



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

**Sur l'existence locale et l'explosion de la solution
pour une équation de diffusion fractionnaire
spatio-temporel avec non linéarité exponentielle**

Réalisé par : **Brahmi Amira**
Siad Dounia

Dirigé par : **Mr Tebessi Faouzi**
Présenté le **13/09/2020**

Membres de jury :

M. Abdelkrim.A **M.A.A** **Président**
M. Djebara.L **M.A.A** **Examineur**

2019-2020

Table des matières

0.1	Notations générales :	5
0.2	Notions préliminaires	5
0.2.1	Espaces L^p	5
0.2.2	Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	9
0.2.3	Transformée de Fourier :	10
0.3	Bases mathématiques du calcul fractionnaires :	12
0.3.1	Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire :	12
0.3.2	Intégration successive de Cauchy :	15
0.3.3	Intégrale et Dérivée fractionnaire :	16
0.3.4	Dérivation d'ordre fractionnaire :	17
0.4	Le Laplacien Fractionnaire :	23
1	L'existence locale :	25
1.1	Préliminaires	26
1.1.1	Semi-groupe :	26
1.1.2	Application contractante :	28
1.1.3	Théorème du point fixe :	28
1.1.4	Solution locale et globale :	29
1.2	Existence local	31
2	Non existence de la solution globale	34

2.1	Préliminaires	34
2.1.1	Explosion de la solution dans les équations différentielles ordinaires :	34
2.1.2	Explosion de solutions des équations de type réaction-diffusion	35
2.1.3	Calcul de dérivée	36
2.2	Explosion de la solution :	37

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur **Dr FAOUZI.TEBESSI** qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et de m'a voir guidé.

Leurs critiques et Leurs conseils m'ont été très précieux.

De même je remercie **Mrs A.ABDELKRIM** et **Mdm L.DJEBARA** qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.

Dédicace

Au nom du **DIEU** le clément et le miséricordieux je dédie ce modeste travail à :

· Nos chers parents qui ont. toujours. été dévoués pour que je puisse réaliser Ce travail de recherche dans les meilleures conditions

· A Nos chers frères

· A Nos proches amis et toute Notre grande famille et Notre petite famille.

Et toute la famille de département de mathématiques et ma promotion **2019/2020**.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'existence locale et à l'explosion d'une solution d'équation de diffusion fractionnaire Spatio-temporel avec une non-linéarité temporelle non locale de croissance exponentielle

1. nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution locale par le principe de contraction de **Banach**.

2. Le résultat de l'explosion de la solution en temps fini est établi par la méthode de la fonction de test avec un choix judicieux de la fonction test.

Abstract

In this memory, we are concerned with local existence and blowup of a unique solution to a time space fractional diffusion equation with a time nonlocal non-linearity of exponential growth

1. We prove the existence and uniqueness of the local solution by the **Banach** contraction mapping principle.

2. The blowup result of the solution in finite time is established by the test function method with a judicious choice of the test function .

Le calcul d'ordre fractionnaire est un domaine des mathématiques qui traite des dérivées et des intégrales d'ordre non entier (fractionnaire). C'est un concept vieux (de plus de 300 ans) remontant à des correspondances entre **Gottfried Leibniz**, **Guillaume de l'Hospital** et **Johann Bernoulli** à la fin du 17^{ème} siècle. Mais ces pionniers se heurtent à un paradoxe .

Un paradoxe du quel on tirera, un jour, d'utiles conséquences : écrit **Leibniz**. En réponse à la question « qu'en serait il si l'ordre de la dérivation était égal à $\frac{1}{2}$? » soulevée par **l'Hospital**.

De nombreux mathématiciens tels que, **N.H. Abel**, **M. Caputo**, **L. Euler**, **J. Fourier**, **A.K. Grunwald**, **J. Hadamard**, **G.H. Hardy**, **O. Heaviside**, **H.J. Holmgren**, **P.S. Laplace**, **A.V. Letnikov**, **J. Liouville**, **B. Riemann**, **M. Riesz** et **H. Weyl** ont contribué au développement du calcul fractionnaire jusqu'à la moitié du siècle passé, en posant plusieurs définitions sans qu'elles soient, pour autant, compatibles entre elles.

Cependant, on peut considérer le calcul fractionnaire comme un axe de recherche relativement nouveau, puisque ce n'est que dans la deuxième partie du 20^{ème} siècle, suite au développement

de l'informatique, qu'il fait l'objet de beaucoup de travaux. Aujourd'hui, l'intérêt du calcul d'ordre fractionnaire et ses applications ne cessent de grandir. L'idée des dérivées et d'intégrales fractionnaires semble un peu étrange et difficile à expliquer, cela est dû au fait que l'opérateur d'ordre fractionnaire n'a pas d'interprétation géométrique précise, contrairement aux opérateurs d'ordre entier, c'est pourquoi cet outil est souvent considéré comme irréal, sans intérêt pour l'ingénieur. Pourtant un exemple simple de mécanique des fluides montre comment l'intégrale d'ordre un demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne .

L'utilisation de l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire réel est maintenant largement répandue dans des domaines aussi variés que la **mécanique, l'automatique, l'électrochimie, la biologie...** etc.

Ce mémoire se compose de **trois chapitres** partagés de la manière suivante :

Le premier chapitre : On commence par rappeler quelques notions de base qui sont très importants pour la suite de ce travail, on présente la définition des **espaces de Bannach, de lebesgue et de Sbolev**, et quelques fonctions comme les fonction : **Gamma, Beta, Mittag-Leffler, Mainardi** et la notion de dérivation et intégration fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** et de **Caputo** ainsi que les propriétés relatives à celle-ci.

Le Deuxième chapitre : On commence par donner des définitions des solutions : globale, locale et douce et de semi groupe , on démontre ensuite l'existence locale et l'unicité de la solution douce du problème de diffusion fractionnaire spatio-temporel, en utilisant le théorème du point fixe.

Le Troisième chapitre : Comporte deux parties :

1. On introduit le phénomène de l'explosion de la solution des les équations différentielles ordinaires, puis des équations de type réaction-diffusion.

2. On démontre par l'absurde, le théorème de la non existence de la solution global d'une équations de diffusion fractionnaires spatio-temporels, en choisissant des fonctions test convenables et en utilisant les propriétés de l'intégration fractionnaire.

liminaires

0.1 Notations générales :

\mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.

\mathbb{R}^+ : Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

\mathbb{R}^n : Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.

\mathbb{N} : Ensemble des nombres naturels.

\mathbb{Q} : Ensemble des nombres rationnels.

$|\cdot|$: Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.

$\Gamma(\cdot)$: Fonction Gamma **d'Euler**.

E_α : Fonction de **Mittag-Leffler**.

I^α : Intégration d'ordre α

${}^C D^\alpha$: Dérivation d'ordre α selon la définition de **Caputo**.

${}^R D^\alpha$: Dérivation d'ordre α selon la définition de **Riemann-Liouville**.

$e.v.n$: Espace vectoriel normé.

0.2 Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés que nous utilisons dans la suite de ce travail.

