz$$

Remplacer dans l'équation 3 – (III. 22)

$$\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} = D_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - H_{11} \frac{\partial^4 \omega_b}{\partial x^4} - A_{66} \frac{\partial^4 \omega_s}{\partial x^4} \dots \dots \dots \text{(III. 25)}$$

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} = ??$$

$$Q_{xz} = \int \tau_{xz} g(z) dz = \int C_{55} [g(z) \gamma_{xz}^0] dz = \int C_{55} g(z) \gamma_{xz}^0 dz$$

$$R_{55} = \int C_{55} g(z) dz$$

Chapitre VI

Résultats-et-Discussions

VI.1. Résultats et discussions

Des nombreux exemples numériques sont fournis et discutés pour vérifier la précision et l'efficacité de la théorie utilisée avec la fonction de gauchissement pour l'analyse du comportement statique d'une poutre en FGM simplement appuyée.

Pour illustrer cette analyse, une poutre rectangulaire en FG (céramique-métal) est considérée et le matériau proposé se compose d'aluminium et d'alumine. Le module d'élasticité, le coefficient de Poisson pour l'aluminium et l'alumine sont présentés dans le tableau 1 ci-dessous. Pour la simplification, le coefficient de Poisson est le même pour les deux. [47]

Matériaux	Ec (GPa)	Y
Alumine, Al ₂ O ₃	380	0.3
Aluminium, Al	70	0.3

Tableaux VI .1: Les propriétés des matériaux utilisés dans cette étude

Les paramètres adimensionnels utilisés dans cette étude :

$$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 a^3} w \left(\frac{a}{2} \right); \bar{\mu} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 a^3} \mu \left(0; -\frac{h}{2}; \right); \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x \left(\frac{a}{2}; \frac{h}{2}; \right); \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz} (0; 0);$$

$$\bar{w} = \frac{w L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

VI.2. Résultats et discussion

VI.2.1. Etudes comparatives

Tableaux VI .2 et Tableaux VI .3 contient les déplacements et les contraintes non dimensionnels des poutres FG sous une charge uniforme q_0 pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et du rapport portée/profondeur a/h . Les résultats obtenus sont comparés aux solutions analytiques données par On peut observer que nos résultats sont en excellent accord avec ceux prédits en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur [42][43][44][49].

k	Méthode	$a/h=20$		
		\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Li et al 2010[49]	2.8962	15.0130	0.7500
	Latifa OuldLarb[46]	2.8962	15.0136	0.7625
	PRESENT	2.8962	15.0129	0.7423
0.5	Li et al 2010 [49]	4.4645	19.7005	0.7676
	Latifa OuldLarb[46]	4.4644	19.7013	0.7795
	PRESENT	4.4644	19.7003	0.7594
1	Li et al 2010[49]	5.8049	23.2054	0.7500
	Latifa OuldLarb[46]	5.8049	23.2063	0.7625
	PRESENT	5.8049	23.2050	0.7423
2	Li et al 2010 Latifa OuldLarb[49]	7.4415	27.0989	0.6787
	Latifa OuldLarb Latifa OuldLarb[46]	7.4421	27.1005	0.7005
	PRESENT	7.4420	27.0988	0.6794
5	Li et al 2010 Latifa OuldLarb[49]	8.8151	31.8112	0.5790
	Latifa OuldLarb Latifa OuldLarb[46]	8.8186	31.8151	0.6218
	PRESENT	8.8181	31.8126	0.5987
10	Li et al 2010 Latifa OuldLarb[49]	9.6879	38.1372	0.6436
	Latifa OuldLarb Latifa OuldLarb[46]	9.6907	38.1408	0.6788
	PRESENT	9.6904	38.1383	0.6562

VI .2. : Les deformations et les constraints non dimensionnelles des pouters FGM sous une charge uniform q pour differences valeurs de l'indice de loi de puissance k [46][49]

k	Méthode	$L/h=5$		
		\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Li et al 2010[49]	3.1657	3.8020	0.7500
	Latifa OuldLarb[46]	3.1651	3.8043	0.7489
	PRESENT	3.1653	3.8014	0.7302
0.5	Li et al 2010[49]	4.8292	4.9925	0.7676
	Latifa OuldLarb[46]	4.8282	4.9956	0.7660
	PRESENT	4.8285	4.9916	0.7474
1	Li et al 2010[49]	6.2599	5.8837	0.7500
	Latifa OuldLarb[46]	6.2590	5.8875	0.7489
	PRESENT	6.2594	5.8827	0.7302
2	Li et al 2010[49]	8.0602	6.8812	0.6787
	Latifa OuldLarb[46]	8.0683	6.8878	0.6870
	PRESENT	8.0674	6.8813	0.6674
5	Li et al 2010[49]	9.7802	8.1030	0.5790
	Latifa OuldLarb[46]	9.8345	8.1187	0.6084
	PRESENT	9.8262	8.1085	0.5869
10	Li et al 2010[49]	10.8979	9.7063	0.6436
	Latifa OuldLarb[46]	10.9413	9.7203	0.6640
	PRESENT	10.9370	9.7101	0.6431

Tableaux VI .3: Les déviations et les contraintes non dimensionnelles des poutres FGM sous une charge uniforme q pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k [46][49]

