



République Algérienne Démocratique Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abbès Laghrou de Khenchela

Faculté des Sciences et Technologie

Département des Sciences de la Matière

Mémoire

présenté par

Bouterai Sabah

pour obtenir le Diplôme de Master Académique en Physique

Filière: Science de la Matière

Option: Physique des Matériaux

Thème

Quelques Problèmes en Relativité Générale et en Cosmologie

Soutenu le: / /2020

devant le jury composé de:

Président	F. Lekmine	MAA	Université Abbès Laghrou de Khenchela
Rapporteur	M. Guenouche	MCB	Université Abbès Laghrou de Khenchela
Examineur	Z. Hemame	MAA	Université Abbès Laghrou de Khenchela

Année universitaire: 2019/2020

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir aidé à terminer ce travail.

Je tiens à remercier M. Guenouche Mourad de m'avoir encadré avec volonté et patience durant la préparation de ce mémoire. Je tiens encore à le remercier de son aide, de sa disponibilité et du temps qu'il a bien voulu me consacrer. Ses conseils et encouragements ont été très précieux.

Je remercie les membres de jury, M. Lekmine Farid et M. Hemame Zoubir, d'avoir accepté de juger la qualité de ce travail. Je n'oublie pas de remercier spécialement M. Boudjemaa Keir-Eddine de m'avoir offert la chance de découvrir cette magnifique discipline qu'est la cosmologie.

Mes derniers remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien moral et leur encouragement, à tous mes proches, où qu'ils soient, à tous ceux qui m'ont éduqué, formé et fait de moi la personne que je suis aujourd'hui, à tous ceux qui m'ont offert leur aide de près ou de loin, d'une manière ou d'une autre.

Table des matières

Introduction générale	3
1 Solution de Kottler (ou de Schwarzschild-de Sitter)	8
1.1 Métrique de Kottler	8
1.2 Géodésiques de genre lumière	12
1.3 Géométrie de Kottler	15
1.4 Effet de la constante cosmologique sur la déviation de la lumière	16
1.4.1 Déviation de la lumière dans l'espace-temps de Kottler	19
2 Solution de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	22
2.1 Principe cosmologique d'homogénéité et d'isotropie	22
2.2 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	23
2.3 Equation de Friedmann	24
2.4 Propagation des photons	28
3 Modèle d'Einstein-Straus à courbure spatiale négative (cas pseudo sphérique $k = -1$)	31
3.1 Raccordement de la solution de FLRW avec la solution de Kottler	32
3.2 Géodésiques et déviation de la lumière	37
3.2.1 Géodésiques de la lumière entre la sphère de Schücking et la Terre	40

3.2.2	Géodésiques de la lumière à l'intérieur de la sphère de Schücking . .	48
3.2.3	Géodésiques de la lumière entre la source et la sphère de Schücking .	55
3.3	Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112	61
	Conclusion générale	67
	A Tenseur métrique de Kottler	71
	B Tenseur métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	73
	C Distanche d'approche minimale r_P	75
	Bibliographie	77

Introduction générale

Le travail de ce mémoire de Master s'inscrit dans le domaine de la gravitation et de la cosmologie et a trait à l'étude de l'effet de lentille gravitationnelle à grande échelle.

La cosmologie moderne a vu le jour en 1917, lorsque Einstein commença à réfléchir aux conséquences de sa théorie de la relativité générale, en introduisant la fameuse constante cosmologique dans l'Univers qu'il considérait statique dans son ensemble [1]. Suite à la découverte de la récession apparente des galaxies par Hubble en 1929 [2], il est désormais établi que l'Univers est plutôt dynamique en expansion. Le fait que ce soit la relativité générale qui soit pertinente pour décrire l'évolution de l'Univers provient de ce que la gravitation est la seule interaction effective à grande échelle.

Comme il est bien connu, la déviation de la lumière et le temps de retard figurent parmi les principales prédictions de la relativité générale. A l'occasion d'une éclipse totale du Soleil en 1919, Eddington avait expérimentalement confirmé que la lumière est attirée gravitationnellement à proximité du soleil avant d'arriver sur Terre [3]. En mesurant avec une grande précision l'angle de déviation, le résultat était en accord parfait avec ce que prévoit la relativité générale. En conséquence, cette lumière parcourt un trajet plus long que ce qu'elle ferait en l'absence du soleil. Ceci se traduit par un temps de retard baptisé "effet Shapiro", du nom de celui qui l'avait découvert en 1964 [4], et l'avait observé en 1968 entre la Terre et Mercure en enregistrant un retard de 120 microsecondes [5]. Dans ce cas, on dit que le soleil, ou toute autre étoile, agit comme une micro-lentille gravitationnelle.

Quant aux grandes structures de l'Univers, tels que les galaxies (ou amas de galaxies),

il s'agit de l'effet de lentille gravitationnelle fort (strong lensing) ou faible (weak lensing). Dans cette thèse, c'est l'effet de lentille gravitationnelle fort qui nous intéresse. La lumière provenant des sources d'arrière-plan est fortement déviée par le corps massif, modifiant ainsi la manière dont ces sources sont vues depuis la Terre et pouvant donner lieu à l'apparition d'images multiples, à l'exemple des systèmes lentille-quasar G2237+0305 (appelé croix d'Einstein) et SDSS J1004+4112. Le nombre et la forme de ces images dépendent de la géométrie du corps massif ainsi que de la position de la source par rapport à la ligne de visée (axe observateur-corps massif). En outre, d'après les mesures observationnelles, le temps de retard induit entre les différentes images peut s'étaler sur plusieurs années.

L'enjeu principal de cette thèse est l'étude de l'effet de lentille gravitationnelle fort dans le cadre du modèle non statique d'Einstein-Straus (Swiss-cheese model) [6, 7, 8], et ensuite la confrontation des résultats obtenus aux données observationnelles. Le choix de ce modèle est essentiellement motivé par le fait qu'il soit applicable aussi bien à grande échelle qu'à petite échelle. Autrement dit, c'est un modèle sophistiqué qui tient compte à la fois de l'expansion de l'Univers à l'échelle galactique et du fait que les petites échelles, telles que les échelles planétaire et atomique, ne sont pas affectées par la dite expansion. Ce modèle résulte du raccordement de la métrique non statique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW en abrégé) à l'extérieur d'une vacuole (sphère de Schücking) avec la métrique statique de Kottler (ou Schwarzschild-de Sitter) à l'intérieur de celle-ci [9]. L'effet de lentille gravitationnelle ne se produit qu'à l'intérieur de la vacuole.

Une deuxième motivation pour cet intérêt est la grande polémique concernant la dépendance ou non de la déviation de la lumière en la constante cosmologique. Avant les travaux de Rindler et d'Ishak, l'avis général des cosmologues était que l'angle de déviation de la lumière passant au voisinage d'une masse statique à symétrie sphérique est indépendant de la constante cosmologique [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Cette croyance est basée sur l'argument que la constante cosmologique disparaît accidentellement de l'équation de la géodésique pour des particules non massives. En septembre 2007, Rindler et Ishak ont

corrigé cette croyance en soulignant qu'il ne suffisait pas de considérer uniquement l'équation de la géodésique, mais que la métrique elle-même doit aussi être prise en compte [17]. Le point de vue de Rindler et d'Ishak n'a pas été unanimement accepté. Il s'en est suivi une large controverse autour de la question de savoir si la constante cosmologique modifie ou non la courbure de la lumière. On répondra à cette question dans le cadre du modèle d'Einstein-Straus avec une courbure spatiale négative.

Dans le chapitre un, on commencera par dériver la métrique de Kottler dont on fera usage pour extraire les équations du mouvement des photons, puis on mettra tout en œuvre pour arriver à l'expression de l'angle de déviation totale que doit subir un photon lors de son passage près d'un corps massif. C'est ici qu'on se penchera sur la question de savoir si cette déviation sera affectée par la présence de la constante cosmologique. Dans toute la suite de cette thèse, on s'intéressera tout particulièrement à une situation typique de deux photons (deux images de la source) émis par une source, l'un après l'autre, déviés par une lentille et enfin reçus sur Terre sous des angles de réception bien connus. Sur la base de quelques hypothèses simplificatrices relatives au modèle de Kottler, on déterminera des expressions analytiques pour la déviation des deux photons ainsi que pour le temps de retard de l'un par rapport à l'autre. En fait, le système lentille-quasar SDSS J1004+4112, évoqué plus haut, constitue un cas d'école pour estimer la masse de la lentille, la déviation et le temps de retard. On terminera ce chapitre par appliquer nos résultats à ce système-là. Ce chapitre sera conçu avec l'idée d'exploiter ses résultats pour le modèle d'Einstein-Straus.

Le chapitre deux sera dédié au modèle de FLRW. Faute d'utiliser tous ses éléments, on se contentera de rappeler ceux dont on aura besoin pour la suite. Ces éléments sont essentiels et bien connus dans le modèle standard de cosmologie Λ CDM (cosmological constant-cold dark matter). On parlera du principe cosmologique, de la métrique isotrope et homogène, de l'équation de Friedmann ainsi que de la propagation des photons. L'intégration des premier et deuxième chapitres sera également faite dans le but de rendre le manuscrit autosuffisant.

Après, on sera en mesure d’aborder l’étude de la déviation de la lumière et du temps de retard dans le cadre du modèle d’Einstein-Straus avec une courbure spatiale négative, en renonçant à toutes les hypothèses simplificatrices adoptées dans le modèle de Kottler à l’exception de l’hypothèse de sphéricité. Nous avons en fait trois variantes pour la métrique d’Einstein-Straus (6 variantes si on prend en considération une constante cosmologique nulle), qui correspondent aux trois variantes de la métrique FLRW: Cas d’une courbure spatiale nulle (espace plat), d’une courbure spatiale positive (sphère) et d’une courbure spatiale négative (pseudo sphère). On se limitera toutefois ici à examiner le cas pseudo sphérique seulement, un cas qui n’a pas encore été fait.

Le modèle d’Einstein-Straus avec une courbure spatiale négative sera abordé dans le chapitre trois. On commencera par raccorder la métrique de FLRW pseudo sphérique avec la métrique de Kottler, afin de construire la métrique d’Einstein-Straus pseudo sphérique. Ensuite, comme ce sont les conditions finales sur Terre qui sont données, on intégrera à reculons et partiellement les géodésiques de la lumière, de la Terre jusqu’à la vacuole, à l’intérieur de la vacuole puis de la vacuole jusqu’à la source. A ce stade, on mettra en œuvre une méthode générale, basée uniquement sur l’intégration des équations différentielles sans pour autant faire usage de la géométrie d’Euclide pour arriver à nos fins. Il s’agit bien entendu de la même méthode déjà suivie pour le modèle d’Einstein-Straus avec une courbure spatiale négative. Vu la complexité du modèle, il pourrait s’avérer difficile d’établir une expression analytique pour le temps de retard. Pour cela, on présentera deux méthodes, une méthode de calcul direct, et une méthode que l’on nommera “méthode de calcul par différence”. Cette dernière fonctionnera plus fiablement et permettra d’aboutir à une expression semi-analytique. La contribution de la constante cosmologique à la déviation de la lumière et au temps de retard sera également investiguée dans ce modèle. A la fin de ce chapitre, on concrétisera les résultats obtenus par une application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112. En particulier, une étude suivant les valeurs du facteur d’échelle sur Terre pourrait être envisagée en vue de comparer les résultats au cas plat et

au cas sphérique et de mettre l'accent sur l'effet de la courbure de l'espace. Ceci sera mis en évidence lors de l'application au même système lentille-quasar SDSS J1004+4112.

Nous clôturerons ce mémoire par une conclusion générale contenant quelques perspectives.

Chapitre 1

Solution de Kottler (ou de Schwarzschild-de Sitter)

Dans le langage de la relativité générale d'Albert Einstein, le champ gravitationnel créé par une distribution de masse se manifeste par une courbure de l'espace-temps. Ce couplage entre le contenu matériel et la géométrie de l'espace-temps qui l'entoure est décrit par les équations de la gravitation publiées par Einstein en novembre 1915. Quelques semaines après, en décembre 1915, Karl Schwarzschild fut le premier à obtenir une solution exacte de ces équations dans le vide correspondant au cas statique à symétrie sphérique [18].

En présence de la constante cosmologique, la métrique de Schwarzschild est remplacée par celle de Kottler [9], qui se réduit à celle de de Sitter [19], ce qui motive l'appellation métrique de Schwarzschild-de Sitter également employée pour désigner la métrique de Kottler.

1.1 Métrique de Kottler

On souhaite ici déterminer la métrique de Kottler. Partons de la forme standard d'une métrique statique à symétrie sphérique qui s'écrit dans le système de coordonnées sphé-

riques (r, θ, φ) comme

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.1)$$

Si l'on compare avec la forme générale

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2)$$

on obtient les composantes non nulles du tenseur métrique qui ne dépendent pas de la coordonnée temporelle t ,

$$g_{tt} = -B(r), \quad g_{rr} = A(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta. \quad (1.3)$$

Il s'agit maintenant d'obtenir les fonctions de la coordonnée radiale r , $A(r)$ et $B(r)$, par application des équations d'Einstein qui, en présence de la constante cosmologique Λ , s'écrivent comme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

où G est la constante universelle de la gravitation de Newton, R est le scalaire de Ricci obtenu par contraction du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion. A l'extérieur de la source le tenseur énergie-impulsion est nul, $T_{\mu\nu} = 0$, ce qui réduit les équations d'Einstein (1.4) à

$$R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

Ce résultat nous dit que pour une constante cosmologique non nulle, l'espace-temps n'est pas plat à l'infini comme l'est la métrique de Minkowski ($\Lambda = 0$) pour laquelle on a $R_{\mu\nu} = 0$.

Le tenseur de Ricci est donné par

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda. \quad (1.6)$$

où $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ est le symbole de Christoffel qui s'exprime en termes du tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$ (voir Annexe A). Les équations d'Einstein obtenues (1.5), tous calculs faits, s'écrivent explicitement comme

$$R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)} = \Lambda B(r), \quad (1.7)$$

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)} = -\Lambda A(r), \quad (1.8)$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - 1 = -\Lambda r^2, \quad (1.9)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \left[\frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - 1 \right] \sin^2 \theta = -\Lambda r^2 \sin^2 \theta, \quad (1.10)$$

où $' = d/dr$, la dérivée première par rapport à la coordonnée radiale r . Les composantes $\theta\theta$ et $\varphi\varphi$ des équations d'Einstein sont identiques en raison de la symétrie sphérique. Une combinaison appropriée des composantes tt et rr des équations d'Einstein, (1.7) et (1.8), donne

$$\frac{R_{tt}}{B(r)} + \frac{R_{rr}}{A(r)} = -\frac{1}{rA(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) = \Lambda - \Lambda = 0, \quad (1.11)$$

qui s'intègre facilement en

$$A(r)B(r) = K, \quad (1.12)$$

avec K une constante d'intégration à déterminer. En utilisant (1.11) et (1.12), l'équation (1.9) se simplifie alors à

$$\frac{d}{dr}[rB(r)] = K(1 - \Lambda r^2). \quad (1.13)$$

D'où, par intégration,

$$B(r) = K \left(1 - \frac{K'}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right), \quad (1.14)$$

où K' est une deuxième constante d'intégration à déterminer. Maintenant pour déterminer les constantes K et K' , on procède à deux approximations. La première est obtenue lorsque la distance radiale r du centre de la distribution de masse est suffisamment petite. Dans

ce cas, la composante $B(r)$ peut être approximée par

$$B(r) \simeq K \left(1 - \frac{K'}{r} \right). \quad (1.15)$$

La seconde approximation consiste à prendre la limite d'un champ faible statique créé par une distribution de masse non relativiste, auquel cas on a affaire à la relation (on peut se référer à [20])

$$g_{tt} \simeq -[1 + 2\phi(r)], \quad (1.16)$$

où $\phi(r)$ est le potentiel gravitationnel de Newton qui, pour r suffisamment petit, est donné par

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \quad (1.17)$$

En comparant à (1.16), il s'ensuit que

$$K = 1, \quad K' = 2GM. \quad (1.18)$$

Ainsi, la métrique de Kottler prend la forme

$$ds^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2. \quad (1.19)$$

Il est facile de constater que la métrique de Kottler, outre la présence d'une singularité physique (singularité nue) en $r = 0$, présente deux singularités de coordonnées. La première est connue sous le nom de singularité de Schwarzschild en $r = 2GM$ (rayon de Schwarzschild), pour r suffisamment petit, et la seconde est connue sous le nom de singularité de de Sitter en $r = \sqrt{3/\Lambda}$, pour r suffisamment grand.

Bien que les mesures observationnelles actuelles indiquent des valeurs relativement faibles pour la constante cosmologique, de l'ordre de 10^{-52} m^{-2} [21], il serait intéressant d'étudier l'effet de Λ sur la déviation de la lumière à proximité d'un corps massif ainsi

que sur le temps de retard induit. Pour cela, on doit d'abord intégrer les équations de la géodésique.

