



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ « Abbès LAGHROUR » DE KHENCHELA  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE



Département de Génie Mécanique

N° de série : .....

## Mémoire de fin d'études

*Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)*

**Filière : Génie Mécanique**

**Spécialité : Génie des Matériaux**

**Analyse du comportement mécanique des poutres  
sandwich composites avancées FGM**

*Réalisé par :*

GHOUARI Lahcene  
KETTOUM Hakim

*Membres de jury :*

Dr .CHITOUr Mourad  
Dr .HUMEUR Nabil  
Dr .KHADRAOUI Fayçal

MAA Université de Khenchela  
MAA Université de Khenchela  
MAA Université de Khenchela

*Présenté le....06/2022*

## *Remerciements*

*Tout d'abord, nous remercions Dieu Tout-Puissant pour notre existence*

*Avec connaissance et surtout patience pour atteindre l'humilité un travail.*

*À nos parents : pour le soutien et les sacrifices qu'il a faits*

*A la petite famille pour nous permettre de terminer nos études.*

*Nous tenons à exprimer notre grande gratitude et notre intérêt*

*Sincères remerciements au président et aux membres du jury*

*Accepter de revoir et de juger ce travail.*

*Merci beaucoup à notre superviseur M. Khadraoui Façal*

*Enfin, nous adressons nos remerciements aux professeurs de génie mécanique, de près ou de loin*

*Pour les grands efforts déployés dans les réalisations scientifiques et de recherche*

*Merci*

DEDICACE

*Au nom de Dieu le Miséricordieux*

*Miséricordieux.*

*Je dédie cet humble travail :*

*A mes chers parents qui m'ont beaucoup aidé et*

*Encouragé tout au long de mes études*

*À ma chère femme à mon cœur pour son endurance et sa patience en ces temps difficiles*

*A mes filles, les princesses Reham ; Rimas et Houran*

*Toutes mes sœurs et frères*

*A tous les amis et proches*

*A tous ceux que j'aime et que je respecte*

*A un groupe de masters 2 spécialité en génie des matériaux.*

*Ghouari Lahcene.*

ⲉⲃⲉⲛⲁⲛⲁⲛⲁ

*Au nom de Dieu le Miséricordieux*

*Miséricordieux.*

*Je dédie cet humble travail :*

*A mes chers parents qui m'ont beaucoup aidé et*

*Encouragé tout au long de mes études*

*À ma chère femme à mon cœur pour son endurance et sa patience en ces temps difficiles*

*A mes enfant, les princesses Assem, Tseraa et le prince Khalil*

*Toutes mes sœurs et frères*

*A tous les amis et proches*

*A un groupe de masters 2 spécialité en génie des matériaux.*

*Hakim Kattoum*

---



---

## Sommaire

<b>Résumé</b>	I
<b>ملخص</b>	II
<b>Abstract</b>	III
<b>Introduction générale</b>	1
<b>Chapitre I : Généralités sur matériaux fonctionnellement graduée FGM</b>	
I.1. Introduction	3
I.2 Historique du développement des matériaux à gradient évalué	3
I.2.1. Définition des FGM	5
I.3. Processus de traitement des matériaux à gradient évalué	8
I.4. Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	9
I.4.1. La métallurgie des poudres	9
I.4.2. Coulage en bande ( <i>Tape Casting ou Doctor-Blade</i> )	9
I.4.3. Le coulage centrifuge ( <i>Centrifugal casting</i> )	11
I.4.4. Coulage Séquentiel en Barbotine ( <i>Slip Casting</i> )	12
I.4.6. Projection plasma	13
I.5. Les branches d'applications des matériaux fonctionnellement gradués	13
I.5.1. L'aérospatiale	14
I.5.2. La médecine	15
I.5.3. L'industrie automobile	15
I.5.4. La défense	15
I.5.5. Énergie	15
I.5.6. Électrique / Électronique	16
I.5.7. Outils de coupe	16
I.5.8. Optoélectronique	16
I.5.9. Autres	16
I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM	17
I.7. Propriétés matérielles de la poutre FGM	19
I.7.1. La fraction volumique P-FGM	19
I.7.2. La fraction volumique E-FGM	20
I.7.3. La fraction volumique S-FGM	21
I.8. Avantages et inconvénients des FGM	22
I.9. Conclusion	23

**Chapitre II : Théories des poutres**

II.1. Introduction	24
II.2. Définition d'une poutre	24
II.3. Conditions aux limites d'une poutre	24
II.4. Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres	25
II.4.1. Les modèles classiques	26
II.4.2. Modèle d'Euler Bernoulli ( <i>Classical Beam Theory</i> - CBT)	26
II.4.4. La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (Timoshenko) (FSDBT)	27
II.4.5. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevée (HSDBT)	30
II.4.6. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (TSDBT)	33
II.5. Conclusion	34

**Chapitre III : analyse du comportement statique des poutres sandwich en matériaux à gradient**

III.1.Introduction	35
III.2.La méthode des éléments finis en déplacement	35
III.3.Cinématique et équations constitutives	36
III.4.Champs de déformations	36
III.5. champ des contraintes	37
III.6.Principe d' Hamilton	38
III.6.1.Les équations du mouvement	38
III.6.2.Equation de terme de mouvement	39
III.6.3.Equation de mouvement	39
III.7.Détermination des termes	40
III.8.Solutions analytiques	41
III.9.Conclusion	45

**Chapitre IV Résultats et discussion**

IV.1.Introduction	46
IV.2.Géométrie de la poutre	46
IV.3.Structures des sandwichs	47
IV.4.Résultats et discussion	47
IV.4.1.Etudes comparatives	47
IV.4.2.Etude paramétrique	50
IV.5.Conclusion	54

<b>V. Conclusion générale</b>	<b>55</b>
-------------------------------	-----------

<b>Référence</b>	<b>57</b>
------------------	-----------

## Liste des figures

<b>Figure I.1</b>	Protection thermique des : a-Matériaux composite b-Matériaux FGM	6
<b>Figure I.2</b>	Variation continue de la microstructure	7
<b>Figure I.3</b>	Concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	8
<b>Figure I.4</b>	Classification matériaux à gradient fonctionnel	8
<b>Figure I.5</b>	:Schéma qui démontre la méthode le coulage en bande	10
<b>Figure I.6</b>	Le coulage centrifuge des poudres mixtes [	11
<b>Figure I.7</b>	:Principe du coulage par barbotine	12
<b>Figure I.8</b>	Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma	13
<b>Figure I.9</b>	Les principaux domaines d'utilisation des FGM	14
<b>Figure I.10</b>	Géométrie d'une poutre FGM	18
<b>Figure I.11</b>	Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM	19
<b>Figure I.12</b>	Variation de la fraction volumique dans une poutre E-FGM	20
<b>Figure I.13</b>	Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM	21
<b>Figure II.1</b>	Cinématique d'Euler Bernoulli.	26
<b>Figure II.2</b>	Schéma de principe de la théorie des poutres de Timoshenko (FSDT)	28
<b>Figure II.3</b>	La distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur	29
<b>Figure II.4</b>	Illustration de la poutre d'ordre élevé	30
<b>Figure II.5</b>	La distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie d'ordre élevé	33
<b>Figure IV.1</b>	Variation du rapport adimensionnelle ( $x/a$ ) et son effet sur la déflexion de La poutre FG en fonction de différents types de sandwich	52
<b>Figure IV. 2</b>	Variation du rapport adimensionnelle ( $x/a$ ) et son effet sur la déflexion de La poutre sandwich FG en fonction de différentes valeurs de l'indice matériel « k ».	52
<b>Figure IV.3</b>	Variation du rapport adimensionnelle ( $a/h$ ) et son effet sur la déflexion de la poutre sandwich FG en fonction de différentes valeurs de l'indice matériel « k ».	53
<b>Figure IV.4</b>	Variation des contraintes et son effet sur l'épaisseur $z$ de la poutre sandwich FG en fonction différentes types de sandwich	54

## Liste des tableaux

<b>Tableau I.1</b>	Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM	7
<b>Tableau II.1.</b>	Principales conditions aux limites pour les poutres	24
<b>Tableau II. 2</b>	Les théories des poutres	25
<b>Tableaux IV.1</b>	Les déformations et les contraintes non dimensionnelles des poutres FGM sous une charge Uniform $q$ pour différences valeurs de l'indice de loi de puissance $k$	48
<b>Tableau IV.2</b>	comparaison des déflexions et contraintes non dimensionnelles d'une poutre sandwich.	49
<b>Tableau IV.3</b>	: comparaison des déflexions et contraintes non dimensionnelles d'une poutre sandwich.	50
<b>Tableau IV.4</b>	comparaison des contraintes axiale non dimensionnelles d'une poutre sandwich	51

---

## Liste des notations et symboles

$E(z)$  Module de Young en fonction de «  $z$  »

$E_m$  Module de Young du métal

$E_c$  Module de Young de céramique

$G(z)$  Module de cisaillement en fonction de «  $z$  »

$\nu$  Coefficient de Poisson

$\rho(z)$  La densité du matériau en fonction de «  $z$  »

$\rho_m$  La densité du métal

$\rho_c$  La densité du métal

$V(z)$  Fraction volumique

$k$  Paramètre du matériau

$l$  Longueur de la poutre

$b$  Largeur de la poutre

$h$  Épaisseur de la poutre

$u_0, w_b; w_s$  Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre

$w$  Les déplacements dans les directions  $x, z$ .

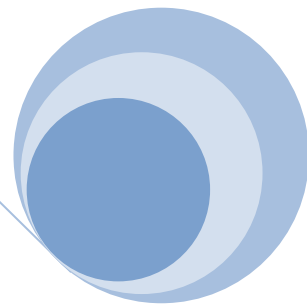
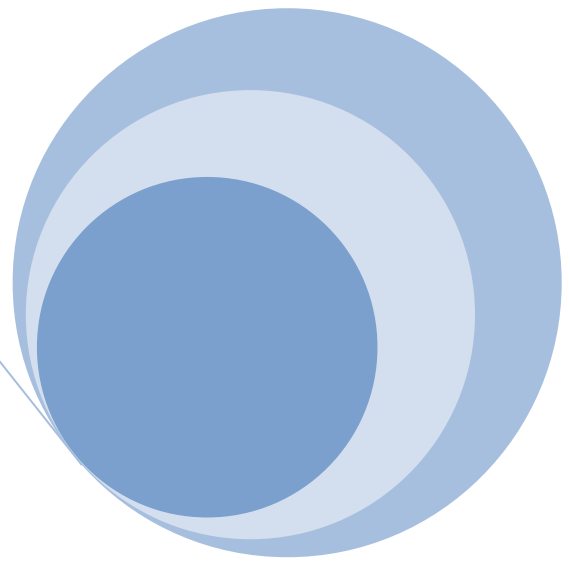
$\varphi_x$ , Les rotation autour des axe  $x$

$\Psi(z)$  Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

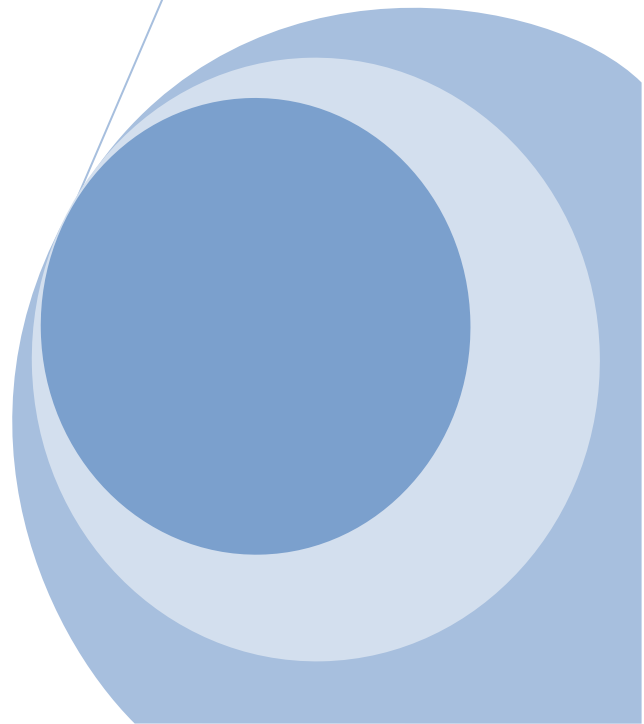
$f(z)$  Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

$\sigma_x, \sigma_z$  Contraintes normales

$\tau_{xz}$ , Contrainte de cisaillement



# **Introduction générale**





## Introduction générale

La demande des industries en matériaux intelligents a donné naissance aux matériaux composites. De part leur résistance, leur rigidité et leur légèreté, les matériaux composites ont une place primordiale dans différents domaines des industries automobile, nucléaire et aérospatiale. L'idée principale des matériaux composites est d'utiliser différents matériaux de caractéristiques dans la même structure.

Dans des environnements critiques un problème de décollement, de désossage ou de rupture de surfaces s'est produit, cela nécessite une nouvelle génération de matériaux capables de résister à ces conditions. Pour éviter ce genre de problème il faut utiliser un matériau composite sans interface distincte entre les deux matériaux, le matériau composite le plus efficace est le FGM pour ses propriétés telles que le module d'Young, la densité, le coefficient de poisson qui varient en continu sur l'épaisseur et éliminent toutes les concentrations de contraintes rencontrées dans les matériaux composites.

Dans cette étude, l'effet des propriétés mécaniques et d'ingénierie sur le comportement en flexion d'une poutre sandwich FG simplement appuyée est étudié selon la théorie raffinée des contraintes de cisaillement.

On considère que les propriétés d'un matériau évoluent progressivement et continûment selon une répartition de la loi de puissance selon la fraction volumique du matériau constitutif.

Les résultats numériques pour les contraintes et les déplacements sans dimension sont calculés et comparés aux résultats obtenus à partir d'autres théories bidimensionnelles en utilisant des modèles analytiques et des techniques de résolution actuellement développés par Navier. De plus, le modèle d'analyse actuel convient à l'étude de la déflexion statique de poutres sandwich FG simplement supportées soumises à de lourdes charges mécaniques utilisées dans des applications d'ingénierie spéciales dans l'aérospatiale, l'automobile et le génie civil.

Après une introduction générale où nous évoquons une synthèse bibliographique sur des différents travaux qui ont été effectués pour étude et analyse des matériaux à gradient de propriétés FGM (*en anglais : Functionally Graded Materials*) nous présentons dans un

- ✓ **Premier chapitre**, un ensemble de généralités sur les matériaux FGM qui ont prouvés leurs utilisations dans plusieurs domaines industriels, leurs principales caractéristiques, leurs principaux domaines d'application, ainsi que leurs méthodes de fabrication.
- ✓ **Le deuxième chapitre** afin de connaître plus précisément les réponses des applications FGM, des modèles mathématiques ont été exploités. Les poutres sur simple appui ont été étudiées dans divers problèmes au cours de ces dernières années, divers modèles de base ont été proposés.

La théorie de Bernoulli ou théorie classique des poutres (CBT) est limitée au modèle de poutres minces car elle ne prend pas en compte l'effet de la déformation de cisaillement transverse en mode poutres épaisses [4].

La théorie du premier ordre (FBT) ou théorie des poutres de Timoshenko repousse les limites de la CBT en prenant en compte l'effet de déformation par cisaillement transverse. Afin d'améliorer la prédiction de la réponse du faisceau FGM et d'éliminer le facteur de correction de cisaillement, les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevée ont été exploitées, en particulier Reddy , la théorie sinusoïdale de Touratier , la théorie hyperbolique de Soldatos , la théorie exponentielle de Karama et al. , et la formulation unifiée de Carrera.

- ✓ **Le troisième chapitre**, Les caractéristiques des matériaux sont considérées comme variant progressivement et continûment selon une distribution en loi de puissance en termes de fractions volumiques des matériaux constitutifs. En utilisant le modèle analytique développé actuellement et la technique de résolution de Navier, les résultats numériques des contraintes et des déplacements non dimensionnels sont calculés et comparés à ceux obtenus par d'autres théories 2D
- ✓ **Le quatrième chapitre** est consacré à la validation numérique des résultats du modèle proposé tout en les comparants avec les résultats obtenus à l'aide des théories conventionnelles disponibles dans la littérature pour vérifier l'exactitude de la présente solution puis la discussion de ces résultats.

Enfin, une conclusion générale est proposée pour mettre l'accent sur les différents résultats obtenus dans cette étude et qui concernent le comportement des structures FGM sous divers variation des fractions de volume et on termine par des perspectives envisagées pour des futurs travaux

The background features a decorative graphic consisting of three blue circles of varying sizes, each composed of concentric layers of different shades of blue. These circles are arranged vertically, with the largest at the top and bottom, and a smaller one in the middle. Two thin, light blue lines intersect at the top left and extend diagonally across the page, framing the central text.

**Généralités sur matériaux  
fonctionnellement graduée FGM**



**I.1. Introduction :**

Tous les nombreux secteurs (industriels ou aéronautique, génie civil, mécanique ..... ) doit être nécessaire en objectifs d'employer des matériaux innovants qui caractérisé par des performances techniques inégalés et des propriétés mécaniques élevées pour atteindre à une structure durable et plus rigide et de grande résistance à long durée. A cet effet une nouvelle classe des matériaux qui répondent aux objectifs précédentes dits « matériaux composites ».