VI.2.2. Etudes paramétrique

Le tableau VI .4 présente la comparaison des résultats numériques de la théorie utilisée non dimensionnels de la déflexion à mi-portée d'une poutre FG sur fondations élastiques sous une charge uniforme en utilisant la fonction de gauchissement MODEL [42]), avec les résultats obtenus de la littérature [45] et, on remarque d'une bonne adéquation entre les résultats comparés pour les différentes valeurs des paramètres K_w , K_g de la fondation élastique pour deux types des poutres en portée de $a/h = 20$ et $L/h = 05$

Paramètres de la fondation		a/h = 20				a/h = 5			
Kw	Kg	AitAtmane et al; (2015) [45]	Ying et al. (2008) [47]	Chen et al. (2004) [48]	Présent	AitAtmane et al; (2015)	Ying et al. (2008)	Chen et al. (2004)	Présent
0	0	1.30226	1.31527	1.31528	1.31613	1.31338	1.42024	1.420261	1.428500
	10	0.65329	0.64830	0.64835	0.64802	0.72171	0.67451	0.678202	0.676216
	25	0.37968	0.36735	0.36742	0.36702	0.48428	0.37667	0.381703	0.377178
10	0	1.18173	1.19134	1.19140	1.19188	1.20032	1.27731	1.282598	1.284012
	10	0.62233	0.61649	0.61656	0.61619	0.69452	0.64025	0.646391	0.641785
	25	0.36944	0.35684	0.35692	0.35652	0.47554	0.36568	0.372064	0.366179
20	0	0.64864	0.64343	0.64377	0.64314	0.71779	0.66848	0.696100	0.670415
	10	0.43801	0.42716	0.42741	0.42681	0.53449	0.43881	0.459267	0.439592
	25	0.29812	0.28360	0.28380	0.28331	0.41489	0.28944	0.305161	0.290002

Tableaux VI .4. Comparaisons de la déflexion à mi-portée $w(a/2)$ d'une poutre FGM sur fondations élastiques sous une charge uniforme (MODEL 1). [45]

Tableaux VI .(5, 6 et 7) montrent une étude paramétrique des résultats numériques obtenus de la théorie utilisée non dimensionnels de la flèche, des déplacements horizontaux, des contraintes axiales et tangentielles de poutre FG soumise à une charge uniforme q_0 pour deux types de poutres selon le rapport a/h , variation de l'indice matériel k et le paramètre de la fondation élastique winkler (k_w) pour les trois modèles des fonctions $f(z)$ utilisées.

Les paramètres de fondation élastique sont présenté sous la forme non dimensionnelle tel que

$$\overline{Kw} = \frac{Kw.D_0}{b^4} \quad ; \quad \overline{kg} = \frac{Kg.D_0}{b^2} \quad ; \quad D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

(Kw,Kg)	MODEL 1	k	a/h=5				a/h=20			
			\bar{w}	\bar{u}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$	\bar{w}	\bar{u}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
(50,0)	$\xi=0$	0	3.1026	0.9177	3.7165	0.6213	2.8491	0.2268	14.7602	0.6265
		0.5	4.6915	1.6080	4.8329	0.6343	4.3539	0.3986	19.1962	0.6393
		1	6.0341	2.2168	5.6489	0.6135	5.6196	0.5506	22.4405	0.6184
		2	7.6918	2.9682	6.5375	0.5452	7.1398	0.7384	25.9655	0.5499
		5	9.2410	3.5004	7.6191	0.4580	8.3945	0.8704	30.2471	0.4624

Chapitre VI : Résultats-et-Discussions

	$x=a/\xi$	10	10.2396	3.64141	9.0753	0.5090	9.1825	0.9046	36.0886	0.5138
		0	3.0494	0.9021	3.6503	0.6136	2.8039	0.2232	14.5195	0.6185
		0.5	4.5706	1.5672	4.7040	0.6223	4.2492	0.3892	18.7217	0.6270
		1	5.8355	2.1450	5.4565	0.5986	5.4465	0.5340	21.7294	0.6032
		2	7.3723	2.8467	6.2559	0.5286	6.8626	0.7103	24.9283	0.5329
		5	8.7854	3.3296	7.2277	0.4420	8.0139	0.8317	28.8357	0.4457
		10	9.6849	3.4455	8.5611	0.4899	8.7289	0.8608	34.2540	0.7981
(100,0)	$\xi=0$	0	3.0494	0.9021	3.6503	0.6136	2.8039	0.2232	14.5195	0.6185
		0.5	4.5706	1.5672	4.7040	0.6223	4.2492	0.3892	18.7217	0.6270
		1	5.8355	2.1450	5.4565	0.5986	5.4465	0.5340	21.7294	0.6032
		2	7.3723	2.8467	6.2559	0.5286	6.8626	0.7103	24.9283	0.5329
		5	8.7854	3.3296	7.2277	0.4420	8.0139	0.8317	28.8357	0.4457
		10	9.6849	3.4455	8.5611	0.4899	8.7289	0.8608	34.2540	0.7981
	$x=a/\xi$	0	2.9482	0.8726	3.5247	0.5988	2.7177	0.2165	14.0603	0.6033
		0.5	4.3466	1.4916	4.4651	0.6000	4.0543	0.3717	17.8379	0.6040
		1	5.4751	2.0146	5.1071	0.5716	5.1302	0.5036	20.4305	0.5753
		2	6.8064	2.6314	5.7574	0.4993	6.3679	0.6601	23.0774	0.5024
		5	7.9965	3.0336	6.5497	0.4145	7.3472	0.7639	26.3638	0.4164
		10	8.7377	3.1108	7.6824	0.4574	7.9437	0.7849	31.0779	0.4587