1.2 Géodésiques de genre lumière

En relativité générale, le mouvement géodésique dans l'espace-temps est régi par les équations

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (1.20)$$

où le point en-dessus désigne la dérivée première par rapport à un nouveau paramètre affine τ , $\dot{} = d/d\tau$, autre que s , puisque l'intervalle d'espace-temps pour une géodésique de genre lumière (photon) est nul $ds^2 = 0$. Grâce à la propriété de symétrie sphérique (invariance par rotation), le moment angulaire du mouvement \vec{J} est perpendiculaire à la direction du mouvement (vecteur position \vec{r}). Cela a pour conséquence que la trajectoire du photon ou toute autre particule massive est plane, autrement dit, entièrement contenue dans le plan perpendiculaire au moment angulaire et donc peut se ramener sur le plan équatorial $\theta = \pi/2$. La métrique de Kottler se réduit alors à

$$ds^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\varphi^2. \quad (1.21)$$

En faisant usage des expressions des symboles de Christoffel (A.4), les équations de la géodésique (1.20) s'écrivent alors

$$\ddot{t} + \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{t}\dot{r} = 0, \quad (1.22)$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{2}B(r)B'(r)\dot{t}^2 - \frac{1}{2}\frac{B'(r)}{B(r)}\dot{r}^2 - rB(r)\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (1.23)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \quad (1.24)$$

Ces équations ne sont autres que les équations obtenues par application des équations de Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (1.25)$$

où \mathcal{L} est le lagrangien défini par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (1.26)$$

c'est-à-dire

$$2\mathcal{L} = B(r)\dot{t}^2 - B(r)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2. \quad (1.27)$$

Remarquons qu'ici t et φ sont des variables cycliques, car

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.28)$$

déterminant chacune d'elle une intégrale première issue de l'équation (1.25). La première équation est

$$\frac{d}{d\tau} [B(r)\dot{t}] = 0, \quad (1.29)$$

qui s'intègre par

$$\dot{t} = \frac{1}{B(r)}, \quad (1.30)$$

où la constante d'intégration a été absorbée dans une redéfinition du paramètre affine τ .

La deuxième équation est

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\varphi}) = 0. \quad (1.31)$$

L'intégration de cette équation donne

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{r^2}, \quad (1.32)$$

où J une constante d'intégration ayant l'interprétation d'un moment angulaire par unité de masse. Comme $ds^2 = 0$ pour un photon, on déduit immédiatement, en divisant (1.21) par $d\tau^2$, l'équation radiale,

$$\dot{r}^2 + J^2 \frac{B(r)}{r^2} = 1, \quad (1.33)$$

où on a substitué \dot{t} et $\dot{\varphi}$ par leurs expressions respectives (1.30) et (1.32). On en tire alors

$$\dot{r} = \pm \sqrt{1 - J^2 \frac{B(r)}{r^2}}. \quad (1.34)$$

Maintenant, par élimination du paramètre affine entre \dot{r} et $\dot{\varphi}$, il vient que

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r \sqrt{\frac{r^2}{J^2} - B(r)}, \quad (1.35)$$

qui doit s'annuler au péri-lentille, la distance d'approche minimale par rapport à la lentille, que l'on notera par r_P ,

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r=r_P} = 0,$$

ce qui permet d'avoir une expression pour J ,

$$J = \frac{r_P}{\sqrt{B(r_P)}}. \quad (1.36)$$

En injectant cette dernière expression dans l'équation (1.35), on obtient l'équation orbitale

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{u(r)}, \quad u(r) = r \sqrt{\frac{r^2}{r_P^2} - 1} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}, \quad (1.37)$$

dans laquelle la constante cosmologique disparaît accidentellement.

1.3 Géométrie de Kottler

Avant d'aller plus loin, considérons un espace euclidien à trois dimensions. Dans les coordonnées cylindriques, l'élément de ligne au carré dl^2 s'écrit

$$dl^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.38)$$

Considérons maintenant une surface à deux dimensions à symétrie cylindrique $z = z(r)$ plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions. L'élément de ligne dl^2 s'écrit alors

$$dl^2 = \left[\left(\frac{dz}{dr} \right)^2 + 1 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.39)$$

Compte tenu de (1.19), la métrique spatiale de Kottler pour un mouvement restreint dans le plan équatorial, $\theta = \pi/2$, se simplifie en

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.40)$$

Au voisinage de la distribution de masse où $\Lambda r^2 \ll GM/r$, dl^2 est approximé par la métrique spatiale de Schwarzschild

$$dl^2 \simeq \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.41)$$

En comparant à (1.39), on obtient

$$dz = \pm dr \sqrt{\frac{2GM}{r - 2GM}}. \quad (1.42)$$

Cette dernière équation s'intègre, pour donner

$$z(r)^2 = 8GM(r - 2GM), \quad (1.43)$$

avec le choix d'une constante d'intégration de telle manière que z s'annule en $r = 2GM$. C'est l'équation d'un paraboloïde de Flamm. Loin de la distribution de masse où $GM/r \ll \Lambda r^2$, la métrique spatiale (1.40) est approximée par la métrique spatiale de de Sitter

$$dl^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.44)$$

En comparant à (1.39), on en déduit que

$$dz = \pm dr \sqrt{\frac{\Lambda r^2}{3 - \Lambda r^2}}, \quad (1.45)$$

qui s'intègre grâce à un changement de variable approprié pour donner

$$z^2 + r^2 = \frac{3}{\Lambda}, \quad (1.46)$$

avec le choix d'une constante d'intégration de telle manière que z s'annule en $r = \sqrt{3/\Lambda}$. C'est l'équation d'une sphère de rayon $\sqrt{3/\Lambda}$.

1.4 Effet de la constante cosmologique sur la déviation de la lumière

Ici, on va montrer que lorsque la géométrie de l'espace-temps de Kottler est prise en compte, la constante cosmologique Λ contribue effectivement à la déviation de la lumière.

Jusqu'à tout récemment la croyance générale était que la constante cosmologique n'a pas d'effet sur la déviation de la lumière par une distribution de masse à symétrie sphérique. Cette croyance a comme origine le fait que la constante cosmologique disparaît dans l'équation de la trajectoire $\varphi(r)$. Rindler et Ishak [17] ont corrigé cette croyance générale: La constante cosmologique a un effet sur la déviation de la lumière par une distribution de masse M à symétrie sphérique. Le travail de Rindler et Ishak a été fait dans le cadre des

hypothèses suivantes:

1. La terre et la source sont au repos par rapport à la lentille.
2. Les masses de la terre et de la source sont négligeables par rapport à la masse de la lentille.

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'effet de la constante cosmologique sur la courbure d'un rayon lumineux, lors de son passage à proximité d'une distribution de masse à symétrie sphérique.

En faisant le changement de variable $r = 1/x$ dans l'expression (1.35), on obtient, après dérivation par rapport à φ , une équation orbitale pour la trajectoire du photon, dans laquelle la constante cosmologique est éliminée,

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = 3GMx^2. \quad (1.47)$$

Comme on l'a déjà dit, ce résultat donne à penser que la constante cosmologique, en dépit de sa présence dans la métrique de Kottler, n'a pas d'effet sur la déviation de la lumière. Ce fut l'argument avancé par plusieurs auteurs [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Néanmoins, nous allons montrer que malgré l'absence de Λ dans (1.47) la constante cosmologique influe sur la déviation de la lumière, la raison étant que c'est la métrique qui détermine les observations réelles qui peuvent être effectuées.

Le membre de droite de l'équation (1.47) est très petit. En effet, pour un rayon de lumière à l'extérieur ou frôlant le Soleil, on a

$$\frac{2GM_\odot}{r} \lesssim \frac{2GM_\odot}{R_\odot} \cong 10^{-6}, \quad (1.48)$$

où M_\odot et R_\odot sont respectivement la masse et le rayon du Soleil. A l'ordre zéro, l'équation (1.47) admet comme solution

$$x = \frac{1}{r} = \frac{\sin \varphi}{b}, \quad (1.49)$$

qui représente un chemin non dévié d'un rayon lumineux, avec b le paramètre d'impact indiqué sur la Fig. 1-1. En introduisant cette solution dans l'équation (1.47), il vient que

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = \frac{3GM}{b^2} \sin^2 \varphi, \quad (1.50)$$

qui admet la solution particulière

$$x = \frac{1}{r} = \frac{3GM}{2b^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right]. \quad (1.51)$$

On obtient au premier ordre de la perturbation

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \varphi}{b} + \frac{3GM}{2b^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right]. \quad (1.52)$$

Dans l'espace-temps de Schwarzschild, pour obtenir l'angle de déviation totale, il suffit de faire tendre r vers l'infini, ce qui revient à faire tendre φ vers une valeur φ_∞ très petite sachant que $\sin \varphi \sim \varphi$ et $\cos(2\varphi) \sim 1$. On trouve

$$\varphi_\infty = -\frac{2GM}{b}. \quad (1.53)$$

L'angle de déviation totale est alors

$$\Delta\varphi = 2|\varphi_\infty| \simeq \frac{4GM}{b}. \quad (1.54)$$

Le calcul dans le cas du Soleil donne

$$\Delta\varphi \simeq \frac{R_\odot}{b} 1.75''. \quad (1.55)$$

On peut se convaincre facilement qu'au péri-lentille $r = r_P$, on a $\varphi = \pi/2$, ce qui donne,

en tenant compte de (1.52),

$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{b} + \frac{GM}{b^2}. \quad (1.56)$$

Cependant, l'idée de faire tendre r vers l'infin n'est pas permise dans l'espace-temps de Kottler, puisque comme évoqué plus haut, r ne peut pas excéder la valeur de l'horizon $\sqrt{3/\Lambda}$.

1.4.1 Déviation de la lumière dans l'espace-temps de Kottler

Le calcul de l'angle de déviation dans un champ gravitationnel de Kottler se fait par application de la formule invariante pour le cosinus d'un angle entre deux directions de coordonnées d et δ comme le montre la Fig. 1-1 [17],

$$\cos \psi = \frac{g_{ij}d^i\delta^j}{\sqrt{g_{ij}d^i d^j} \sqrt{g_{ij}\delta^i \delta^j}}, \quad (1.57)$$

où les $g_{\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur métrique de Kottler (1.40),

$$g_{rr} = B(r)^{-1} = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2. \quad (1.58)$$

Dérivons maintenant (1.52) par rapport à φ pour obtenir

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{b} \left[\frac{2GM}{2b} \sin(2\varphi) - \cos \varphi \right]. \quad (1.59)$$

Donc, on a, sachant que d est la direction de l'orbite et δ la direction de la coordonnée $\varphi = \text{const}$,

$$d = (dr, d\varphi) = \left(\frac{dr}{d\varphi}, 1 \right) d\varphi, \quad d\varphi < 0, \quad (1.60)$$

$$\delta = (\delta r, 0) = (1, 0)\delta r. \quad (1.61)$$

En substituant dans (1.57), on obtient

$$\cos \psi = \left[1 + B(r)r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (1.62)$$

ou bien

$$\tan \psi = \sqrt{B(r)r} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right|. \quad (1.63)$$

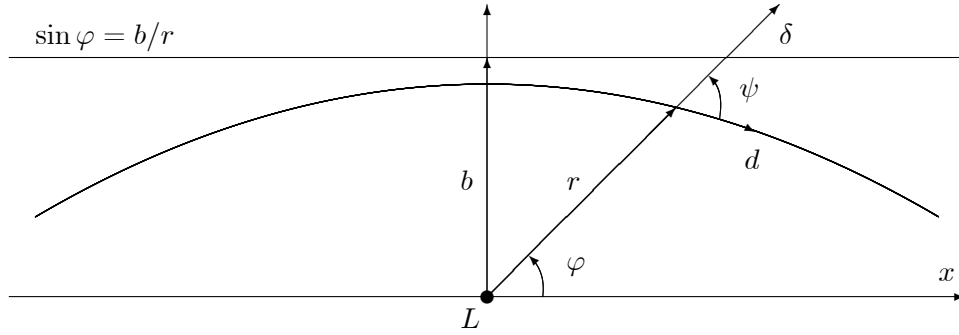


Fig. 1-1 Le graphe de l'équation (1.52) sur le plan équatorial. La moitié de l'angle de déviation est $\psi - \varphi = \varepsilon$ [17].

L'angle de déviation totale est défini par

$$\Delta\varphi = 2\varepsilon = 2(\psi - \varphi). \quad (1.64)$$

Dans le cas où $\varphi = 0$, on obtient successivement à partir des équations (1.52) et (1.59)

$$r = \frac{b^2}{2GM}, \quad (1.65)$$

et

$$\left| \frac{d\varphi}{dr} \right| = \frac{b^3}{(2GM)^2}. \quad (1.66)$$

Il s'ensuit que

$$\Delta\varphi = 2\psi_0 \simeq \frac{4GM}{b} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2GM}{b} \right)^2 - \frac{\Lambda}{6} \left(\frac{b^2}{2GM} \right)^2 \right]. \quad (1.67)$$

On note ici que la seule valeur caractéristique de r est celle qui correspond à $\varphi = 0$, c'est-à-dire $r = b^2/2GM$ (1.65). Pour les autres valeurs, il n'y a pas une déviation significative supplémentaire. On peut facilement remarquer qu'au premier ordre, l'angle de déviation totale dans le cas de Schwarzschild (1.54) est obtenu pour $\Lambda = 0$.

En conclusion, Ce résultat (1.67) montre que l'angle de déviation diminue pour une valeur positive de la constante cosmologique. Donc, comme prévu, l'effet de la constante cosmologique s'oppose à la gravitation.

Chapitre 2

Solution de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La cosmologie s'intéresse à l'étude de l'Univers dans son ensemble et les phénomènes physiques qui s'y déroulent, liés à l'évolution des grandes structures à l'instar des galaxies et des amas de galaxies, ainsi que les modèles qui en permettent la description.

2.1 Principe cosmologique d'homogénéité et d'isotropie

La plupart des modèles utilisés en cosmologie font l'hypothèse d'un espace homogène et isotrope.

Précisons la signification de l'homogénéité et de l'isotropie. Par homogénéité, on entend que tous les points de l'espace jouent le même rôle. Autrement dit, il n'existe pas de point privilégié. Par isotropie, on entend que toutes les directions autour de tout point de l'espace sont équivalentes. On peut montrer qu'en vérité l'isotropie ainsi définie (isotropie autour de chaque point) entraîne l'homogénéité.

On dit des modèles qui font l'hypothèse d'un espace homogène et isotrope qu'ils satisfont au principe cosmologique.

2.2 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Le principe cosmologique implique de fortes contraintes sur la métrique d'espace-temps. On peut montrer qu'il existe un système de coordonnées, dites coordonnées comobiles, de telle manière que les dix composantes indépendantes du tenseur métrique se réduisent à une seule fonction de t (t désignant la coordonnée temporelle) $a(t)$, appelée facteur d'échelle, avec un paramètre discret. Plus précisément, on peut toujours pour un Univers satisfaisant au principe cosmologique, faire le choix d'un système de coordonnées (t, r, θ, φ) de telle manière que le carré de l'intervalle d'espace-temps ds^2 prenne la forme

$$d\tau^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.1)$$

où

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.2)$$

avec l'indice discret k pouvant prendre les valeurs $+1$, 0 et -1 , qui correspondent respectivement à une sphère, à un espace euclidien et à une pseudo-sphère, tous à trois dimensions.

Si on fait le choix d'une nouvelle coordonnée comobile χ liée à r via

$$r = \Sigma(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & k = +1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh \chi & k = -1 \end{cases}, \quad (2.3)$$

alors l'élément de ligne (2.1) peut être réécrit comme

$$d\tau^2 = dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + \Sigma(\chi)^2 d\Omega^2]. \quad (2.4)$$

2.3 Equation de Friedmann

La seule fonction inconnue dans (2.1) ou (2.4) est le facteur d'échelle $a(t)$, qui peut être déterminé par application des équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

en l'absence de la constante cosmologique Λ , et

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

en présence de la constante cosmologique Λ . Les équations d'Einstein (2.5) et (2.6) peuvent être respectivement réécrites comme

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda \right), \quad (2.7)$$

et

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda \right) - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Ceci nous amène au calcul du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure, lesquels requièrent à leur tour le calcul des symboles de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ qui s'expriment en fonction du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et du tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$ (A.2).