En générale les matériaux composites sont des associations des différents matériaux à la même pièce, mais le changement avec interruption des fractions de volume qui donne aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité, c'est-à-dire La constitution d'anisotropie des structures composites souvent se traduit par une concentration de contraintes dans les matériaux et des discontinuités géométriques, qui peut conduire à des dommages sous la forme de délaminage, la fissure de la matrice et la séparation des assemblages. Donc ce problème doit être subir l'endommagement et des changements des propriétés mécaniques des structures. Par ailleurs le matériau composite traditionnel est incapable pour utiliser sous les environnements à hautes températures. A ce la il a encouragé les chercheurs dans littérature de découvrir un nouveau matériau qui permet de donner la solution de ce problème par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : *Functionally Graded Material " F.G.M"*).

Ces dernières années, les matériaux à gradient de propriétés ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et sont capables de résister aux environnements à haute température.

Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiales, biomécaniques, biomédical, automobiles et dans bien d'autres applications technologiques.[1]

**I.2 Historique du développement des matériaux à gradient évalué**

Les matériaux à gradient fonctionnel ou fonctionnellement gradués « FGM » sont une nouvelle gamme de matériaux composites plus avancée capable de survivre dans un environnement sévère et très exigeant caractérisé par une très haute température, sans perdre ses propriétés en cours de service.

L'idée générale des gradients structurels a été avancée pour la première fois pour les matériaux composites et polymères en 1972. Divers modèles ont été proposés pour les

gradients de composition, de concentration des filaments et de polymérisation, ainsi que des applications possibles pour les structures graduées résultantes. Cependant, il n'y a pas eu de véritable recherche sur la façon de concevoir, de fabriquer et d'évaluer les structures graduées avant les années 1980 [2].

En 1985, l'utilisation d'un contrôle continu de la texture a été proposée afin d'augmenter la force d'adhérence et de minimiser la contrainte thermique dans les revêtements et les joints céramiques développés pour le moteur de fusée réutilisable. Les développeurs ont réalisé que ce contrôle continu d'une propriété pouvait être étendu à un concept plus général qui pourrait être appliqué pour conférer de nouvelles propriétés et fonctions à tout matériau en changeant progressivement sa texture ou sa composition. À cette époque, le concept d'ingrédient matériel a été introduit pour la conception de tels matériaux. En 1986, ces types de matériaux ont été appelés "matériaux à gradient fonctionnel", qui a rapidement été abrégé en "FGM", désormais bien connu. Les FGM n'étant pas des matériaux homogènes, il a été reconnu que pour les créer, il faudrait procéder à des études approfondies en matière de méthodologie de conception et de modélisation théorique ainsi que de traitement et d'évaluation. C'est pourquoi, en 1987, un programme de recherche de cinq ans, "Études fondamentales sur la relaxation des contraintes thermiques par l'adaptation de structures graduées", a été lancé au Japon. Ce programme visait à développer des FGM pour une utilisation à haute température dans le but de les utiliser pour le plan spatial hypersonique. Depuis 1989, les résultats de ces programmes de recherche et de développement ont été diffusés dans le monde entier par le biais de documents, d'articles, de réunions internationales et de programmes d'échange. Un symposium international sur les FGM a été organisé tous les deux ans, le premier ayant eu lieu en 1990 à Sendai. En 1995, à la suite d'une discussion lors du troisième symposium international sur les FGM qui s'est tenu à Lausanne en 1994, il a été décidé de changer le nom complet en matériaux à gradient fonctionnel, car il est plus précis tant du point de vue descriptif que grammatical [2,3].

Actuellement, le concept de FGM a classé comme une technologie de pointe dans le monde entier et il s'étend à une variété de domaines d'application non seulement pour les applications mécaniques en aérospatial et l'aéronautique, mais également dans différents domaines : biomécaniques, l'électronique, l'énergie, Ingénierie, optique, chimiques et biologiques...etc.

**I.2.1. Définition des FGM :**

Un matériau fonctionnellement gradué est une nouvelle classe de matériau composite dans le quel à la microstructure des changements graduellement et continuellement des propriétés mécaniques de leur fractions de volume dans une direction donnée, en général c'est l'épaisseur de l'élément.[4]

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont des matériaux Appartienne dans la famille des composites d'ingénierie, ils sont fabriqué à partir de différentes matériaux avec un changeant sans interruption les fractions de volume de continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline. Les matériaux à gradient de fonction (FGM) sont des matériaux dont la composition chimique et les caractéristiques mécaniques et microstructures varient graduellement au cours de la fabrication d'une pièce avec des caractéristiques homogènes. L'intérêt est d'associer et de concentrer les avantages de plusieurs matériaux dans une seule pièce pour résister à la température, la corrosion, l'usure ou la fatigue. Les domaines d'applications des pièces FGM sont nombreux. Nous pouvons citer par exemple le domaine aéronautique où les pièces FGM recherchées doivent résister à de fortes sollicitations thermiques et mécaniques, mais également le domaine biomédical où une pièce FGM peut allier les propriétés mécaniques et la résistance à l'usure pour une prothèse articulaire de hanche. .[4]

Dans la plupart des activités de recherches et d'autre applications structuraux ces matériaux FGM sont généralement construit par un mélange de deux composante (le plus souvent en céramique et métal), en considération des d'avantages.[4]

Pour utiliser cette classe du FGM, d'une coté si on doit faire une résistance plus élève aux températures ou dégradations en place le contenu en céramique et d'autre coté si on doit faire des propriétés mécaniques comme la dureté plus élève et haute force en place le contenu en métal .Une comparaison entre les caractéristiques de métal et céramique sont donnée dans le tableau ci-dessous :

Tableau I.2. : Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM [6]

Couche	Matériaux	Les propriétés mécaniques
La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bonne résistance thermique</li> <li>• Bonne résistance à l'oxydation</li> <li>• Faible conductivité thermique</li> </ul>
<< Couches intermédiaires >> Continuité du matériau d'un point à l'autre	Céramique_ métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elimination des problèmes de l'interface</li> <li>• Relaxer les contraintes thermiques</li> </ul>
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bonne résistance mécanique</li> <li>• Conductivité thermique élevée</li> <li>• Très bonne ténacité</li> </ul>

Le changement continu dans la composition et dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la (Figure I.1). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [5].

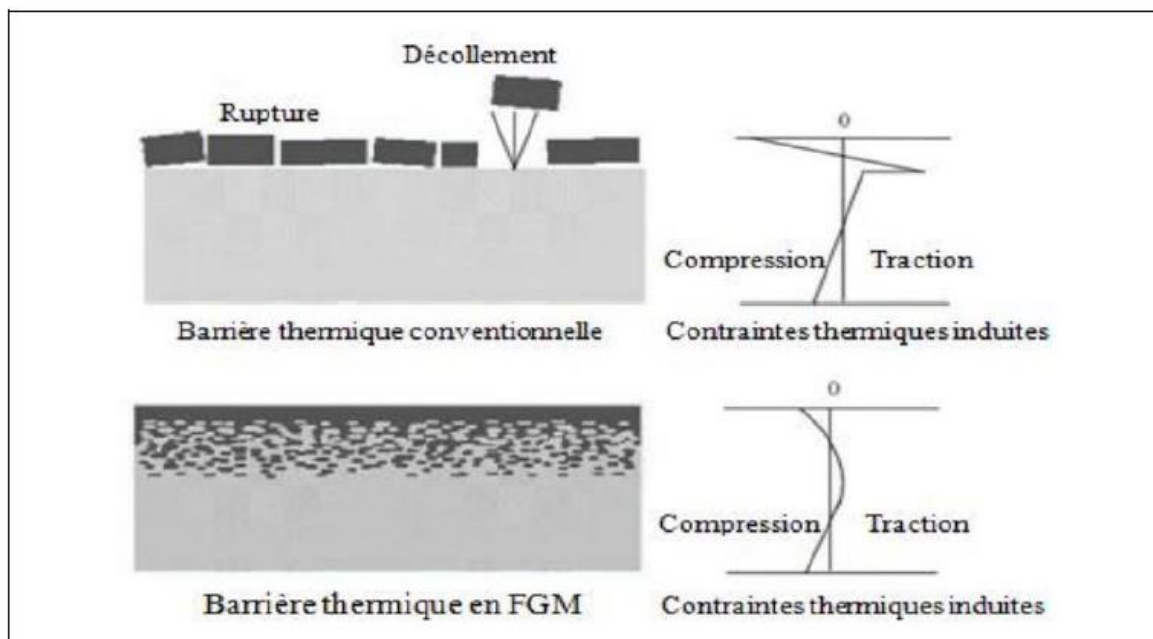


Figure I.1. Protection thermique des : a-Matériaux composite b-Matériaux FGM [6]

Les variations graduelles des fractions de volume des matériaux constitutifs et leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, ce qui permet d'éviter les problèmes des concentrations de contraintes aux niveaux des interfaces (provoquant le délaminage) des constituants et grâce à l'association des matériaux

Les propriétés mécaniques telles que le module d'élasticité de Young, coefficient de Poisson, le module d'élasticité de cisaillement, et la densité de la composition, varie de façon continue dans des directions préférées dans les FGM.[4]

Les FGM sont donc des matériaux composites à caractère non homogène macroscopiquement. Les changements continus dans leur microstructure distinguent les FGM par rapport aux matériaux composites classiques [4]

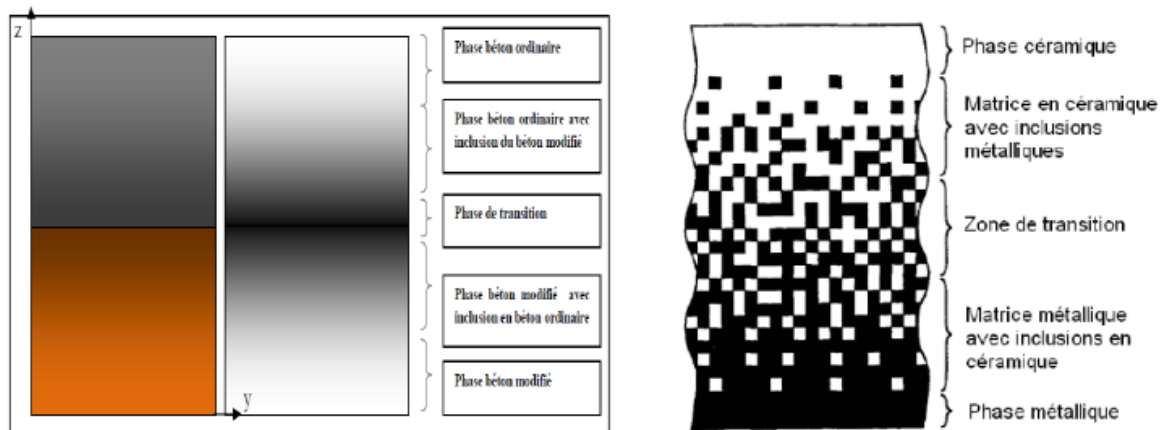


Figure I.2: Variation continue de la microstructure [7].

Le concept de fabrication du matériau FGM est aussi très bien développé, bien qu'il puisse y avoir une grande variété dans la conception et la fabrication des nouvelles structures. Généralement, un FGM peut également avoir divers aspects de conception soit de sa composition chimique, de son état physique ou de sa configuration géométrique, afin de bien choisir celui qui répondra le mieux à nos besoins en fonction des caractéristiques qu'il possède.[8]

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>
<b>Structure</b>	<p><b>Eléments constitutants:</b></p> <p>Céramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ◊</p> <p>Fibre ↗</p>
<b>Matériaux</b>	<p><b>Exemple</b></p> <p><b>FGM</b></p>

Figure I.3 : Concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) [9]

### I.3. Processus de traitement des matériaux à gradient évalué :

Deux critères différents sont utilisés pour classer les matériaux à gradient fonctionnel. L'un est basé sur la structure de matériau : les FGM à structure continue et à structure discontinue et l'autre est basé sur la taille des matériaux : les FGM minces et les FGM en vrac (Fig I.4)[8].

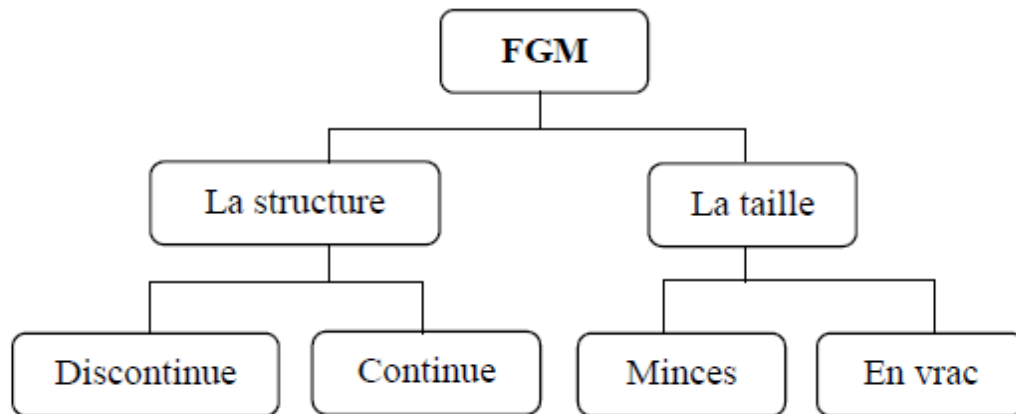


Figure I.4 Classification matériaux à gradient fonctionnel [8]

Dans les FGM continues, il y a un gradient continu présent d'un matériau à l'autre. Cependant en cas de discontinu FGM, une variation par couches de la fraction volumique est fournie. Les FGM minces ont des sections relativement minces comme le revêtement de surface, tandis que les FGM en vrac sont un volume complet de matériau. Des procédés de fabrication tels que le dépôt physique en phase vapeur (PVD), le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) et la méthode de synthèse à haute température autoreproductrice (SHS) sont utilisés pour fabriquer des FGM minces. Bien que les FGM en vrac sont fabriquées à l'aide de méthodes telles que la métallurgie des poudres, le moulage par centrifugation et les techniques de fabrication de formes libres [8]

### I.4. Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Le processus de fabrication est l'un des domaines les plus importants de la recherche sur les FGM. Une grande partie des travaux a été consacrée au développement des méthodes de production et traitement des FGM. La plupart des procédés de production de FGM sont basés sur une variante de procédés de traitement classiques déjà bien établis. Les procédés qui sont capables de recevoir une étape de gradation comprennent la métallurgie des poudres [10] et

les procédés de compaction sèche des poudres. En général, les procédés d'élaboration les plus utilisés incluent le coulage centrifuge [11], le coulage par barbotine, le coulage en bande le frittage et la projection plasma. Le choix de la méthode de production la plus appropriée dépend principalement de la combinaison de matière, du type de la loi de mélange requise et de la géométrie de la composante souhaitée. [12]

#### **I.4.1. La métallurgie des poudres**

La technique basée sur la métallurgie des poudres peut être utilisée pour produire des matériaux à gradient fonctionnel épaisse. Le processus est effectué en utilisant des étapes comprenant la pesée et le mélange de poudre selon la distribution spatiale préconçue selon l'exigence fonctionnelle, l'empilement et battage des poudres pré mélangées et enfin frittage [13].

#### **I.4.2. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :**

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.[14]

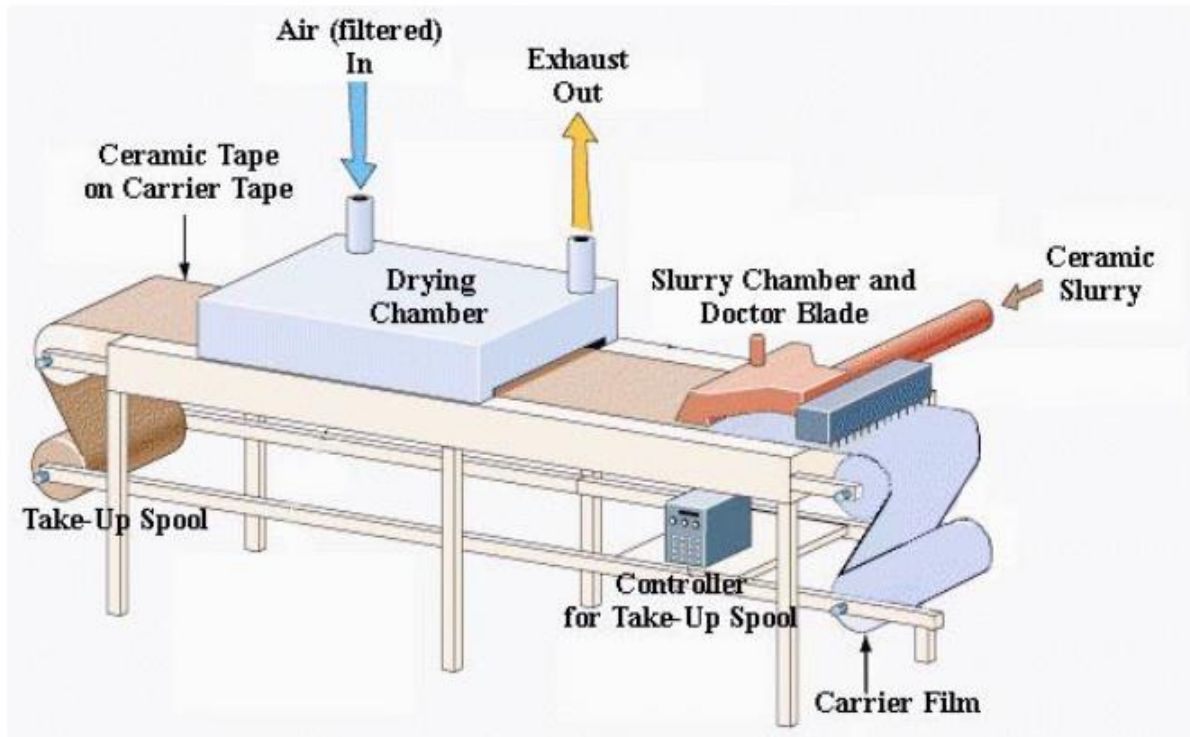


Figure I.5: Schéma qui démontre la méthode le coulage en bande [3]

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le dé flocculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage. [15]

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lame multiple, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [16].