Tableaux VI .5.La flèche, les déplacements, Les contraintes axiales et tangentielles de la poutre FGM sous charge uniforme, avec l'effet de la fondation élastique Linéaire (MODEL 1)

(Kw,Kg)	MODEL 2	k	a/h =5				a/h = 20			
			\bar{w}	\bar{u}	σ_x^-	σ_{xz}^-	\bar{w}	\bar{u}	σ_x^-	σ_{xz}^-
(50,0)	$\xi=0$	0	3.1101	0.9234	3.7325	0.7211	2.8495	0.2269	14.7642	0.7327
		0.5	4.7009	1.6161	4.8548	0.7331	4.3545	0.3988	19.2017	0.7443
		1	6.0466	2.2262	5.6753	0.7121	5.6204	0.5508	22.4471	0.7233
		2	7.7178	2.9792	6.5717	0.6465	7.1414	0.7386	25.9740	0.6573
		5	9.3162	3.5177	7.6683	0.5659	8.3991	0.8707	30.2593	0.5758
		10	10.3114	3.6636	9.1268	0.6184	9.1868	0.9049	36.1013	0.6288

Chapitre VI : Résultats-et-Discussions

	$x=a/\xi$	0	3.0568	0.9077	3.6659	0.7123	2.8043	0.2233	14.5234	0.7234
		0.5	4.5799	1.5751	4.7251	0.7195	4.2498	0.3894	18.7270	0.7299
		1	5.8477	2.1540	5.4816	0.6952	5.4472	0.5341	21.7356	0.7054
		2	7.3971	2.8570	6.2877	0.6275	6.8641	0.7104	24.9362	0.6368
		5	8.8564	3.3450	7.2713	0.5471	8.0181	0.8320	28.8464	0.5550
		10	9.7535	3.4656	8.6062	0.5965	8.7328	0.8611	34.2650	0.6041
(100,0)	$\xi=0$	0	3.1101	0.9234	3.7325	0.7211	2.8043	0.2233	14.5234	0.7234
		0.5	4.7009	1.6161	4.8548	0.7331	4.2498	0.3894	18.7270	0.7299
		1	5.8477	2.1540	5.4816	0.6952	5.4472	0.5341	21.7356	0.7054
		2	7.3971	2.8570	6.2877	0.6275	6.8641	0.7104	24.9362	0.6368
		5	8.8564	3.3450	7.2713	0.5471	8.0181	0.8320	28.8464	0.5550
		10	9.7535	3.4656	8.6062	0.5965	8.7328	0.8611	34.2650	0.6041
	$x=a/\xi$	0	2.9555	0.8780	3.5394	0.6957	2.7181	0.2166	14.0640	0.7056
		0.5	4.3556	1.4990	4.4845	0.6943	2.7181	0.2166	14.0640	0.7056
		1	5.4866	2.0229	5.1298	0.6646	5.1309	0.5037	20.4361	0.6728
		2	6.8292	2.6404	5.7848	0.5937	6.3692	0.6602	23.0841	0.6004
		5	8.0603	3.0457	6.5838	0.5148	7.3507	0.7641	26.3721	0.5186
		10	8.8008	3.1271	7.7166	0.5595	7.9469	0.7851	31.0863	0.5614

Tableaux VI .6 :La flèche, les déplacements, Les contraintes axiales et tangentielles de la poutre FGM sous charge uniforme, avec l'effet de la fondation élastique Linéaire (MODEL 2)

(Kw,Kg)	MODEL HBT	k	a/h=5				a/h = 20			
			\bar{w}	\bar{u}	σ_x^-	σ_{xz}^-	\bar{w}	\bar{u}	σ_x^-	σ_{xz}^-
(50,0)	$\xi=0$	0	3.1630	0.9260	3.7432	0.8338	2.8497	0.2269	14.7644	0.7398
		0.5	4.8011	1.6210	4.8751	0.8952	4.3548	0.3988	19.2020	0.7535
		1	6.2144	2.2334	5.7078	0.9258	5.6209	0.5508	22.4475	0.7344
		2	8.0973	2.9916	6.6393	0.9698	7.1424	0.7386	25.9748	0.6714
		5	10.9639	3.5630	7.9196	1.3341	8.4017	0.8707	30.2610	0.5963
		10	14.5661	3.7823	9.6698	2.3784	9.1908	0.9050	36.1035	0.6564
	$x=a/\xi$	0	3.1830	0.9134	3.6890	0.9831	2.8047	0.2233	14.5237	0.7363
		0.5	4.8403	1.5856	4.7714	1.1477	4.2504	0.3894	18.7275	0.7471