0.2.1 Espaces L^ρ

Espace de Banach :

Définition 0.1 *On dit qu'un espace normé E est un espace de **Banach** si : E est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|$.*

Lemme 0.1 *On dit qu'un espace métrique (F, d) est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente..*

Espaces de Lebesgue :

Définition 0.2 *Soient (E, B, m) un espace mesuré et $p \geq 1$ un réel. On appelle **espace de Lebesgue** :*

$$L^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ } f \text{ mesurable et } \int_{\mathbf{E}} |f|^p dm < +\infty \right\}.$$

$L^p(E)$ est muni de la semi-norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbf{E}} |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour en faire un espace normé, il faut identifier les fonctions qui sont égale presque partout : l'ensemble des classes d'équivalence modulo cette relation est noté $L^p(X)$. C'est un espace de Banach pour la norme précédente.

Le cas $p = \infty$ est un peu spécial. $L^\infty(X)$ est défini par :

$$L^\infty(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ } f \text{ mesurable et } \exists C \geq 0, |f(x)| \leq C \text{ } m - p.p\}$$

On le munit de la semi-norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ } m - p.p\}$$

Comme précédemment, l'ensemble des classes d'équivalence de cet espace pour la relation d'égalité presque partout forme un espace de Banach, noté $L^\infty(X)$

Convergence dominé de Lebesgue :

Théorème 0.1 *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré (E, M, μ) à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , qui converge μ -p.p vers une fonction f . Supposons qu'il existe une fonction*

intégrable positive $g : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, dite dominante, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g, p.p$$

Alors :

- f et f_n sont intégrables pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $\lim \int |f_n - f| d\mu = 0$, autrement dit $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$,
- $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Inégalités importantes

Inégalité de Young :

Définition 0.3 Soient $A, B > 0$ et $\varepsilon > 0$. On a :

$$AB \leq \varepsilon e^A + B \ln \left(\frac{B}{\varepsilon} \right), \quad (1)$$

Inégalité de Hölder :

Définition 0.4 Soient $f \in L^p$, $g \in L^q$ et $1 < p < \infty$, le produit fg appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ et on a l'inégalité :

$$\|f \cdot g\| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

d'où :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Inégalité de Minkowski :

Définition 0.5 Soient $f \in L^p$, $g \in L^p$ et $1 \leq p \leq \infty$, on a alors :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Définition 0.6 Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega} u(x) v(x) \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Inégalité de Gronwall :

Définition 0.7 Soient Ψ et $U : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant :

$$\exists C \geq 0, \forall t \in [a, b] : U(t) \leq C + \int_a^t \Psi(s) U(s) ds.$$

Alors :

$$\forall t \in [a, b] : U(t) \leq C \cdot \exp\left(\int_a^t \Psi(s) ds\right).$$

Fonction localement intégrable :

Définition 0.8 Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **localement intégrable** si sa restriction à tout segment $[a, b]$ est intégrable, c'est-à-dire si l'intégrale :

$$\int_a^b |f(t)| dt$$

converge pour tout couple de réels (a, b) avec $a < b$.

généralement, si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^n , f est **localement intégrable** si sa restriction à tout compact K de U est intégrable.

Remarque 0.1 Toute fonction continue est localement intégrable.

Fonction test :

Définition 0.9 Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . Une fonction test sur Ω est une fonction de Ω dans \mathbb{R} , indéfiniment dérivable et à support compact

Propriétés générales :

Corollaire 0.1 1) $D(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions tests sur Ω .

2) Si ϕ est une fonction test alors ϕ' est aussi fonction test..

3) Si ϕ est une fonction test de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et f une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors : $f \circ \phi$ est une fonction test.

Support d'une fonction :

Définition 0.10 Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur \mathbb{R}^n . Le support de la fonction f , noté $\text{supp}(f)$ est l'adhérence des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que : $f(x) \neq 0$. i.e

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}}$$

0.2.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 0.11 Soient $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on le note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbf{N}^N, 0 \leq |\alpha| \leq m \right\}$$

où :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

est la dérivée partielle de u d'ordre α au sens des distributions définie par :

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega) \text{ avec } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = 1 \end{array} \right.$$

Espaces de Sobolev Fractionnaires $W^{s,p}(\Omega)$:

Définition 0.12 *Espaces de Sobolev* $W^{s,p}(\Omega)$ pour $0 < s < 1$ Soient $s \in]0;1[$ et $p \in]1; +\infty[$: On définit l'espace fractionnaire de Sobolev

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+N}} dx dy < \infty \right\}$$

• $0 < s < 1$, l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left[\|u\|'_{W^{s,p}(\Omega)} \right]^p$$

où :

$$\left[\|u\|'_{W^{s,p}(\Omega)} \right]^p = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+N}} dx dy.$$

est un espace de Banach.

• $s \in]0; +\infty[$

$[s] \geq 1$, $s \notin \mathbb{N}$ L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{[s],p}(\Omega) / D^j u \in W^{s-[s],p}(\Omega), \forall \vec{j}, |\vec{j}| = [s] \right\}$$

Il est clair que $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p + \sum \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^j u(x) - D^j u(y)|^p}{|x - y|^{(s-[s])p+N}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

0.2.3 Transformée de Fourier :

Définition 0.13 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} une fonction de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes. On appelle **transformée de Fourier** (ou spectre) de f , si elle existe, la fonction $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\mathcal{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{(-2\pi i \xi x)} dx$$

L'intégrale et donc la **transformée de Fourier** n'existe pas toujours

Exemple 0.1 Par exemple la fonction $x \rightarrow x^2$ n'admet pas de **transformée de Fourier** car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 (-2\pi i \xi x) dx$ n'existe pour aucune valeur de ξ

Si des conditions d'existence de **la transformée de Fourier** d'une fonction sont difficiles à écrire

On a en revanche la condition suffisante suivante :

Théorème 0.2 Toute fonction intégrable (au sens de Lebesgue) possède une **transformée de Fourier** qui est une fonction continue, bornée et tendant vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini

la Transformée de Fourier inverse :

Définition 0.14 Soit f une fonction intégrable admettant une **transformée de Fourier** \mathcal{F} elle-même intégrable.

Alors, en tout point x où f est continue, on a :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\xi) (2\pi i \xi x) d\xi$$

Cette transformation est appelée **transformée de Fourier inverse**.

On écrira symboliquement

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(\xi)]$$

Espace de Schwartz :

Définition 0.15 L'espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des fonctions φ indéfiniment différentiables sur \mathbb{R}^N et qui vérifient :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N.$$

Comme conséquence de cette définition, la fonction φ et toutes ses dérivées tendent vers 0 à l'infini plus rapidement que n'importe quelle fraction de type $\frac{1}{x^\alpha}$.

0.3 Bases mathématiques du calcul fractionnaires :

0.3.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire :

Dans cette section on présente quelques fonctions spéciales comme les fonctions **Gamma**, **bêta**, **Mittag-Leffler**, qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Fonction Gamma :

Définition 0.16 La *fonction Gamma* est une fonction complexe . Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes et considérée comme fonction spéciale dans le calcul fractionnaire.

$z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, on définit la *fonction Gamma*, notée par Γ :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Remarque 0.2 La *fonction Gamma* est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}_+^* , Sa dérivée est :

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z)\Psi(z).$$

où

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} \ln(\Gamma(z)).$$

Propriété de la fonction Gamma :

La **fonction Gamma** satisfait la propriétés suivante :

1)* Pour $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

Preuve En utilisant l' intégrale par parties , on voit que :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z + 1) &= \int_0^{\infty} x^z e^{-x} dx \\
 &= [-x^z e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} z x^{z-1} e^{-x} dx \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} [-x^z e^{-x}]_0^{\infty} - (0e^{-0}) + z \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \\
 &= z \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \\
 &= z\Gamma(z).
 \end{aligned}$$

■

2)* $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0+) = +1$. Et aussi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3)* $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

4)* Si $n \in \mathbb{N}$ alors $\Gamma(n + 1) = n!$.