A partir de (2.1), on peut tirer les composantes du tenseur métrique dans le système de coordonnées (t, r, θ, φ)

$$g_{tt} = -1, \quad g_{rr} = \frac{a^2}{1 - kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2 r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.9)$$

et du tenseur métrique inverse, qui sont ici immédiates, vu que le tenseur métrique est diagonal

$$g^{tt} = -1, \quad g^{rr} = \frac{1 - kr^2}{a^2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2 r^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.10)$$

Le calcul des symboles de Christoffel donne pour les composantes non nulles

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^t &= \frac{aa_t}{1-kr^2}, & \Gamma_{\theta\theta}^t &= aa_tr^2, & \Gamma_{\varphi\varphi}^t &= aa_tr^2 \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = \frac{a_t}{a}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1-kr^2), & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r(1-kr^2) \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{t\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta t}^\theta = \frac{a_t}{a}, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\
\Gamma_{t\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi t}^\varphi = \frac{a_t}{a}, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

où l'indice t désigne la dérivation par rapport au temps. En utilisant l'expression du tenseur de Ricci (1.6), on obtient

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= 3\frac{a_{tt}}{a}, & R_{rr} &= -\frac{aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k}{1-kr^2}, \\
R_{\theta\theta} &= -r^2(aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k), & R_{\varphi\varphi} &= -r^2 \sin^2 \theta (aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Le scalaire de courbure R se calcule par contraction du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{2.13}$$

ce qui donne, en utilisant les expressions des composantes (2.12) du tenseur de Ricci,

$$R = -6(a_{tt}a + a_t^2 + k)/a^2. \tag{2.14}$$

Pour écrire les équations d'Einstein, on a également besoin d'une forme pour le tenseur énergie-impulsion. On modélise généralement l'Univers par un fluide parfait dont les molécules sont les galaxies ou les amas de galaxies. La forme générale du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ d'un fluide parfait avec densité ρ et pression p est donnée par

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{2.15}$$

où U_μ désigne la 4-vitesse du fluide. Vu qu'on travaille dans un système de coordonnées comobiles, seule la composante temporelle de U_μ est non nulle

$$U_\mu(U_t, 0, 0, 0). \quad (2.16)$$

Comme

$$U_\mu U^\mu = -1, \quad (2.17)$$

et vu que le tenseur métrique est diagonal avec $g^{tt} = -1$, on a

$$U_t^2 = 1. \quad (2.18)$$

Comme U_t est obligatoirement positif, on a

$$U_t = 1. \quad (2.19)$$

Il est à remarquer que nous obtenons deux équations indépendantes qui correspondent aux composantes tt et rr du tenseur de Ricci, et qui s'écrivent respectivement comme

$$a_t^2 - \frac{1}{3}(8\pi G\rho + \Lambda)a^2 = -k, \quad (2.20)$$

et

$$2a_{tt}a + a_t^2 + (8\pi Gp - \Lambda)a^2 = -k. \quad (2.21)$$

Du fait de l'isotropie de l'espace, (2.8) produit la même équation (2.21) pour $\mu = \nu = \theta$ et pour $\mu = \nu = \varphi$. Ces équations ont été obtenues par Friedmann en 1922 dans le cas d'une pression nulle $p = 0$ [22], puis généralisées pour une pression non nulle par Lemaître en 1927 [23]. En prenant la différence des deux équations (2.20) et (2.21) on obtient

$$\frac{a_{tt}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.22)$$

Cette équation nous permet de voir que pour Λ négligeable, dans un univers à contenu matériel, c'est-à-dire tel que $\rho + 3p > 0$, l'expansion est décélérée. Il reste à résoudre le problème de la dépendance de la pression en la densité. Pour cela, il nous faut encore une équation d'état $p = p(\rho)$, ce qui suppose une forme particulière de matière dominant l'Univers, autrement dit, la connaissance des diverses formes possibles d'énergie dans l'Univers. En prenant une combinaison linéaire particulière des équations (2.20) et (2.21) (les équations (2.20) et (2.21) sont multipliées respectivement par -3 et 1), on obtient

$$\frac{a_{tt}}{a} - \frac{a_t^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} + 4\pi G(\rho + p) = 0. \quad (2.23)$$

La dérivation de (2.20) par rapport au temps nous donne

$$4\pi G\rho_t = 3\frac{a_t}{a} \left(\frac{a_{tt}}{a} - \frac{a_t^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} \right). \quad (2.24)$$

En combinant (1.11) et (2.24), on obtient l'équation de conservation

$$\rho_t + 3\frac{a_t}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.25)$$

C'est bel et bien le résultat que donne la composante temporelle de l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion,

$$D_\nu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu T^{\rho\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\nu T^{\mu\rho} = 0. \quad (2.26)$$

L'équation (2.25) est équivalente à

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}a^3 = 0. \quad (2.27)$$

Si l'Univers est dominé par la matière non relativiste, $p \ll \rho$, (2.27) mène alors à

$$\rho \propto \frac{1}{a^3}. \quad (2.28)$$

Pour un univers dominé par la matière relativiste tel que les photons, $p = \rho/3$, (rayonnement du corps noir), (2.27) mène à

$$\rho \propto \frac{1}{a^4}. \quad (2.29)$$

Pour un univers dominé par l'énergie du vide, la densité ρ serait indépendante du temps et (2.25) donnerait alors

$$p = -\rho. \quad (2.30)$$

2.4 Propagation des photons

Ici, nous considérons les trajectoires des photons qui voyagent de galaxies lointaines vers nous, à l'origine. Ce problème est particulièrement simple car on doit seulement imposer $d\tau^2 = 0$. Considérons un photon émis à $(t, \chi, \theta, \varphi)$ puis détecté à l'origine $(t_0, \chi_0 = 0, \theta_0, \varphi_0)$ sur Terre. Ceci implique que $t_0 > t$. Prenons le cas d'un chemin radial, ce qui signifie que $\theta = \theta_0$ et $\varphi = \varphi_0$. L'équation (2.4) se réduit alors à

$$0 = d\tau^2 = dt^2 - a(t)^2 d\chi^2, \quad (2.31)$$

ce qui donne

$$\frac{d\chi}{dt} = \pm \frac{1}{a(t)}. \quad (2.32)$$

Comme le photon se rapproche du détecteur, $d\chi$ est forcément négatif et on doit choisir parmi les deux possibilités (2.32) celle avec un signe moins. Donc,

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{1}{a(t)}. \quad (2.33)$$

En intégrant (2.33), on obtient

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.34)$$

où $\chi(t)$ représente la distance géodésique du photon entre le point d'émission et l'origine sur Terre. Si on est en possession de l'expression de $a(t)$, on peut alors évaluer $\chi(t)$ pour un instant donné t . Pour des galaxies émettrice et réceptrice suffisamment proches de telle manière qu'on puisse négliger la variation de $a(t)$ entre l'instant d'émission et l'instant de réception du photon, (2.34) se simplifie en

$$a_0 \chi = t_0 - t, \quad (2.35)$$

qui dit simplement que le temps de vol est égal à la distance parcourue par un photon, dans un système d'unités où c vaut 1.

La relation (2.34) permet également d'accéder au décalage spectral. Considérons un premier photon émis à l'instant t par une galaxie ou un amas de galaxie et reçu sur Terre à l'instant t_0 . Considérons un deuxième photon émis à l'instant $t + 1/\nu$ où ν est la fréquence du rayonnement à l'émission. Ce deuxième photon sera reçu sur Terre à un instant $t_0 + 1/\nu_0$ avec ν_0 la fréquence à la réception. Comme la distance géodésique est la même pour les deux photons, nous avons

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+1/\nu}^{t_0+1/\nu_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+1/\nu}^t \frac{dt}{a(t)} + \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+1/\nu_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.36)$$

En négligeant la variation de $a(t)$ sur les intervalles $(t, t + 1/\nu)$ et $(t_0, t_0 + 1/\nu_0)$, on obtient

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{a_0}{a}, \quad (2.37)$$

ou, comme les fréquences et les longueurs d'onde sont inversement proportionnelles,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a}. \quad (2.38)$$

Le décalage spectral z est défini comme

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda}. \quad (2.39)$$

D'où,

$$1 + z = \frac{a_0}{a}. \quad (2.40)$$

Si $z > 0$, on parle de décalage spectral vers le rouge ou redshift et si $z < 0$, on parle de décalage spectral vers le bleu ou blueshift.

Pour obtenir χ en fonction du décalage spectral z , on fait le changement de variables $dt = da/a_t$ dans (2.34). On obtient alors

$$\chi(z) = \int_{\frac{a_0}{1+z}}^{a_0} \frac{da}{aa_t}, \quad (2.41)$$

où a_t est donné par l'équation de Friedmann (2.20). Cette expression (2.41) est utile car c'est le décalage spectral d'une galaxie qui est observé et non pas l'instant d'émission du photon.

Chapitre 3

Modèle d'Einstein-Straus à courbure spatiale négative (cas pseudo sphérique $k = -1$)

Quand on étudie les petites régions de l'Univers, on ne peut pas utiliser l'hypothèse de la distribution isotrope et homogène de la matière. La métrique dans une telle région, dans laquelle il y a une perturbation dans la distribution de matière, diffère de la métrique de FLRW (2.1). Le plus connu des modèles construits pour ces régions est celui d'Einstein-Straus [6] et aussi les modèles caractérisés par la métrique de McVittie [24, 25]. Dans de tels modèles, les galaxies ou les amas de galaxies (lentille) seront représentés par une condensation de matière plongée dans un fluide parfait. Le modèle d'Einstein-Straus est plus adapté à l'étude d'une seule condensation à symétrie sphérique placée au centre d'une sphère vide régie par la solution de Kottler. C'est un modèle à vacuole. La vacuole étant immergée dans un fluide parfait décrit par la métrique de FLRW.

Le modèle d'Einstein-Straus permet de s'affranchir des hypothèses utilisées par Rindler et Ishak [26]. On permet à l'observateur et à la source de se déplacer par rapport à la lentille

et les masses des autres amas de galaxies sont incluses sous forme d'une poussière isotrope et homogène. La métrique d'Einstein-Straus est une solution des équations d'Einstein qui raccorde la solution de Kottler à l'intérieur du rayon de Schücking [7] avec la solution de FLRW à l'extérieur.

On va s'intéresser dans ce chapitre au modèle d'Einstein-Straus en présence d'une constante cosmologique mais en considérant une courbure spatiale négative, $k = -1$, pour la métrique de FLRW. Commençons par raccorder les métriques de FLRW et de Kottler sur la sphère de Schücking via le calcul du Jacobien de la transformation des coordonnées de Friedmann aux coordonnées de Schwarzschild, en suivant le travail de Schücker [27].

3.1 Raccordement de la solution de FLRW avec la solution de Kottler

La métrique de Kottler en coordonnées (T, r, θ, φ) (1.21)

$$ds^2 = B(r)dT^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (3.1)$$

s'applique à l'intérieur d'une vacuole de rayon $r_{Schü}(T)$ centrée autour d'une distribution de masse M à symétrie sphérique (la lentille) avec

$$r \leq r_{Schü}. \quad (3.2)$$

La métrique de FLRW en coordonnées $(t, \chi, \theta, \varphi)$ pour un espace pseudo sphérique ($k = -1$) (2.4)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2), \quad (3.3)$$

décrit la géométrie de l'espace-temps à l'extérieur de la vacuole,

$$\chi \geq \chi_{Schü}, \quad (3.4)$$

où le facteur d'échelle $a(t)$ est déterminé par intégration numérique de l'équation de Friedmann (2.20)

$$\frac{da}{dt} = f(a), \quad f(a) = \sqrt{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2 - k}, \quad (3.5)$$

avec A une constante donnée par

$$3A = \rho a^3, \quad (3.6)$$

pour un univers dominé par la matière non relativiste (2.28).

On raccorde la métrique de Kottler (3.1) à la métrique de Friedmann (3.3) sur le rayon constant de Schücking,

$$r_{Schü}(T) = a(t) \sinh \chi_{Schü}. \quad (3.7)$$

La masse M s'exprime en termes du rayon de Schücking, compte tenu de (3.6) et (3.7), comme

$$M = \frac{4}{3}\pi r_{Schü}^3 \rho = 4\pi A \sinh^3 \chi_{Schü}, \quad (3.8)$$

qui donne

$$\chi_{Schü} = \operatorname{arcsinh} \left[\left(\frac{M}{4\pi A} \right)^{1/3} \right]. \quad (3.9)$$

Donc, on a sur la sphère de Schücking

$$B_{Schü} = B(r_{Schü}) = 1 - \left(\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2 \right) \sinh^2 \chi_{Schü}. \quad (3.10)$$

Pour raccorder les deux solutions, on procède de manière similaire au cas plat. On va passer des coordonnées de Friedmann (t, χ) et de Schwarzschild (T, r) au nouveau système de coordonnées (b, r) .

Réécrivons d'abord la métrique de FLRW dans le système de coordonnées (a, χ) ,

$$ds^2 = \frac{da^2}{f(a)^2} - a^2 d\chi^2 - a^2 \sinh^2 \chi d\Omega^2. \quad (3.11)$$

On transforme le facteur $a^2 \sinh^2 \chi$ devant $d\Omega^2$ en r^2 sous le changement de coordonnées $(a, \chi) \rightarrow (b, r)$,

$$a = \Phi(b, r), \quad \sinh \chi = r/\Phi(b, r), \quad (3.12)$$

avec la condition aux limites, qu'en le rayon de Schücking, l'ancienne coordonnée de temps coïncide avec la nouvelle coordonnée de temps,

$$a = b = \Phi(b, b \sinh \chi_{Schü}). \quad (3.13)$$

La métrique de FLRW devient alors

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{bb}^F db^2 - g_{rr}^F dr^2 - 2g_{br}^F dbdr - r^2 d\Omega^2 \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b} \right)^2 \left(\frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{1+r^2/\Phi^2} \frac{r^2}{\Phi^2} \right) db^2 - \left[\frac{1}{1+r^2/\Phi^2} \left(1 - \frac{r}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{C_1^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right] dr^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial b} \left[\frac{1}{1+r^2/\Phi^2} \frac{r}{\Phi} \left(1 - \frac{r}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] dbdr - r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec

$$C_1 = \sqrt{\frac{A}{\Phi} + \frac{\Lambda}{3} \Phi^2 + 1}. \quad (3.15)$$

On veut que le terme mixte soit nul (métrique diagonale), c'est-à-dire que $g_{br}^F = 0$. Ceci se traduit par

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{r}{\Phi} \frac{C_1^2}{B_1}, \quad B_1 = 1 - \left(\frac{A}{\Phi^3} + \frac{\Lambda}{3} \right) r^2. \quad (3.16)$$

La métrique de FLRW prend alors la forme

$$ds^2 = \frac{1}{1+r^2/\Phi^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b} \right)^2 \frac{B_1}{C_1^2} db^2 - \frac{1}{B_1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.17)$$

En dérivant (3.13) par rapport à b , on obtient en $\chi = \chi_{Schü}$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial b} \right|_{Schü} = 1 - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{Schü} \sinh \chi_{Schü} = \frac{\cosh^2 \chi_{Schü}}{B_{Schü}}. \quad (3.18)$$

Considérons maintenant la solution de Kottler (3.1). Passons des coordonnées (T, r) aux coordonnées (b, r) en posant

$$\frac{dT}{db} = \Psi(b). \quad (3.19)$$

La métrique de Kottler se réécrit alors en coordonnées (b, r, θ, φ) comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{bb}^K db^2 - g_{rr}^K dr^2 - r^2 d\Omega^2 \\ &= B\Psi(b)^2 db^2 - \frac{1}{B} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Raccordons maintenant les deux solutions de FLRW (3.17) et de Kottler (3.20) dans ce système de coordonnées, (b, r, θ, φ) , de manière continue sur la sphère de Schücking et pour des temps arbitraires. Ceci est équivalent à écrire

$$g_{bb}^F|_{Schü} = g_{bb}^K|_{Schü}, \quad g_{rr}^F|_{Schü} = g_{rr}^K|_{Schü}. \quad (3.21)$$

On peut montrer facilement que

$$B_1|_{Schü} = B_{Schü}, \quad C_1|_{Schü} = \frac{C_{Schü}}{\tanh \chi_{Schü}}, \quad (3.22)$$

où on définit $C_{Schü}$ comme

$$C_{Schü} = \sqrt{1 - \frac{B_{Schü}}{\cosh^2 \chi_{Schü}}}. \quad (3.23)$$

Il résulte des relations (3.21) que

$$\Psi(b) = \frac{\sinh \chi_{Schü}}{B_{Schü}(b)C_{Schü}(b)}. \quad (3.24)$$

Un usage répété de la dérivée d'une fonction composée donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial T} &= \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial T}, & \frac{\partial t}{\partial r} &= \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T} &= \frac{\partial \chi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial T}, & \frac{\partial \chi}{\partial r} &= \frac{1}{\cosh \chi} \left(\frac{1}{\Phi} - \frac{r}{\Phi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right).\end{aligned}\quad (3.25)$$

D'où le Jacobien de la transformation de coordonnées $(T, r) \rightarrow (t, \chi)$ en le rayon de Schü-cking $\chi = \chi_{Schü}$,

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|_{Schü} &= \cosh \chi_{Schü}, & \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{Schü} &= -\frac{C_{Schü} \cosh \chi_{Schü}}{B_{Schü}}, \\ \left. \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|_{Schü} &= -\frac{C_{Schü} \cosh \chi_{Schü}}{a}, & \left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|_{Schü} &= \frac{\cosh \chi_{Schü}}{a B_{Schü}},\end{aligned}\quad (3.26)$$

ou sous forme matricielle

$$\left(\begin{array}{cc} \cosh \chi_{Schü} & -\frac{C_{Schü} \cosh \chi_{Schü}}{B_{Schü}} \\ -\frac{C_{Schü} \cosh \chi_{Schü}}{a} & \frac{\cosh \chi_{Schü}}{a B_{Schü}} \end{array} \right).\quad (3.27)$$

Le Jacobien de la transformation inverse $(t, \chi) \rightarrow (T, r)$ est donné par l'inverse de la matrice (3.27), c'est-à-dire par

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\cosh \chi_{Schü}}{B_{Schü}} & \frac{a C_{Schü} \cosh \chi_{Schü}}{B_{Schü}} \\ C_{Schü} \cosh \chi_{Schü} & a \cosh \chi_{Schü} \end{array} \right),\quad (3.28)$$

ou, en explicitant,

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{Schü} &= \frac{\cosh \chi_{Schü}}{B_{Schü}}, & \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|_{Schü} &= \frac{a C_{Schü} \cosh \chi_{Schü}}{B_{Schü}}, \\ \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{Schü} &= C_{Schü} \cosh \chi_{Schü}, & \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|_{Schü} &= a \cosh \chi_{Schü}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Pour comparer le temps de Friedmann t au temps de Kottler T sur la sphère de Schü-

cking $\chi = \chi_{Sch\ddot{u}}$, on considère la courbe paramétrée, $T = p$, $r = b \sinh \chi_{Sch\ddot{u}}$ ($\theta = \pi/2$ et $\varphi = 0$). Sa 4-vitesse est doonée dans les coordonnées de Schwarzschild par

$$\frac{dT}{dp} = 1, \quad \frac{dr}{dp} = \frac{dr}{db} \frac{db}{dT} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dT}{dp} = \sinh \chi_{Sch\ddot{u}} \frac{1}{\Psi(b)} \cdot 1 = B_{Sch\ddot{u}} C_{Sch\ddot{u}}, \quad (3.30)$$

et dans les coordonnées de Friedmann par

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dp} &= \frac{\partial t}{\partial T} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dT}{dp} + \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dr}{dp} \\ &= \cosh \chi_{Sch\ddot{u}} \cdot 1 - \frac{C_{Sch\ddot{u}}}{B_{Sch\ddot{u}}} \cosh \chi_{Sch\ddot{u}} B_{Sch\ddot{u}} C_{Sch\ddot{u}} \\ &= \frac{B_{Sch\ddot{u}}}{\cosh \chi_{Sch\ddot{u}}}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dp} &= \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dT}{dp} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dr}{dp} \\ &= -\frac{C_{Sch\ddot{u}}}{a} \cosh \chi_{Sch\ddot{u}} \cdot 1 + \frac{\cosh \chi_{Sch\ddot{u}}}{a B_{Sch\ddot{u}}} B_{Sch\ddot{u}} C_{Sch\ddot{u}} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Finalement, on déduit la relation

$$\frac{dt}{dT} \Big|_{Sch\ddot{u}} = \frac{dt}{dp} \frac{dp}{dT} = \frac{B_{Sch\ddot{u}}}{\cosh \chi_{Sch\ddot{u}}}, \quad (3.33)$$

qui permet de passer du temps de Friedmann au temps de Schwarzschild et inversement.