### I.4.3. Le coulage centrifuge (*Centrifugal casting*)

Le coulage centrifuge est l'une des méthodes les plus efficaces pour traiter les FGM en raison de son large contrôle de la composition et de la microstructure. La coulée centrifuge a été principalement utilisée pour obtenir des pièces cylindriques. Les deux types de base des

machines de coulée centrifuge sont : les types horizontaux, qui tournent autour de l'axe horizontal, et le type vertical, qui tourne autour d'un axe vertical. Les machines de coulée centrifuge horizontale sont généralement utilisées pour fabriquer des tuyaux, des tubes, des douilles, des douilles cylindriques ou tubulaires de forme simple. La coulée centrifuge est un procédé dans lequel le métal fondu est canalisé dans un moule tournant (habituellement de 700 à 1300 tr / min). La rotation de la matrice crée une force centrifuge qui pousse le métal vers la paroi du moule. La distribution graduelle dans les FGM fabriquées par la méthode centrifuge est fortement influencée par de nombreux paramètres tel que la densité entre les particules et le métal fondu, la taille des particules, la viscosité du métal fondu, la fraction volumique moyenne des particules, l'épaisseur du noyau et le temps de solidification [17]. La méthode centrifuge de poudres mixtes montrée dans La figure I.6 est une autre méthode introduite en tant que solution à la limitation de la méthode de coulée centrifuge dans la fabrication de FGM contenant des particules de taille nano [18].

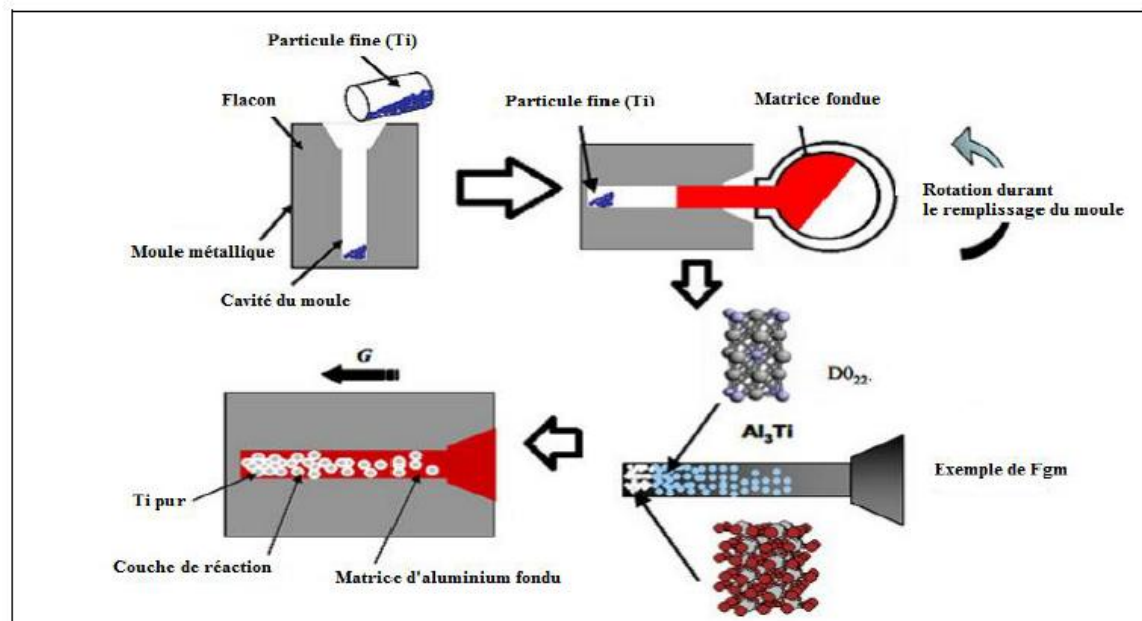


Figure I.6 : Le coulage centrifuge des poudres mixtes [18].

#### I.4.4. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tessou (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se effectuée en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise »
- Consolidation du tesson ou « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ; [19].
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

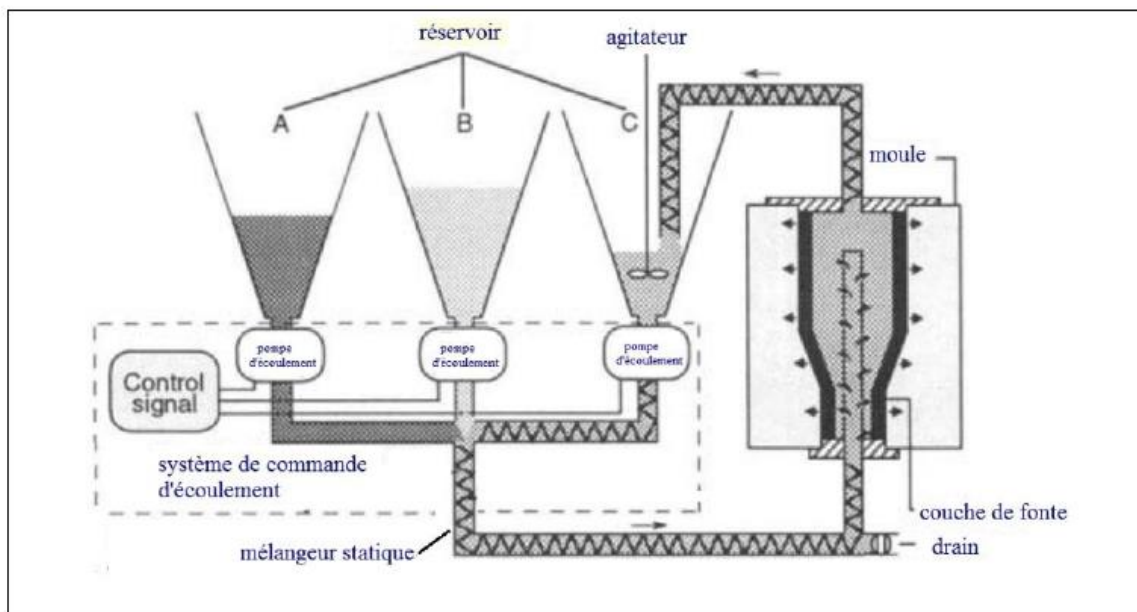


Figure I.7 : Principe du coulage par barbotine [20].

#### I.4.5. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [21].

#### I.4.6. Projection plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM l'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [21].

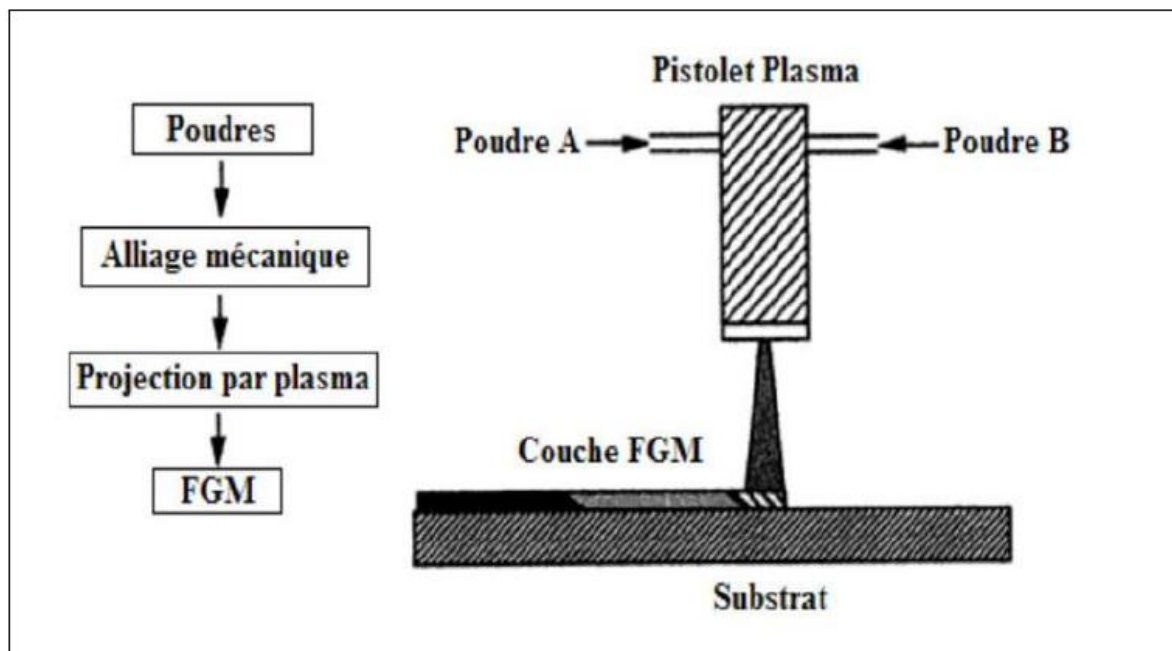


Figure I.8 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma [21].

#### I.5. Les branches d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Les matériaux FGM sont largement utilisés pour des applications mécaniques soit en aérospatial ou aéronautique, électriques comme les diodes électroniques, les capteurs, les conducteurs de chaleur, et les dispositifs électroniques, et même dans les secteurs chimiques et biologiques. En raison du développement du concept de FGM dans les années 1990, leur utilisation pratique est encore très limitée. Grâce à leurs propriétés mécaniques et thermiques ces matériaux sont utilisés dans des différents domaines tels que [22]

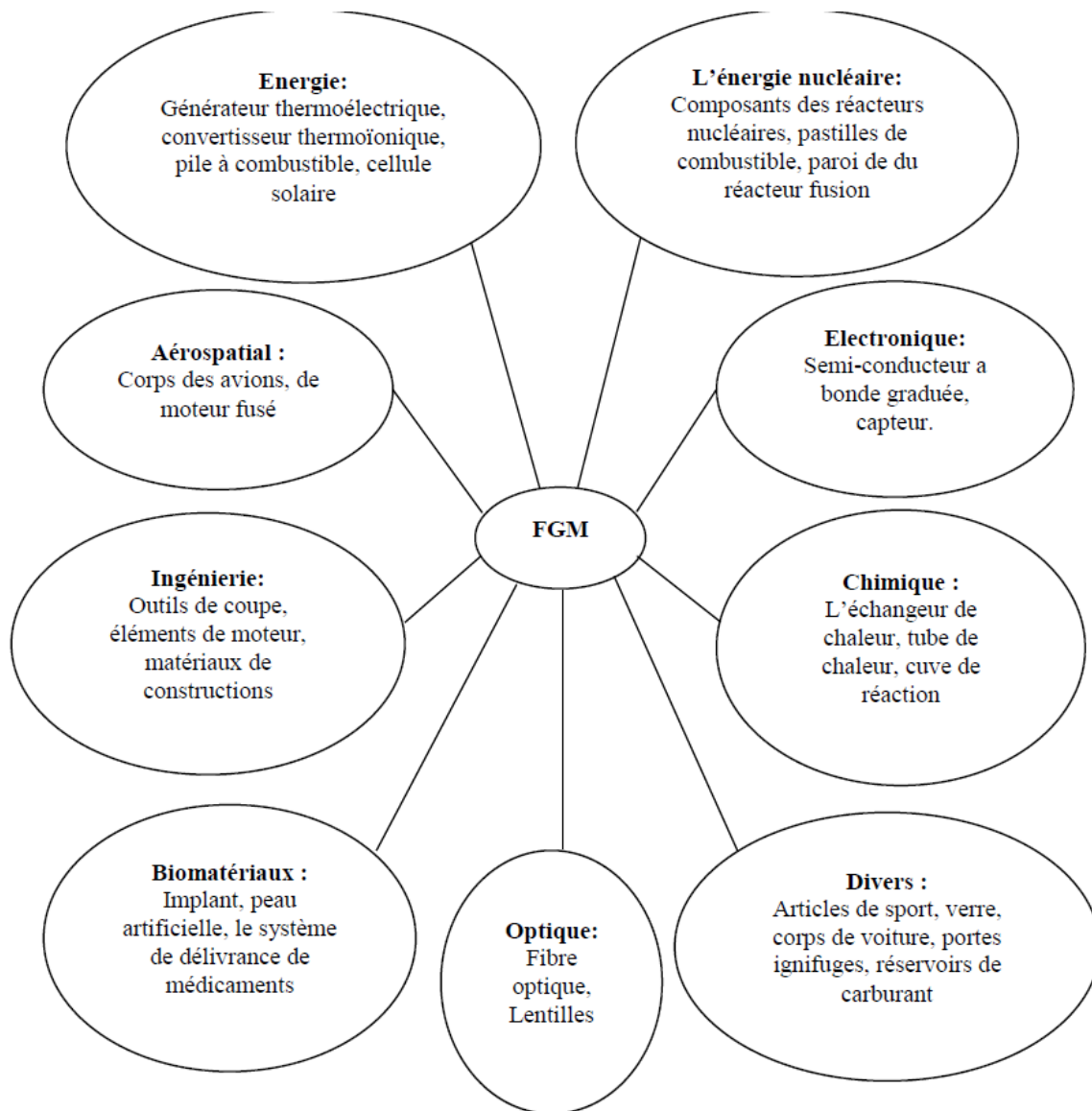


Figure I.9 Les principaux domaines d'utilisation des FGM [8]

### I.5.1. L'aérospatiale

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été initialement conçu pour l'industrie aéronautique car les FGM peuvent résister à des gradients thermiques très élevés, ceci les rend adéquats pour l'usage dans les structures et les corps des navettes spatiales ainsi que pour les composants de moteurs de fusées [23]. Les FGM sont très prometteurs et peuvent être utilisés dans des domaines plus larges de l'aérospatiale.

**I.5.2. La médecine**

Les matériaux FGM ont trouvés une large gamme d'application dans les chirurgies dentaires et orthopédiques car ces tissus vivants, tels que les os et les dents, sont caractérisés comme des matériaux fonctionnellement gradués de la nature et pour les remplacer un matériau compatible est nécessaire d'où l'intérêt pour l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués[24]

**I.5.3. L'industrie automobile**

L'utilisation des matériaux fonctionnellement graduée dans l'industrie automobile est encore limitée le moment, en raison du coût élevé de production de matériaux fonctionnellement graduée. Cependant, le matériau est utilisé dans des parties très importantes de l'automobile, où le coût élevé actuel justifie son utilisation. Les présentes applications comprennent garnitures de cylindre de moteur pour pistons de moteur diesel, pour les ressorts à lames, pour l'étincelle les bougies, les chambres de combustion, les arbres d'entraînement, les amortisseurs, les volants d'inertie, certaines pièces de carrosserie, la vitre et les freins de voiture de course. Aussi, les matériaux fonctionnellement calibrés sont utilisés dans les revêtements corporels améliorés pour les voitures, et que comprend les revêtements gradués avec des particules, telles que le dioxyde / mica.[4]

**I.5.4. La défense**

L'une des caractéristiques les plus importantes d'un matériau fonctionnellement gradué est sa capacité à empêcher la propagation des fissures. Cette propriété le rend utile dans l'application militaire, en tant que matériaux résistants à la pénétration d'armures des équipements et les gilets pare-balles [25].

**I.5.5. Énergie**

Les industries de l'énergie ont constamment besoin de différents types de matériaux calibrés, afin d'améliorer l'efficacité de certains de leurs équipements. Quelques-unes des applications des matériaux fonctionnels dans l'industrie de l'énergie inclure la paroi interne des réacteurs nucléaires, le convertisseur thermoélectrique pour l'énergie conversion, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et les récipients sous pression, électrode graduée pour la production de combustible oxyde solide, le piézo-électrique

fonctionnellement matériaux calibrés pour le transducteur à ultrasons, le diélectrique, la pile à combustible, les revêtements de pale de turbine et les revêtements de barrière thermique [4].

### **I.5.5. Électrique / Électronique**

Les matériaux fonctionnellement graduée sont utilisés dans les industries électrique et électronique de nombreuses façons différentes. Ceux-ci comprennent dans la relaxation du stress sur le terrain dans le l'électrode et l'interface champ-espace , dans les diodes, dans les semi-conducteurs, pour isolateurs, et pour la production de capteurs. Le blindage thermique éléments dans la micro-électronique sont également fabriqués à partir du nanotube de carbone fonctionnellement matériaux calibrés [4]

### **I.5.6. Outils de coupe**

Les FGM sont utilisés dans les outils de coupe car ils améliorent la résistance thermique. La fissure se produit près de l'interface pointe-tige dans le type conventionnel mais avec les outils de coupe en FGM elle se produit par la relaxation dans la concentration de contrainte. [26].