Fonction Beta

Définition 0.17 On appelle **fonction Beta** la fonction :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (x - t)^{y-1} dt.$$

tels que : x, y sont des nombres complexe avec $Rx > 0$ et $Ry > 0$.

Les **fonctions Gamma** et **Beta** sont reliées par la relation :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Lemme 0.2 La fonction **Beta** est symétrique , ce qui signifie que :

$$B(x, y) = B(y, x)$$

Fonction de Mittag-Leffler

La **fonction de Mittag-Leffler** est très importante pour le calcul fractionnaire, elle représente la généralisation de l'exponentielle au calcul d'ordre non entier. On distingue deux types de fonctions de **Mittag-Leffler** : la fonction à deux paramètres et la fonction à un seul paramètre.

Définition 0.18 Pour $z \in \mathbb{C}$, la **fonction de Mittag-Leffler** $E_a(z)$, notée par **M-L**, est définie comme suit :

$$E_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak + 1)}, (a > 0).$$

Et la **fonction de Mittag-Leffler** généralisée $E_{a,\beta}(z)$ est définie comme suit :

$$E_{a,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak + \beta)}, (a > 0, \beta > 0)$$

Propriétés de La fonction de Mittag–Leffler

1). Pour $|z| < 1$, la **fonction de Mittag-Leffler** généralisée satisfait :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{a,\beta}(zt^a) dt = \frac{1}{z-1}.$$

2). Intégration de la fonction de **M-L** :

$$\int_0^a E_{a,\beta}(\lambda t^a) t^{\beta-1} dt = z^{\beta} E_{a,\beta+1}(\lambda z^a).$$

3). La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction de **M-L** est donnée par :

$$\frac{d^n}{dz^n} (z^{\beta-1} E_{a,\beta}(\lambda z^a)) = z^{\beta-n-1} E_{a,\beta+n}(z^a).$$

Fonction de Mainardi :

Définition 0.19 *la fonction de Mainardi est définie par :*

$$M_\alpha(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-Z)^k}{k! \Gamma(-\alpha k + 1 - \alpha)}, 0 < \alpha < 1, Z \in \mathbb{C}.$$

En outre, $M_\alpha(Z) \geq 0$ pour tous $t \geq 0$ et satisfait l'égalité suivante :

$$\int_0^\infty t^r M_\alpha(t) dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r + 1)}, r > -1, 0 < \alpha < 1.$$

0.3.2 Intégration successive de Cauchy :

La Formule de Cauchy pour l'intégration successive permet de condenser n intégrations en une seule.

Cas scalaire :

Soit f une fonction réelle continue. La n-ième primitive de f est :

$$\begin{aligned} f^{[n]}(x) &= \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n \dots d\sigma_2 d\sigma_1. \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy. \end{aligned}$$

Une preuve peut être donnée par récurrence. Puisque f est continue, l'initialisation est évidente :

$$\frac{d}{dx} f^{[1]}(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy = f(x).$$

et pour $f(x)$:

$$\frac{d}{dx} f^{[n]}(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy = f^{[n-1]}(x).$$

Donc $f^{[n]}(x)$ est bien la n-ième primitive de f .

0.3.3 Intégrale et Dérivée fractionnaire :

Cette section contient les définitions et quelques propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires du type de **Riemann-Liouville**.

Intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :

Définition 0.20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** (notée par R-L) d'ordre n d'une fonction f est définie par :

$$\begin{aligned} I_a^n f(t) &= \int_a^\tau \int_a^{\tau_{n-1}} \dots \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

pour $n = 0$

$$I_a^0 f(t) = f(t).$$

$n = 1$ On considère l'intégrale :

$$I_a^1 f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

La primitive seconde de f définit comme suite :

$$I_a^2 f(t) = \frac{1}{(2-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{2-1} f(\tau) d\tau = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau$$

$$I_a^2 f(t) = \frac{1}{1!} \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau$$

En utilise l'intégrale par partie, on trouve :

$$I_a^2 f(t) = (t-\tau) \int_a^\tau f(\tau) d\tau \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \int_a^t \int_a^\tau f(\tau) d\tau.$$

Alors :

$$\int_a^t \int_a^\tau f(r) dr = I_a^2 f(t)$$

Définition 0.21

fractionnaire de Riemann-Liouville de f d'ordre α [à gauche] est définie par :

$$(I_{a/t}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

2). *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de f d'ordre α [à droite] est définie par :*

$$(I_{t/b}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

0.3.4 Dérivation d'ordre fractionnaire :

La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :

Définition 0.22 *Soit f une fonction localement intégrable définie sur $[0, b]$ et $\alpha > 0$*

$n - 1 < \alpha < n$.

La dérivée d'ordre α de f est définie par :

1)– *Dérivée au sens de **Riemann-Liouville à gauche** :*

$${}^R D_{0/t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha-n+1}} d\tau$$

2)– *Dérivée au sens de **Riemann-Liouville à droite** :*

$${}^R D_{t/T}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau - t)^{\alpha-n+1}} d\tau$$

Corollaire 0.2 *Les propriétés de La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :*

pour $n-1 < \alpha < n$ et $m-1 < \beta < m$:

· *La linéarité :*

$${}^R D^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^R D^\alpha f(t) + {}^R D^\alpha g(t)$$

2. Nous avons aussi la formule de composition suivante :

Soient $m - 1 \leq \alpha \leq m$ et $n - 1 \leq \beta \leq n$:

$${}^R D^\alpha {}^R D^\beta f(t) = {}^R D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^n [D^{\beta-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)}$$

3. *Non-commutativité* :

$${}^R D^\alpha \circ {}^R D^\beta \neq {}^R D^\beta \circ {}^R D^\alpha$$

Preuve 1. Soit $f, g \in L_1[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$${}^R D_a^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} [I_a^{n-\alpha} f(t)] = {}^R D_a^n [I_a^{n-\alpha} f(t)]$$

$${}^R D_a^\alpha [\lambda f(t) g(t)] = {}^R D_a^n I_a^{n-\alpha} [\lambda f(t) g(t)] = \lambda {}^R D_a^n I_a^{n-\alpha} [(f+g)(t)]$$

Comme la dérivée n-ième et l'intégrale sont linéaires alors :

$${}^R D^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^R D^\alpha f(t) + {}^R D^\alpha g(t)$$

3. D'après (2) On a :

$${}^R D^\alpha {}^R D^\beta f(t) = {}^R D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^m [D^{\beta-k} f(t)]_{t=0} \frac{t^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)}$$

et

$${}^R D^\beta {}^R D^\alpha f(t) = {}^R D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^n [D^{\alpha-k} f(t)]_{t=0} \frac{t^{-\beta-k}}{\Gamma(1-\beta-k)}$$

Par suite les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ne commutent que si $\alpha = \beta$ ou

$$[{}^R D^{\alpha-k} f(t)]_{t=0} = 0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, n-1$$

et

$$[{}^R D^{\beta-k} f(t)]_{t=0} = 0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, m-1$$

La dérivation fractionnaire au sens de Caputo :

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris **Caputo** (1967–1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisé, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de **Riemann-Liouville** qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 0.23 Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[0, b]$, avec $n - 1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$)

La dérivée d'ordre α de f est définie par :

1. Dérivée au sens de **Caputo à gauche** :

$${}^C D_{0/t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau$$

2. Dérivée au sens de **Caputo à droite** :

$${}^C D_{t/T}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau - t)^{\alpha - n + 1}} d\tau$$

Lemme 0.3 Soient $n - 1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}$), $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(t)$ telle que ${}^C D_{a/t}^\alpha f(t)$ existe alors :

$${}^C D_{a/t}^\alpha f(t) = I_{a/t}^{n - \alpha} D_{a/t}^n f(t)$$

Quelques propriétés de dérivation fractionnaire de Caputo

Corollaire 0.3 1. La linéarité :

Soient $n - 1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que ${}^C D_{a/t} f(t)$ et ${}^C D_{a/t} g(t)$ existent.