3.2 Géodésiques et déviation de la lumière

En présence de la constante cosmologique et d'une courbure spatiale non nulle, des solutions analytiques exactes de l'équation de Friedmann (3.5) pour le temps cosmique $t(a)$ peuvent être obtenues en termes des intégrales elliptiques de deuxième et de troisième

espèce dont la fonction inverse, le facteur d'échelle $a(t)$, n'est pas connue. Néanmoins, on peut alternativement procéder à une résolution numérique. Nous allons donc déterminer le facteur d'échelle $a(t)$ par intégration numérique de l'équation de Friedmann avec la condition $a(t = 0) = a_0$.

Comme le montre la Fig. 3-1, on va s'intéresser à une situation de deux photons émis par la source S (typiquement un quasar) aux instants t_S et t'_S et arrivent à l'entrée de la sphère de Schücking du côté de la source aux instants t_{SchuS} et t'_{SchuS} , puis ces photons pénètrent la la sphère de Schücking où règne la géométrie de Kottler pour arriver à la sortie de celle-ci du côté de la Terre aux instants t_{SchuE} et t'_{SchuE} après avoir subi l'effet de la gravitation créé par une lentille L qui sera typiquement un amas de galaxies (ou, en langage relativiste, l'effet de la courbure de l'espace-temps à proximité de la masse de l'amas de galaxies). En conséquence, les trajectoires des deux photons seront déviées aux péri-lentille r_P et r'_P , qui sont beaucoup plus grandes que le rayon de Schwarzschild ($2GM$). Dans le cas concret auquel on appliquera notre calcul, à savoir le système lentille-quasar SDSS J1004+4112, le rapport $2GM/r_P$ est de l'ordre de 10^{-5} , ce qui fait que les termes d'ordre supérieur peuvent être sûrement négligés. Ensuite, les photons continuent leurs chemins dans la géométrie de FLRW pour arriver finalement sur Terre E aux instants t_E et t'_E sous des angles bien connus α_E et α'_E .

Comme ce sont les conditions d'arrivée des photons sur Terre (conditions finales) qui sont connues, on intégrera les équations de la géodésique à reculons, de la Terre jusqu'à la sphère de Schücking, puis à l'intérieur de la sphère de Schücking et enfin de la sphère de Schücking jusqu'à la source.

On souhaite également synchroniser l'arrivée des deux photons sur Terre à l'instant zéro, $t_E = t'_E = 0$, afin de faciliter davantage les calculs. Cela veut dire que le temps de retard de l'un des photons par rapport à l'autre se réduit à la différence entre les instants d'émission en la source. On définit alors $\Delta t = t'_S - t_S$ comme le temps de retard qu'on voudrait calculer.

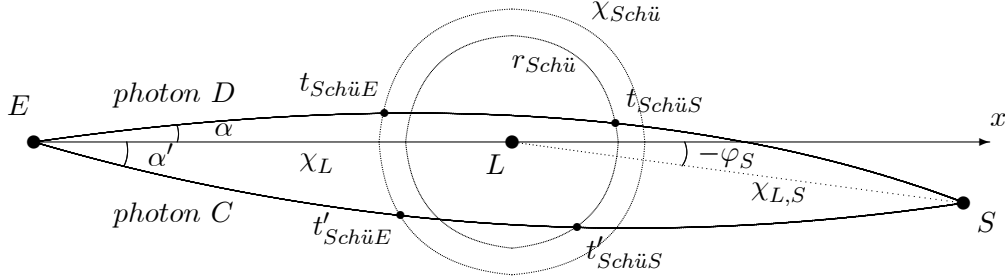


Fig. 3-1 Les trajectoires des deux photons sont déviées par la courbure spatiale à l'extérieur de la vacuole.

Avant d'aller plus loin, on montre, tout d'abord, comment calculer les distances géodésiques qui séparent la Terre, la lentille et la source dans un espace-temps purement FLRW. Pour cela, on doit résoudre numériquement l'équation radiale ($\Delta\varphi = 0$) (2.33)

$$d\chi = -\frac{dt}{a(t)}, \quad (3.34)$$

issue de la métrique de FLRW pour un photon ($ds^2 = 0$). Le signe moins assure que les distances géodésiques diminuent au fur et à mesure que le photon se rapproche de la Terre (2.33). Mais, le membre de droite de cette équation dépend de la solution $a(t)$ de l'équation de Friedmann qui n'est pas connue. On peut contourner ce problème en introduisant la fonction $f(a)$ via l'équation de Friedmann $dt = da/f(a)$ (3.5) pour obtenir (2.41),

$$\chi(z) = \int_{\frac{a_0}{1+z}}^{a_0} \frac{da}{af(a)}, \quad (3.35)$$

où on a utilisé la formule du redshift $1 + z = a_0/a$ et pris l'origine $\chi(z = 0) = 0$ sur Terre. Ainsi, les distances géodésiques Terre-lentille χ_L et Terre-source χ_S se calculent

respectivement par

$$\chi_L = \chi(z_L) = \int_{\frac{a_0}{1+z_L}}^{a_0} \frac{da}{af(a)}, \quad (3.36)$$

et

$$\chi_S = \chi(z_S) = \int_{\frac{a_0}{1+z_S}}^{a_0} \frac{da}{af(a)}. \quad (3.37)$$

Généralement, l'angle d'inclinaison de la source $-\varphi_S$ est très petit et est, dans le cas du système SDSS J1004+4112, de l'ordre de quelques secondes d'arc ($\sim 10^{-5}$). Cela nous permet de calculer approximativement la distance géodésique entre la lentille-source $\chi_{L,S}$ comme

$$\chi_{L,S} = \chi_S - \chi_L. \quad (3.38)$$

Tout le travail qui suit consiste à déterminer les instants $t_{SchüE}$ et $t'_{SchüE}$, puis $t_{SchüS}$ et $t'_{SchüS}$ pour calculer l'angle $-\varphi_S$ et finalement t_S et t'_S pour le calcul du temps de retard (Fig. 3-1).

3.2.1 Géodésiques de la lumière entre la sphère de Schücking et la Terre

Dans cette région, la trajectoire du photon est régie par la métrique de FLRW pour un espace pseudo courbe (3.3). Les équations de la géodésique dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$ s'écrivent comme (voir Annexe B)

$$\ddot{t} + aa_t(\dot{\chi}^2 + \sinh^2 \chi \dot{\varphi}^2) = 0, \quad (3.39)$$

$$\ddot{\chi} + 2\frac{a_t}{a}\dot{t}\dot{\chi} - \cosh \chi \sinh \chi \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (3.40)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\left(\frac{a_t}{a}\dot{t} + \coth \chi \dot{\chi}\right)\dot{\varphi} = 0. \quad (3.41)$$

On note qu'ici que comme le cas plat, il n'est pas nécessaire d'intégrer la deuxième équation.

Le photon du chemin du haut α_E arrivera sur Terre avec les conditions finales ($p = 0$)

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \chi = \chi_L, \quad \varphi = \pi, \\ \dot{t} = 1, \quad \dot{\chi} = \frac{1}{a_0 \sqrt{1 + \cosh^2 \chi_L \tan^2 \alpha_E}}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\coth \chi_L \tan \alpha_E}{a_0 \sqrt{1 + \cosh^2 \chi_L \tan^2 \alpha_E}}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

où on a utilisé le fait que l'angle physique α_E coïncide avec l'angle de coordonnée

$$\alpha_E = \arctan \left| r_E \frac{d\varphi}{dr(r_E)} \right| = \arctan \left| \tanh \chi_L \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\chi}} \right|_E, \quad (3.43)$$

ainsi que l'expression de la métrique de FLRW pour un photon ($ds = 0$),

$$\dot{t}^2/a^2 = \dot{\chi}^2 + \sinh^2 \chi \dot{\varphi}^2. \quad (3.44)$$

Il convient de noter que pour déterminer ces conditions finales, on a tenu compte du fait que χ et φ entre la Terre et la sphère de Schücking sont des fonctions croissantes du temps t .

En utilisant (3.44), l'équation (3.39) se réduit à

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{t} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a}, \quad (3.45)$$

qui s'intègre, en tenant compte des conditions finales (3.42), pour donner

$$\dot{t} = a_0/a(t). \quad (3.46)$$

L'équation (3.41) peut se réécrire comme

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{\varphi} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a^2 \sinh^2 \chi}, \quad (3.47)$$

qui s'intègre, en tenant compte des conditions finales (3.42), pour donner

$$\dot{\varphi} = \frac{a_0 \chi_P}{a^2 \sinh^2 \chi}, \quad (3.48)$$

où χ_P est une constante définie par

$$\chi_P = \frac{\cosh \chi_L \sinh \chi_L \tan \alpha_E}{\sqrt{1 + \cosh^2 \chi_L \tan^2 \alpha_E}}. \quad (3.49)$$

L'expression (3.44) devient, en utilisant l'expression de \dot{t} (3.46),

$$a_0/a^2 = \sqrt{\dot{\chi}^2 + \sinh^2 \chi \dot{\varphi}^2}. \quad (3.50)$$

En substituant ce dernier résultat dans l'expression de $\dot{\varphi}$ (3.48), on obtient, sachant que χ entre la Terre et la sphère de Schücking croît avec φ ,

$$d\varphi = \frac{\chi_P}{\sinh^2 \chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \chi_P^2 / \sinh^2 \chi}}, \quad (3.51)$$

qui se simplifie, en posant

$$x = \frac{\chi_P \coth \chi}{\sqrt{1 + \chi_P^2}}, \quad (3.52)$$

en

$$d\varphi = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (3.53)$$

Donc, compte tenu des conditions finales (3.42), l'intégration de (3.53) donne

$$\varphi = \pi - \arcsin \frac{\chi_P \coth \chi}{\sqrt{1 + \chi_P^2}} + \beta, \quad (3.54)$$

où β est une constante définie par

$$\beta = \arcsin \frac{\chi_P \coth \chi_L}{\sqrt{1 + \chi_P^2}}. \quad (3.55)$$

D'où

$$\varphi_{SchüE} = \pi - \arcsin \frac{\chi_P \coth \chi_{Schü}}{\sqrt{1 + \chi_P^2}} + \beta. \quad (3.56)$$

Dans le cas plat, la distance parcourue par le photon entre le point de sortie de la vacuole et le point d'arrivée sur Terre, notée par $\chi_{E,SchüE}$ (ou $\chi'_{E,SchüE}$), est calculée au moyen de certaines propriétés de la géométrie Euclidienne qui ne sont plus valables dans un espace courbe ou pseudo courbe, puisque les distances géodésiques ne sont plus des lignes droites (Fig. 3-1). La même remarque vaut pour la distance parcourue par le photon entre la source et son point d'entrée dans la vacuole ($\chi_{S,SchüS}$ et $\chi'_{S,SchüS}$). Pour cette raison, nous avons développé une méthode basée uniquement sur les équations différentielles, qui reste valable aussi bien pour un espace plat que pour un espace courbe ou pseudo courbe.

Maintenant, nous allons établir l'équation qui relie la variable χ au facteur d'échelle a . Nous avons d'après (3.44) (ou (3.50)) l'équation

$$\frac{dt}{a} = \sqrt{d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\varphi^2}, \quad (3.57)$$

qui se transforme, compte tenu de l'équation de Friedmann (3.5) et de l'expression (3.51), en

$$\frac{da}{af(a)} = \frac{d\chi}{g(\chi)}, \quad g(\chi) = \sqrt{1 - \chi_P^2 / \sinh^2 \chi}, \quad (3.58)$$

sachant que χ entre la Terre et la sphère de Schücking augmente au cours du temps. Cette dernière équation se simplifie encore, en utilisant le changement de variable

$$x = \frac{\cosh \chi}{\sqrt{1 + \chi_P^2}}, \quad (3.59)$$

en

$$\frac{da}{af(a)} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (3.60)$$

qui s'intègre en

$$\int_{a_{SchüE}}^{a_0} \frac{da}{af(a)} = \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_L}{\sqrt{1 + \chi_P^2}} - \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{Schü}}{\sqrt{1 + \chi_P^2}}. \quad (3.61)$$

On détermine la valeur de $a_{SchüE}$ par intégration numérique du membre de gauche de (3.61) et ensuite la valeur de $t_{SchüE}$ par intégration numérique de l'équation de Friedmann (3.5), c'est-à-dire

$$t_{SchüE} = \int_{a_0}^{a_{SchüE}} \frac{da}{f(a)}. \quad (3.62)$$

Nous rappelons qu'une équation reliant la variable φ au temps peut être établie de la même manière que précédemment et sert à déduire la valeur de $t_{SchüE}$ en utilisant l'angle polaire au point de sortie de la vacuole (3.56).

La 4-vitesse du photon à la sortie de la sphère de Schücking, compte tenu de (3.46), (3.48) et (3.58), est

$$\dot{t}_{SchüE} = \frac{a_0}{a_{SchüE}}, \quad \dot{\chi}_{SchüE} = \frac{a_0 g_{Schü}}{a_{SchüE}^2}, \quad \dot{\varphi}_{SchüE} = \frac{a_0 \chi_P}{r_{SchüE}^2}, \quad (3.63)$$

en coordonnées de Friedmann avec $g_{Schü} = g(\chi_{Schü})$ et $r_{SchüE} = a_{SchüE} \sinh \chi_{Schü}$. Cette 4-vitesse s'écrit, grâce au Jacobien inverse (3.29), en coordonnées de Schwarzschild comme

$$\begin{aligned} \dot{T}_{SchüE} &= \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{SchüE} \dot{t}_{SchüE} + \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|_{SchüE} \dot{\chi}_{SchüE} \\ &= a_0 \cosh \chi_{Schü} \frac{1 + C_{SchüE} g_{Schü}}{a_{SchüE} B_{SchüE}}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{SchüE} &= \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{SchüE} \dot{t}_{SchüE} + \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|_{SchüE} \dot{\chi}_{SchüE} \\ &= a_0 \cosh \chi_{Schü} \frac{C_{SchüE} + g_{Schü}}{a_{SchüE}}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

avec $C_{SchüE} = C_{Schü}(t_{SchüE})$ (3.23) et $B_{SchüE} = B_{Schü}(t_{SchüE})$ (3.10).