(100,0)		1	6.3425	2.1694	5.5640	1.3401	5.4481	0.5341	21.7363	0.7262
		2	9.1692	2.8870	6.5514	2.1826	6.8659	0.7104	24.9373	0.6636
		5	4.1354	3.3038	6.7076	1.7231	8.0229	0.8320	28.8487	0.5943
		10	6.5877	3.4390	8.3313	1.7541	8.7403	0.8611	34.2675	0.6580
	$\xi=0$	0	3.1830	0.9134	3.6890	0.9831	2.8047	0.2233	14.5237	0.7363
		0.5	4.8403	1.5856	4.7714	1.1477	4.2504	0.3894	18.7275	0.7471
		1	6.3425	2.1694	5.5640	1.3401	5.4481	0.5341	21.7363	0.7262
		2	9.1692	2.8870	6.5514	2.1826	6.8659	0.7104	24.9373	0.6636
		5	4.1354	3.3038	6.7076	1.7231	8.0229	0.8320	28.8487	0.5943
		10	6.5877	3.4390	8.3313	1.7541	8.7403	0.8611	34.2675	0.6580
	$x=a/\xi$	0	3.3941	0.8937	3.6040	1.6585	2.7188	0.2166	14.0644	0.7301
		0.5	6.0661	1.5402	4.7137	3.6129	4.0559	0.3718	17.8433	0.7357
		1	-1.3687	1.9648	4.3273	8.6962	5.1326	0.5037	20.4370	0.7123
2		5.3110	2.6618	5.6418	0.8135	6.3724	0.6602	23.0853	0.6514	
5		6.7352	3.0835	6.5037	0.1526	7.3596	0.7641	26.3736	0.5960	
10		7.3846	3.1705	7.6942	0.0667	7.9608	0.7851	31.0856	0.6700	

Tableaux VI .7 La flèche, les déplacements, Les contraintes axiales et tangentielles de la poutre FGM sous charge uniforme, avec l'effet de la fondation élastique Linéaire (MODEL HBT)

Les figures.VI (2, 3 et 4) montrent respectivement les contraintes axiales σ_x , le déplacement axial u et les contraintes transversales de cisaillement σ_{xz} à travers l'épaisseur de la poutre FG avec l'effet de la fondation élastique Linéaire.

Une comparaison entre les fonctions de gauchissement hyperbolique présentées par les modèles 1, 2 et 3 est également montrée dans ces figures pour différentes valeurs de l'indice matérielk où il varie entre 0, 5 et ∞ . On peut voir qu'il existe une bonne corrélation de l'allure des courbes entre les trois modèles utilisés des fonctions de gauchissement.

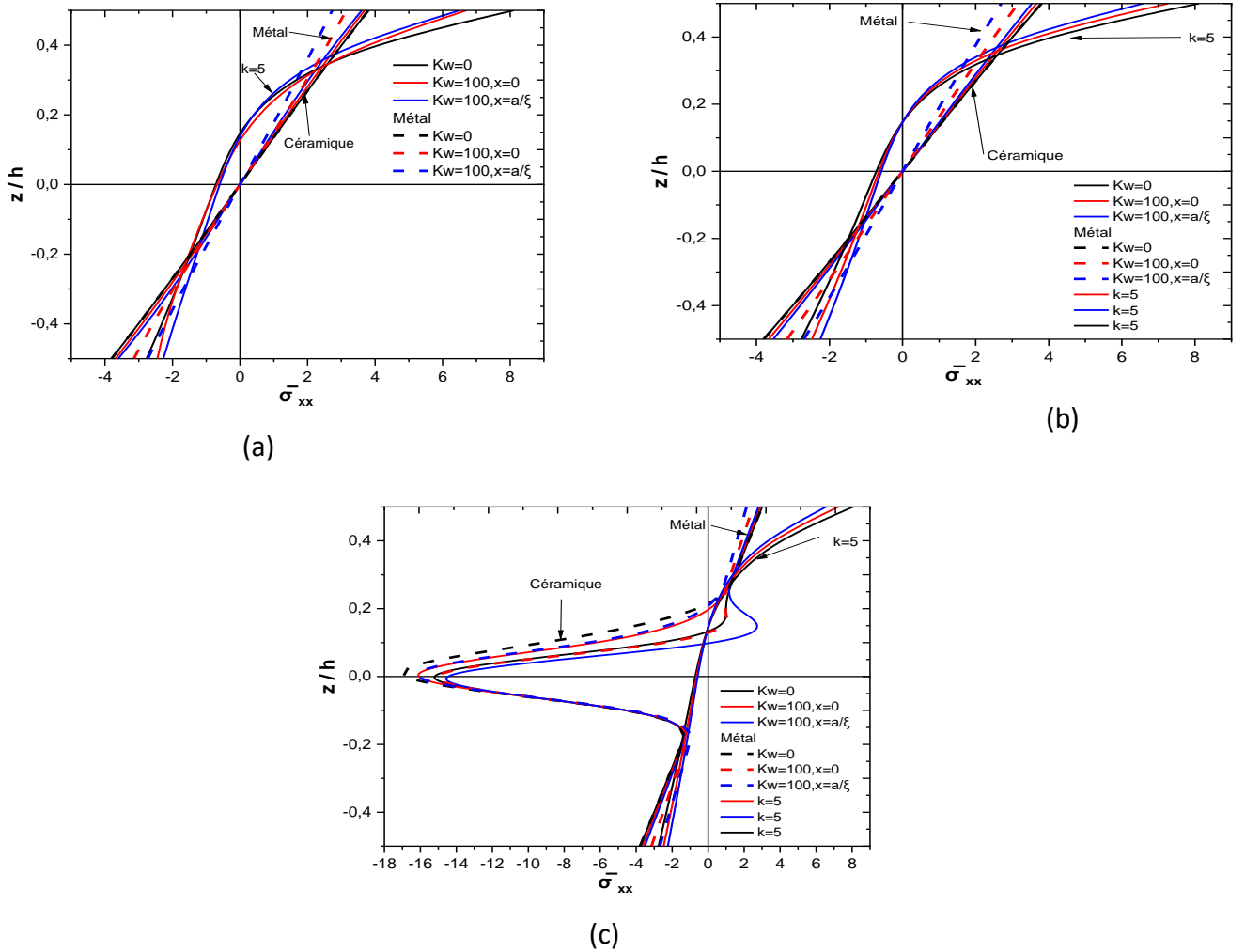
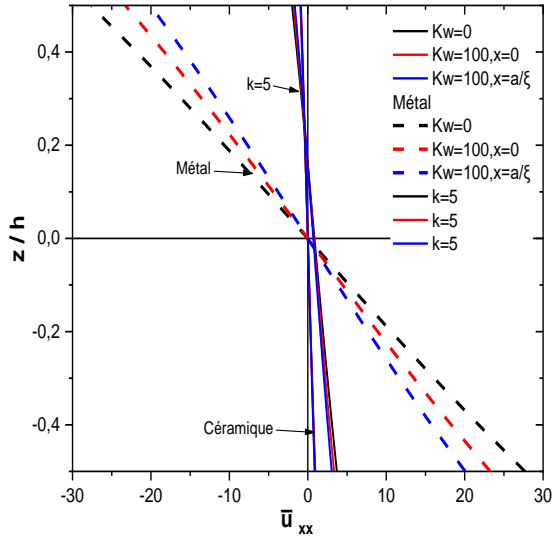
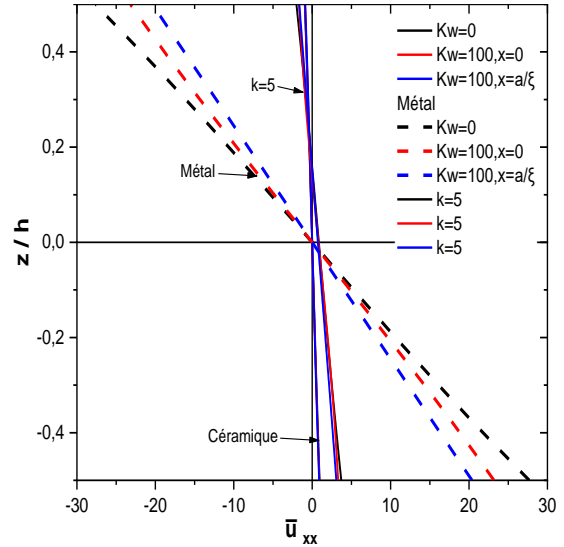