La dérivation fractinnaire de **Caputo** est un opérateur bilinéaire

$${}^C D_{a/t}^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^C D_{a/t}^\alpha f(t) + {}^C D_{a/t}^\alpha g(t)$$

2. Non-commutativité :

On suppose que $n-1 \leq \alpha < n, n, m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que ${}^C D_{a/t}^\alpha f(t)$ existe alors :

$${}^C D_{a/t}^\alpha D_{a/t}^m f(t) \neq D_{a/t}^m {}^C D_{a/t}^\alpha f(t)$$

3. Soient $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$, si ${}^C D_{a/t}^\alpha f(t)$ et ${}^R D_{a/t}^\alpha f(t)$ existent, on suppose que $D^k f(a) = 0$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ alors :

$${}^C D_{a/t}^\alpha f(t) = {}^R D_{a/t}^\alpha f(t)$$

4. Si $f \in C([a, b])$ et si $\alpha > 0$ et $n-1 \leq \alpha < n$, alors :

$${}^C D_{a/t}^\alpha I_{a/t}^\alpha f(t) = f(t).$$

5. Supposons que $n-1 \leq \alpha < n, \beta = \alpha - n + 1, 0 \leq \beta < 1, n \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^C D_{a/t}^\alpha f(t)$ existe alors :

$${}^C D_{a/t}^\alpha f(t) = {}^C D_{a/t}^\beta D_{a/t}^{n-1} f(t).$$

Preuve 1. On a :

$${}^C D_{a/t}^\alpha f(t) = I_{a/t}^{n-\alpha} D^n f(t)$$

$${}^C D_{a/t}^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = I_{a/t}^{n-\alpha} D_{a/t}^n (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I_{a/t}^{n-\alpha} D_{a/t}^n [(f + g)(t)]$$

Comme la dérivée n-ème et l'intégrale sont linéaires alors :

$${}^C D_{a/t}^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I_{a/t}^{n-\alpha} D_{a/t}^n f(t) + I_{a/t}^{n-\alpha} D_{a/t}^n g(t) = \lambda {}^C D_{a/t}^\alpha f(t) + {}^C D_{a/t}^\alpha g(t).$$

4. Soit $g = I_{a/t}^\alpha f(t)$ et par l'egalité suivante :

$$D_{a/t}^\alpha I_{a/t}^\alpha f(t) = f(t) / \text{pour } \alpha > 0 \text{ et } f \in L^1[a, b].$$

On a :

$${}^C D_{a/t}^\alpha I_{a/t}^\alpha f(t) = {}^C D_{a/t}^\alpha g(t) = D_{a/t}^\alpha g(t) = D_{a/t}^\alpha I_{a/t}^\alpha f(t) = f(t).$$

Donc :

$${}^C D_{a/t}^\alpha I_{a/t}^\alpha f(t) = f(t).$$

■

Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville :

une comparaison entre les dérivées fractionnaires de **Riemann-Liouville** et de **Caputo** sont donné :

Lemme 0.4 Soit $f(t)$ est une fonction tels que les deux opérateurs ${}^R D_{a/t}^\alpha f(t)$ et ${}^C D_{a/t}^\alpha f(t)$

$${}^R D_{a/t}^\alpha f(t) \neq {}^C D_{a/t}^\alpha f(t)$$

Proposition 0.1 Soit $n - 1 < \alpha < n$ alors :

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^R D_{a/t}^\alpha f(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D_{a/t}^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

Remarque 0.3 (commutativité) : Soit la fonction $f(t)$ telle que : $f^{(s)}(0) = 0, s = 0, 1, 2, \dots, m$, alors les deux dérivées fractionnaires de **Riemann-Liouville** et de **Caputo** sont commutatives avec la dérivée d'ordre $m, m \in \mathbb{N}$

$$D^m {}^R D_{a/t}^\alpha f(t) = D_{a/t}^{\alpha+m} f(t) = {}^R D_{a/t}^\alpha D_{a/t}^m f(t)$$

Et

$${}^C D_{a/t}^\alpha {}^R D_{a/t}^m f(t) = {}^C D_{a/t}^{\alpha+m} f(t) = D^m {}^C D_{a/t}^\alpha f(t)$$

Relation entre l'opérateur de Riemann-Liouville et de Caputo :

Théorème 0.3 Soient : $t > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $n - 1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$ alors que la relation entre l'opération de **Riemann-Liouville** et **Caputo** est :

$${}^C D_{a/t}^\alpha f(t) = {}^R D_{a/t}^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0)$$

Preuve On considère D.L en série de Taylor de la fonction f au point $t = 0$;

$$f(t) = f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + \frac{t^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_{n-1}$$

Donc

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1}$$

avec :

$$R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(x)(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

En utilisant les propriétés d'intégration d'ordre n , on a :

$$R_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f^{(n)}(x)(t-x)^{n-1} dx = I^n f^{(n)}(t).$$

en utilisant la linéarité de l'opérateur de **Riemann-Liouville** on a :

$$\begin{aligned}
 {}^R D_{a/t}^\alpha f(t) &= {}^R D^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^K}{\Gamma(k+1)} f^k(0) R_{n-1} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^R D^\alpha T^K}{\Gamma(k+1)} f^k(0) + {}^R D^\alpha R_{n-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} f^k(0) + {}^R D^\alpha I^n f^{(n)}(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^k(0) + I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^k(0) + {}^C D^\alpha f(t)
 \end{aligned}$$

Donc :

$${}^C D_{a/t}^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^k(0)$$

■

Remarque 0.4 Cette formule implique que les opérateurs fractionnaires de **Caputo** et de **Riemann-Liouville** coïncident si et seulement si $f(t)$ et même temps que les premiers $(n-1)$ dérivées sont nulles au point $t=0$.

0.4 Le Laplacien Fractionnaire :

Le **Laplacien fractionnaire** $(-\Delta)^s$ dans \mathbb{R}^n est le prototype des opérateurs de diffusion qui sont bien connus des probabilistes, et leur étude par des outils d'*EDP* s'est intensifiée depuis quelques années.

D'un point de vue purement mathématique, cet opérateur partage certaines propriétés cruciales du **Laplacien** : en particulier, il vérifie le principe du maximum.