On définit γ_{KE} comme le plus petit angle de coordonnée entre la direction du photon α_E et la direction dirigée vers la lentille en le point de sortie du photon de la sphère de Schücking,

$$\gamma_{KE} = \arctan \left| r_{SchüE} \frac{\dot{\varphi}_{SchüE}}{\dot{r}_{SchüE}} \right| = \arctan \frac{\chi_P (C_{SchüE} + g_{Schü})^{-1}}{\cosh \chi_{Schü} \sinh \chi_{Schü}}. \quad (3.66)$$

Pour intégrer la trajectoire du photon α'_E , on suit le même raisonnement que pour la trajectoire du photon α_E . Les conditions finales sur Terre sont obtenues en remplaçant π par $-\pi$ et α_E par $-\alpha'_E$,

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \chi = \chi_L, \quad \varphi = -\pi, \\ \dot{t} = 1, \quad \dot{\chi} = \frac{1}{a_0 \sqrt{1 + \cosh^2 \chi_L \tan^2 \alpha'_E}}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\coth \chi_L \tan \alpha'_E}{a_0 \sqrt{1 + \cosh^2 \chi_L \tan^2 \alpha'_E}}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

ce qui permet d'intégrer les équations de la géodésique (3.39) et (3.41) pour obtenir

$$\dot{t} = \frac{a_0}{a(t)}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{a_0 \chi'_P}{a^2 \sinh^2 \chi}, \quad \varphi = -\pi + \arcsin \frac{\chi'_P \coth \chi}{\sqrt{1 + \chi'^2_P}} - \beta', \quad (3.68)$$

où χ'_P et β' sont des constantes définies par

$$\chi'_P = \frac{\cosh \chi_L \sinh \chi_L \tan \alpha'_E}{\sqrt{1 + \cosh^2 \chi_L \tan^2 \alpha'_E}}, \quad \beta' = \arcsin \frac{\chi'_P \coth \chi_L}{\sqrt{1 + \chi'^2_P}}. \quad (3.69)$$

D'où,

$$\varphi'_{SchüE} = -\pi + \arcsin \frac{\chi'_P \coth \chi_{Schü}}{\sqrt{1 + \chi'^2_P}} - \beta'. \quad (3.70)$$

De même, l'équation qui relie la variable χ au facteur d'échelle a s'obtient en faisant

usage des solutions (3.68), l'équation de Friedmann (3.5) et (3.44),

$$\frac{da}{af(a)} = \frac{d\chi}{g'(\chi_{Schü})}, \quad g'(\chi) = \sqrt{1 - \chi_P'^2 / \sinh^2 \chi}, \quad (3.71)$$

qui s'intègre, en utilisant le même changement de variable (3.59), pour donner

$$\int_{a'_{SchüE}}^{a_0} \frac{da}{af(a)} = \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_L}{\sqrt{1 + \chi_P'^2}} - \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{Schü}}{\sqrt{1 + \chi_P'^2}}. \quad (3.72)$$

On détermine la valeur de $a'_{SchüE}$ par intégration numérique du membre de gauche de (3.72), puis la valeur de $t'_{SchüE}$ par intégration numérique de l'équation de Friedmann (3.5),

$$t'_{SchüE} = \int_{a_0}^{a'_{SchüE}} \frac{da}{f(a)}. \quad (3.73)$$

Cependant, on peut procéder de manière différente sans calcul numérique supplémentaire, comme dans le cas plat, pour obtenir le temps $t'_{SchüE}$. La méthode consiste à déterminer $t'_{SchüE}$ par différence avec $t_{SchüE}$ via une expression analytique approchée. Les équations (3.61) et (3.72) peuvent se réécrire respectivement comme

$$\int_{t_{SchüE}}^0 \frac{dt}{a(t)} = \chi_{E,SchüE}, \quad (3.74)$$

$$\int_{t'_{SchüE}}^0 \frac{dt}{a(t)} = \chi'_{E,SchüE}, \quad (3.75)$$

avec

$$\chi_{E,SchüE} = \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_L}{\sqrt{1 + \chi_P'^2}} - \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{Schü}}{\sqrt{1 + \chi_P'^2}}, \quad (3.76)$$

$$\chi'_{E,SchüE} = \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_L}{\sqrt{1 + \chi_P'^2}} - \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{Schü}}{\sqrt{1 + \chi_P'^2}}. \quad (3.77)$$

En combinant (3.74) et (3.75), on trouve

$$\chi'_{E,SchüE} - \chi_{E,SchüE} = \int_{t'_{SchüE}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{t_{SchüE} - t'_{SchüE}}{a_{SchüE}}, \quad (3.78)$$

où on a utilisé le fait que le facteur d'échelle a ne varie de manière significative que sur des échelles de temps cosmologiques. Une approximation plausible pourrait être faite dans la limite où les péri-lentilles sont très petits devant l'unité, $\chi_P \ll 1$ et $\chi'_P \ll 1$ (de l'ordre de 10^{-6} dans notre cas). On obtient au deuxième ordre en χ_P et χ'_P , compte tenu des expressions de $\chi_{E,SchüE}$ et de $\chi'_{E,SchüE}$, (3.76) et (3.77),

$$\chi'_{E,SchüE} - \chi_{E,SchüE} \simeq \frac{1}{2}(\coth \chi_{Schü} - \coth \chi_L)(\chi_P'^2 - \chi_P^2). \quad (3.79)$$

Ceci d'une part. D'autre part, dans l'approximation $\alpha_E \ll 1$ et $\alpha'_E \ll 1$, on a, en combinant les expressions de χ_P et χ'_P , (3.49) et (3.69),

$$\chi_P'^2 - \chi_P^2 \simeq \cosh^2 \chi_L \sinh^2 \chi_L (\alpha_E'^2 - \alpha_E^2). \quad (3.80)$$

En remplaçant $\chi_P'^2 - \chi_P^2$ par son expression (3.80) dans (3.79), on obtient

$$\chi'_{E,SchüE} - \chi_{E,SchüE} \simeq \frac{1}{2} \cosh^2 \chi_L \sinh^2 \chi_L (\coth \chi_{Schü} - \coth \chi_L) (\alpha_E'^2 - \alpha_E^2) \quad (3.81)$$

$$\simeq \frac{1}{2} \cos^2 \chi_L \frac{\sinh \chi_L \sinh(\chi_L - \chi_{Schü})}{\sinh \chi_{Schü}} (\alpha_E'^2 - \alpha_E^2). \quad (3.82)$$

D'où alors, d'après (3.78),

$$t_{SchüE} - t'_{SchüE} \simeq \frac{1}{2} a_{SchüE} \cos^2 \chi_L \frac{\sinh \chi_L \sinh(\chi_L - \chi_{Schü})}{\sinh \chi_{Schü}} (\alpha_E'^2 - \alpha_E^2). \quad (3.83)$$

Donc, la donnée de la valeur de $t_{SchüE}$, (3.62), permet de déduire la valeur de $t'_{SchüE}$ à partir de cette expression approchée. Si $\alpha'_E > \alpha_E$, le photon du chemin du bas quitte la vacuole avant celui du chemin du haut, comme dans le cas plat. La valeur du facteur

d'échelle en $t'_{SchüE}$, $a'_{SchüE} \equiv a(t'_{SchüE})$, se calcule par intégration numérique de l'équation (3.73).

La 4-vitesse du photon à la sortie de la sphère de Schücking compte tenu de (3.68) est

$$\dot{t}'_{SchüE} = \frac{a_0}{a'_{SchüE}}, \quad \dot{\chi}'_{SchüE} = \frac{a_0 g'_{Schü}}{a'^2_{SchüE}}, \quad \dot{\varphi}'_{SchüE} = -\frac{a_0 \chi'_P}{r'^2_{SchüE}}, \quad (3.84)$$

en coordonnées de Friedmann avec $g'_{Schü} = g'(\chi_{Schü})$ et $r'_{SchüE} = a'_{SchüE} \sinh \chi_{Schü}$. Cette 4-vitesse s'écrit, grâce au Jacobien inverse (3.29), en coordonnées de Schwarzschild comme

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{SchüE} &= \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{SchüE} \dot{t}'_{SchüE} + \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|_{SchüE} \dot{\chi}'_{SchüE} \\ &= a_0 \cosh \chi_{Schü} \frac{1 + C'_{SchüE} g'_{Schü}}{a'_{SchüE} B'_{SchüE}}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}'_{SchüE} &= \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{SchüE} \dot{t}'_{SchüE} + \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|_{SchüE} \dot{\chi}'_{SchüE} \\ &= a_0 \cosh \chi_{Schü} \frac{C'_{SchüE} + g'_{Schü}}{a'_{SchüE}}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

avec $C'_{SchüE} = C_{Schü}(t'_{SchüE})$ (3.23) et $B'_{SchüE} = B_{Schü}(t'_{SchüE})$ (3.10).

On définit γ'_{KE} comme le plus petit angle de coordonnée entre la direction du photon “ α_E ” et la direction dirigée vers la lentille en le point de sortie du photon de la sphère de Schücking,

$$\gamma'_{KE} = \arctan \left| r'_{SchüE} \frac{\dot{\varphi}'_{SchüE}}{\dot{r}'_{SchüE}} \right| = \arctan \frac{\chi_P (C'_{SchüE} + g'_{Schü})^{-1}}{\cosh \chi_{Schü} \sinh \chi_{Schü}}. \quad (3.87)$$

3.2.2 Géodésiques de la lumière à l'intérieur de la sphère de Schücking

A l'intérieur de la sphère de Schücking, où s'applique la métrique de Kottler, nous allons faire usage des résultats obtenue au premier chapitre à condition de remplacer t par T . Ce que nous allons faire, c'est calculer les facteurs d'échelle $a_{SchüS}$ et $a'_{SchüS}$, puis leurs temps correspondants $t_{SchüS}$ et $t'_{SchüS}$ aux points d'entrée dans la sphère de Schücking

en prenant en considération les conditions finales aux points de sortie de la sphère de Schücking qui sont maintenant entièrement déterminées. Les expressions utilisées sont très proches de celles obtenues dans le cas plat [27, 28] et le cas sphérique [29], au point que même certaines d'entre-elles préservent la même forme à l'exception de celles qui dérivent de la relation entre le temps de Schwarzschild et celui de Friedmann (3.33).

Les équations partiellement intégrées de la géodésique, dans l'espace-temps de Kottler, sont données par (1.30), (1.34) et (1.32) avec (1.36),

$$\dot{T} = \frac{1}{B(r)}, \quad \dot{r} = \pm \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r^2} \frac{B(r)}{B(r_P)}}, \quad \dot{\varphi} = \frac{r_P}{r^2 \sqrt{B(r_P)}}, \quad (3.88)$$

où r_P est le péri-lentille et est donné par une expression approchée (voir Annexe C),

$$r_P \simeq r_{SchüE} \sin \gamma_{KE} - GM. \quad (3.89)$$

Le temps de trajet du photon α_E à l'intérieur de la vacuole, du point d'entrée au point de sortie, peut être obtenu en utilisant l'équation

$$dT = \pm \frac{dr}{v(r)}, \quad v(r) = \frac{B(r)}{\sqrt{B(r_P)}} \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r^2} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}}, \quad (3.90)$$

qui résulte immédiatement de l'élimination du paramètre affine entre \dot{T} et \dot{r} (3.88). L'intégrale du membre de droite de (3.90) peut être divisée en deux intégrales, étant donné que r décroît au cours du temps de $r_{SchüS}$ à r_P alors qu'il croît de r_P à $r_{SchüE}$,

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} = \int_{r_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v(r)} + \int_{r_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v(r)}, \quad (3.91)$$

où $r_{SchüE}$ et $r_{SchüS}$ sont reliés à $a_{SchüE}$ et à $a_{SchüS}$ respectivement, par la condition de raccordement (3.7).

Une autre expression pour ce temps de trajet peut être obtenue en utilisant la relation

entre le temps de Schwarzschild et celui de Friedmann (3.33),

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} = \cosh \chi_{Schü} \int_{t_{SchüS}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)}, \quad (3.92)$$

qui est équivalente à

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} = \cosh \chi_{Schü} \int_{a_{SchüS}}^{a_{SchüE}} \frac{da}{B_{Schü}(a)f(a)}, \quad (3.93)$$

car $dt = da/f(a)$. Il s'ensuit de (3.91) et (3.93) que

$$\int_{r_P}^{a_{SchüE} \sinh \chi_{Schü}} \frac{dr}{v(r)} + \int_{r_P}^{a_{SchüS} \sinh \chi_{Schü}} \frac{dr}{v(r)} = \cosh \chi_{Schü} \int_{a_{SchüS}}^{a_{SchüE}} \frac{da}{B_{Schü}(a)f(a)}, \quad (3.94)$$

ce qui nous permet d'obtenir $a_{SchüS}$ par intégration numérique. Il faut ensuite intégrer numériquement l'équation de Friedmann pour obtenir $t_{SchüS}$,

$$t_{SchüS} = \int_{a_0}^{a_{SchüS}} \frac{da}{f(a)}. \quad (3.95)$$

En suivant le même raisonnement que pour la trajectoire du photon α_E , on obtient pour la trajectoire du photon α'_E des formules similaires. Le temps $t'_{SchüS}$ est déterminé par intégration numérique de l'équation de Friedmann,

$$t'_{SchüS} = \int_{a_0}^{a'_{SchüS}} \frac{da}{f(a)}, \quad (3.96)$$

où le facteur d'échelle $a'_{SchüS}$ est fourni en résolvant numériquement l'équation

$$\int_{r'_P}^{a'_{SchüE} \sinh \chi_{Schü}} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r'_P}^{a'_{SchüS} \sinh \chi_{Schü}} \frac{dr}{v'(r)} = \cosh \chi_{Schü} \int_{a'_{SchüS}}^{a'_{SchüE}} \frac{da}{B_{Schü}(a)f(a)}, \quad (3.97)$$

où la fonction $v'(r)$ est définie par une expression analogue à (3.90) à condition que r_P soit

remplacé par r'_P , qui est donné par une expression approchée analogue à (3.89),

$$r'_P \simeq r'_{SchüE} \sin \gamma'_{KE} - GM. \quad (3.98)$$

Cependant, on peut éviter de calculer numériquement $t'_{SchüS}$ en suivant la même méthode d'approximation décrite au chapitre précédent dans le cas plat. Le temps $t'_{SchüS}$ pourrait être déterminé par différence avec $t_{SchüS}$ via une expression analytique approchée. D'abord, grâce à la relation entre le temps de Schwarzschild T et le temps de Friedmann t (3.33), on peut exprimer la différence des temps de trajet des deux photons à l'intérieur de la vacuole comme

$$\begin{aligned} T_{SchüE} - T_{SchüS} - (T'_{SchüE} - T'_{SchüS}) &= \cosh \chi_{Schü} \int_{t'_{SchüE}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)} \\ &\quad - \cosh \chi_{Schü} \int_{t'_{SchüS}}^{t_{SchüS}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)} \\ &\simeq \cosh \chi_{Schü} \frac{t_{SchüE} - t'_{SchüE}}{B_{SchüE}} \\ &\quad - \cosh \chi_{Schü} \frac{t_{SchüS} - t'_{SchüS}}{B_{SchüS}}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

où nous avons utilisé le fait que $B_{Schü}$ ne varie sensiblement que sur des intervalles de temps cosmologiques avec $B_{SchüS} = B_{Schü}(t_{SchüS})$. Nous pouvons également utiliser (3.90) pour écrire cette différence de temps de trajet comme

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} - (T'_{SchüE} - T'_{SchüS}) = \Delta T_K + \int_{r'_{SchüE}}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r'_{SchüS}}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v'(r)}, \quad (3.100)$$

où nous avons décomposé les intégrales pour produire l'intégrale suivante

$$\Delta T_K = \int_{r_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v(r)} + \int_{r_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v(r)} - \left(\int_{r'_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r'_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v'(r)} \right), \quad (3.101)$$

qui est presque identique à une expression déjà impliquée dans le calcul du temps de retard

par Schücker et Zaimen dans le cadre de la solution de Kottler, à condition que r_E , r_S , r_0 et r'_0 soient respectivement remplacés par $r_{SchüE}$, $r_{SchüS}$, r_0 et r'_0 [30]. Le résultat de cette intégrale est

$$\Delta T_K \simeq \frac{r'_P{}^2 - r_P^2}{2} \left(\frac{1}{r_{SchüE}} + \frac{1}{r_{SchüS}} \right) + 4GM \ln \frac{r'_P}{r_P} - 3 \left(\frac{2GM}{r_P} \right)^2 \frac{r'_P{}^2 - r_P^2}{8r'_P{}^2} \times \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left[\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_{SchüE} \right) + \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_{SchüS} \right) \right], \quad (3.102)$$

De plus, comme nous travaillons sur des échelles de longueur et de temps plus petites que les échelles cosmologiques,

$$\int_{r'_{SchüE}}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v'(r)} \simeq \frac{r_{SchüE} - r'_{SchüE}}{v'_{SchüE}}, \quad \int_{r'_{SchüS}}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v'(r)} \simeq \frac{r_{SchüS} - r'_{SchüS}}{v'_{SchüS}}, \quad (3.103)$$

et, en utilisant l'équation de Friedmann,

$$\begin{aligned} r_{SchüE} - r'_{SchüE} &= (a_{SchüE} - a'_{SchüE}) \sinh \chi_{Schü} \\ &\simeq f_{SchüE} \sinh \chi_{Schü} (t_{SchüE} - t'_{SchüE}), \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} r_{SchüS} - r'_{SchüS} &= (a_{SchüS} - a'_{SchüS}) \sinh \chi_{Schü} \\ &\simeq f_{SchüS} \sinh \chi_{Schü} (t_{SchüS} - t'_{SchüS}), \end{aligned} \quad (3.105)$$

avec $v'_{SchüE} = v'(r_{SchüE})$, $v'_{SchüS} = v'(r_{SchüS})$, $f'_{SchüE} = f(a'_{SchüE})$ et $f'_{SchüS} = f(a'_{SchüS})$. En utilisant ceci avec (3.102), (3.100) et (3.99), nous obtenons donc

$$t'_{SchüS} - t_{SchüS} \simeq \frac{\Delta T_K + \left(\frac{f_{SchüE} \sinh \chi_{Schü}}{v'_{SchüE}} - \frac{\cosh \chi_{Schü}}{B_{SchüE}} \right) (t_{SchüE} - t'_{SchüE})}{\frac{f_{SchüS} \sinh \chi_{Schü}}{v'_{SchüS}} + \frac{\cosh \chi_{Schü}}{B_{SchüS}}}. \quad (3.106)$$

Ainsi, la connaissance de $t_{SchüS}$ permet de déduire $t'_{SchüS}$ sachant que $t_{SchüE} - t'_{SchüE}$ est donné par (3.83). La même remarque que pour le cas plat vaut ici pour le cas courbe:

Malgré que le photon du chemin du haut précède celui du chemin du bas pour arriver à la vacuole, le photon du chemin du bas sort de la vacuole le premier, puisque le photon du chemin du haut subit plus fortement l'effet gravitationnel ($r_P < r'_P$) comme montré sur la Fig. 3-1.