Fig.VI. 1. Comparaison la Variation de contrainte axiale adimensionnelle σ_{xx} ($a/2, x$) à travers l'épaisseur de la poutre FG avec l'effet de la fondation élastique Linéaire $K_w=(0,100)$ et ($k = 0, 5, \text{inf}$)

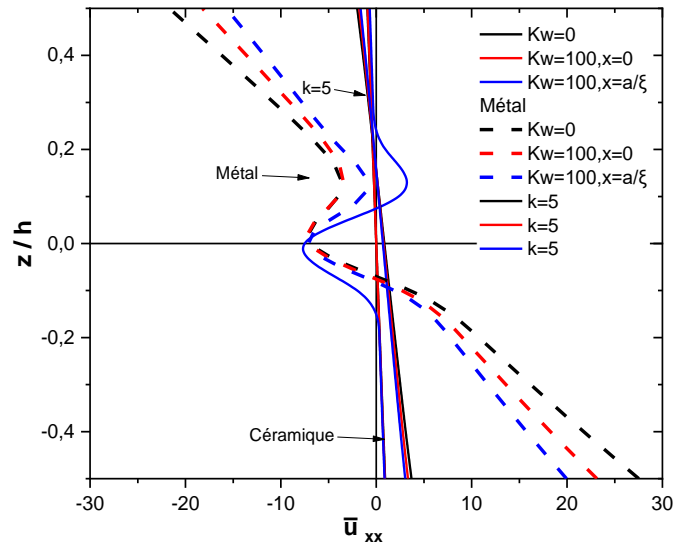
(a) Model 1 (HSDBT), (b) Model 2 (HSDBT), (c) (HBT)



(b)



(c)



(a)

Fig.VI. 2. Comparaison de la Variation de déplacement $U_{xx}(0, Z)$ à travers l'épaisseur de la poutre FGM avec l'effet de la fondation élastique Linéaire $K_w=(0,100)$ et $(k = 0, 5, \text{inf})$

(a) Model 1 (HSDBT), (b) Model 2 (HSDBT), (c) (HBT)

(b)