Définition 0.24 Soient $S(\mathbb{R}^n)$ un espace de Schwartz, $f \in S(\mathbb{R}^n)$ et $0 < s < 1$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$,

l'opérateur $(-\Delta)^s$ est défini par sa transformée de Fourier :

$$(-\Delta)^s f(\xi) = \mathcal{F}^{-1} (c |\xi|^{2s} \mathcal{F} f(\xi))$$

Chapitre 1

L'existence locale :

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} D_{0/t}^\alpha u(x, t) + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u(x, t) = J_{0/t}^{1-\alpha} (e^u), & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (1.1)$$

Où : $u \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leq 2$, $D_{0/t}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , $J_{0/t}^{1-\alpha}$ est l'intégral fractionnaire au sens **Riemann-Liouville** d'ordre $1 - \alpha$ pour e^u :

$$J_{0/t}^{1-\alpha} (e^u) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{u(s)} ds$$

L'opérateur non local $(-\Delta)^{\beta/2}$ est défini par

$$(-\Delta)^{\beta/2} u(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(|\xi|^\beta \mathcal{F}(u) (\xi) \right) (x)$$

Pour tout $u \in D((-\Delta)^{\beta/2}) = H^\beta(\mathbb{R}^N)$, où $H^\beta(\mathbb{R}^N)$ est l'espace de Sobolev d'ordre β définie par

$$\begin{aligned} H^\beta(\mathbb{R}^N) &= \left\{ u \in S : (-\Delta)^{\beta/2} u(x) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}, \text{ si } \beta \notin \mathbb{N} \\ H^\beta(\mathbb{R}^N) &= \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : (-\Delta)^{\beta/2} u(x) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}, \text{ si } \beta \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Où :

S : l'espace de Schwartz,

\mathcal{F} : Représente la transformée de Fourier et \mathcal{F}^{-1} son inverse,

Γ : La fonction gamma d'Euler,

$C_0(\mathbb{R}^N)$: Désigne l'espace de toutes les fonctions continues décroissant à zéro à l'infini, i.e

$$C_0(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in C(\mathbb{R}^N) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \right\}.$$

1.1 Préliminaires

1.1.1 Semi-groupe :

On peut constater que la fonction $t \rightarrow e^{t\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, est une solution réelle continue de l'équation fonctionnelle de Cauchy

$$f(t+s) = f(t)f(s)$$

Avec la condition : $f(0) = 1$.

Cette équation a été étudiée par beaucoup de mathématiciens commençant avec Cauchy même . D'autre part , il est très bien connu que la fonction exponentielle $t \rightarrow e^{t\alpha}$ est la solution unique sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$x' = \alpha x$$

avec la condition initiale $x(0) = 1$. L'importance des fonction exponentielle a connu une grande croissance apres l'année 1888, quand le grand mathématicien **Giuseppe Peano** a eu l'inspiration d'écrire la solution du problème de Cauchy vectoriel :

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = I \end{cases}$$

où A est une matrice quadratique, sous la forme :

$$t \rightarrow e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Ce résultat a été étendu aux équations différentielles opératorielles

$$X' = AX,$$

où A est un opérateur linéaire borné dans un **espace de Banach** E , qui a pour solution fondamentale la fonction exponentielle

$$t \rightarrow e^{tA}.$$

Ces extensions de la fonction exponentielle admettent un modèle général dans le cadre des algèbres de **Banach** abstraites . Plus précisément , si B est une algèbre de **Banach** avec l'unité I et $\alpha \in B$, alors la fonction : $t \mapsto e^{t\alpha} \in B$ avec

$$e^{t\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \alpha^n}{n!}$$

est dérivable et elle est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = I \end{cases}$$

Ces caractérisations importantes ont suggéré l'idée d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre par des extensions adéquates de la fonction exponentielle . De cette manière est apparu la nécessité de considérer les équations différentielles vectorielle de premier ordre $x' = Ax$ où A n'est pas un opérateur de l'algèbre de **Banach** des opérateurs linéaires bornés, mais un opérateur linéaire non-borné dans un **espace de Banach** E . La définition d'une fonction exponentielle comme une solution de cette équation a été réalisée par l'introduction des semi-groupe de la classe C_0 ,

Définition 1.1 Soit E un **espace de Banach**. Une famille $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, d'opérateurs linéaires bornés de E dans E est dite un semi-groupe sur E si :

- $T(0) = I$ (I est l'identité dans X)
- $T(s+t) = T(s)T(t)$ pour tout $t, s \geq 0$.

C_0 semi-groupe :

Définition 1.2 (C_0 semi-groupe) Un semi-groupe $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ d'opérateurs linéaires bornés est un **semi-groupe** fortement continu si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x, \text{ pour tout } x \in X.$$

Un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés fortement continu est dit un C_0 semi-groupe.

Théorème 1.1 Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe, alors ils existent un réel w et un réel $M \leq 1$ tels que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

En particulier, si $M = 1$ et $w = 0$ alors $(T(t))_t$ est appelé C_0 semi-groupe de contractions.

1.1.2 Application contractante :

Définition 1.3 Soit E un espace de Banach, et $T : E \rightarrow E$ une application continue on dit que T est **contractante** si T est **lipschitzienne** de rapport $k < 1$, i.e

$$\exists k < 1 : \forall x, y \in E : \|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

1.1.3 Théorème du point fixe :

Théorème 1.2 Soient E un espace de Banach, et $T : E \rightarrow E$ un opérateur contractant, alors T admet un **point fixe** unique, c'est-à-dire

$$\exists! u^* \in E \text{ tel que : } Tu^* = u^*$$

De plus, Si T^k , $k \in \mathbb{N}$, est une suite d'opérateur définie par

$$\begin{cases} T^1 = T \\ T^k = TT^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \end{cases}$$

Alors pour tout $u_0 \in E$, la suite $\{T^k u_0\}_{k=0}^{\infty}$ converge vers **le point fixe** u^* ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k u_0 - u^*\| = 0.$$

1.1.4 Solution locale et globale :

Définition 1.4 Considérons une équation différentielle ordinaire :

$$F(t, u(t), u'(t); u''(t); \dots) = 0 \tag{1.2}$$

Avec : $t \in I \subset \mathbb{R}$ et $u : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Supposons que u une solution de (1.2).

· On dit que u est une solution locale si elle définie sur un temps finie c-à-d :

$\exists T > 0 \forall t \in [0, T]$, $u(t)$ existe ($u(t)$ est définie pour tout $t \leq T$)

· Si $u(t)$ est définie sur $[0, +\infty[$ donc u est appelée solution globale.