On doit également calculer les angles $\varphi_{SchüS}$ et $\varphi'_{SchüS}$ ainsi que les 4-vitesses avec lesquels les deux photons pénètrent dans la vacuole, dont on a besoin pour la section suivante. Il faudrait utiliser l'équation bien connue (1.37)

$$d\varphi = \pm \frac{dr}{u(r)}, \quad u(r) = r \sqrt{\frac{r^2}{r_P^2} - 1} \sqrt{1 - \frac{M}{4\pi r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}, \quad (3.107)$$

qui découle de (3.88), où la constante cosmologique disparaît accidentellement. Etant donné que l'angle φ augmente lorsque le photon du haut se rapproche ou s'éloigne de la lentille, l'intégrale du membre de droite de (3.107) le long de la trajectoire peut être décomposée comme suit,

$$\varphi_{SchüE} - \varphi_{SchüS} = \int_{r_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{u(r)} + \int_{r_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{u(r)}, \quad (3.108)$$

et donne au premier ordre en $2GM/r_P$

$$\begin{aligned} \varphi_{SchüS} \simeq & \varphi_{SchüE} - \pi + \arcsin \frac{r_P}{r_{SchüE}} + \arcsin \frac{r_P}{r_{SchüS}} - \frac{GM}{r_P} \left(\sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2}} + \right. \\ & \left. \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{SchüS}^2}} + \sqrt{\frac{r_{SchüE} - r_P}{r_{SchüE} + r_P}} + \sqrt{\frac{r_{SchüS} - r_P}{r_{SchüS} + r_P}} \right), \end{aligned} \quad (3.109)$$

où $\varphi_{SchüE}$ est donné par (3.56). De la même manière, on obtient pour la trajectoire du bas,

$$\begin{aligned} \varphi'_{SchüS} \simeq & \varphi'_{SchüE} + \pi - \arcsin \frac{r'_P}{r'_{SchüE}} - \arcsin \frac{r'_P}{r'_{SchüS}} + \frac{GM}{r'_P} \left(\sqrt{1 - \frac{r_P'^2}{r_{SchüE}'^2}} + \right. \\ & \left. \sqrt{1 - \frac{r_P'^2}{r_{SchüS}'^2}} + \sqrt{\frac{r'_{SchüE} - r'_P}{r'_{SchüE} + r'_P}} + \sqrt{\frac{r'_{SchüS} - r'_P}{r'_{SchüS} + r'_P}} \right), \end{aligned} \quad (3.110)$$

où $\varphi_{SchüE}$ est donné par (3.70). Compte tenu de (3.88), les deux 4-vitesse des photons α_E et α'_E aux points d'entrée dans la vacuole sont respectivement

$$\dot{T}_{SchüS} = \frac{1}{B_{SchüS}}, \quad \dot{r}_{SchüS} = -\sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}}, \quad \dot{\varphi}_{SchüS} = \frac{r_P}{r_{SchüS}^2 \sqrt{B(r_P)}}, \quad (3.111)$$

et

$$\dot{T}'_{SchüS} = \frac{1}{B'_{SchüS}}, \quad \dot{r}'_{SchüS} = -\sqrt{1 - \frac{r_P'^2 B'_{SchüS}}{r_{SchüS}'^2 B(r'_P)}}, \quad \dot{\varphi}'_{SchüS} = \frac{-r'_P}{r_{SchüS}'^2 \sqrt{B(r'_P)}}, \quad (3.112)$$

en coordonnées de Schwarzschild, où nous avons pris en compte le fait que r décroît au cours du temps puisque les deux photons s'approchent de la lentille, tandis que φ croît au cours du temps pour le photon α_E et décroît pour le photon α'_E , avec $C_{SchüS} = C_{Schü}(t_{SchüS})$, $C'_{SchüS} = C_{Schü}(t'_{SchüS})$ (3.23), $B_{SchüS} = B_{Schü}(t_{SchüS})$ et $B'_{SchüS} = B_{Schü}(t'_{SchüS})$ (3.10). Ces deux 4-vitesse se transforment, grâce au Jacobien (3.26), en coordonnées de Friedmann en

$$\begin{aligned} \dot{t}_{SchüS} &= \left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|_{SchüS} \dot{T}_{SchüS} + \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{SchüS} \dot{r}_{SchüS} \\ &= \frac{\cosh \chi_{Schü}}{B_{SchüS}} \left(1 + C_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}} \right), \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_{SchüS} &= \left. \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|_{SchüS} \dot{T}_{SchüS} + \left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|_{SchüS} \dot{r}_{SchüS} \\ &= \frac{-\cosh \chi_{Schü}}{a_{SchüS} B_{SchüS}} \left(C_{SchüS} + \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}} \right), \end{aligned} \quad (3.114)$$

pour la trajectoire du haut et,

$$\begin{aligned} \dot{t}'_{SchüS} &= \frac{\partial t}{\partial T} \Big|_{SchüS} \dot{T}'_{SchüS} + \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{SchüS} \dot{r}'_{SchüS} \\ &= \frac{\cosh \chi_{Schü}}{B'_{SchüS}} \left(1 + C'_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r_P'^2 B'_{SchüS}}{r_{SchüS}'^2 B(r'_P)}} \right), \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}'_{SchüS} &= \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{SchüS} \dot{T}'_{SchüS} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{SchüS} \dot{r}'_{SchüS} \\ &= \frac{-\cosh \chi_{Schü}}{a'_{SchüS} B'_{SchüS}} \left(C'_{SchüS} + \sqrt{1 - \frac{r_P'^2 B'_{SchüS}}{r_{SchüS}'^2 B(r'_P)}} \right), \end{aligned} \quad (3.116)$$

pour la trajectoire du bas.

3.2.3 Géodésiques de la lumière entre la source et la sphère de Schücking

Encore une fois, dans cette région dans laquelle règne la métrique de Friedmann, nous devons suivre la même procédure que précédemment dans la sous-section 3.2.1. On intègre les géodésiques de Friedmann (3.39) et (3.41) pour le chemin du haut en tenant compte des conditions finales au point d'entrée dans la sphère de Schücking,

$$\begin{aligned} t &= t_{SchüS}, & \chi &= \chi_{Schü}, & \varphi &= \varphi_{SchüS}, \\ \dot{t} &= \dot{t}_{SchüS}, & \dot{\chi} &= \dot{\chi}_{SchüS}, & \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}_{SchüS}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Une combinaison appropriée de (3.44) et (3.39) permet d'obtenir

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{t} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a}, \quad (3.118)$$

qui s'intègre en tenant compte des conditions finales (3.117) pour donner

$$\dot{t} = E/a, \quad (3.119)$$

avec E une constante définie par

$$E = \dot{t}_{Schüs} a_{Schüs} = \frac{a_{Schüs} \cosh \chi_{Schü}}{B_{Schüs}} \left(1 + C_{Schüs} \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{Schüs}}{r_{Schüs}^2 B(r_P)}} \right). \quad (3.120)$$

L'équation (3.41) se simplifie, en remplaçant \dot{t} par son expression (3.119), en

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{\varphi} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a^2 \sinh^2 \chi}, \quad (3.121)$$

qui s'intègre compte tenu des conditions finales (3.117) pour donner

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{a^2 \sinh^2 \chi}, \quad (3.122)$$

où la constante J est définie par

$$J = \dot{\varphi}_{Schüs} a_{Schüs}^2 \sinh^2 \chi_{Schü} = \frac{r_P}{\sqrt{B(r_P)}}. \quad (3.123)$$

En remplaçant l'expression de \dot{t} (3.119) dans (3.44), on obtient,

$$a^2 = E / \sqrt{\dot{\chi}^2 + \sinh^2 \chi \dot{\varphi}^2}. \quad (3.124)$$

En substituant ce dernier résultat dans l'expression de $\dot{\varphi}$ (3.122), on trouve,

$$\dot{\varphi} = -\frac{J/E}{\sinh^2 \chi} \frac{\dot{\chi}}{\sqrt{1 - (J/E)^2 / \sinh^2 \chi}}, \quad (3.125)$$

en tenant compte du fait que pour la trajectoire du haut χ diminue au fur et à mesure que φ augmente. L'équation (3.125) se réduit, en utilisant le changement de variable

$$x = \frac{(J/E) \coth \chi}{\sqrt{1 + (J/E)^2}}, \quad (3.126)$$

à

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (3.127)$$

qui par intégration, compte tenu des conditions finales (3.117), donne

$$\varphi = \varphi_{SchüS} + \arcsin \frac{(J/E) \coth \chi}{\sqrt{1+(J/E)^2}} - \gamma, \quad (3.128)$$

avec la constante

$$\gamma = \arcsin \frac{(J/E) \coth \chi_{Schü}}{\sqrt{1+(J/E)^2}}. \quad (3.129)$$

On en déduit alors l'expression de l'angle φ_S

$$\varphi_S = \varphi_{SchüS} + \arcsin \frac{(J/E) \coth \chi_{L,S}}{\sqrt{1+(J/E)^2}} - \gamma, \quad (3.130)$$

où la distance géodésique $\chi_{L,S}$ entre la lentille et la source est donnée par (3.38).

Le même raisonnement que pour le chemin du photon α_E donne pour le chemin du photon α'_E l'expression

$$\varphi = \varphi'_{SchüS} - \arcsin \frac{(J'/E') \coth \chi}{\sqrt{1+(J'/E')^2}} + \gamma', \quad (3.131)$$

où les constantes E' , J' et γ' sont définies par

$$E' = \dot{t}'_{SchüS} a'_{SchüS} = \frac{a'_{SchüS} \cosh \chi_{Schü}}{B'_{SchüS}} \left(1 + C'_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r'^2_P B'_{SchüS}}{r'^2_{SchüS} B(r'_P)}} \right) \quad (3.132)$$

$$J' = -\dot{\varphi}'_{SchüS} r'^2_{SchüS} = \frac{r'_P}{\sqrt{B(r'_P)}}, \quad (3.133)$$

$$\gamma' = \arcsin \frac{(J'/E') \coth \chi_{Schü}}{\sqrt{1+(J'/E')^2}}. \quad (3.134)$$

Par conséquent, l'expression de l'angle φ'_S est

$$\varphi'_S = \varphi'_{SchüS} - \arcsin \frac{(J'/E') \coth \chi_{L,S}}{\sqrt{1 + (J'/E')^2}} + \gamma'. \quad (3.135)$$

En général, les angles φ_S et φ'_S ne sont pas égaux. Pour satisfaire à l'égalité $\varphi_S = \varphi'_S$ qui correspond au fait que les deux photons partent du même point, la source, on ajuste la masse M . En d'autres termes, on fait varier la masse M jusqu'à ce que les deux angles φ_S et φ'_S coïncident. Une fois que la masse M appropriée et l'angle φ_S sont déterminés, on passe à la détermination du temps de retard.

Temps de retard

Le temps de retard du photon α_E par rapport au photon α'_E est défini par

$$\Delta t = (t_E - t_S) - (t'_E - t'_S) = t'_S - t_S, \quad (3.136)$$

avec $t_E = t'_E = 0$. Donc, cela revient à déterminer les temps d'émission des deux photons, t_S et t'_S . Pour ce faire, il faut d'abord calculer les distances parcourues par les photons entre la source et leurs points d'entrée dans la vacuole, $\chi_{S,SchüS}$ et $\chi'_{S,SchüS}$.

Commençons par établir l'équation qui lie la variable χ au facteur d'échelle a pour la trajectoire du haut. L'équation (3.57),

$$\frac{dt}{a} = \sqrt{d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\varphi^2}, \quad (3.137)$$

devient, en faisant usage de (3.125) et en tenant compte du fait que χ entre la source et la sphère the Schücking diminue au cours du temps t ,

$$\frac{dt}{a} = -\frac{d\chi}{h(\chi)}, \quad h(\chi) = \sqrt{1 - (J/E)^2 / \sinh^2 \chi}, \quad (3.138)$$

qui est équivalent à

$$\frac{da}{af(a)} = -\frac{d\chi}{h(\chi)}. \quad (3.139)$$

Cette équation se simplifie, grâce au changement de variable

$$x = \frac{\cosh \chi}{\sqrt{1 + (J/E)^2}}, \quad (3.140)$$

en

$$\frac{da}{af(a)} = -\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (3.141)$$

qui s'intègre facilement pour donner

$$\int_{a_S}^{a_{SchüS}} \frac{da}{af(a)} = \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{L,S}}{\sqrt{1 + (J/E)^2}} - \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{Schü}}{\sqrt{1 + (J/E)^2}}. \quad (3.142)$$

Comme prévu, ce résultat est similaire à (3.61) à condition que χ_L et χ_P soient respectivement remplacés par $\chi_{L,S}$ et J/E . On détermine alors par intégration numérique la valeur du facteur d'échelle à l'instant d'émission du photon a_S et ensuite la valeur de t_S par intégration numérique de l'équation de Friedmann (3.5),

$$t_S = \int_{a_0}^{a_S} \frac{da}{f(a)}. \quad (3.143)$$

De la même manière, on trouve pour le chemin du bas l'équation

$$\int_{a'_S}^{a'_{SchüS}} \frac{da}{af(a)} = \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{L,S}}{\sqrt{1 + (J'/E')^2}} - \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{Schü}}{\sqrt{1 + (J'/E')^2}}, \quad (3.144)$$

qui permet de calculer numériquement la valeur du facteur d'échelle à l'instant d'émission du photon a'_S et ensuite la valeur de t'_S par intégration numérique de l'équation de Friedmann (3.5),

$$t'_S = \int_{a_0}^{a'_S} \frac{da}{f(a)}. \quad (3.145)$$

On peut également déterminer le temps t'_S par différence via une expression analytique approchée en termes du temps t_S . Les équations (3.142) et (3.144) peuvent s'écrire comme

$$\int_{t_S}^{t_{Schüs}} \frac{dt}{a(t)} = \chi_{S,Schüs}, \quad (3.146)$$

$$\int_{t'_S}^{t'_{Schüs}} \frac{dt}{a(t)} = \chi'_{S,Schüs}, \quad (3.147)$$

avec

$$\chi_{S,Schüs} = \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{L,S}}{\sqrt{1 + (J/E)^2}} - \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{Schü}}{\sqrt{1 + (J/E)^2}}, \quad (3.148)$$

$$\chi'_{S,Schüs} = \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{L,S}}{\sqrt{1 + (J'/E')^2}} - \operatorname{arccosh} \frac{\cosh \chi_{Schü}}{\sqrt{1 + (J'/E')^2}}. \quad (3.149)$$

En combinant (3.146) et (3.147), on trouve

$$\chi'_{S,Schüs} - \chi_{S,Schüs} = \int_{t_{Schüs}}^{t'_{Schüs}} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_S}^{t'_S} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{t'_{Schüs} - t_{Schüs}}{a_{Schüs}} - \frac{t'_S - t_S}{a_S}, \quad (3.150)$$

où on a utilisé le fait que le facteur d'échelle a ne varie de manière significative que sur des échelles de temps cosmologiques. Ceci d'une part. D'autre part, on a au deuxième ordre en J/E et J'/E' ($\sim 10^{-6}$), compte tenu des expressions de $\chi_{E,SchüE}$ et de $\chi'_{E,SchüE}$, (3.148) et (3.149),

$$\chi'_{S,Schüs} - \chi_{S,Schüs} \simeq \frac{1}{2}(\coth \chi_{Schü} - \coth \chi_{L,S})[(J'/E')^2 - (J/E)^2]. \quad (3.151)$$

Ceci d'une part. D'autre part, on a en combinant (3.130) et (3.135) dans la même approximation,

$$(J'/E')^2 - (J/E)^2 \simeq \frac{(\varphi'_{Schüs} - \varphi_S)^2 - (\varphi_{Schüs} - \varphi_S)^2}{(\coth \chi_{Schü} - \coth \chi_{L,S})^2}, \quad (3.152)$$

où $\varphi_{Schüs} - \varphi_S$ et $|\varphi'_{Schüs} - \varphi_S|$ sont de l'ordre de 10^{-2} . En remplaçant $(J'/E')^2 - (J/E)^2$

par son expression (3.152) dans (3.151), on obtient

$$\chi'_{S,Schüs} - \chi_{S,Schüs} \simeq \frac{1}{2} \frac{(\varphi'_{Schüs} - \varphi_S)^2 - (\varphi_{Schüs} - \varphi_S)^2}{\coth \chi_{Schü} - \coth \chi_{L,S}}. \quad (3.153)$$

D'où alors, d'après (3.150), l'expression du temps de retard

$$\Delta t = t'_S - t_S \simeq a_S \left[\frac{t'_{Schüs} - t_{Schüs}}{a_{Schüs}} - \frac{1}{2} \frac{(\varphi'_{Schüs} - \varphi_S)^2 - (\varphi_{Schüs} - \varphi_S)^2}{\coth \chi_{Schü} - \coth \chi_{L,S}} \right]. \quad (3.154)$$

En résumé, le photon du chemin du haut, après avoir été le premier émis par la source $t'_S > t_S$ (3.154), pénètre également en premier dans la vacuole $t'_{Schüs} > t_{Schüs}$ (3.106), mais il en sort le dernier $t_{SchüE} > t'_{SchüE}$ (3.83) de telle manière à arriver sur Terre en même temps que le photon du chemin du bas $t_E = t'_E = 0$.

3.3 Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112

On applique maintenant nos résultats au système lentille-quasar SDSS J1004+4112 comme illustré sur la Fig. 3-2 découverte par Inada *et al* [31], où l'on voit clairement un effet de lentille gravitationnelle fort causé par un amas de galaxies indiqué par une croix au cœur de l'image de Redshift $z_L = 0.68$ (visible via les rayons X), et qui a donné lieu à l'apparition de cinq images identiques (ayant la même luminosité et le même spectre électromagnétique) d'un même quasar situé à l'arrière-plan de Redshift $z_S = 1.734$ [32, 33, 34, 35]. On s'intéresse seulement à la séparation très large, celle entre les images C et D, de 15 secondes d'arc environ, avec $\alpha = 5'' \pm 10\%$, pour l'image D et $\alpha' = 10'' \pm 10\%$ pour l'image C.

On suppose que l'amas de galaxies est sphérique, malgré le fait que la présence de cinq images implique forcément que l'amas de galaxies ne l'est pas.