### **I.5.7. Optoélectronique**

Les matériaux fonctionnellement graduée trouvent leur application dans l'industrie optoélectronique pour la production de pièces telles que celles fabriquées avec la fibre optique matériaux, la lentille, les lasers GRINSH, les photo détecteurs très efficaces, cellules solaires, le photo détecteur accordable, les supports de stockage magnétiques, et dans la production de semi-conducteurs avec un indice de réfraction variable. [4]

### **I.5.8. Autres**

L'application de matériaux gradués fonctionnellement comprend également, mais sans s'y limiter, outils de coupe et matrices pour améliorer la résistance thermique de l'outil de coupe et mourir, rasoir lames de fer-aluminure / acier inoxydable, dans l'équipement de sécurité, telles que Les bouteilles d'air anti-incendie, les portes ignifuges, les montures de lunettes et les casques. D'autres comprennent les tubes cryogéniques de l'IRM, les récipients

Des matériaux fonctionnellement graduée sont utilisés dans un certain nombre d'équipements sportifs, tels que les clubs de golf, raquettes de tennis et skis. Ceux-ci sont tous faits de matériaux gradués de manière fonctionnelle [4]

### I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM :

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.[4]

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi phase à travers l'épaisseur. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt.[4]

$$P_F = \sum_{i=1} P_i V_{Fi} \quad (\text{I-1})$$

Où  $P_i$  et  $V_{Fi}$  sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif  $i$  avec la somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants donne l'unité 1 :

$$\sum_{i=1} V_{Fi} = 1 \quad (\text{I-2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général (Figure.I.10). Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à.[4] :

$$P = P_C V_C + P_m V_m \quad (\text{I-3})$$

$$V_C + V_m = 1 \quad (\text{I-4})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être

assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure. [4]

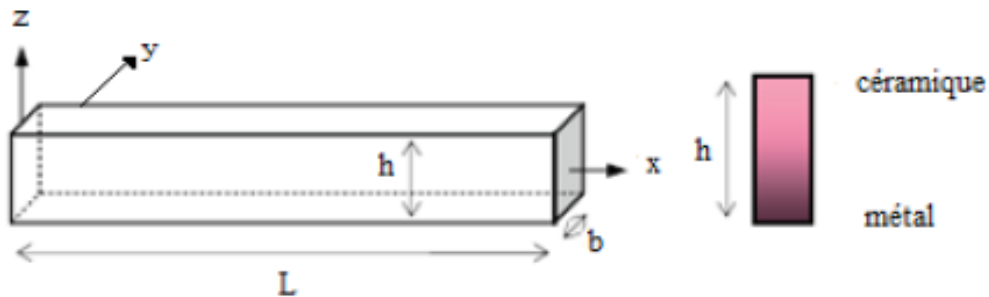


Figure I.10 : Géométrie d'une poutre FGM.[4]

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe  $z$  origines à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur (Figure.10). Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe  $z$ ), soit

$$V_c E = E(z) \text{ et } \nu = \nu(z)$$

L'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM varié en fonction de la loi de puissance (PFGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM) indiqué par *Jin and Batra* [27, 28]

I.7. Propriétés matérielles de la poutre FGM

I.7.1. La fraction volumique P-FGM

La rigidité de la poutre est supposée variable suivant sa hauteur ‘h’ ; la fraction volumique des matériaux P-FGM est supposée obéir à une fonction en loi de puissance représentée par la relation [29].

$$f(z) = \left(\frac{2z + h}{2h}\right)^p \tag{I-5}$$

Où ‘P’ est un paramètre matériau et ‘z’ est dirigé suivant l’épaisseur ‘h’ de la poutre. Les propriétés matérielles d’une poutre P-FGM [30]. Peuvent être déterminées par la loi des mélanges [29].

$$E(Z)P - FGM = E_S + \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p (E_I - E_S) \tag{I-6}$$

Telle que :

$E_I$ : Rigidité de la partie inférieure de la poutre FGM.

$E_S$ : Rigidité de la partie supérieure de la poutre FGM.

La variation du module de Young dans la direction d’épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la (Figure I.11).

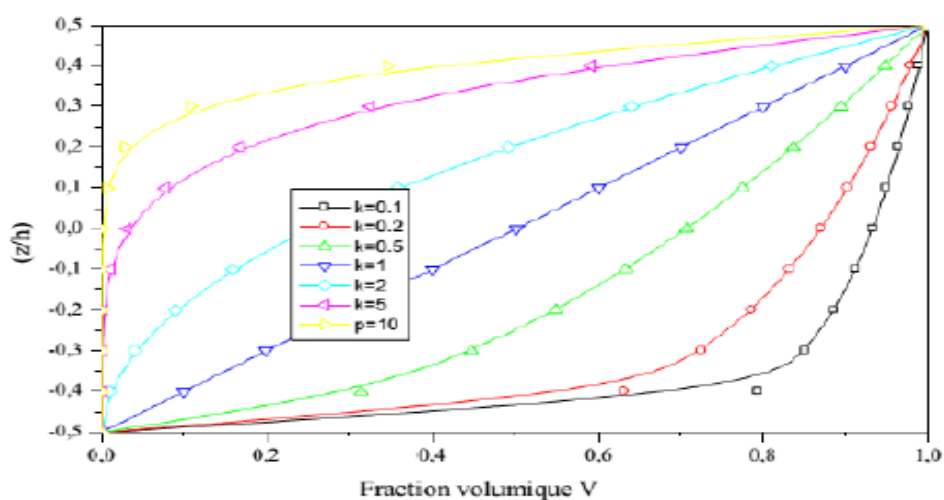


Figure I.11: Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM [30].

### I.7.2. La fraction volumique E-FGM :

La majorité des chercheurs utilisent la fonction exponentielle [30], pour décrire les propriétés matérielles des matériaux E-FGM, qui s'écrit sous la forme de la relation ci-dessous

$$E(Z)_{E-FGM} = E_I e^{\beta(z+h/2)} \quad (I-7)$$

$$\beta = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_S}{E_I}\right) \quad (I-8)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée sur la (Figure I.12).

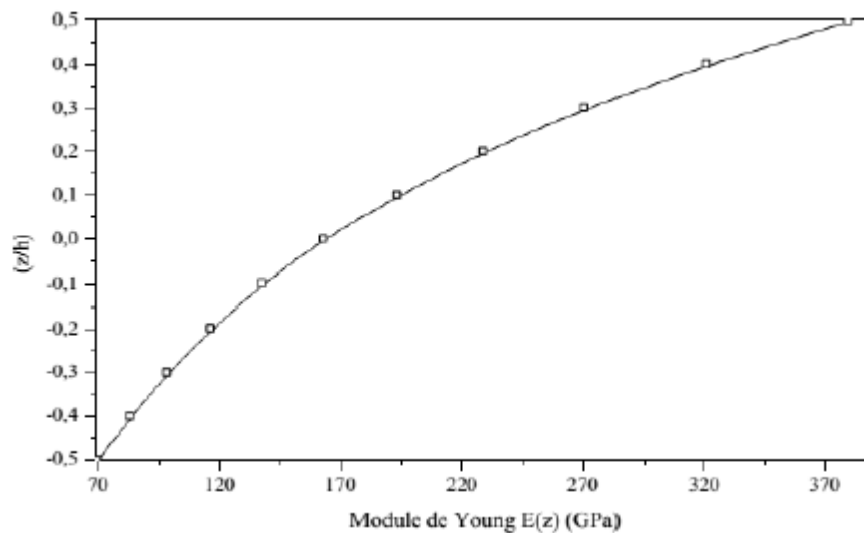


Figure I.12 : Variation de la fraction volumique dans une poutre E-FGM [31].

I.7.3. La fraction volumique S-FGM

Pour définir la fraction de volume de la poutre S-FGM, deux fonctions de loi de puissance sont utilisées, ayant comme objectif l'assurance d'une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par les relations suivantes :

$$g_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{I-9}$$

$$g_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{I-10}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par la relation suivante, sa variation est représentée sur la (Figure I.13) :

$$E(Z)_{S-FGM} = g_1(Z)E_S + (1 - g_1(Z))E_I \text{ pour } -h/2 \leq Z \leq 0 \tag{I-11}$$

$$E(Z)_{S-FGM} = g_2(Z)E_S + (1 - g_2(Z))E_I \text{ pour } 0 \leq Z \leq h/2 \tag{I-12}$$

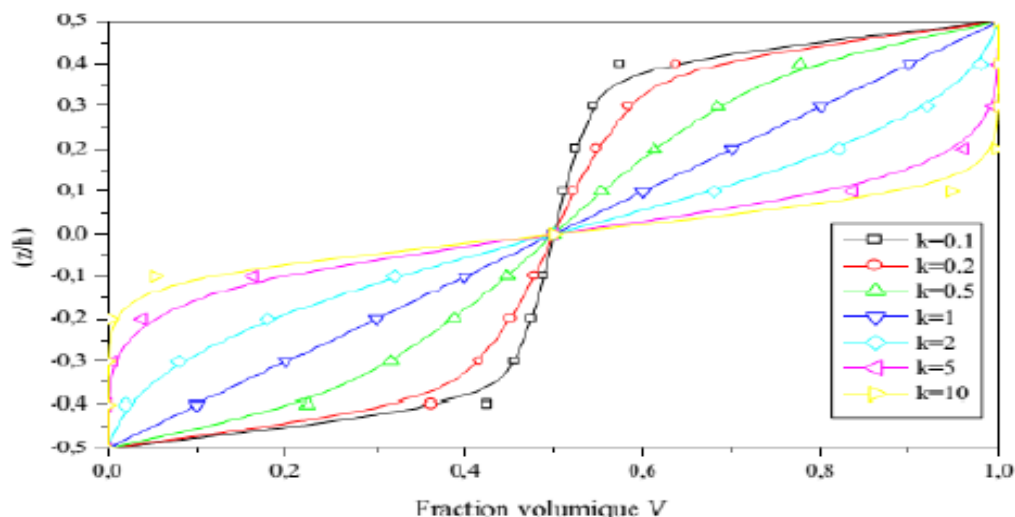


Figure I.13: Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM. [31]

**I.8. Avantages et inconvénients des FGM :**

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients:

**➤ Avantages de la FGM :**

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que: [32]

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

**➤ Inconvénients de la FGM :**

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion ( $T_1$ ) et une céramique avec une température de fusion ( $T_2$ ).

Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ( $T_1 \ll T_2$ ). Puis, si la température de fabrication est d'environ ( $T_1$ ), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant,

pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [32].

### **I.9. Conclusion**

L'objectif principal des matériaux à gradient fonctionnels, sert à l'optimisation locale des propriétés matérielles par association des propriétés spécifiques des différents matériaux au sein d'une même structure représentant une forme considérablement plus simple et bien plus répandue aux exigences de la technologie moderne.[9]

Dans ce chapitre nous avons défini le matériau à gradient fonctionnel « FGM », telle que l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application. Des structures innovantes sont créées grâce à la variation spatiale et progressive des propriétés de ce matériau. L'utilisation de ce matériau est connue dans de nombreux domaines d'application, Dans le chapitre qui suit, en vas exposer les différentes théories qui régissent les déplacements dans les poutres.[4]

The background features a decorative graphic consisting of three blue circles of varying sizes, each with a gradient from dark blue in the center to light blue on the edges. These circles are arranged vertically, with the largest at the top and bottom, and a smaller one in the middle. Two thin, light blue lines intersect at a point to the left of the middle circle, forming a V-shape that frames the central text.

# **Théories des poutres**



**II.1. Introduction :**

La théorie des poutres s'applique sur des solides élancés (typiquement les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension latérale). Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée des efforts et des déplacements. On présente ici les différentes théories des poutres. Les poutres représentent un élément très répandu pour modéliser les structures, soit en génie civil tel que les bâtiments, les ponts, les chemins de fer,...etc. soit en mécanique ou dans autres secteurs. En mécanique des structures.[33]

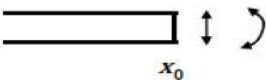
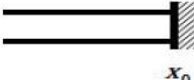
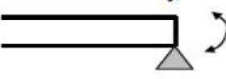
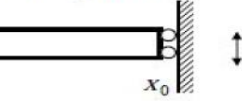
**II.2. Définition d'une poutre**

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisé pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions. Il est à noter que ce type d'élément appelé élément "barre" quand les forces extérieures sont axiales, et il est appelé "arbre" quand il est soumis à la torsion, ou quand il a un mouvement de rotation.[33]

**II.3. Conditions aux limites d'une poutre**

Elles sont définies en considérant les quatre grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion qui représenté dans le tableau ci-dessous.

**Tableau II.1.** Principales conditions aux limites pour les poutres [33]

<p><b>extrémité libre</b></p>  <p style="text-align: center;"><math>x_0</math></p>	<p>pas de contraintes sur le déplacement et la rotation <math>\Rightarrow</math> le <b>moment de flexion</b> et la <b>force de cisaillement</b> s'annulent en <math>x_0</math></p>	$M(x_0, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$
<p><b>extrémité encastree</b></p>  <p style="text-align: center;"><math>x_0</math></p>	<p>les <b>déplacements</b> transversal et angulaires sont <b>nuls</b> en <math>x_0</math></p>	$w(x_0, t) = 0$ $\theta(x_0, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$
<p><b>extrémité simplement supportée</b></p>  <p style="text-align: center;"><math>x_0</math></p>	<p>le <b>déplacement transversal</b> est bloqué mais la rotation est libre <math>\Rightarrow</math> le <b>moment de flexion</b> est donc nul en <math>x_0</math></p>	$w(x_0, t) = 0$ $M(x_0, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$
<p><b>extrémité guidée</b></p>  <p style="text-align: center;"><math>x_0</math></p>	<p>le déplacement transversal est libre et la <b>rotation</b> est bloquée <math>\Rightarrow</math> la <b>force de cisaillement</b> est donc nulle en <math>x_0</math></p>	$\theta(x_0, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$

Les théories des poutres sont des modèles utilisés dans le domaine de la résistance des matériaux. On utilise trois modèles. [34]

**Tableau II. 2 :** Les théories des poutres [4]

Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3
<b>La théorie Euler Bernoulli</b>	<b>La Théorie De Timoshenko</b>	<b>La Théorie D'ordre Elevé</b>
Elle néglige l'influence du cisaillement	Elle prend en compte l'effet du cisaillement, utilise le facteur de correction (le primaire ordre).	Elle prend en compte l'effet du cisaillement

#### II.4. Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres

Les hypothèses principales sont les suivantes :

- l'axe de la poutre,  $x$ , est droit.
- la poutre se déforme dans le plan  $x - z$ , qui est plan principal d'inertie.
- la poutre transmet des efforts normaux en direction  $x$ , des cisaillements en direction  $z$  et des moments autour de l'axe  $y$ . [4]

La construction d'une théorie de poutre consiste à reprendre, pour un milieu curviligne, le cheminement suivi pour le milieu continu. Les étapes successives du traitement sont donc la définition d'une cinématique, l'application des équations d'équilibre, l'introduction des lois de comportement. On en déduit des relations globales entre forces, couples, flèches et angles de rotation des sections. Dans le cas d'une poutre homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement ( $L/h$ ). [4]

En effet, toutes les méthodes de calculs développées dans le cours de résistance des matériaux dispensé au cours de notre cursus de formation sont valables pour autant que les proportions ou l'élanement entre la portée et la hauteur d'une poutre respectant les conditions suivantes :

$$\frac{\text{longueur de la poutre}}{\text{hauteur de la poutre}} \geq 10$$

Une poutre qui ne respecte pas l'élanement énoncé sus-dessus n'est plus sollicité par de la flexion pure mais nécessite l'introduction du cisaillement transverse (CT). [4]

### II.4.1. Les modèles classiques :

Ces modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. Les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées, la normale reste droite et perpendiculaire à la surface moyenne après avoir déformée. [35 ,36]

### II.4.2. Modèle d'Euler Bernoulli (*Classical Beam Theory- CBT*)

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane. [33]

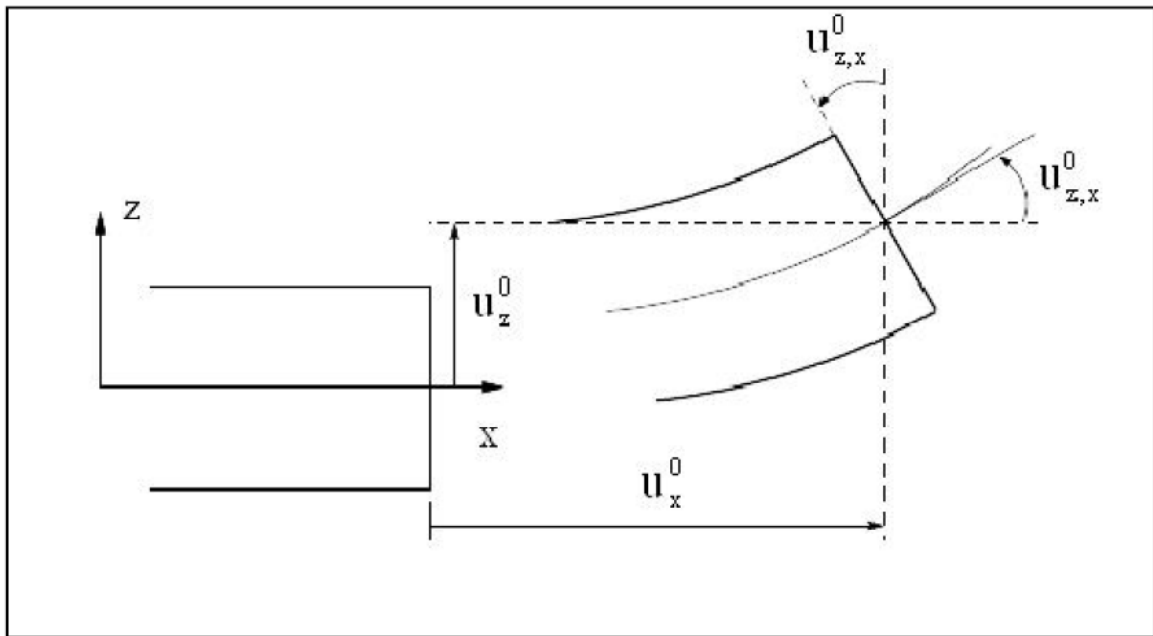


Figure II- 1. Cinématique d'Euler Bernoulli. [33]

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est:

$$f(z) = 0 \quad \text{II-1}$$

Le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CLBT), le déplacement d'un point « M » est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0 - zw_x^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad \text{II-2}$$

$u(x, z)$  : représente le déplacement suivant  $X$

$w(x, z)$  : Le déplacement dans la direction de  $Z$  ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe  $Y$ , provoquée par la flexion est tel que

$$w_x^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{II-3}$$

$u_0(x)$  et  $w_0(x)$  sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes  $X$  et  $Z$ .