Définition 1.5 On définit les famille d'opérateur de **Mittag-Leffler** basées sur le semi-groupe $T(t)$ généré par l'opérateur fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ par

$$\begin{aligned} P_{\alpha, \beta}(t) &= \int_0^{\infty} M_{\alpha}(s) T(st^{\alpha}) ds \\ &= \int_0^{\infty} M_{\alpha}(s) e^{-st^{\alpha}(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}} ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_{\alpha, \beta}(t) &= \int_0^{\infty} \alpha s M_{\alpha}(s) T(st^{\alpha}) ds \\ &= \int_0^{\infty} \alpha s M_{\alpha}(s) e^{-st^{\alpha}(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}} ds \end{aligned}$$

Lemme 1.1 *L'opérateur $\{P_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0}$ a la propriété suivante :*

Si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{\beta}{N}$ alors :

$$\| P_{\alpha,\beta}(t) u_0 \|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{N}{\beta r}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha N}{\beta r}\right)} \| u_0 \|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \quad (1.3)$$

Preuve De (2.12) et des propriétés de M_α , **fonction de Mainardi**, on a :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^\infty M_\alpha(s) T(st^\alpha) u_0 ds \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ & \leq \int_0^\infty M_\alpha(s) (t^\alpha s)^{-N/(\beta r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} ds \\ & = t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \int_0^\infty M_\alpha(s) s^{-N/(\beta r)} ds \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ & = t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(1 - N/(\beta r))}{\Gamma(1 - \alpha N/(\beta r))} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

■

Lemme 1.2 *L'opérateur $\{S_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0}$ a la propriété suivante :*

Si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{r} < \frac{2\beta}{N}$ alors :

$$\| S_{\alpha,\beta}(t) u_0 \|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{N}{\beta r}\right)}{\Gamma\left(1 + \alpha - \frac{\alpha N}{\beta r}\right)} \| u_0 \|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \quad (1.4)$$

Preuve De manière similaire à la preuve du lemme (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha) u_0 ds \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ & \leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) (t^\alpha s)^{-N/(\beta r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} ds \\ & = \alpha t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \int_0^\infty M_\alpha(s) (s)^{1-N/(\beta r)} ds \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ & = \alpha t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(2 - N/(\beta r))}{\Gamma(1 + \alpha - \alpha N/(\beta r))} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

■

1.2 Existence local

Dans cette section, nous donnons l'existence locale et l'unicité de la solution douce du problème (1.1). d'abord, nous donnons la définition d'une solution douce de (1.1)

Définition 1.6 (*Solution douce*) : Soient $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $T \succ 0$. Nous disons que $u \in C([0, T]; C_0(\mathbb{R}^N))$ est une **solution douce** du problème (1.1) si :

$$u(t) = P_{\alpha, \beta}(t) u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha, \beta}(t-s) J_{0/s}^{1-\alpha}(e^{u(t)}) ds, t \in [0, T]$$

Théorème 1.3 (*Existance locale*) : Soient $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, alors il existe un temps maximal $T_{\max} \succ 0$ tel que le problème (1.1) a une solution douce unique $u \in C([0, T_{\max}); C_0(\mathbb{R}^N))$.

De plus, soit $T_{\max} = +\infty$ ou $T_{\max} \prec +\infty$ et

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = +\infty.$$

Si en plus, $u_0 \geq 0, u_0 \neq 0$, alors

$$u(t) \succ 0, \text{ pour tous } 0 \prec t \prec T_{\max}$$

Preuve Pour $T \succ 0$, nous définissons l'espace de Banach :

$$E_T = \{u \in C([0, T]; C_0(\mathbb{R}^N)); \|u\|_1 \leq 2 \|u_0\|_\infty\}$$

où :

$$\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^N))}$$

Pour chaque $u \in E_T$, définissons l'opérateur :

$$\Psi(u) = P_{\alpha, \beta}(t) u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha, \beta}(t-s) J_{0/s}^{1-\alpha}(e^{u(\tau)}) ds$$

.

Alors

$$\Psi(u) \in C([0, T]; C_0(\mathbb{R}^N))$$

Si $u \in E_T$, puis par (1.3) et (1.4), nous obtenons avec $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$

$$\begin{aligned} \|\Psi(u)\|_1 &\leq \|u_0\|_\infty + C_1 \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \|e^{u(\tau)}\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0, T])} \\ &\leq \|u_0\|_\infty + T e^{\|u\|_1} \\ &\leq \|u_0\|_\infty + T e^{2\|u_0\|_\infty} \end{aligned}$$

Où :

$$C_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

Maintenant choisissons T assez petit tel que :

$$T e^{2\|u_0\|_\infty} \leq \|u_0\|_\infty$$

On conclut que :

$$\|\Psi(u)\|_1 \leq 2\|u_0\|_\infty$$

Donc

$$\Psi(u) \in E_T.$$

Montrons que Ψ est une application contractante. Considérons $u, v \in E_T$, on a :

$$\begin{aligned} \|\Psi(u) - \Psi(v)\|_1 &\leq \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha, \beta}(t-s) J_{0/s}^{1-\alpha} (e^{u(\tau)} - e^{v(\tau)}) ds \right\|_1 \\ &\leq C_1 \left\| \int_0^t (t-s)^\alpha \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \|e^{u(\tau)} - e^{v(\tau)}\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0, T])} \\ &\leq T \|e^{u(s)} - e^{v(s)}\|_1 \\ &\leq T e^{2\|u_0\|_\infty} \|u - v\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - v\|_1 \end{aligned}$$

Grace à l'égalité suivante :

$$|e^{u(s)} - e^{v(s)}| = e^{\lambda u(s) + \mu v(s)} |u(s) - v(s)|, 0 < \mu, \lambda < 1 \text{ et } \mu + \lambda = 1. \quad (1.5)$$

où T est choisi suffisamment petit tel que que :

$$2Te^{2\|u_0\|_\infty} \leq 1.$$

Alors, Ψ est contractante sur E_T . D'après le théorème **du point fixe de Banach** le problème (1.1) admet une **solution douce** $u \in E_T$. Maintenant nous prouvons l'unicité de la solution :

Soit $u, v \in E_T$ deux **solutions douces** dans E_T pour $T > 0$ en utilisant (1.4) et (1.5), on a pour $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|u(s) - v(s)\|_\infty &\leq C_1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-t)^\alpha \|e^{u(\tau)} - e^{v(\tau)}\|_\infty d\tau ds \\ &\leq e^{2\|u_0\|_\infty} \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_\infty ds. \end{aligned}$$

De l'**inégalité de Gronwall**, on conclut que :

$$u \equiv v$$

· Positivité de la solution : si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$ on a depuis () :

$$u(t) \geq P_{\alpha,\beta}(t) u_0 > 0, t \in [0, T_{\max})$$

■

Chapitre 2

Non existence de la solution globale

2.1 Préliminaires

2.1.1 Explosion de la solution dans les équations différentielles ordinaires :

La forme la plus simple qui représente le phénomène de l'explosion de la solution dans des problèmes non-linéaires apparaît quand la variable (ou les variables) tendent à l'infini quand le temps approche une certaine limite finie $T > 0$.

Exemple 2.1 *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} u' = u^2, & t > 0 \\ u(0) = \alpha, & \alpha > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Le problème (2.1) est un exemple très simple des problèmes différentiables ordinaires (ODE), il admet une solution unique dans l'intervalle $0 < t < T$, elle est de la forme

$$u(t) = \frac{1}{T - t}$$

On voit que

$$\lim_{t \rightarrow T} u(t) = +\infty$$

De l'exemple (2.1), on peut constater que le concept de l'explosion peut être largement généralisé comme phénomène par lequel les solutions cessent d'exister globalement à temps en raison de la croissance infinie des variables décrivant le processus d'évaluation.

2.1.2 Explosion de solutions des équations de type réaction-diffusion

Le phénomène d'explosion apparaît notamment quand le problème a une structure spatiale, de sorte que les inconnus dépendent non seulement du temps mais également d'une variable de l'espace :

$$u = u(x, t), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

et en particulier dans les problèmes de réaction diffusion, et dans les théories de propagation qui sont en général de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u, \Delta u, x, t) + B(u, \Delta u, x, t) \quad (2.2)$$

et qui est considéré comme un modèle non-linéaire de propagation de la chaleur dans un milieu réactif, où u représente une température.