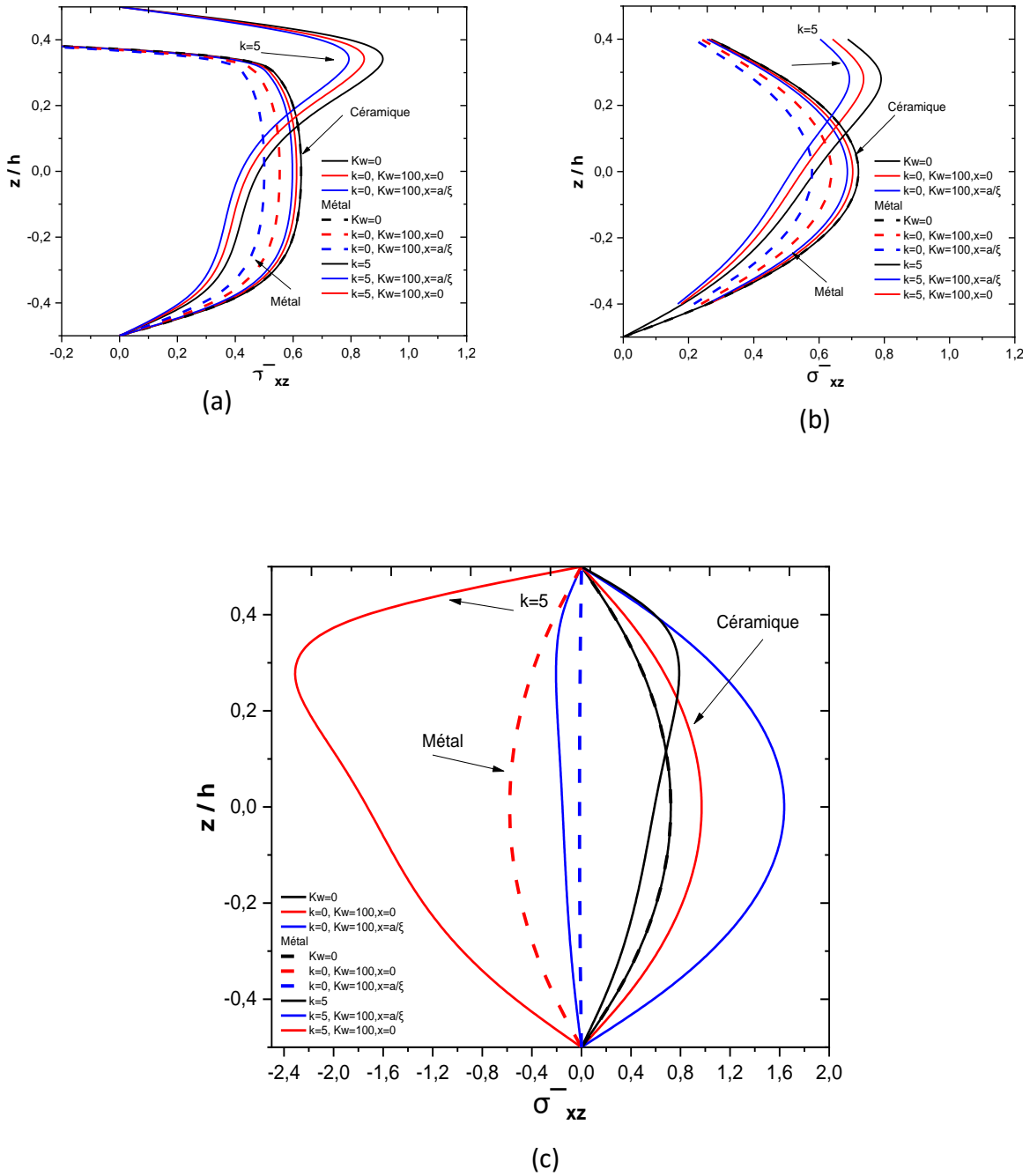


Fig.VI. 3. . comparaison la Variation dimensionnelle de la contrainte de cisaillement $\sigma_{xz}^-(0, z)$ à travers l'épaisseur de la poutre FGM avec l'effet de la fondation élastique Linéaire

Fig.VI. 4 montrent l'effet de l'indice matériel k sur la réponse de la flèche « w » de la poutre FG soumis à une charge uniformément répartie reposée sur une fondation élastique « $Kw=100$ », les graphs montrent une bonne adéquation des courbes des trois modèles utilisés

de la fonction de gauchissement pour chaque cas de variation de l'indice k en fonction du rapport géométrique a/h .

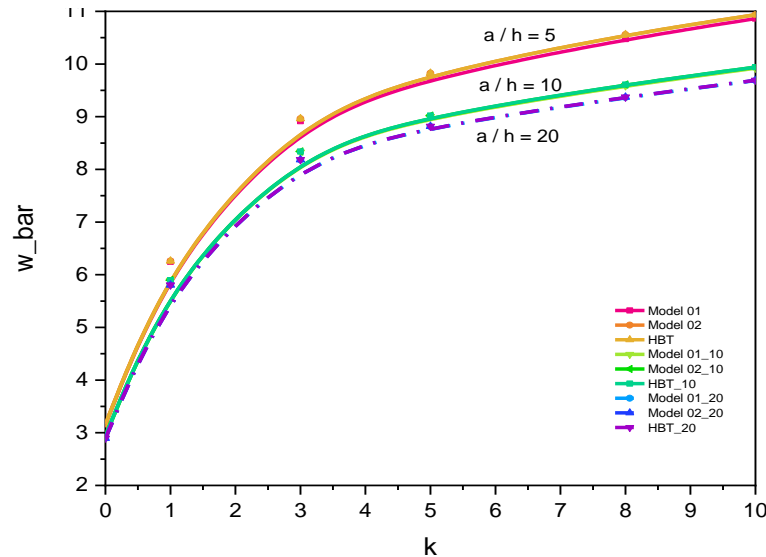


Fig.VI. 4. . Comparaison de la Variation de la flèche adimensionnelle en fonction de l'indice de loi de puissance k avec un rapport (a/h) différent « $K_w=(0,100)$ et $(k = 0, 5, inf)$ (a) Model 1 (HSDBT), (b) Model 2 (HSDBT), (c) (HBT)

VI.3. Conclusions

Dans la présente étude, comportement mécanique des Poutres simplement appuyées en composites avancés FGM reposent sur une fondation élastique variable. La précision de la théorie utilisée avec trois modèles des fonctions de gauchissement est déterminée par comparaison avec d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé où un excellent accord a été observé dans tous les cas. En outre, l'influences des paramètres de la poutre comme l'indice matériel « k », le rapport « a/h » et la variation de type de fondation élastique sur La flèche, les déplacements et les contraintes de la poutre FG ont été complètement étudié.