Pour des raisons numériques, on choisit un système d'unités où les temps seront mesurés en astrosecondes (as), les distances en astromètres (am) et les masses en astrogrammes (ag)

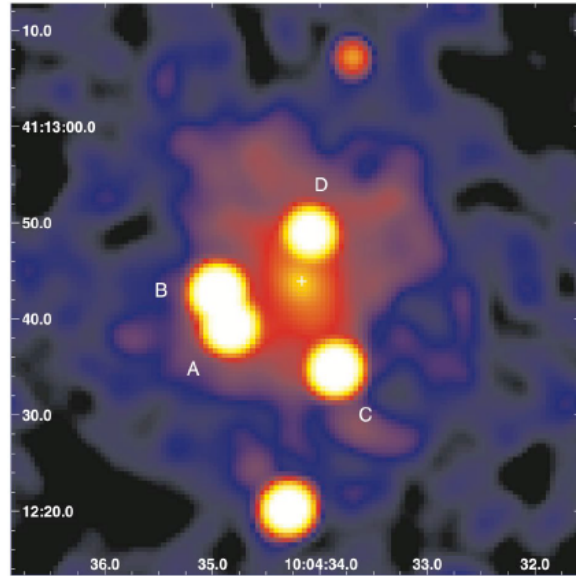


Fig. 3-2 Images multiples du quasar SDSS J1004+4112. SDSS (Sloan Digital Sky Survey).

avec

$$\begin{aligned}
 1 \text{ as} &= 4.34 \cdot 10^{17} \text{ s} = 13.8 \text{ Gyr}, \\
 1 \text{ am} &= 1.30 \cdot 10^{26} \text{ m} = 4221 \text{ Mpc}, \\
 1 \text{ ag} &= 6.99 \cdot 10^{51} \text{ kg} = 3.52 \cdot 10^{21} M_{\odot}.
 \end{aligned}
 \tag{3.155}$$

Dans ce système d'unités, on a

$$c = 1 \text{ am as}^{-1}, \quad 8\pi G = 1 \text{ am}^3 \text{ as}^{-2} \text{ ag}^{-1}, \quad H_0 = 1 \text{ as}^{-1},
 \tag{3.156}$$

où H_0 est la constante de Hubble. La loi de Hubble

$$\dot{a}(t) = H_0 a(t),
 \tag{3.157}$$

devient alors sur Terre

$$a_t(0) = a_0, \quad (3.158)$$

Il s'ensuit, en remplaçant dans (3.5), que

$$\rho_0 = 3 - \Lambda - 3a_0^{-2}, \quad A = \rho_0 a_0^3 / 3 = (1 - \Lambda/3)a_0^3 - a_0, \quad (3.159)$$

$$\rho_0 = 3 - \Lambda + 3\Omega_{k0}, \quad \Omega_{k0} = \frac{k}{a_0^2} = -\frac{1}{a_0^2}, \quad 3A = \rho_0 a_0^3 = (3 - \Lambda)a_0^3 - 3a_0, \quad (3.160)$$

où les paramètres ρ_0 , a_0 et Ω_{k0} sont respectivement la densité de poussière actuelle, le facteur d'échelle actuel et la densité de courbure actuelle. On va opter pour cette valeur de la constante cosmologique

$$\Lambda = 1.36 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2} \pm 20\% \quad (3.161)$$

$$= 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} \pm 20\%. \quad (3.162)$$

Donc, pour une densité de poussière définie positive $\rho_0 > 0$, il faut que les valeurs du facteur d'échelle actuel satisfassent à la condition

$$a_0 > \frac{1}{\sqrt{1 - \Lambda/3}} \simeq 2.1 \text{ am}. \quad (3.163)$$

Les distances Terre-lentille χ_L , Terre-source χ_S et lentille-source $\chi_{L,S}$ seront calculées à partir de (3.36), (3.37) et (3.38).

Dans le but d'étudier l'effet de la constante cosmologique sur la déviation de la lumière, on fait le choix d'une valeur particulière du facteur d'échelle sur Terre $a_0 = 5 \text{ am}$ et on ajuste la masse M afin d'obtenir l'égalité $\varphi_S = \varphi'_S$, pour les valeurs maximale '+', centrale ' ± 0 ' et minimale '-' de Λ ainsi que des angles α_E et α'_E . Une fois que l'angle φ_S et la masse M appropriée sont déterminés, on calcule le temps de retard du photon α_E par rapport au photon α'_E , en appliquant la méthode de calcul par différence. Les résultats sont consignés

dans les tableaux 3.1, 3.2, 3.3.

Les résultats obtenus peuvent être résumés comme suit

$$1.48 \cdot 10^{13} M_{\odot} \leq M \leq 2.25 \cdot 10^{13} M_{\odot}, \quad (3.164)$$

$$6.31'' \leq -\varphi_S \leq 13.79'', \quad (3.165)$$

$$6.75 \text{ ans} \leq \Delta t \leq 13.10 \text{ ans}. \quad (3.166)$$

Comme on le voit directement sur les tableaux 3.1, 3.2, 3.3, une constante cosmologique croissante dans sa barre d'erreur entraîne une diminution de l'angle de déviation, comme on peut s'y attendre : une augmentation de Λ de 20% diminue l'angle de déviation $-\varphi_S$ de 9% environ, puisque et cette variation ne fait qu'augmenter ou diminuer la masse de l'amas de galaxies de 1% environ. Ceci est en accord avec l'affirmation de Rindler et Ishak [17, 26] selon laquelle une constante cosmologique positive atténue la déviation de la lumière. Mais, en même temps, la valeur de la masse est presque trois fois plus petite que celle obtenue par l'observation [31, 32].

Les tableaux (3.4) et (3.5) montrent comment la masse, l'angle de déviation et le temps de retard varient en fonction des différentes valeurs du facteur d'échelle actuel a_0 , en prenant les valeurs centrales de Λ , α_E et α'_E . Contrairement au cas du modèle d'Einstein-Straus plat dans lequel les résultats restent les mêmes quelle que soit la valeur du facteur d'échelle actuel, les résultats obtenus dans le cas du modèle d'Einstein-Straus pseudo sphérique indiquent que la masse, l'angle de déviation et le temps de retard augmentent considérablement au fur et à mesure que le facteur d'échelle actuel a_0 diminue au-dessous d'une valeur limite proche de 19 am (correspondant à une densité de courbure actuelle $\Omega_{k0} \simeq -0.003$), alors qu'au-dessus de cette valeur limite, les résultats deviennent indépendants de a_0 et compatibles avec le cas plat. Idem pour toutes les valeurs possibles de Λ , α_E et α'_E dans leurs barres d'erreur. Il convient de noter que ni la valeur de a_0 ni celle de Λ ne peuvent faire coïncider les angles φ_{Ss} , bien qu'elles aient un effet sur l'angle de déviation et le

temps de retard. Les prédictions pour le temps de retard dans le cas plat sont compatibles avec la limite inférieure observationnelle $\Delta\tau > 7.7$ [35]. Il vaut la peine de mentionner ici le résultat de Kawano et Oguri $\Delta t_{CD} \lesssim 10.14$ ans [34] obtenu dans un modèle qui tient compte de la non-sphéricité de la lentille pour inclure les images A et B mais avec une constante cosmologique nulle.

$\alpha \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13} M_{\odot}]$	2.21	2.01	1.81	2.01	1.83	1.64	1.81	1.64	1.48
$-\varphi_S['']$	9.89	8.10	6.31	10.79	8.99	7.20	11.68	9.89	8.09
$\Delta t[\text{ans}]$	12.11	9.41	6.92	12.66	10.01	7.56	13.10	10.50	8.11

Tab. 3.1 Valeur maximale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} + 20\%$, $a_0 = 5 \text{ am}$.

$\alpha \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13} M_{\odot}]$	2.25	2.04	1.84	2.04	1.86	1.67	1.84	1.67	1.50
$-\varphi_S['']$	11.00	9.01	7.01	12.00	10.00	8.01	12.99	11.00	9.00
$\Delta t[\text{ans}]$	12.06	9.37	6.90	12.58	9.96	7.53	13.00	10.44	8.07

Tab. 3.2 Valeur centrale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2}$, $a_0 = 5 \text{ am}$.

$\alpha \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13} M_{\odot}]$	2.22	2.02	1.82	2.02	1.84	1.65	1.82	1.63	1.49
$-\varphi_S['']$	11.68	9.56	7.44	12.74	10.62	8.50	13.79	12.12	9.55
$\Delta t[\text{ans}]$	11.78	9.17	6.75	12.30	9.74	7.37	12.69	9.96	7.89

Tab. 3.3 Valeur minimale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} - 20\%$, $a_0 = 5 \text{ am}$.

a_0 [am]	2.1	2.3	2.5	2.7	2.8	2.9	3	4	5	6
M [$10^{13}M_\odot$]	2.02	1.98	1.96	1.94	1.93	1.92	1.92	1.87	1.86	1.84
$-\varphi_S$ ["]	10.10	10.08	10.07	10.06	10.06	10.05	10.05	10.02	10.00	9.99
Δt [years]	11.30	11.01	10.79	10.62	10.55	10.49	10.44	10.11	9.96	9.88

Tab. 3.4 $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2}, \alpha_E = 5'', \alpha'_E = 10''$.

a_0 [am]	7	8	9	10	12	15	19	30	44	100
M [$10^{13}M_\odot$]	1.84	1.83	1.83	1.83	1.83	1.83	1.82	1.82	1.82	1.82
$-\varphi_S$ ["]	9.99	9.98	9.98	9.98	9.98	9.98	9.97	9.97	9.97	9.97
Δt [years]	9.84	9.81	9.79	9.77	9.75	9.74	9.73	9.72	9.71	9.71

Tab. 3.5 $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2}, \alpha_E = 5'', \alpha'_E = 10''$.

Conclusion générale

Ce mémoire de Master comporte un travail de recherche réalisés dans le cadre de la gravitation et la cosmologie. Il s'agit d'une étude de la déviation de la lumière et du temps de retard dans le cadre du modèle non statique d'Einstein-Straus en présence d'une courbure spatiale négative et une constante cosmologique.

La constante cosmologique semble, de prime abord, ne pas avoir un effet sur la déviation de la lumière, du fait qu'elle se trouve éliminée de l'équation orbitale. Rindler et Ishak ont remis en cause cette croyance généralement admise jusqu'alors: Il faut tenir compte également de la métrique de Kottler elle-même dans le calcul de l'angle de déviation. Une fois qu'elle est prise en compte, une relation entre l'angle de coordonnée et l'angle physique s'est mise en place pour réintroduire la constante cosmologique. Il est dès lors conclu qu'une constante cosmologique positive diminue effectivement l'angle de déviation de la lumière.

Dans le chapitre un, on a d'abord dû reprendre les calculs de Rindler et d'Ishak après avoir intégré les équations de la géodésique dans le plan équatorial. La raison étant que la relation entre l'angle de coordonnée et l'angle physique est indispensable pour la suite. Ensuite, on s'est focalisé sur l'étude de l'effet de lentille gravitationnelle fort causé par un amas de galaxies L sur deux photons (deux images) émis par une source S , typiquement un quasar, située en arrière-plan. Les deux photons suivent des trajectoires différentes et arrivent sur Terre E sous des angles physiques observés α_E et α'_E après avoir été courbés par à l'intérieur d'une vacuole centrée autour d'un amas de galaxies.

Un modèle plus approprié à l'étude de l'effet de lentille gravitationnelle est celui d'Einstein-

Straus qui combine la métrique homogène et isotrope de FLRW régnant à l'extérieur de la sphère de Schücking avec la métrique de Kottler à l'intérieur de celle-ci. Le phénomène de lentille gravitationnelle ne se produit qu'à l'intérieur de la sphère de Schücking, ce qui permet, entre autres, d'expliquer le fait que l'expansion de l'Univers observée à l'échelle des galaxies et des amas de galaxies n'est pas visible à l'échelle planétaire ni à l'échelle atomique. Ce modèle permet de s'affranchir de nombre d'hypothèses adoptées par le modèle de Kottler. Seule l'hypothèse de sphéricité, qui est difficilement contournable, est maintenue. On permet à la Terre et à la source de se mouvoir par rapport à l'amas de galaxie (la lentille), les masses des autres amas sont incluses sous forme d'une poussière isotrope et homogène (principalement en matière noire CDM) et la Terre aussi bien que la source sont prises comobiles par rapport à la poussière.

Avant d'entreprendre le raccordement des deux métriques, on s'est trouvé alors dans l'obligation de faire, au chapitre deux, un détour sur la solution de FLRW. La métrique de FLRW dérive du principe cosmologique qui stipule qu'il n'existe pas de direction privilégiée et que tous les points d'espace sont équivalents. Ce principe est tellement fort que la métrique déterminée dans le cas général se réduit à une seule fonction dépendant uniquement de la coordonnée temporelle t , appelée facteur d'échelle $a(t)$ et déterminée via l'équation de Friedmann, ainsi que d'un indice discret k pouvant prendre trois valeurs 0, +1, et -1, qui correspondent respectivement aux espaces plat (courbure spatiale nulle), sphérique (courbure spatiale positive) et pseudo sphérique (courbure spatiale négative).

On s'est limité à considérer le modèle d'Einstein-Straus avec une courbure spatiale négative au chapitre trois. Le raccordement des métriques de FLRW (pseudo sphérique) et de Kottler sur la sphère de Schücking, s'est fait au début de ce chapitre. Ce raccordement, permet, via le Jacobien de la transformation des coordonnées de Friedmann aux coordonnées de Schwarzschild, d'avoir à notre disposition une relation entre les temps de Friedmann t et celui de Schwarzschild T .

Dans tout le processus de calcul, on s'est servi de la méthode d'intégration des équations

différentielles pour effectuer le calcul de la déviation de la lumière et du temps de retard (la même méthode déjà employée dans le cas sphérique). Mais, à défaut de connaître une solution analytique exacte pour le facteur d'échelle $a(t)$, on a procédé à la résolution numérique de l'équation de Friedman.

Comme ce sont les conditions finales sur Terre qui sont données, on a intégré les géodésiques des deux photons à reculons, en synchronisant d'abord leurs arrivées sur Terre. On a commencé par les géodésiques de type FLRW entre la Terre et la sphère de Schücking pour obtenir les conditions initiales de type FLRW à la sortie de la sphère de Schücking du côté de la Terre. Grâce à la relation de raccordement obtenue au préalable, on a converti ces conditions en conditions finales de type Kottler pour intégrer les géodésiques de type Kottler à l'intérieur de la sphère de Schücking. On a obtenu les conditions initiales de type Kottler à l'entrée de la sphère de Schücking du côté de la source, qu'on a converties, grâce à la relation de raccordement, en conditions finales de type FLRW pour intégrer les géodésiques de type FLRW entre la sphère de Schücking et la source. On a finalement obtenu les conditions initiales de type FLRW sur la source, entre autres l'angle de déviation $-\varphi_S$ et les temps d'émission des deux photons t_S et t'_S qui importent pour le calcul du temps de retard $\Delta t = t'_S - t_S$. Nous avons baptisé cette méthode "méthode de calcul direct" car l'intégration des géodésiques des deux photons se fait séparément. Néanmoins, on a pu établir une expression semi-analytique approchée pour le temps de retard, en employant une seconde méthode plus fiable qu'on a dénommée "méthode de calcul par différence", où on a seulement besoin d'intégrer les géodésiques de l'un des deux photons et d'une certaine expression intervenant dans le calcul du temps de retard dans le modèle de Kottler. La fiabilité de cette méthode s'explique par la dépendance monotone de Δt en la constante cosmologique Λ .

En appliquant nos résultats au même système lentille-quasar SDSS J1004+4112, l'incertitude sur la masse de l'amas de galaxies est minimisée de façon considérable (1% environ) comme dans le cas plat et le cas sphérique du modèle d'Einstein-Straus (avec $a_0 = 5$ am),

ce qui, à la différence du modèle de Kottler, permet d'avoir des résultats en accord avec l'affirmation de Rindler et d'Ishak selon laquelle une constante cosmologique positive atténue la déviation de la lumière. Cependant, la masse ne concorde pas avec la masse observée. Il est à noter aussi que pour le temps de retard, les valeurs estimées sont petites devant celles du modèle de Kottler, allant de 6.75 à 13.00 ans.

Une étude suivant les valeurs du facteur d'échelle actuel a_0 , dans le cadre du modèle d'Einstein-Straus pseudo sphérique, a permis de voir l'écart par rapport au modèle d'Einstein-Straus plat [28] et sphérique [29]. Les résultats obtenus montrent que la déviation de la lumière et le temps de retard augmentent considérablement lorsque le facteur d'échelle actuel devient de plus en plus petit devant une valeur critique de 24.7×10^{26} m (correspondant à une densité de courbure négative actuelle $\Omega_{k0} \simeq -0.0030$) environ. Cela va à l'encontre du modèle d'Einstein-Straus plat auquel cas a_0 peut être fixé à n'importe quelle valeur sans perte de généralité. La même remarque vaut pour la masse de l'amas de galaxies. Cette dépendance en a_0 provient du terme de la densité de courbure dans l'équation de Friedmann qui s'annule dans le cas d'un espace plat ($k = 0$). Néanmoins, au-dessus de cette valeur critique, l'effet de a_0 diminue de plus en plus jusqu'à s'annuler et les résultats coïncident parfaitement avec ceux du modèle d'Einstein-Straus plat. On note aussi que cette valeur critique est presque trois fois plus grande que celle obtenue dans le cas sphérique.

Cette étude permettra aussi de conclure si les données observationnelles pourraient éventuellement discriminer les éventualités plate, sphérique et pseudo sphérique.

Enfin, le sujet traité dans cette thèse propose quelques pistes pour de futurs travaux de recherche entre autres :

1. Appliquer les résultats à d'autres systèmes lentille-quasar.
2. Inclure la solution de Kottler intérieure dans laquelle les photons pourraient traverser la distribution de masse [36].