On peut formuler le concept de l'explosion, dans ce cas où on tient compte de la structure spatiale des solutions ; comme suit :

Il existe un moment $T < \infty$, appelé le temps d'explosion, telle que la solution est bien définie pour tout $0 < t < T$,

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x, t)| \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad t \rightarrow T$$

Définition 2.1 Soit $u(x, t)$ une solution de l'équation (2.2), tels que $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$.

On dit que $u(x, t)$, **explose en temps fini** T , si :

$$\lim_{t \rightarrow T} u(x, t) = +\infty$$

Dans ce cas

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x, t)| \rightarrow \infty \text{ quand } t \rightarrow T$$

Lemme 2.1 *Assumons que φ est une fonction bornée de classe C^1 . Alors :*

$$(-\Delta)^{\beta/2} \varphi^l \leq l \varphi^{l-1} (-\Delta)^{\beta/2} \varphi \quad (2.3)$$

est satisfaite pour tout $l \geq 1$.

2.1.3 Calcul de dérivée

Considérons la fonction φ_1 défini par :

$$\varphi_1(x) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\gamma, \quad \gamma \gg 1$$

Avec $T > 0$.

On a :

$$\begin{aligned} D_{t/T}^\alpha \varphi_1(t) &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha + 1)} T^{-\alpha} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\gamma - \alpha} \\ D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi_1(t) &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + \alpha)} T^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\gamma + \alpha - 1} \\ \frac{d\varphi_1(t)}{dt} &= -\gamma T^{-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\gamma-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2 Explosion de la solution :

Définition 2.2 (Solution faible) Soit $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $T > 0$. On dit que u est **une solution faible** de (3.1) si $u \in L^p((0; T), L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N))$ et vérifier, l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} D_{0/t}^\alpha u(x, t) \Psi(x, t) dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u(x, t) \Psi(x, t) dxdt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J_{0/t}^{1-\alpha} (e^{u(x,t)}) \Psi(x, t) dxdt \end{aligned} \quad (2.5)$$

pour toute fonction test $\Psi \in C^1([0; T], H^\beta(\mathbb{R}^N))$ tel que :

$$\Psi(x, T) = 0$$

Remarque 2.1 L'équation (3.5) donne :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0 D_{t/T}^\alpha \Psi(x, t) dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J_{0/t}^{1-\alpha} (e^{u(x,t)}) \Psi(x, t) dxdt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \Psi(x, t) dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(t, x) D_{t/T}^\alpha \Psi(x, t) dxdt \end{aligned} \quad (2.6)$$

Lemme 2.2 On considère $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et soit $u \in C([0, T], C_0(\mathbb{R}^N))$ **une solution douce** de (2.1) alors u est **une solution faible** de (2.1).

Théorème 2.1 Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ avec $u_0 \geq 0$, et $u_0 \not\equiv 0$, alors la solution de (2.1) explose dans un temps fini.

Preuve Par contradiction (par l'absurde)

Supposon que u est **une solution douce globale** de (2.1).

Alors, pour tout $T \gg 1$

$$u \in C([0, T], C_0(\mathbb{R}^N)),$$

Et

$$u(t) > 0 \text{ pour } t \in [0, T]$$

Soit $\Psi(x, t) = D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi(x, t)$ avec $\varphi \in C^1([0; T], H^\beta(\mathbb{R}^N))$ telle que :

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, t) &= \varphi_1(x) \varphi_2^l(x), & l \gg 1 \\
 \varphi_1(x) &= \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\gamma, & \gamma \gg 1 \\
 \varphi_2(x) &= \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right), \\
 \Phi(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \searrow & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

De Définition (3.2) et (3.3), on a :

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0 D_{t/T}^\alpha D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J_{0/t}^{1-\alpha} (e^{u(x,t)}) D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi(x, t) dx dt \\
 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(t, x) D_{t/T}^\alpha D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi(x, t) dx dt \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} e^u \varphi(x, t) dx dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi(x, t) dx dt \\
 &\quad - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} U(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dx dt
 \end{aligned}$$

Posons : $\Omega_T = [0, T] \times \Omega$, avec

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq 2T^{\frac{1}{\beta}} \right\}$$

et d'après :

$$\varphi(x, t) = \varphi_1(x) \varphi_2^l(x), l \gg 1$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_0(x) \varphi_2^l(x) \varphi_1(0) dx + \int_{\Omega_T} e^u \varphi(x, t) dx dt &= \int_{\Omega_T} u(x, t) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi_2^l(x) \varphi_1(t) dx dt \\ &\quad - \int_{\Omega_T} u(x, t) \varphi_2^l(x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t) dx dt \end{aligned}$$

Comme :

$$\varphi_1(0) = 1$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_0(x) \varphi_2^l(x) dx + \int_{\Omega_T} e^u \varphi(x, t) dx dt &= \int_{\Omega_T} u(x, t) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi_2^l(x) \varphi_1(t) dx dt \\ &\quad - \int_{\Omega_T} u(x, t) \varphi_2^l(x) \frac{d\varphi_1}{dt}(t) dx dt \end{aligned}$$

en utilisant (3.3), on trouve :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u_0(x) \varphi_2^l(x) dx + \int_{\Omega_T} e^u \varphi(x, t) dx dt \\ &\leq l \int_{\Omega_T} u(x, t) \varphi_2^{l-1} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi_1(t) dx dt - \int_{\Omega_T} u(x, t) \varphi_2^l(x) \frac{d\varphi_1}{dt}(t) dx dt \\ &\leq l \int_{\Omega_T} u(x, t) \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) \right| D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi_1(t) dx dt + \int_{\Omega_T} u(x, t) \left| \frac{d\varphi_1}{dt}(t) \right| dx dt \\ &\leq lA + B \end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité de young (1),

en prenant $\varepsilon = \frac{1}{4l} \varphi(x, t)$, obtient :

$$\begin{aligned} A &\leq \int_{\Omega_T} \frac{1}{4l} \varphi(x, t) e^u dx dt \\ &\quad + \int_{\Omega_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) \right| D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi_1(t) \ln \left[\frac{\left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) \right| D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi_1(t)}{\varphi_2^l(x) \varphi_1(t)} \right] dx dt \quad (2.9) \end{aligned}$$

On a :

$$D_{\frac{t}{T}}^{1-\alpha} \varphi_1(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} T^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\gamma+\alpha-1} \quad (2.10)$$

et

$$\frac{d}{dt} \varphi_1(t) = -\gamma T^{-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\gamma-1} \quad (2.11)$$

D'après (3.10), l'inégalité (3.11) donne :

$$A \leq \int_{\Omega_T} \frac{1}{4l} \varphi(x, t) e^u dx dt + \int_{\Omega_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) \right| D_{\frac{t}{T}}^{1-\alpha} \varphi_1(t) \ln \left[\frac{C_3 \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) \right| T^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\gamma+\alpha-1}}{\varphi_2^l(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\gamma} \right] dx dt \quad (2.12)$$

avec :

$$C_3 = 4l \frac{\Gamma(\gamma+1)}{e \Gamma(\gamma+\alpha)}$$

Alors

$$A \leq \int_{\Omega_T} \frac{1}{4l} \varphi(x, t) e^u dx dt + \int_{\Omega_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) \right| D_{\frac{t}{T}}^{1-\alpha} \varphi_1(t) \ln \left[\frac{C_3 \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) \right| T^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\alpha-1}}{\varphi_2^l(x)} \right] dx dt \quad (2.13)$$