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale.

#### **II4.4. La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (Timoshenko) (FSDBT):**

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) s'applique pour le cas des poutres courtes, elle est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II-2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie peut être référée dans qui a mené au modèle de plaque. [34, 35,36].

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre.

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (théorie de Timoshenko) a prolongée la théorie classique des poutres en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, et cela à travers ces hypothèses. L'hypothèse de base porte sur une schématisation du champ de déplacement à l'intérieur du solide (hypothèse cinématique) : le solide est assimilé à un milieu curviligne, le champ de déplacement du milieu continu étant ensuite évalué à partir de la solution trouvée en supposant qu'une section droite initialement plane et perpendiculaire à la ligne moyenne ainsi définie reste plane mais non perpendiculaire. En un point quelconque du milieu curviligne. [37]

Le champ de déplacement pour un point  $M(x, z)$  quelconque s'exprime en fonction de ces inconnues

$$ntU(x, y) = u_0 + z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - z\varphi_y, \quad W(x, z) = w_0(x) \quad \text{II-4}$$

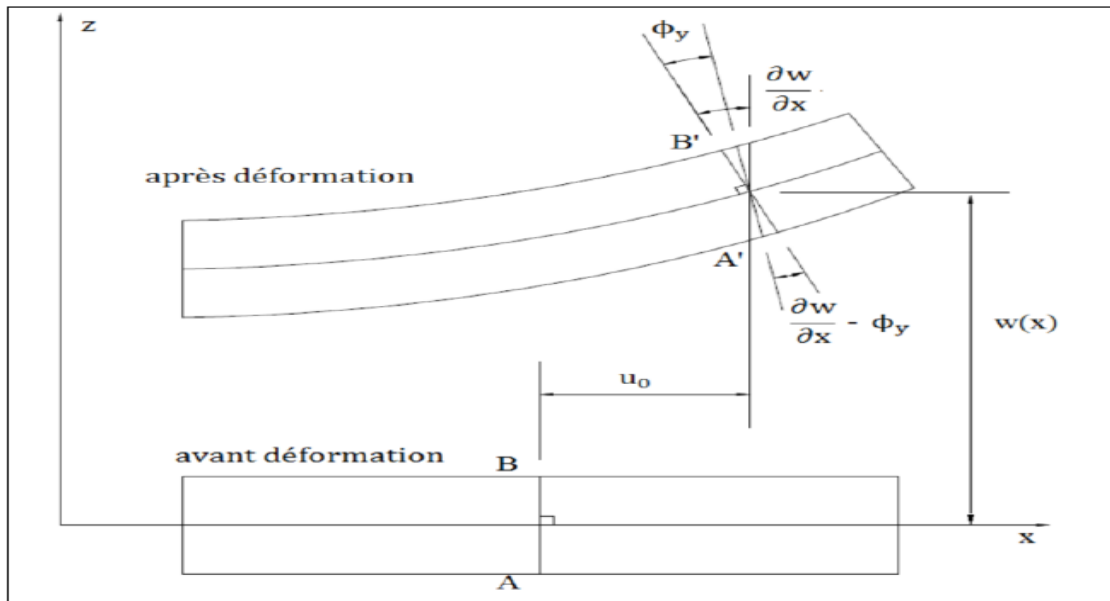


Figure II-2 : Schéma de principe de la théorie des poutres de Timoshenko (FSDT)

D'après Timoshenko le déplacement s'écrit comme suit:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0 - zw'_x(x) + z\varphi^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad \text{II-5}$$

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad \text{II-6}$$

$\gamma_{xz}^0(x)$ : C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0 = \varphi^0(x) - w'_x(x) \quad \text{II-7}$$

$\varphi^0(x)$  :C'est la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\begin{cases} \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w'_x(x) + \gamma_{xz}^0(x) + \varphi^0(x) \\ \gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \end{cases} \quad \text{II-8}$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

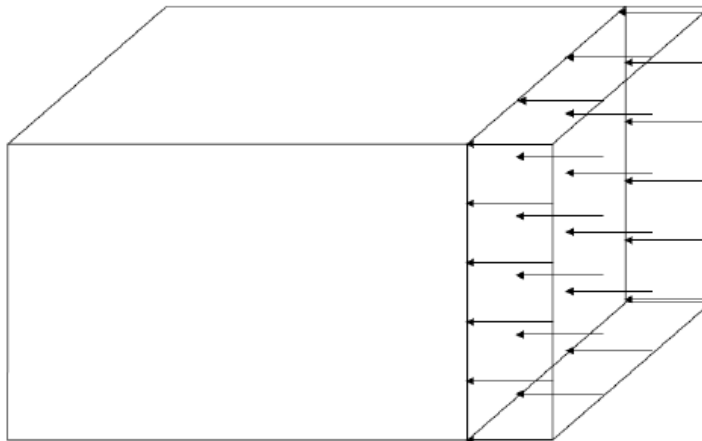
$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz} = G_{xz}\varphi^0(x) \quad \text{II-9}$$

$G_{xz}$ : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre, cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'ya aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire un coefficient de correction ( $k = 5/6$ ) pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par

(*Mindlin et Deresiewicz*). « Cowper » et « Murty » ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient « k » pour différentes sections de la poutre.[38]

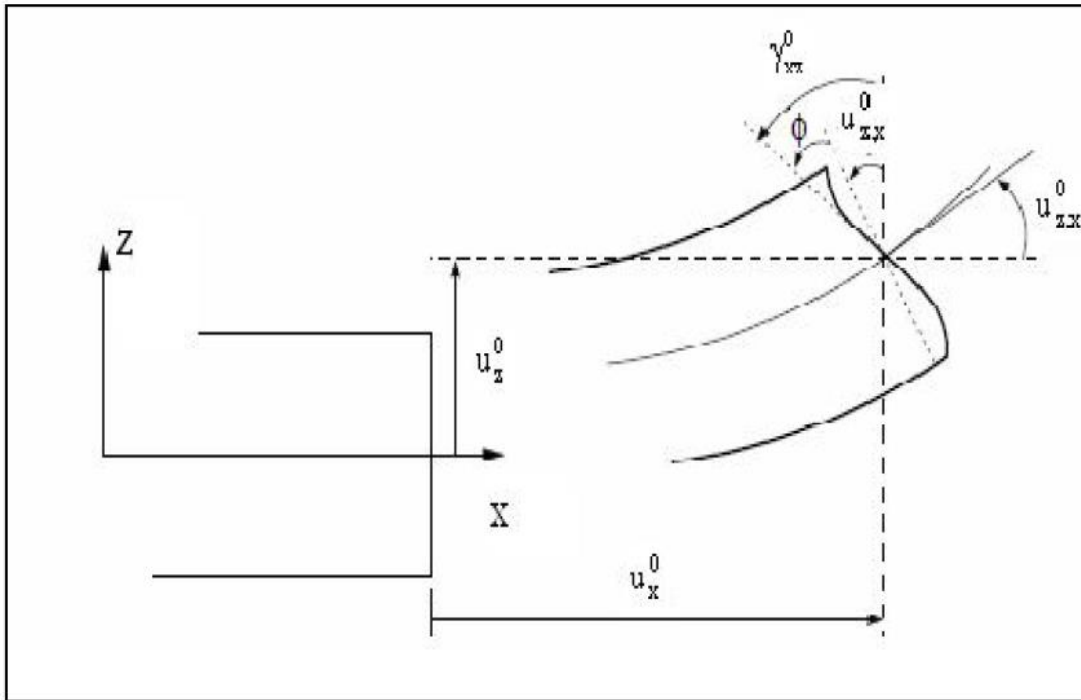


**Figure II-3** : La distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur

Les facteurs de correction sont calculés par comparaison entre l'énergie de cisaillement transverse du 1<sup>er</sup> ordre et celle d'ordre supérieur. Un calcul plus exact des facteurs de correction sont obtenus en comparant l'énergie de cisaillement du 1<sup>er</sup> ordre avec l'énergie de cisaillement par contraintes de cisaillement. Ces contraintes sont déduites des équations d'équilibre. [39]

**II.4.5. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevée (HSDT) :**

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de gauchissement. Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.3). La fonction  $(z)$  représente le gauchissement et sa dérivée  $f'(z)$  le cisaillement.[38]



**Figure II-4 :** Illustration de la poutre d'ordre élevé

Ces théories sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses, où la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart des ces modèles utilisent un développement en série de Taylor, La précision augmente avec l'ordre de développement. Le champ de déplacement approché pour le troisième ordre, est de la forme. [40,41]

$$u_0(x, z) = u_0(x) + z\Psi(x) + z^2\xi(x) + z^3\varphi(x) \tag{II-10}$$

Pour introduire le phénomène de gauchissement il faut modifier le coefficient du terme cubique par une fonction  $(z)$ .

Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0 - zw_x^0(x) + f(z)\varphi^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad \text{II-11}$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0(x) + f'(z)\varphi^0(x) + w_x^0(x) \quad \text{II-12}$$

$$\gamma_{xz}(x) = f'(z)\varphi^0(x) \quad \text{II-13}$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$f'(z) \Big|_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0 \quad \text{II-14}$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition figure (II.13).

Selon l'expression de la frontière de cisaillement  $f(z)$ , quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

➤ L'approche de (*Ambartsumyan*) :

$$f(z) = \frac{1}{2}z \left( \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{3}z^3 \right) \quad \text{II-15}$$

➤ L'approche de (*Reissner*) :

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left( 1 - \frac{4z^3}{3h^4} \right) \quad \text{II-16}$$

➤ L'approche de (*Aydogdu*) :

$$f(z) = z\alpha \frac{2z^2}{h^2 \ln \alpha} \quad \text{II-17}$$

➤ L'approche de (*Levinson, Murthy, et Reddy*) :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad \text{II-18}$$

Dans le modèle de (*Reddy*) le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal «  $w$  » est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. [44]

➤ L'approche de (*Touratier*) :

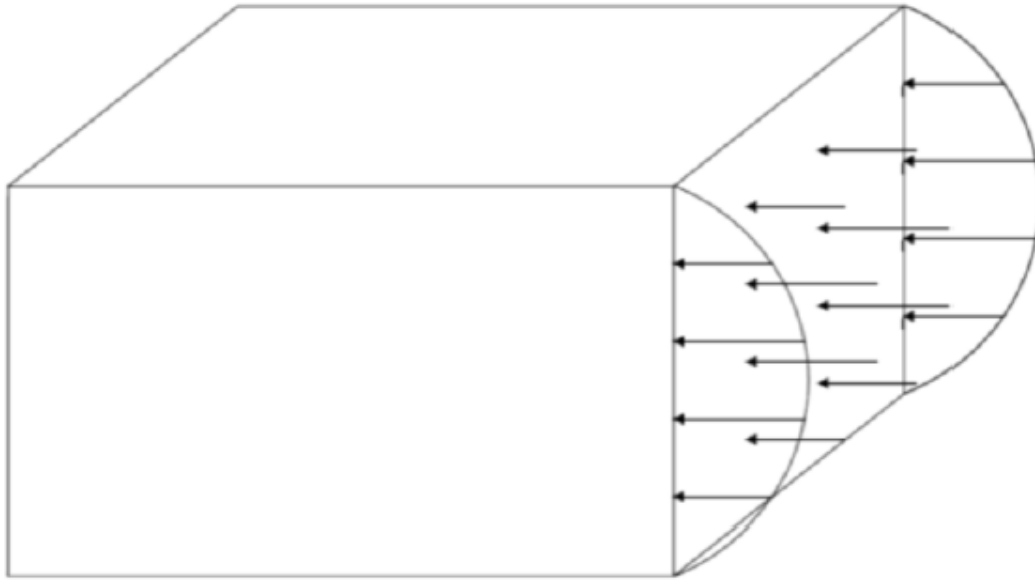
$$f(z) = \frac{h \sin \frac{\pi z}{h}}{\pi} \quad \text{II-19}$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. [45]

La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{z}{h} \right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left( \frac{\pi z}{h} \right)^{2n+1} = z \left( 1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} + \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots \right) \quad \text{II-20}$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition (Figure II-5). Selon l'expression de la fonction de gauchissement. [46]



**Figure II-5:** La distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie d'ordre élevé

#### II-4.6. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (TSDT)

Le champ de déplacements dans la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé

(TSDT) à cinq variables définies par :

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z) \theta_x \quad \text{II-21 a}$$

$$w = w_0(x, y) \quad \text{II-21b}$$

Où  $u$  et  $w$  sont des déplacements dans les directions  $x$  et  $z$ , respectivement. Les déplacements  $u_0$  et  $w_0$  sont ceux d'un point du plan moyen ( $x, z = 0$ ),  $\theta_x$  est la rotation due à la flexion des plans  $yz$ , respectivement.  $\Psi(z)$  Représente la fonction de gauchissement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la poutre [38]

Le champ de déplacement de la théorie classique des poutres mince (*classical thin beam theory* CBT) est facilement obtenu en posant  $\Psi(z)=0$ . Le déplacement de la théorie du premier ordre de cisaillement de déformation (*first order shear deformation theory* FBT) est obtenu en posant  $\Psi(z)=z$ . Bien que différentes fonctions de forme soient applicables, seuls ceux qui convertissent la théorie actuelle à la poutre de déformation de cisaillement parabolique

correspondant à la théorie (PSDBT), la théorie des poutres de déformation de cisaillement hyperbolique (HSDBT), la théorie des poutres de déformation de cisaillement de premier ordre (FBT) et la théorie des poutres de déformation exponentielle de cisaillement (ESDBT). Ceci est obtenu par le choix des fonctions de forme de la manière suivante :[38]

$$FBT: f(z) = z \quad \text{II-22a}$$

$$PSDBT: f(z) = z(1 - 4z^2/3h^2) \quad \text{II-22b}$$

$$HSDBT: f(z) = h \sinh(z/h) - z \cosh(1/2) \quad \text{II-22c}$$

$$ESDBT: f(z) = z \exp[-2(z/h)^2] \quad \text{II-22d}$$

## II.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des différents types des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT). [8]

The background features a decorative graphic consisting of three blue circles of varying sizes, each with a gradient from dark blue in the center to light blue on the edges. These circles are arranged vertically, with the largest at the top and bottom, and a smaller one in the middle. Two thin, light blue lines intersect at the center, forming a V-shape that frames the central text.

**Analyse du comportement statique des  
poutres sandwich en matériaux à gradient**



### III.1.Introduction

Les poutres sont largement utilisées dans une variété d'applications ; elles peuvent être des composants structurels ou même des structures complètes.