Annexe A

Tenseur métrique de Kottler

Le tenseur de Ricci s'exprime en termes des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ comme

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}. \quad (\text{A.1})$$

Donc, on doit calculer au préalable les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, qui s'écrivent en termes des dérivées premières des composantes du tenseur métrique comme

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{g^{\lambda\rho}}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right), \quad (\text{A.2})$$

où $g^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique inverse, qui est diagonal comme l'est le tenseur métrique,

$$g^{tt} = -1/B(r), \quad g^{rr} = 1/A(r), \quad g^{\theta\theta} = 1/r^2, \quad g^{\varphi\varphi} = 1/(r^2 \sin^2 \theta). \quad (\text{A.3})$$

On obtient alors, pour les symboles de Christoffel non nuls, les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{B'(r)}{2B(r)}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{B'(r)}{2A(r)}, & \Gamma_{rr}^r &= \frac{A'(r)}{2A(r)}, \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{A(r)}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{r}{A(r)} \sin^2 \theta, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Les seules composantes non nulles du tenseur de Ricci sont les composantes diagonales, qui ont comme expressions

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)}, \\
R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)}, \\
R_{\theta\theta} &= \frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - 1, \\
R_{\varphi\varphi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

où $' = d/dr$.

Annexe B

Tenseur métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La métrique de FLRW en coordonnées comobiles $(t, \chi, \theta, \varphi)$ dans le cas pseudo courbe ($k = -1$) est (2.4)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2[d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (\text{B.1})$$

On en tire les composantes diagonales non nulles du tenseur métrique en identifiant avec la forme générale $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$,

$$g_{tt} = -1, \quad g_{\chi\chi} = a^2, \quad g_{\theta\theta} = a^2 \sinh^2 \chi, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \sinh^2 \chi \sin^2 \theta, \quad (\text{B.2})$$

On en déduit sans calcul les composantes inverses du tenseur métrique,

$$g^{tt} = -1, \quad g^{\chi\chi} = a^{-2}, \quad g^{\theta\theta} = a^{-2} \sinh^{-2} \chi, \quad g^{\varphi\varphi} = a^{-2} \sinh^{-2} \chi \sin^{-2} \theta. \quad (\text{B.3})$$

Le calcul des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ non nuls par application de (A.2), dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$ ($\sin \theta = 1$), donne

$$\begin{aligned}\Gamma_{\chi\chi}^t &= aa_t, & \Gamma_{\varphi\varphi}^t &= aa_t \sinh^2 \chi, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\chi &= -\cosh \chi \sinh \chi, \\ \Gamma_{t\chi}^\chi &= \Gamma_{\chi t}^\chi = a_t/a, & \Gamma_{t\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi t}^\varphi = a_t/a, & \Gamma_{\chi\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\chi}^\varphi = \coth \chi.\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

Ainsi, les équations de la géodésique (1.20),

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (\text{B.5})$$

s'écrivent comme

$$\ddot{t} + aa_t(\dot{\chi}^2 + \sinh^2 \chi \dot{\varphi}^2) = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\ddot{\chi} + 2\frac{a_t}{a} \dot{t} \dot{\chi} - \cosh \chi \sinh \chi \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\ddot{\varphi} + 2\left(\frac{a_t}{a} \dot{t} + \coth \chi \dot{\chi}\right) \dot{\varphi} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Annexe C

Distance d'approche minimale r_P

On s'attache ici à dériver une expression approximative pour le péri-lentille r_P du chemin du haut (le même raisonnement pour le chemin du bas conduit à un résultat similaire). Dans les approximations $2GM/r_P = M/4\pi r_P \ll 1$ et $r_P/r_{SchüE} \ll 1$, on a, d'après l'expression (1.37),

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r_{SchüE}} &= \frac{r_P}{r_{SchüE}^2 \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r_{SchüE}} + \frac{r_{SchüE}}{r_{SchüE} + r_P} \right)}} \\
 &\simeq \frac{r_P}{r_{SchüE}^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2} \right) \left[1 + \frac{GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r_{SchüE}} + \frac{1}{1 + \frac{r_P}{r_{SchüE}}} \right) \right] \\
 &\simeq \frac{r_P}{r_{SchüE}^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2} \right) \left[1 + \frac{GM}{r_P} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_P}{r_{SchüE}} \right) \right] \\
 &\simeq \frac{r_P}{r_{SchüE}^2} \left(1 + \frac{GM}{r_P} \right). \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit, en utilisant ce dernier résultat, une expression approchée de γ_{KE} (3.66),

$$\tan \gamma_{KE} \simeq \frac{r_P}{r_{SchüE}} \left(1 + \frac{GM}{r_P} \right), \tag{C.2}$$

ou encore

$$r_P \simeq r_{SchüE} \tan \gamma_{KE} - GM. \quad (C.3)$$

Transformons maintenant $\tan \gamma_{KE}$ en $\sin \gamma_{KE}$ via la relation bien connue

$$\sin^2 \gamma_{KE} = \frac{\tan^2 \gamma_{KE}}{1 + \tan^2 \gamma_{KE}}, \quad (C.4)$$

qui devient, en remplaçant par (C.2),

$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma_{KE} &\simeq \frac{\frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2} \left(1 + \frac{2GM}{r_P}\right)}{1 + \frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2} \left(1 + \frac{2GM}{r_P}\right)} \\ &\simeq \frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2} \left(1 + \frac{2GM}{r_P}\right) \left[1 - \frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2} \left(1 + \frac{2GM}{r_P}\right)\right] \\ &\simeq \frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2} \left(1 + \frac{2GM}{r_P}\right), \end{aligned} \quad (C.5)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \sin \gamma_{KE} &\simeq \frac{r_P}{r_{SchüE}} \sqrt{1 + \frac{2GM}{r_P}} \\ &\simeq \frac{r_P}{r_{SchüE}} \left(1 + \frac{GM}{r_P}\right), \end{aligned} \quad (C.6)$$

ou encore

$$r_P \simeq r_{SchüE} \sin \gamma_{KE} - GM. \quad (C.7)$$

Bibliographie

- [1] A. Einstein, *Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie*, Albert Einstein, Akademie-Vorträge, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932, 142 (1917).
- [2] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [3] F. W. Dyson, A. S. Eddington, C. Davidson, *A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **220**, 291 (1920).
- [4] I. I. Shapiro, *Fourth test of general relativity*, Phys. Rev. Lett. **13**, 789 (1964).
- [5] I. I. Shapiro, et al., *Fourth test of general relativity: Preliminary results*, Phys. Rev. Lett. **21**, 266 (1968).
- [6] A. Einstein, E. G. Straus, *The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual star*, Rev. Mod. Phys. **17**, 120 (1945).
- [7] E. Schücking, *Das Schwarzschildsche Linienelement und die expansion des Weltalls*, Z. Phys. **137**, 595-603 (1954)
- [8] R. Balbinot, R. Bergamini, A. Comastri, *Solution of the Einstein–Straus problem with a Λ term*, Phys. Rev. D **38**, 2415-2418 (1988)
- [9] F. Kottler, *Über die physikalischen grundlagen der einsteinschen gravitationstheorie*, Ann. der Physik **361**, 401 (1918).

- [10] N. J. Islam, *The cosmological constant and classical tests of general relativity*, Phys. Lett. A **97**, 239 (1983).
- [11] W. H. C. Freire, V. B. Bezerra, J. A. S. Lima, *Cosmological constant, conical defect and classical tests of general relativity*, Gen. Rel. Grav. **33**, 1407 (2001).
- [12] K. Lake, *Bending of light and the cosmological constant*, Phys. Rev. D **65**, 087301 (2002).
- [13] A. W. Kerr, J. C. Hauck, B. Mashhoon, *Standard clocks, orbital precession and the cosmological constant*, Class. Quant. Grav. **20**, 2727 (2003).
- [14] V. Kagramanova, J. Kunz, C. Lammerzahl, *Solar system effects in Schwarzschild–de Sitter space–time*, Phys.Lett. B **634**, 465 (2006).
- [15] M. Sereno, Ph. Jetzer, *Solar and stellar system tests of the cosmological constant*, Phys. Rev. D **73**, 063004 (2006).
- [16] F. Finelli, M. Galaverni, A. Gruppuso, *Light bending as a probe of the nature of dark energy*, Phys.Rev. D **75**, 043003 (2007).
- [17] W. Rindler, M. Ishak, *Contribution of the cosmological constant to the relativistic bending of light revisited*, Phys. Rev. D **76**, 043006 (2007).
- [18] K. Schwarzschild, *Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinischen theorie*, Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys. Tech. 189 (1916).
- [19] W. de Sitter, *On the relativity of inertia: Remarks concerning Einstein’s latest hypothesis*, Kon. Ned. Akad. Wet. Proc, **19**, 1217 (1917).
- [20] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, Wiley & Sons. New York, (1972).
- [21] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *The cosmological constant and dark energy*, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).
- [22] A. Friedmann, *Über die krümmung des raumes*, Z. Phys. **10**, 377 (1922).

- [23] G. Lemaître, *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques*, Ann. Soc. Sci. Brux A **47**, 49 (1927).
- [24] G. C. McVittie, *The mass-particle in an expanding Universe*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **93**, 325 (1933).
- [25] G. C. McVittie, *General relativity and cosmology*, Intern. Astrophys. Ser. London, Chapman & Hall , 2nd ed (1965).
- [26] M. Ishak, W. Rindler, J. Dossett, J. Moldenhauer, C. A. Allison, *A new independent limit on the cosmological constant/dark energy from the relativistic bending of light by galaxies and clusters of galaxies*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **388**, 1279 (2008).
- [27] T. Schücker, *Strong lensing in the Einstein-Straus solution*, Gen. Rel. Grav. **41**, 1595 (2009).
- [28] K. E. Boudjemaa, M. Guenouche, S. R. Zouzou, *Time delay in the Einstein-Straus solution*, Gen. Rel. Grav. **43**, 1707 (2011).
- [29] M. Guenouche, S. R. Zouzou, *Deflection of light and time delay in closed Einstein-Straus solution*, Phys. Rev. D **98**, 123508 (2018).
- [30] T. Schücker, N. Zaimen, *Cosmological constant and time delay*, Astron. Astrophys. **484**, 103 (2008).
- [31] N. Inada, et al., *A gravitationally lensed quasar with quadruple images separated by 14.62 arcseconds*, Nature **426**, 810 (2003).
- [32] M. Oguri, et al., *Observations and theoretical implications of the large-separation lensed quasar SDSS J1004+4112*, Astrophys. Journ. **605**, 78 (2004).
- [33] N. Ota, et al., *Chandra observations of SDSS J1004+4112: Constraints on the lensing cluster and anomalous X-ray flux ratios of the quadruply imaged quasar*, Astrophys. Journ. **647**, 215 (2006).

- [34] Y. Kawano, M. Oguri, *Time delays for the giant quadruple lensed SDSS J1004+4112: Prospects for determining the density profile of the lensing cluster*, Publ. Astron. Soc. Jap. **58**, 271 (2006).
- [35] J. Fohlmeister, C. S. Kochanek, E. E. Falco, C. W. Morgan, J. Wambsganss, *The rewards of patience: An 822 day time delay in the gravitational lens SDSS J1004+4112*, Astrophys. Journ. **676**, 761 (2008).
- [36] T. Schücker, *Lensing in an interior Kottler solution*, Gen. Rel. Gravi. **42**, 1991 (2010).

Some Problems in General Relativity and Cosmology

Abstract

The research work carried out in this Master thesis deals with strong gravitational lensing by a spherically symmetric mass distribution in the framework of the dynamic Einstein-Straus model with a positive cosmological constant. The Einstein-Straus model consists of a Kottler (or Schwarzschild-de Sitter) vacuole embedded in an expanding Friedman-Lemaître-Robertson-Walker Universe. This model is more suitable to study the light bending and time delay at the cosmological scale, because it takes simultaneously into account the expansion of the universe on a large scale and the absence of this phenomenon on a planetary or atomic scales. We have been restricted to the version of a negatively-curved Universe (negative spatial curvature $k = -1$) that has not yet been reviewed. The bending of light and the time delay have been investigated and computed in this model then applied to the lensed quasar SDSS J1004+4112. Unlike the case of Kottler model, the analysis of the deflection of light and time delay in the case of the Einstein-Straus model have produced results which are in agreement with Rindler and Ishak's claim that a positive cosmological constant Λ attenuates the bending of light, as was the case with flat and positively-curved Universe. On the other hand, it has been revealed, that the light bending and time delay increase considerably as the present scale factor a_0 becomes smaller than a limit value about 24.7×10^{26} m ($\Omega_{k0} \simeq -0.003$) highlighting the potential impact of spatial negative curvature. This goes against the Einstein-Straus model in which case the results remain the same regardless of which value is chosen for the present scale factor. However, above this limit value, the obtained results are found to be indistinguishable from the flat case.

Key words General relativity, cosmology, light bending, time delay, cosmological constant.

ملخص

الأبحاث التي أجريت في أطروحة الماجستير تندرج في إطار النسبية العامة و الكوسمولوجيا و تتناول موضوع المفعول القوي لعدسة الجاذبية الناجم عن توزيع كتلي ذو تناظر كروي ضمن نموذج كوني خاص و هو النموذج الديناميكي لأينشطاين-ستروس في حالة الفضاء الشبه كروي (ثابت انحناء سالب) و هذا في وجود ثابت كوسمولوجي موجب. يتألف نموذج أينشطاين-ستروس من فجوة كروية الشكل تتحكم فيها مترية كوتلار (المسمى كذلك شفارزشيلد-دوسيتار) مدججة داخل زمكان فريدمان-لماتر-روبرتسون-ولكر. أولينا اهتماما خاصا بنموذج أينشطاين-ستروس لأنه يأخذ بعين الإعتبار توسع الكون على مستوى المجرات و مجموعات المجرات و حقيقة أن أبعاد الأنظمة الكوكبية و الذرية لا تتأثر بالتوسع المذكور. تم حساب انحراف الضوء و مدة التأخر في هذا النموذج ثم طبقنا النتائج على نظام معين لعدسة-كوازار يحمل اسم SDSS J1004+4112. خلافا لنموذج كوتلار، النتائج المتحصل عليها تتفق مع ما توصلنا إليه ريندلار و إسحاق أن زاوية انحراف الضوء تتناقص بوجود ثابت كوسمولوجي موجب، كما هو الحال في كل من نموذجي أينشطاين-ستروس المسطح و الكروي. هذا من جهة. من جهة أخرى، و من أجل تسليط الضوء حول التأثير المحتمل لانحناء الفضاء السالب على انحراف الضوء و مدة التأخر في نموذج أينشطاين-ستروس الشبه كروي، قمنا بدراسة الظاهرة بتغيير قيمة عامل السلم الحالي a_0 . أظهرت النتائج أن انحراف الضوء و مدة التأخر يتزايدان بشكل ملحوظ عندما يصبح عامل السلم الحالي صغيراً أمام قيمة حرجة تبلغ حوالي $24.7 \times 10^{26} \text{m}$ (أي حوالي $-0.003 \approx \Omega_{k0}$ بالنسبة لكثافة الإنحناء السالبة الحالية). هذا يتعارض مع نموذج أينشطاين-ستروس المسطح و الذي تظل النتائج فيه كما هي بغض النظر عن القيمة التي يأخذها عامل السلم الحالي. رغم ذلك، عندما نتجاوز هذه القيمة الحرجة، فإن النتائج تصبح متطابقة تماما مع الحالة المسطحة لنموذج أينشطاين-ستروس.

كلمات مفاتيح النسبية العامة، الكوسمولوجيا، انحراف الضوء، مدة التأخر، الثابت الكوسمولوجي.

Résumé

Les travaux de recherches réalisés dans ce mémoire de Master s'articulent autour de deux sujets s'inscrivant dans le cadre de la relativité générale et de la cosmologie, la déviation de la lumière à proximité d'une distribution de masse à symétrie sphérique et le temps de retard qui en découle (effet de lentille gravitationnelle fort), dans le cadre du modèle dynamique d'Einstein-Straus en présence d'une constante cosmologique. Ce modèle provient du raccordement de la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker à l'extérieur d'une vacuole (la sphère de Schücking) avec la métrique statique de Kottler (ou Schwarzschild-de Sitter) à l'intérieur de celle-ci. C'est un modèle plus réaliste qui tient compte simultanément de l'expansion de l'Univers à l'échelle galactique et du fait que les échelles planétaire ou atomique ne sont pas affectées par la dite expansion. On s'est limité à la version pseudo sphérique de la métrique d'Einstein-Straus, qui n'a pas encore été étudiée. Elle correspond à une courbure spatiale négative ($k = -1$). La déviation de la lumière et le temps de retard ont été calculés dans ce modèle puis appliqués à un système particulier de lentille-quasar connu sous le nom de SDSS J1004+4112. Contrairement au modèle de Kottler, les résultats obtenus dans le cas pseudo sphérique du modèle d'Einstein-Straus corroborent l'affirmation de Rindler et d'Ishak selon laquelle une constante cosmologique positive atténue la déviation de la lumière, comme c'est le cas avec les modèles plat et sphérique. A l'instar du modèle d'Einstein-Straus pseudo sphérique, une analyse en fonction du facteur d'échelle actuel a_0 , dans le cadre du modèle d'Einstein-Straus pseudo sphérique, a mis en évidence l'impact de la courbure spatiale sur la déviation de la lumière et le temps de retard. La déviation de la lumière et le temps de retard dépendent significativement du facteur d'échelle actuel lorsque celui-ci devient plus petit devant une valeur critique de 24.7×10^{26} m environ (correspondant à une densité de courbure négative actuelle $\Omega_{k0} \simeq -0.003$). Cela va à l'encontre du modèle d'Einstein-Straus plat auquel cas les résultats ne dépendent non plus du choix de la valeur du facteur d'échelle actuel. Néanmoins, au-delà de cette valeur critique, les résultats sont pratiquement les mêmes que ceux du modèle d'Einstein-Straus plat.

Mots clés Relativité générale, cosmologie, déviation de la lumière, temps de retard, constante cosmologique.