De manière similaire, si en prend $\varepsilon = \frac{1}{4} \varphi(x, t)$, on obtient :

$$B \leq \int_{\Omega_T} \left| \frac{d\varphi_1}{dt} \right| \ln \left[\frac{\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right|}{l \left(\frac{1}{4} \varphi_2^l(x) \varphi_1(t) \right)} \right] dx dt + \frac{1}{4} \int_{\Omega_T} \varphi(x, t) e^{u(x,t)} dx dt \quad (2.14)$$

D'après (3.10), l'inégalité (3.11) donne :

$$B \leq \int_{\Omega_T} \left| \frac{d\varphi_1}{dt} \right| \ln \left[\frac{C_4 T^{-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\gamma-1}}{\varphi_2^l(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\gamma} \right] dx dt + \frac{1}{4} \int_{\Omega_T} \varphi(x, t) e^{u(x,t)} dx dt$$

avec :

$$C_4 = \frac{4\gamma}{e}$$

Alors

$$B \leq \int_{\Omega_T} \left| \frac{d\varphi_1}{dt} \right| \ln \left[\frac{C_4 T^{-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)} \right] dxdt + \frac{1}{4} \int_{\Omega_T} \varphi(x, t) e^{u(x, t)} dxdt$$

Finalement en déduit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_0(x) \varphi_2^l(x) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} \varphi(x, t) e^{u(x, t)} dxdt \\ & \leq l \int_{\Omega_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) \right| D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi_1(t) \ln \left[\frac{C_3 \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) \right| T^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\alpha-1}}{\varphi_2^l(x)} \right] dxdt \\ & \quad + \int_{\Omega_T} \left| \frac{d\varphi_1}{dt} \right| \ln \left[\frac{C_4 T^{-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)} \right] dxdt \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le changement de variable : $\tau = \frac{t}{T}$ et $y = \frac{x}{T^{\frac{\alpha}{\beta}}}$ pour $T \gg 1$, donne que :

$$\begin{aligned} dxdt &= T^{\frac{\alpha N}{\beta} + 1} dyd\tau \\ (-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2 &= T^{-\alpha} (-\Delta_y) \varphi_2 \\ D_{t/T}^{1-\alpha} \varphi_1(t) &= C_5 T^{\alpha-1} (1 - \tau)^{\gamma + \alpha - 1} \\ \left| \frac{d\varphi_1}{dt} \right| &= \gamma T^{-1} (1 - \tau)^{\gamma - 1} \end{aligned}$$

avec

$$C_5 = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + \alpha)}$$

Maintenant, on pose $\Omega_2 = [0, 1] \times \{y \in \mathbb{R}^N, |y| \leq 2\}$.

Alors (2.15) peut être réécrit comme :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} u_0(x) \varphi_2^l(x) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} \varphi(x, t) e^{u(x, t)} dx dt \\
 \leq & C_5 l T^{\frac{\alpha N}{\beta}} \int_{\Omega_2} \left| (-\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2 \left(T^{\frac{\alpha}{\beta}} y \right) \right| (1 - \tau)^{\gamma + \alpha - 1} \\
 & \times \ln \left[\frac{C_3 T^{-1} \left| (-\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) \right| (1 - \tau)^{\alpha - 1}}{\varphi_2^l \left(T^{\frac{\alpha}{\beta}} y \right)} \right] dy d\tau \\
 & + \gamma T^{\frac{\alpha N}{\beta}} \int_{\Omega_2} (1 - \tau)^{\gamma - 1} \ln \left[\frac{C_4 T^{-1} (1 - \tau)^{-1}}{\varphi_2^l \left(T^{\frac{\alpha}{\beta}} y \right)} \right] dy d\tau \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

On remarque que les deux fonctions φ_2 et $(-\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}}$ sont bornées dans Ω_2 et aussi que :

$$\varphi_2 \rightarrow 1 \text{ quand } T \rightarrow +\infty$$

En utilisant le **théorème de convergence dominé de Lebesgue**, on en déduit que le membre droit de (2.16) divergent vers $-\infty$ quand $T \rightarrow +\infty$, tandis que le membre gauche est positif. Cela conduit à une contradiction. ■

Bibliographie

- [1] .B.Assia, "Quelques propriétés et applications de l'opérateur fractionnaire de Caputo", 23 mai 2017.
- [2] .A.BEKKA," Calcul numérique des dérivées fractionnaires",2017 / 2018.
- [3] .J.Oscar, "Modélisation de l'opérateur Laplacien Fractionnaire à travers d'un problème d'extension au demi-espace", 7 oct 2014.
- [4] .D.Medjahid,"Etude des problèmes des volution fractionnaires par la méthode d'explosion", 7 oct 2013.
- [5] .Y. Abdelbadie,"La théorie de semi-groupes et les équations aux dérivées partielles à retard",01 juillet 2019...
- [6] .S.OUALI, L IDIR ,"Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ et $W^{s,p}(\Omega)$ ",Juin 2012.
- [7] .S. YOUSFI,"Methode d'approximation des systhèmes d'ordre fractionnaire",04 juillet 2017.
- [8] .M.Belhatem,"Etude de l'existence et la non existence des solutions globales pour quelques problèmes de réaction-diffusion fractionnaires",2018-2019.
- [9] .H.Kamel, "Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires", sep 2007.
- [10] .S.Y.Mokhtari,"Analyse fractionnaire appliquée aux systèmes différentiels non linéaire",2012.
- [11] .S.BOUKARABILA ,"Systèmes de réaction-diffusion fractionnaires et applications",17 Juin 2019.

- [12] .A.KHALOUTA , "Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques.Extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire",14/12/2019.
- [13] .M.Fernando Cortez, "Explosion en temps fini de solutions d'équations dispersives ou dissipatives non-linéaires", 12 juin 2018.
- [14] .D. Delbosco ,L.Rodino , "Existence et unicité pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire", Quart Appl Math, 1996 ; 204 (2) : 609-625..
- [15] .JH. He , "Quelques applications de l'équation différentielle fractionnaire non linéaire et leurs approximations", Bull Sci Technol, 1999 ; 15 (2) : 86-90.
- [16] .F.Mainardi , "Concernant une équation dans la théorie de la combustion", dans : Carpinteri A, Mainardi F, sous la direction de Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Pringer-Verlag, New York : Springer ; 1997. ISBN 978-3-7091-2664-6.
- [17] .B.Ahmad , A.Alsaedi, M.Kirane , "Sur une équation de diffusion de réaction avec un terme source non linéaire en temps non local", Math Meth Appl Sci, 2016 ; 39 (2) : 236-244.
- [18] .A.Fino ,M. Kirane, " Propriétés qualitatives des solutions à une équation d'évolution fractionnaire temporelle", Quart Appl Math, 2012 ; 70 (1) : 133-157..
- [19] .N.Ju . "Le principe maximum et l'attracteur global pour les équations dissipatives" ,Dquasi-géostrophiques.Comm Pure Appl Anal. 2005 ; 250 (1) : 161-181.
- [20] .QG.Zhang , HR.Sun , "L'explosion et l'existence globale de solutions de problèmes de Cauchy pour une équation de diffusion fractionnaire dans le temps", Topol Methods Nonlinear Anal.2015 ; 46 (1) : 69-92.