Devant ce vaste éventail de domaine d'applications, les poutres de matériaux fonctionnellement gradués éveillent l'intérêt de certaines futures applications qui souhaitent mieux de comprendre leur comportement mécanique dû aux différentes contraintes imposées, ce qui est permet également d'optimiser leurs performances mécaniques, pour répondre d'une manière plus efficace aux différents besoins.[47]

Plusieurs théories des poutres sont présentées dans la littérature, chacun présentant un modèle analytique permettre une étude approfondie sur la réponse des poutres soumises à différentes charges statiques et dynamiques. Ces théories des poutres peuvent également être regroupées selon leurs relations contrainte-déformation tout en tenant compte la géométrie de la poutre (mince ou épaisse), le comportement du matériau utilisé, le type et le mode de chargement appliqué

Les théories des poutres élastiques linéaires sont basées sur l'hypothèse d'une relation linéaire entre la contrainte et la déformation selon la loi de Hooke bien connue, tandis que l'élasticité non linéaire, la plasticité et la viscoélasticité considèrent des relations contrainte-déformation plus complexes. .[47]

### III.2.La méthode des éléments finis en déplacement

Dans cette approche, l'approximation est faite sur le champ de déplacement en considérant l'élément cinématiquement admissible ; c'est-à-dire l'intégrabilité du champ de déformation à l'intérieur de l'élément.[48]

La démarche à ce niveau repose sur trois principales actions :

- ✓ La définition d'une forme paramétrique simple du champ de déplacement (discrétisation fonctionnelle) à l'intérieur des éléments finis de la structure.
- ✓ L'application à chacun des éléments le principe des travaux virtuels à travers la satisfaction des conditions de stationnarité de la fonctionnelle pour chacun des éléments. Ces conditions sont une forme faible des équations d'équilibre. Elles permettent de relier, par l'intermédiaire de la raideur de l'élément, les paramètres de la discrétisation aux grandeurs équivalentes des forces qui s'applique sur l'élément.

- ✓ L'assemblage des matrices de rigidité ainsi obtenues au niveau élémentaire conduit à un système d'équations qui traduit les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de la structure dans sa globalité.[4]

### III.3. Cinématique et équations constitutives

Sur la base des hypothèses données dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant l'équation.

$$\begin{aligned} U(x, z) &= u_0(x, z) - Z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ W(x, z) &= w_b(x, z) + w_s(x, z) \end{aligned} \quad (\text{III-1})$$

$u$  : est le déplacement axial d'un point sur le plan médian de la poutre ;

$w_b$  et  $w_s$  sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal d'un point sur le plan médian du poutre, et  $f(z)$  est une fonction de forme qui détermine la distribution de la contrainte de cisaillement transversale et de la contrainte de cisaillement sur la épaisseur du faisceau.

Les fonctions de forme  $f(z)$  sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites de contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, un facteur de correction de cisaillement n'est donc pas nécessaire.

La théorie actuelle est donnée par :

$$f(z) = \frac{2 * z * \sinh\left(\frac{z^2}{h^2}\right)}{2 * \sinh\left(\frac{1}{4}\right) + \cosh\left(\frac{1}{4}\right)} \quad (\text{III-2})$$

### III.4. Champs de déformations

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements de l'équation soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III-3})$$

Sur la base du champ de déplacement donnée dans l'équation (III-2), l'équation (III-3) devient :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{xx}^1 + \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 + \gamma_{xz}^1 \end{cases} \quad (III-4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xx}^1 = z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xx}^2 = f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \gamma_{xz}^0 &= \left(1 - \frac{f(z)}{\partial z}\right) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g = \left(1 - \frac{f(z)}{\partial z}\right), \quad \gamma_{xz}^0 = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{aligned} \quad (III-5)$$

### III.5. champ des contraintes

Sur la base des hypothèses induites en introduction, le champ de déplacement peut II peut être obtenu à l'aide des équations suivantes.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (III-6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \varepsilon_{xx} C_{11} + \varepsilon_{zz} C_{12} \\ \sigma_{zz} &= \varepsilon_{xx} C_{12} + \varepsilon_{zz} C_{11} \\ \tau_{xz} &= \gamma_{xz} C_{33} \end{aligned} \quad (III-7a)$$

Avec

$$\begin{aligned} C_{11} &= E(z), \quad C_{13} = \vartheta E(z), \quad C_{55} = \frac{E(z)}{2(1-\vartheta)} \\ C_{33} &= C_{11} \end{aligned} \quad (III-7b)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11} \varepsilon_{xx}^0 + C_{11} \varepsilon_{xx}^1 z + C_{11} \varepsilon_{xx}^2 f(z) \\ \sigma_{zz} &= C_{12} \varepsilon_{xx}^0 + C_{12} \varepsilon_{xx}^1 z + C_{12} \varepsilon_{xx}^2 f(z) \\ \tau_{xz} &= g(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (III-8)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E(z) \varepsilon_{xx} + E(z) \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= E(z) (\varepsilon_{zz} + \vartheta \varepsilon_{xx}) \\ \tau_{xz} &= \left( \frac{E(z)}{2(1-\vartheta)} \right) \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (III-9)$$

### III.6.Principe d' Hamilton

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être formulé sous forme analytique.

#### III.6.1.Les équations du mouvement

Le principe du travail virtuel est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé dans l'analyse formes :

$$\delta U + \delta W = \iint_A [\sigma_{xx}(\delta\varepsilon_{xx} + \delta\varepsilon_{zz}) + (\tau_{xz}\delta\gamma_{xz})]dA - \int_A q\delta w dA = 0 \quad (\text{III-10})$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^l \sigma_{xx}(\varepsilon_{xx}^0 - z\varepsilon_{xx}^1 + f(z)\varepsilon_{xx}^2) + Q\gamma_{xz} = 0 \\ &= \int_0^l N_{xx}\varepsilon_{xx}^0 - M_{xx}\varepsilon_{xx}^1 + P_{xx}\varepsilon_{xx}^2 + Q\gamma_{xz} \end{aligned} \quad (\text{III-11})$$

Où :  $N, M, P$  et  $Q$  sont les résultats des contraintes définies comme suit :

$$N = \int \sigma dA \quad (\text{III-12a})$$

$$M = \int \sigma z dA \quad (\text{III-12b})$$

$$P = \int \sigma f(z) dA \quad (\text{III-12c})$$

$$Q = \int \sigma(g) dA \quad (\text{III-12d})$$

$$\begin{aligned} \iint (U\delta U) dA &= \iint \left[ U_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \right] \left[ \delta U_0 - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right] dA \\ &= \left[ U_0 \delta U_0 - \delta U_0 z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \delta U_0 f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \right] + \left[ -U_0 z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + z^2 \frac{\partial w_b}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right] \\ &\quad + \left[ U_0 f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z)^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right] dA dx \end{aligned} \quad (\text{III-13})$$

$$\begin{aligned}
 \iint W \delta w &= \iint [(W_b + W_s) \delta w] dA dx \\
 &= \iint [(W_b \delta w + W_s \delta w)] dA dx \\
 &= \iint \left[ \left( w_b \left( 1 - \frac{f(z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} + w_s \left( 1 - \frac{f(z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \right] dA dx \\
 Q &= \iint (g) dA \\
 &= \int Q \left[ (w_b + w_s) \frac{\partial w_s}{\partial x} \right] dx
 \end{aligned} \tag{III-14}$$

### III.6.2. Equation de terme de mouvement

$$\delta U_0 = U_0 - \frac{\partial w_b}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x} \tag{III-15}$$

$$\delta w_b = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w_b}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \tag{III-16}$$

$$\delta w_s = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \tag{III-17}$$

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int (N_{xx} \varepsilon_{xx}^0 - M_{xx} \varepsilon_{xx}^1 + P_{xx} \varepsilon_{xx}^2 + Q_{xz} \gamma_{xz}) dx \\
 &= \int \left( N_{xx} \frac{\partial u_0}{\partial x} - M_{xx} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + P_{xx} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + Q_{xz} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) dx \\
 &= \int \left( \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta U_0 - \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \delta w_b + \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} \delta w_s + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \right) dx
 \end{aligned} \tag{III-18}$$

Avec:

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \\
 \delta w_b &= \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + q \\
 \delta w_s &= \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + q
 \end{aligned} \tag{III-19}$$

### III.6.3. Equation de mouvements

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} &= 0 \quad \rightarrow (a) \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + q &= 0 \quad \rightarrow (b) \\ \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\delta Q_{xz}}{\partial x} + q &= 0 \quad \rightarrow (c) \end{aligned} \quad (III-20)$$

### III.7. Détermination des termes

✓ Equation (a)

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int \sigma_{xx} dz = \int (c_{11} \varepsilon_{xx} + c_{12} \varepsilon_{zz}) dz \\ N_{xx} &= \int c_{11} \left( z \frac{\partial u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^3} \right) + C_{12} g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} dz \end{aligned} \quad (III-21a)$$

$$\boxed{\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = A \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + B_s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3}}$$

✓ Equation (b)

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int \sigma_{xx} z dz = \int (c_{11} \varepsilon_{xx} z + c_{12} \varepsilon_{zz} z) dz \\ M_{xx} &= \int c_{11} \left( z^2 \frac{\partial u_0}{\partial x^2} - z^2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^3} + z f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^3} \right) + C_{12} g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} dz \end{aligned} \quad (III-21b)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = B \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + D_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + q}$$

✓ Equation (c)

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \int \sigma_{xx} dz = \int (c_{11} \varepsilon_{xx} + c_{12} \varepsilon_{zz}) dz \\ P_{xx} &= \int c_{11} \left( f(z) \frac{\partial u_0}{\partial x^2} - f(z) z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^3} + f(z)^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^3} \right) + C_{12} g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} dz \end{aligned} \quad (III-21c)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x} = B_s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2} - D_s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + q}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \int c_{11} dz &= A \\
 \int c_{11} z dz &= B \\
 \int c_{11} f(z) dz &= B_s \\
 \int c_{11} z^2 dz &= D \\
 \int c_{11} z f(z) dz &= D_s \\
 \int c_{11} f(z)^2 dz &= H_s \\
 \int c_{55} Q &= A_s
 \end{aligned} \tag{III-22}$$

✓ **Assemblage**

$$\begin{aligned}
 A \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} &= 0 \\
 B \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + q &= 0 \\
 B_s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + q &= 0
 \end{aligned} \tag{III-23}$$

### III.8.Solutions analytiques

Les équations de mouvement ci-dessus sont résolues analytiquement pour les problèmes de flexion. La solution de Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour une poutre simplement appuyée. On pense que la solution est sous la forme [8]

$$\begin{cases}
 u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(ax) \\
 w_b(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{bn} \sin(ax) \\
 w_s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{sn} \sin(ax)
 \end{cases} \tag{III-25}$$

Où :  $\alpha = n\pi/L$ , ( $U_n$ ,  $W_{bn}$ ,  $W_{sn}$ ) Sont les coefficients de déplacement inconnus. La charge transversale  $q$  est également étendue dans le série de Fourier comme :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(\alpha x) \quad (\text{III-27})$$

Où :

$Q_n$  est l'amplitude de charge calculée à partir de :

$$Q_n = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin(\alpha x) dx \quad (\text{III-28})$$

Les coefficients  $Q_n$  sont donnés ci-dessous pour quelques charges typiques :

$$\frac{4q_0}{n\pi} (n = 1,3,5, \dots) \quad \text{pour une charge uniforme} \quad (\text{III-29})$$

$$\delta U = \iiint \sigma_e (\varepsilon_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz} \delta \varepsilon_{zz}) + \tau (\gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) \quad (\text{III-30a})$$

$$\iiint \varepsilon_{xx} \delta \varepsilon_{xx} = \iiint \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right] \cdot \left[ \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \right] dA \quad (\text{III-30b})$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \right] \\ &\quad + \left[ -z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} \frac{\partial u_0}{\partial x} + z^2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} + z f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} \right] \\ &\quad + \left[ -f(z) \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + z f(z) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + f(z)^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-30c})$$

$$\begin{aligned} \iiint \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz} &= \left[ (w_b + w_s) \frac{\partial w_s}{\partial x} \right] \cdot \left[ \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \right] \\ &= \left[ w_b \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + w_s \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \right] \\ &= (w_b + w_s) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (\text{III-31})$$

Où :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \delta u_0 - z \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \delta u_0 - f(z) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \delta u_0 \\
 B &= -z \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \delta w_b + z^2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \delta w_b - z f'(z) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \delta w_b \\
 C &= f'(z) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \delta w_s + z f(z) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \delta w_s + f(z)^2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \delta w_s \\
 D &= (w_b + w_s) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \delta w_s
 \end{aligned} \tag{III-32}$$

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int (N_{xx} \varepsilon_{xx}^0 - M_{xx} \varepsilon_{xx}^1 + P_{xx} \varepsilon_{xx}^2 + Q_{xz} \gamma_{xz}) dx \\
 &= \int \left( N_{xx} \frac{\partial u_0}{\partial x} - M_{xx} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + P_{xx} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + Q_{xz} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) dx \\
 &= \int \left( \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u_0 - \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \delta w_b + \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} \delta w_s + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \delta V \right) dx
 \end{aligned} \tag{III-33}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \int \sigma_{xx} dz = \int (c_{11} \varepsilon_{xx} + c_{12} \varepsilon_{zz}) dz \\
 N_{xx} &= \int c_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) dz
 \end{aligned} \tag{III-34a}$$

$$\boxed{N_{xx} \frac{\partial u_0}{\partial x} = -A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + D_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= \int \sigma_{xx} z dz = \int (c_{11} \varepsilon_{xx} z + c_{12} \varepsilon_{zz} z) dz \\
 M_{xx} &= \int c_{11} \left( z \frac{\partial u_0}{\partial x} - z^2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - z f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) dz
 \end{aligned} \tag{III-34b}$$

$$\boxed{M_{xx} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} = -B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - F_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + D_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + q}$$

$$P_{xx} = \int \sigma_{xx} dz = \int (c_{11} \varepsilon_{xx} + c_{12} \varepsilon_{zz}) dz$$

$$P_{xx} = \int c_{11} \left( f(z) \frac{\partial u_0}{\partial x^2} - f(z) z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^3} + f(z)^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^3} \right) dz \quad (\text{III-34c})$$

$$P_{xx} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = D_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2} - H_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + A_{66} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + R_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + q$$

$$Q_{xz} = \int \gamma_{xz} dz = \int C_{55} \gamma_{xz}$$

$$Q_{xz} = \int C_{55} \left( (w_b + w_s) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \quad (\text{III-34d})$$

$$Q_{xz} \frac{\partial w_s}{\partial x^2} = R_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$

Avec

$$\int c_{11} dz = A_{11}$$

$$\int c_{11} z dz = B_{11}$$

$$\int c_{11} f(z) dz = D_{11} \quad (\text{III-35})$$

$$\int c_{11} z^2 dz = F_{11}$$

$$\int c_{11} z f(z) dz = H_{11}$$

$$\int c_{11} f(z)^2 dz = A_{66}$$

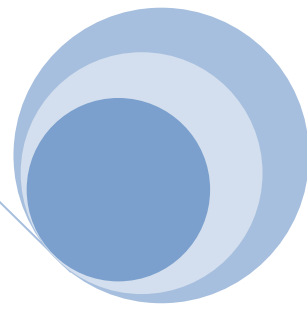
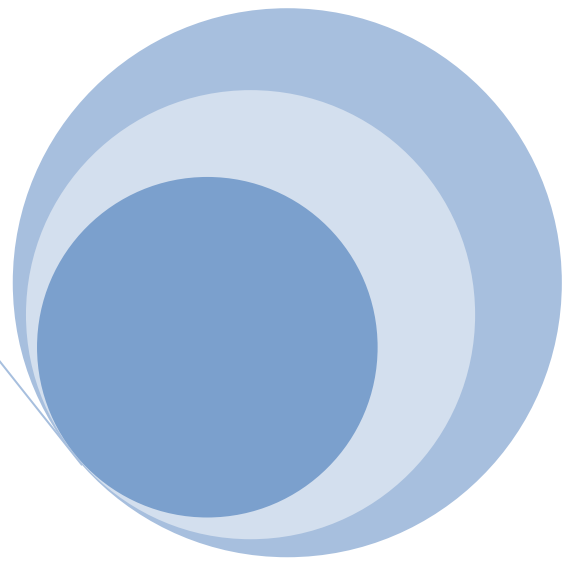
$$\int c_{55} Q dz = R_{55}$$

En substituant les extensions de  $u$ ,  $w_b$ ,  $w_s$  et  $q$  des équations (III-27) et (III-28) dans les équations de l'équation du mouvement (III-26), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

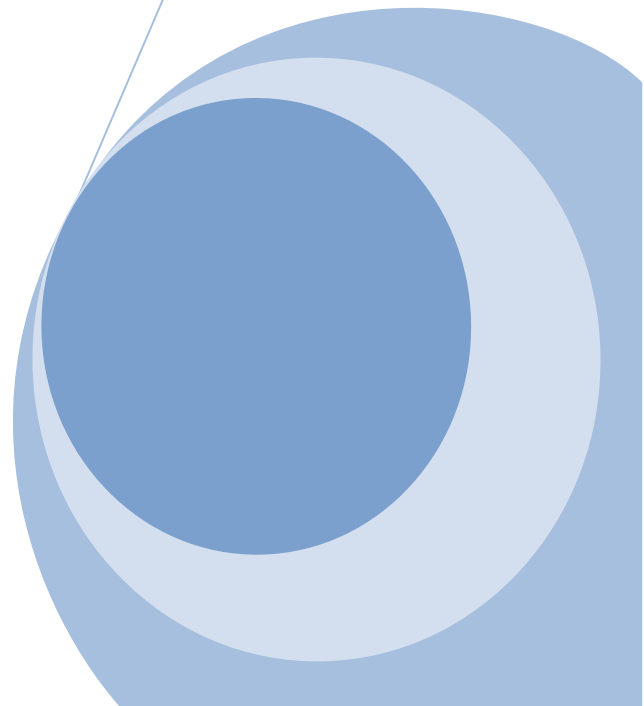
$$\begin{bmatrix} -A_{11} a^2 & B_{11} a^3 & D_{11} a^3 \\ B_{11} a^3 & F_{11} a^4 & H_{11} a^4 \\ D_{11} a^3 & H_{11} a^4 & (A_{66} a^4 + R_{55} a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_n \\ q_n \end{bmatrix} \quad \text{III-36}$$

### **III.9.Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans les poutres en fonction des déplacements généralisés. Le tenseur de déformation est utilisé pour obtenir les relations déformation déplacement. Le tenseur de contraintes est obtenu en introduisant le champ de déformation dans la loi de Hooke et enfin pour terminer la définition du principe des travaux virtuels et utilisée la solution de Navier pour déterminer les solutions analytiques. [22]



## **Résultats et discussion**





### IV.1.Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons élaborer un programme informatique qui calcule les fréquences propres naturelles d'une poutre P-FGM sous appuis simples en fonction de l'index de la matière  $k$ . et du rapport d'épaisseur  $L/h$  (Maple), et présenter les résultats obtenus suite à son exécution, Nous commencerons par valider nos résultats, en les comparants avec ceux de l'article déjà publiés. Nous présenterons enfin des tableaux et des graphes pour discuter de l'influence du rapport d'épaisseur  $L/h$  et de l'index de la matière  $k$ .