Conclusion Générale :

Les structures en FGM représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier leur composition et leur géométrie pour obtenir des propriétés optimales.

Dans ce travail, nous avons présenté l'analyse du comportement mécanique des poutres en composites avancés FGM reposent sur une fondation élastique variable à base d'Al/AL₂O₃ en utilisant les modèles d'Euler Bernoulli et de Timoshenko.

Les principales conclusions de cette recherche sont :

Dans le premier chapitre on a exposé des Généralités-Sur les Matériaux-Fonctionnellement Gradués FGM Un aperçu sur l'historique des matériaux FGM a été aussi présenté, ainsi que les différentes méthodes de fabrication. Enfin, les domaines d'application des FGM, à savoir : le génie civil, médecine.

Le deuxième chapitre on a exposé des des différents types des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).

Le troisième chapitre on a exposé l'analyse du comportement statique des poutres FGM D'après le Champ de déplacement et déformation et contrainte est présentée le Principe de Hamilton PTV.

Dans le quatrième chapitre on s'est basé sur Résultats-et-Discussions La précision de la théorie utilisée avec trois modèles des fonctions de gauchissement est déterminée par comparaison avec d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé où un excellent accord a été observé dans tous les cas. En outre, l'influences des paramètres de la poutre comme l'indice matériel «k», le rapport «a/h» et la variation de type de fondation élastique sur La flèche, les déplacements et les contraintes de la poutre FG ont été complètement étudié.

Références Bibliographiques

- [1] Niino M., Hirai T. and Watanabe R. (1987), "The functionally gradient materials," *J Jap Soc Compos Mat*, vol.13, pp. 257-264.
- [2] Atai, A. A. , Nikranjbar, A. and Kasiri, R. (2012) "Buckling and post-buckling Behaviour of semicircular functionally graded material arches: a theoretical study," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, , vol. 226, pp. 607-614.
- [3] Wang S. S. (1983) "Fracture mechanics for delamination problems in composite materials," *Journal of Composite Materials*, , vol. 17(3), pp. 210-223.
- [4] P. Shanmugavel, G. B. Bhaskar, M. Chandrasekaran, P. S. Mani and S. P. Srinivasan, "An overview of fracture analysis in functionally graded materials," *European Journal of Scientific Research*, vol.68 No.3 (2012), pp. 412-439.
- [5] EL-Wazery, M. S. , EL-Desouky , A. R. , (2015), "A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials". *Mater. Environ. Sci.* 6 (5) 1369-1376.
- [6]: Cho, J.R. , Tinsley Oden, J. (2000) , "Functionally graded material: a parametric study on thermal-stress characteristics using the Crank±Nicolson±Galerkin scheme". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 188, 17±38.
- [7] Zhu H.X., Abbaschian R. (2000), "Microstructures and properties of in-situ NiAl–Al₂O₃ functionally gradient composites", *Compos. Part B* 31 383–390.
- [15] Udupa G. , Shrikantha Rao S., Gangadharan K. V. (2014), "Functionally graded composite materials: An overview", *Procedia Materials Science* 5 1291 – 1299
- [10] Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T. & Shiota, I. On the design of functionally gradient materials in First International Symposium on Functionally Gradient Materials. (1990).
- [11] Bohidar S. K., Sharma R. & Mishra P. R. Functionally Graded Materials: A Critical Review. *International Journal of Research* 1, 289-301 (2014).
- [12] Amada, S. et al., 1996. The mechanical structures of bamboos in viewpoint of functionally gradient and composite materials. *Journal of Composite Materials*, 30(7), pp. 800–819