Afin de comparer nos résultats avec ceux des travaux déjà effectués, et les valider par la suite, on considère une poutre P-FGM rectangulaire à deux constituants (métal au niveau de la face supérieure et céramique au niveau de la face inférieure), Le rapport  $L/h$  rapport d'épaisseur de notre poutre et le rapport  $x/a$ .

### IV.2.Géométrie de la poutre

Supposons une poutre sandwich en FGM de section rectangulaire  $b \times h$  et de longueur  $L$ , comme la montre la figure IV. 1.

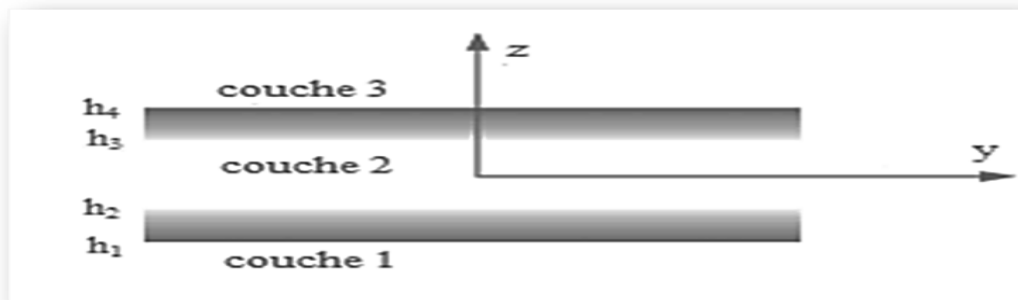


Figure IV. 1: Géométrie et coordonnées de la poutre FGM.

### IV.3.Structures des sandwiches

1er type : la poutre sandwich FGM (1-0-1)	$h_2=0$	$h_3=0$
2eme type : la poutre sandwich FGM (2-1-2)	$h_2=-h/10,$	$h_3=h/10$
3eme type : la poutre sandwich FGM (2-1-1)	$h_2=0,$	$h_3=h/4$
4eme type : la poutre sandwich FGM (1-1-1)	$h_2=-h/6,$	$h_3=h/6$
5eme type : la poutre sandwich FGM (2-2-1)	$h_2=-h/10,$	$h_3=3h/10$
6eme type : la poutre sandwich FGM (1-2-1)	$h_2=-h/4,$	$h_3=h/4$
7eme type : la plaque sandwich FGM (1-8-1)	$h_2=-2h/5,$	$h_3=2h/5$

### IV.4.Résultats et discussion

Dans le calcul suivant, les constituants matériels de la poutre FGM sont considérés comme étant composé d'alumine et d'aluminium avec les propriétés des matériaux comme suit- Alumine ( $Al_2O_3$ ) : les réponses en flexion FG simplement appuyé,  $E_c = 380$  GPa,  $\rho_c = 3960$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0,3$  - Aluminium (Al) ;  $E_m = 70$  GPa,  $\rho_m = 2702$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0,3$ , le sans dimension est défini comme :

$$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w \left( \frac{L}{2} \right), \quad \bar{u} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} u \left( 0, -\frac{h}{2} \right)$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x \left( \frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right), \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \sigma_{xz} (0, 0)$$

#### IV.4.1.Etudes comparatives

Contient les déplacements et les contraintes non dimensionnels des poutres FG sous une charge uniforme pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et du rapport portée/profondeur L/h. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions analytiques données par Li et al. (2010). On peut observer que nos résultats sont en excellent accord avec ceux prédits en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (Li et al., 2010). Tableaux VI .1.

**Tableaux IV .1.** : Les déformations et les contraintes non dimensionnelles des poutres FGM sous une charge Uniform  $q$  pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $k$

$k$	Méthode	$L/h=20$		
		$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Li et al 2010[55]	2.8962	15.0130	0.7500
	Latifa Ould Larb[56]	2.8962	15.0136	0.7625
	<b>PRESENT</b>	<b>2.8962</b>	<b>15.0129</b>	<b>0.7423</b>
0.5	Li et al 2010[55]	4.4645	19.7005	0.7676
	Latifa Ould Larb[56]	4.4644	19.7013	0.7795
	<b>PRESENT</b>	<b>4.4644</b>	<b>19.7003</b>	<b>0.7594</b>
1	Li et al 2010[55]	5.8049	23.2054	0.7500
	SSDBT	5.8049	23.2063	0.7625
	<b>PRESENT</b>	<b>5.8049</b>	<b>23.2050</b>	<b>0.7423</b>
2	Li et al 2010[55]	7.4415	27.0989	0.6787
	Latifa Ould Larb[56]	7.4421	27.1005	0.7005
	<b>PRESENT</b>	<b>7.4420</b>	<b>27.0988</b>	<b>0.6794</b>
5	Li et al 2010[55]	8.8151	31.8112	0.5790
	Latifa Ould Larb	8.8186	31.8151	0.6218
	<b>PRESENT</b>	<b>8.8181</b>	<b>31.8126</b>	<b>0.5987</b>
10	Li et al 2010[55]	9.6879	38.1372	0.6436
	Latifa Ould Larb[56]	9.6907	38.1408	0.6788
	<b>PRESENT</b>	<b>9.6904</b>	<b>38.1383</b>	<b>0.6562</b>

Le tableau IV.3 présente la comparaison des résultats numériques de la théorie utilisée non dimensionnels de la déflexion à mi-portée d'une poutre FG sur fondations élastiques sous une charge uniforme en utilisant la fonction de gauchissement MODEL 1 (A. Chikh, 2016), avec les résultats obtenus de la littérature (Ait Atmane et al.2015), (Ying et al. 2008) et (Chen et al. 2004), on remarque d'une bonne adéquation entre les résultats comparés pour les

différentes valeurs des paramètres  $K$ , de la fondation élastique pour deux types des poutres en portée de  $L/h = 20$  et  $L/h = 05$

**Tableaux IV .3:** Les déviations et les contraintes non dimensionnelles des poutres FGM sous une charge uniforme  $q$  pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $k$

$k$	Méthode	$L/h=5$		
		$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$
<b>0</b>	Li et al 2010[55]	3.1657	3.8020	0.7500
	Latifa Ould Larb	3.1651	3.8043	0.7489
	<b>PRESENT</b>	<b>3.1653</b>	<b>3.8014</b>	<b>0.7302</b>
<b>0.5</b>	Li et al 2010[55]	4.8292	4.9925	0.7676
	Latifa Ould Larb	4.8282	4.9956	0.7660
	<b>PRESENT</b>	<b>4.8285</b>	<b>4.9916</b>	<b>0.7474</b>
<b>1</b>	Li et al 2010[55]	6.2599	5.8837	0.7500
	Latifa Ould Larb	6.2590	5.8875	0.7489
	<b>PRESENT</b>	<b>6.2594</b>	<b>5.8827</b>	<b>0.7302</b>
<b>2</b>	Li et al 2010[55]	8.0602	6.8812	0.6787
	Latifa Ould Larb	8.0683	6.8878	0.6870
	<b>PRESENT</b>	<b>8.0674</b>	<b>6.8813</b>	<b>0.6674</b>
<b>5</b>	Li et al 2010[55]	9.7802	8.1030	0.5790
	Latifa Ould Larb	9.8345	8.1187	0.6084
	<b>PRESENT</b>	<b>9.8262</b>	<b>8.1085</b>	<b>0.5869</b>
<b>10</b>	Li et al 2010[55]	10.8979	9.7063	0.6436
	Latifa Ould Larb	10.9413	9.7203	0.6640
	<b>PRESENT</b>	<b>10.9370</b>	<b>9.7101</b>	<b>0.6431</b>

## IV.4.2. Etude paramétrique

Notre étude montre l'effet de la dépendance de l'indice matériel  $K$  sur la flèche, de la poutre sandwich FGM soumise à une charge uniforme pour des différents types des sandwichs en même temps en faisant varier le rapport  $L/h$  de la poutre ainsi que le rapport  $x/a$ .

On peut observer que les résultats obtenus sont en accord avec les résultats publiés.

**Tableau IV.3:** comparaison des déflexions et contraintes non dimensionnelles d'une poutre sandwich.

schéma	théorie	k				
		0	1	2	5	10
2-1-2	Présent	2.896	6.583	9.286	12.756	14.138
	Thanh Trung[53]	2.896	6.587	9.292	12.765	14.149
	Osofero et al. [54]	2.896	6.584	9.285	12.756	14.137
1-1-1	Présent	2.896	5.940	8.031	10.837	12.159
	Thanh Trung[53]	2.896	5.942	8.035	10.844	12.167
	Osofero et al. [54]	2.896	5.940	8.031	10.837	12.159
2-2-1	Présent	2.896	5.516	7.208	9.412	10.453
	Thanh Trung[53]	2.896	5.518	7.211	9.417	10.458
	Osofero et al. [54]	2.896	5.516	7.207	9.412	10.453
1-8-1	Présent	2.896	3.679	4.017	4.394	4.577
	Thanh Trung[53]	2.896	3.680	4.017	4.395	4.578
	Osofero et al. [54]	2.896	3.679	4.017	4.394	4.577

Tableau IV.4: comparaison des contraintes axiale non dimensionnelles d'une poutre sandwich

schéma	théorie	k				
		0	1	2	5	10
2-1-2	Présent	15.014	6.301	8.894	12.222	13.546
	Thanh Trung[53]	15.030	6.310	8.908	12.242	13.568
	Osofero et al. [54]	14.988	6.288	8.874	12.197	13.519
1-1-1	Présent	15.012	5.685	7.691	10.384	11.651
	Thanh Trung[53]	15.030	5.693	7.702	10.400	11.670
	Osofero et al. [54]	14.988	5.672	7.673	10.360	11.626
2-2-1	Présent	15.012	4.936	6.289	8.011	8.809
	Thanh Trung[53]	15.030	4.943	6.297	8.022	8.823
	Osofero et al. [54]	14.988	4.925	6.273	7.990	8.788
1-8-1	Présent	15.012	3.517	3.840	4.203	4.378
	Thanh Trung[53]	15.030	3.521	3.845	4.208	4.384
	Osofero et al. [54]	14.988	3.510	3.832	4.193	4.368

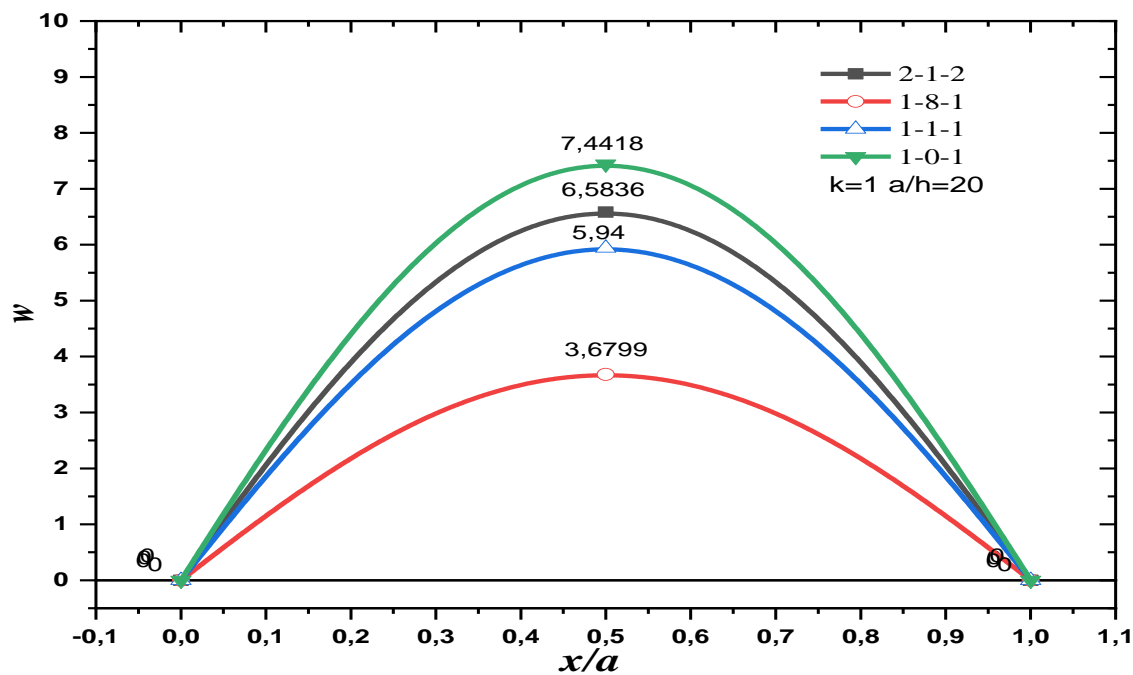


Figure IV.1: Variation du rapport adimensionnelle ( $x/a$ ) et son effet sur la déflexion de La poutre FG en fonction de différents types de sandwich

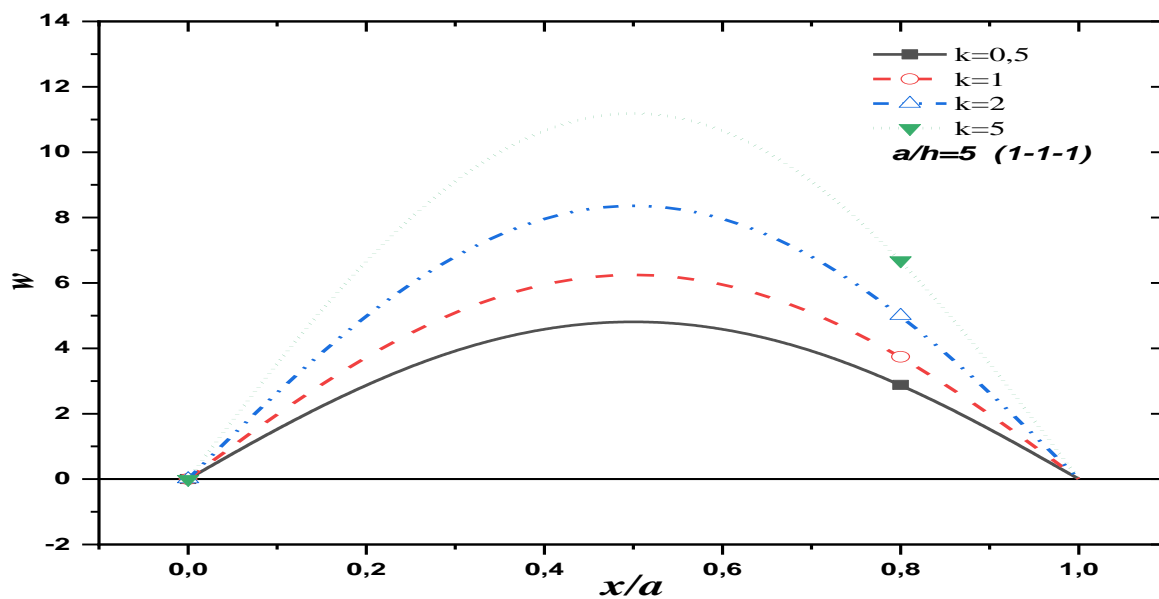
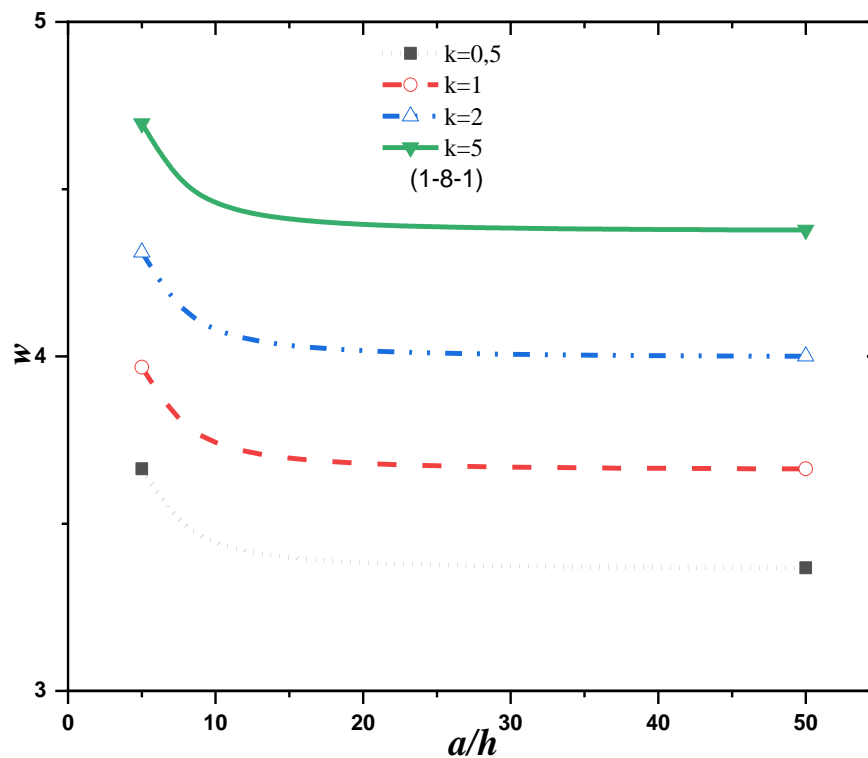


Figure IV. 2: Variation du rapport adimensionnelle ( $x/a$ ) et son effet sur la déflexion de La poutre sandwich FG en fonction de différentes valeurs de l'indice matériel « k ».