- [13] Bartel, D. L., Davy, D. T. & Keaveny, T. M., 2006. Orthopaedic Biomechanics: Mechanics and Design in Musculoskeletal Systems. In: U. S. River, ed. New Jersey: Pearson Education.
- [14] Janssen, J. J. A., 1991. Mechanical Properties of Bamboo. s.l.:Kluwer Academic
- [15] Oxman, N., 2010. Structuring materiality: design fabrication of heterogeneous materials. *Archit. Des.* , Volume 80, pp. 78–85
- [16] Mahmood, M. & Akinlabi, E., 2017. Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering. s.l.:Springer
- [17] Finot M, Suresh S, 1996, Small and large deformation of thick and thin-film multilayers: Effect of layer geometry, plasticity and compositional gradients, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44583-721.
- [18] M. Mirzababae, M. Tahani, S.M. Zebarjad (2006), A new approach for the analysis of functionally graded beams, *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 17-265
- [19] T.L. Becker Jr. b, R.M. Cannon a, R.O. Ritchie (2000), An approximate method for residual stress calculation in functionally graded materials, *Mechanics of Materials* 32
- [20] Satyam S. Sahay and Kakkaveri S. Ravichandran (1996), Assessment of Residual Stresses in a Functionally Graded Material System, *Advanced Composite Newsletter*, Vol. 5, No. 4 . 1-7
- [21] William G. Cooley, Captain, USAF, 2005, application of functionally graded materials in aircraft structures
- [22] Koizumi. M (1996), FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21 Japan.
- [23] Ellen M. Carrillo-Heian, R. Douglas Carpenter, Glaucio H. Paulino, Jeffery C. Gibeling, and Zuhair A. Munir (2001), Dense Layered Molybdenum Disilicide–Silicon
- [24] Kyoungsoo Park, Glaucio H. Paulino, Jeffery Roesler (2010), Cohesive fracture model for functionally graded fiber reinforced concrete, *Cement and Concrete Research* 40 956–965
- [25] Abdelkader Benachour, Hassaine Daouadji Tahar, Hassen Ait Atmane, Abdelouahed Tounsi et Meftah Sid Ahmed (2011), A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient, *Composites: Part B* 42 1386–1394

- [26] Coffignal, Gérard. "Mécanique non-linéaire et éléments finis." Version Electronique e.1.0, 2001. <http://www.paris.ensam.fr/lmsp>.
- [27] Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1972). *Mechanics of Materials*. van Nordstrand Reinhold Company. New York.
- [28] Nguyen, Viet Tung. 2004. "Modélisation Globale Et Locale Des Structures Multicouches Par Éléments Finis Des Plaques". Doctoral dissertation, Ecole des Ponts ParisTech.
- [29] Lo, K. H., R. M. Christensen, and E. M. Wu. 1977. "A High-Order Theory Of Plate Deformation— Part 1: Homogeneous Plates". *Journal Of Applied Mechanics* 44 (4): 663. doi:10.1115/1.3424154.
- [30] Ambartsumyan, S. A. 1969. "Basic equations and relations in the theory of anisotropic bodies with different moduli in tension and compression". *Inzh. Zhur. MTT*, 3, 51-61.
- [31] Reissner, E. 1945. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates ". *Journal Of Applied Mechanics*, A69-A77
- [32] Aydogdu, M. 2005. "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method". *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(11), 1740-1755. doi:10.1016/j.ijmecsci.2005.06.010..
- [33] Levinson, M. 1980. "An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates". *Mechanics Research Communications*. 7(6), 343-350. doi:10.1016/0093-6413(80)90049-x.
- [34] Reddy, J. N. 1984. "A Simple Higher-Order Theory For Laminated Composite Plates". *Journal Of Applied Mechanics* 51 (4): 745. doi:10.1115/1.3167719.
- [35] Touratier, M. 1991. "An Efficient Standard Plate Theory". *International Journal Of Engineering Science* 29(8): 901-916. doi:10.1016/0020-7225(91)90165-
- [36] Afaq K.S., Karama M. and Mistou S. 2003. "Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches". In *Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites*. Pages 289- 292. Strasbourg.
- [38] Vibration libre des poutres en matériaux FGM sur fondations élastiques dans un environnement thermique (Ahmed Amine Daikh.2015)
- [39] Etude du comportement dynamique et stabilité des poutres en FGM (Monsieur BOUAMAMA Mohamed-2019)

- [40] Analyse des propriétés statiques et dynamiques des structures FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé(AYACHE Belqassim.2019)
- [41] Abdelbaki Chikh.(2019). Analysis of static behavior of a P-FGM Beam JOURNAL OF MATERIALS AND ENGINEERING STRUCTURES 6 513–524
- [42] A. Chikh, A. Bakora, H. Heireche, M.S.A. Houari, A. Tounsi, E.A.A. Bedia.(2016). Thermo-mechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory. Struct.Eng. Mech. 57(4) 617–639. doi:10.12989/sem.2016.57.4.617
- [43] A. Chikh, A. Tounsi, H. Hebali, S.R. Mahmoud.(2017). Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT. Smart Struct. Syst. 19(3) 289–297. doi:10.12989/sss.2017.19.3.289
- [44] K.P. Soldatos.(1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. Acta Mech. 94(3) 195–220. doi:10.1007/BF01176650
- .
- [45] H. Ait Atmane et al. (2015). Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations,Int J Mech Mater Des 13:71–84 DOI 10.1007/s10999-015-9318-x ,19 July 2015/Published online: 28 July 2015
- [46] AN EFFICIENT SHEAR DEFORMATION BEAM THEORY BASED ON NEUTRAL SURFACE POSITION FOR BENDING AND FREE VIBRATION OF FUNCTIONALLY GRADED BEAMS (Latifa Ould Larbi1-2013,)
- [47] R. Kadoli, K. Akhtar, N. Ganesan.(2008). Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. Appl. Math. Model. 32(12) 2509–2525. doi:10.1016/j.apm.2007.09.015
- [48] Song X., Li S. R. (2007). Thermal buckling and post-buckling of pinned-fixed EulerBernoulli beams on an elastic foundation, Mechanics Research Communications, Vol. 34, No. 2, pp. 164171.

[49]Li, X. F., Wang, B. L., Han, J. C. (2010). A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams. *Archive of Applied Mechanics*80(10):1197–212.