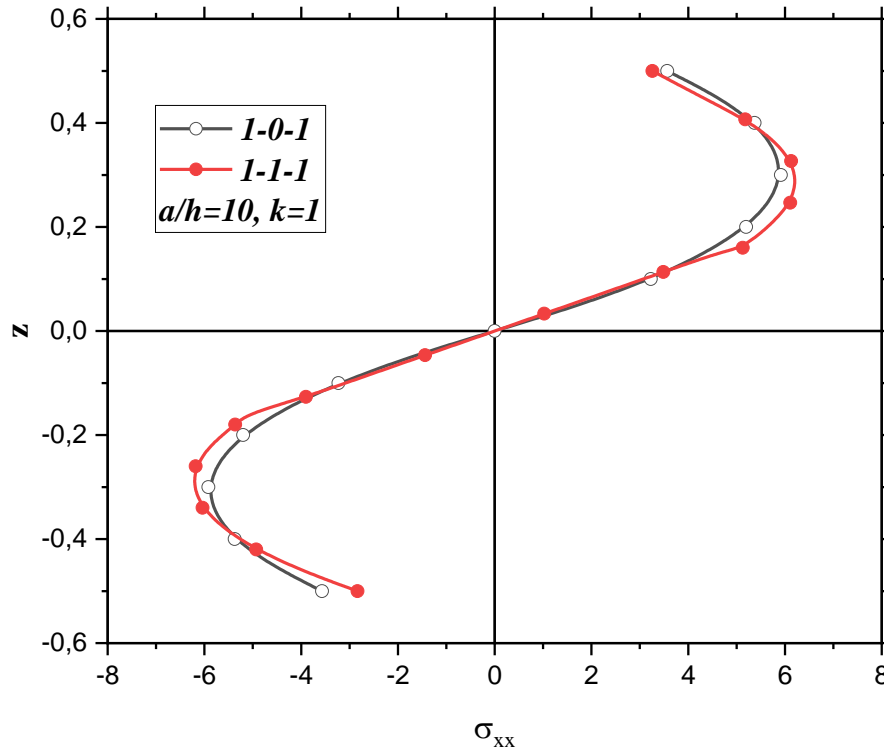
Les figures (IV.1 et IV.2) montrent respectivement la déflexion  $w$ , à travers la longueur de la poutre FG en fonction de différentes valeurs de l'indice matériel « k » et différentes types de sandwich.

Une comparaison entre les courbes présentées est également montrée dans la figure (IV-1) pour différentes valeurs de l'indice matériel  $k$  où il varie entre 0, 5 et 10. On peut voir qu'il existe une bonne corrélation de l'allure des courbes entre les modèles utilisés.

Et On peut voir sur la figure (IV-2) quel que soit le type de sandwich, et les valeurs des constant de la longueur de la poutre et l'indice matériel  $k$  les résultats obtenus de la déflexion sont en accord avec les résultats publiés.



**Figure IV-3:** Variation du rapport adimensionnelle ( $a/h$ ) et son effet sur la déflexion de la plaque sandwich FG en fonction de différentes valeurs de l'indice matériel «  $k$  ».



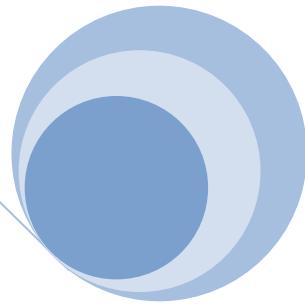
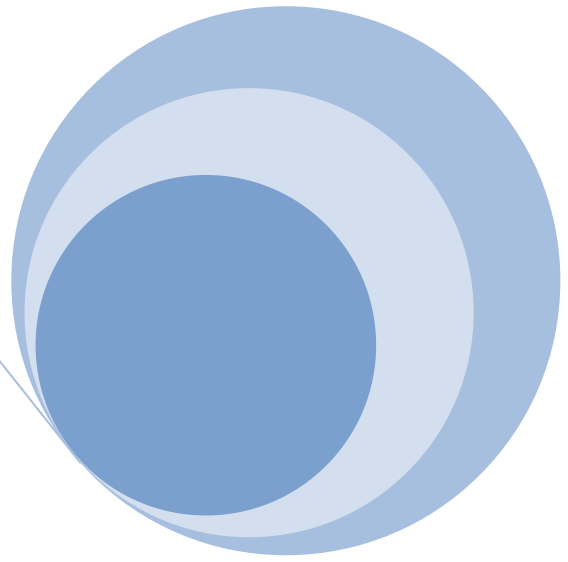
**Figure IV-4 :** Variation des contraintes et son effet sur l'épaisseur  $z$  de la poutre sandwich FG en fonction différents types de sandwich

On n'observe que à la figure (IV-3) l'augmentation de l'indice matériel  $k$  entraîne une démunie de la déflexion  $w$  de la poutre FGM sont en accord avec les résultats trouvé.

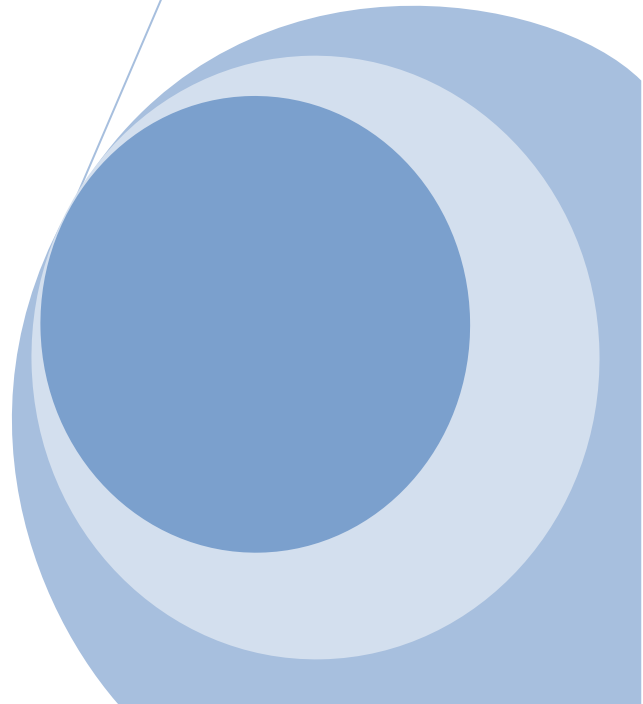
La figure (IV-4) exprime la variation de la contrainte et effet sur l'épaisseur  $z$  de poutre pour différents types de sandwich FGM reposant sur une fondation élastique linière et non linière. Les valeurs maximales des contraintes sont obtenues. On remarque que la courbe est symétrique, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus.

#### IV.5.Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné la déviation des poutres isolantes FGM en supposant que les propriétés des matériaux diffèrent avec l'épaisseur avec la distribution d'énergie (P-FGM). Nous avons analysé l'effet des fractions volumiques des matériaux de base (aluminium, céramique) selon différentes valeurs de l'indice «  $k$  » du matériau et différents types de sandwich. Les résultats numériques sont présentés avec différents états aux limites pour le faisceau.



## **Conclusion générale**





## V. Conclusion générale

Les matériaux à gradient fonctionnel représentent une avancée importante dans le domaine technologique et scientifique et ceci grâce à leurs caractéristiques révolutionnaires qui apportent des solutions efficaces aux problèmes de l'industrie moderne et en tenant compte de la diversité de leurs applications, ils représentent un domaine en constante évolution et des axes de recherche variés et très vastes. Le développement théorique pour l'analyse des poutres constitue lui aussi l'un des axes de recherche les plus importants des structures en plus des caractéristiques des matériaux FGM, il est indispensable de développer des théories adéquates permettant d'étudier les divers problèmes liés aux poutres en FGM avec une grande précision sous les différentes configurations géométriques, matérielles et chargements.

Dans cette étude, une solution numérique, a été développée, en utilisant la théorie de poutre. Cet élément est destiné à l'analyse des comportements géométriques et mécaniques des poutres en FGM. A travers une série d'applications en flexion, chargement, de géométrie et des conditions aux limites. Les résultats obtenus ont été comparés avec des solutions analytiques de références, et ceux obtenus par des modèles de sollicitations. Pour les analyses (statique) les exemples numériques montrent que les solutions numériques développées sont capables de donner d'excellents résultats.

En plus, on a montré à travers une étude paramétrique, l'effet de certains paramètres tels que le paramètre de matériau, le rapport  $L/h$ , sur la variation du déplacement transversal, les contraintes normales et de cisaillement, ainsi que les charges critiques d'une poutre FGM.

La validation de la théorie proposée est établie par comparaison de ses résultats avec d'autres théories de déformation de cisaillement issus de la littérature traitant du même sujet où une excellente adéquation et une très grande précision ont été observées.

L'infime différence présente pour les petites valeurs du rapport  $L/h$  n'affecte pas l'endroit où le faisceau est considéré comme épais, alors qu'en plus de négliger cet effet, de référence ont été développées en 2D

Après traitement des résultats donnés par le modèle en 2D utilisé, les conclusions suivantes ont pu être tirées :

- Comparaison entre les courbes présentées dans les différentes valeurs de l'indice de matériel  $k$  puisqu'il est compris entre 0,5 et 10. On constate qu'il existe une bonne relation entre les modèles utilisés pour la forme des courbes.
- La déflexion augmente avec augmentation de l'indice matériel  $k$  pour les types Structures des sandwichs poutres de sandwich FGM.
- Déflexion diminue lorsque l'indice matériel  $k$  a l'augmentation de poutre avec l'augmentation de la longueur.
- Les courbes est symétrique, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus.

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle classique pour calculer différentes formes de structures sandwich FGM sous la combinaison de différents types de charges (mécaniques, vibratoire) et de prendre en compte les changements des propriétés des matériaux composants avec la température. .

Suivez l'actualité du plan d'analyse numérique, et profitez de l'évolution rapide de la technologie pour mettre à jour les outils de simulation numérique utilisés pour simplifier et diversifier d'avantage, les outils d'investigation et de validation des résultats.

The page features a decorative graphic consisting of three blue circles of varying sizes, each with a darker blue center and a lighter blue outer ring. These circles are arranged vertically, with the largest at the top and bottom, and a smaller one in the middle. Two thin, light blue lines intersect at the center of the page, forming an 'X' shape that passes through the circles.

## **Référence Bibliographique**



### Référence

- [1]-IBNORACHIDM, Zakaria., BOUTAHAR, Lhoucine .et El BIKRI,. (2020). Free And Forced Vibration Of Fgm Beam Using Refined Method Including Stretchingjournal International De Recherche Avancée En Ingénierie Et Technologie (IJARET) Volume 11, Numéro 5, pp. 104-115, ID d'article : <http://www.iaeme.com/IJARET/issues.asp?JType=IJARET&VType=11&IType=5>
- [2]- DJEBLOUN, Youcef,. (2004). Etude de la rupture en mode I d'ouverture des matériaux composites. Mémoire de Magister. Université Mohamed Khider- Biskra. <http://thesis.univ-biskra.dz/1136/>
- [3]- cugnoni, J,. (2004). Identification par recalage modale et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites. Thèse de doctorat. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne-Suisse. [https://os.zhdk.cloud.switch.ch/tind-tmp-epfl/7b57f936-f922-4d87-9688-63e708f96205?response-content-disposition=attachment%3B%20filename%2A%3DUTF-8%27%27EPFL\\_TH3106.pdf&response-content-type=application%2Fpdf&AWSAccessKeyId=ded3589a13b4450889b2f728d54861a6&Expires=1654392979&Signature=UnV7mpSjTBIFGyZ9adLg9cf4ts%3D](https://os.zhdk.cloud.switch.ch/tind-tmp-epfl/7b57f936-f922-4d87-9688-63e708f96205?response-content-disposition=attachment%3B%20filename%2A%3DUTF-8%27%27EPFL_TH3106.pdf&response-content-type=application%2Fpdf&AWSAccessKeyId=ded3589a13b4450889b2f728d54861a6&Expires=1654392979&Signature=UnV7mpSjTBIFGyZ9adLg9cf4ts%3D)
- [4]- BENADOUDA, Mourad,. (2019). Etude Du Comportement Mecanique Des Structures Epaissees En Tenant Compte De L'effet De La Microstructure Fonctionnellement Gradue.These De Doctorat En Sciences Option : Structures & Matériaux.universite Djillali Liabes Sidi Bel Abbes <http://193.194.79.137/bitstream/123456789/2622/1/these.pdf>
- [5]-FEKRAR, Abdelkader,. (2015). Analyse Du Flambement Des Plaques Composites En Utilisant La Théorie A Ordre Elevé ,Thèse De Doctorat Université de SIDI BEL ABBES<http://rdoc.univ-sba.dz/handle/123456789/1607>
- [6]- HOUARI , MSA,. (2011). Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie, <http://rdoc.univ-sba.dz/bitstream/123456789/384/1/HOUARI%20Mohammed%20Sid%20Ahmed.pdf>
- [7]-HIRAI, T,. (1996).Functional gradient materials", Processing of ceramics—Part 2, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; p. 293–341. ,
- [8]- HAMZI, SOUAD,. (2021). Comportement Vibratoire Des Nanostructures Viscoélastiques En Composite Et Matériaux FGM.these de doctorat Spécialité : Génie Civiluniversité MUSTAPHA Stambouli Mascara<https://pp.bme.hu/ci/article/view/16010/8927>
- [9] -KOIZUMI, M,. (1997). FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21. Japan. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1359836896000169>
- [10]- Jin, X., Wu, L., Guo, L., Yu, H. and Sun, Y,. (2009). Experimental investigation of the mixed-mode crack propagation in ZrO<sub>2</sub>/NiCr functionally graded materials," Engineering Fracture Mechanics, vol. 76(12), pp.1800-1810. [https://www.researchgate.net/publication/245199836\\_Experimental\\_investigation\\_of\\_the\\_mixed-mode\\_crack\\_propagation\\_in\\_ZrO\\_2NiCr\\_functionally\\_graded\\_materials](https://www.researchgate.net/publication/245199836_Experimental_investigation_of_the_mixed-mode_crack_propagation_in_ZrO_2NiCr_functionally_graded_materials)

- [11]- TORII , S., Tanaka, S., Yano, T., Watanabe, Y., Trans, J., (2004).Phenomena, 6 189.
- [12]- Yeo , J., Jung, Y., Choi, S., (1998). Zirconia-stainless steel functionally graded material by tape casting J Europ. Ceram.Soci. 18 1281.  
[https://www.academia.edu/8819838/Zirconia\\_stainless-steel\\_continuous\\_functionally\\_graded\\_material](https://www.academia.edu/8819838/Zirconia_stainless-steel_continuous_functionally_graded_material)
- [13]- Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J. and Lee, S., (2001).Fabrication of ZrO<sub>2</sub>-NiCr functionally graded material by powder metallurgy Materials. Chemistry and Physics. 68(1-3):130-135.  
[https://www.researchgate.net/publication/222023114\\_Fabrication\\_of\\_ZrO2-NiCr\\_Functionally\\_Graded\\_Material\\_by\\_Powder\\_Metallurgy](https://www.researchgate.net/publication/222023114_Fabrication_of_ZrO2-NiCr_Functionally_Graded_Material_by_Powder_Metallurgy)
- [14]- Lostec, L., (1997). Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L. Thèse de Doctorat. Université de Limoges-France.
- [15]- MISTLER , R. E., ( 1973). high strength substrates produced by multiple layer casting technique ,Am .ceram. soc .bull ., vol .52 N°11 p850-54<https://doi.org/10.1177%2F002199839102500404>
- [16]-BOCH, P., (1986).Chartier . Huttepain. M Tapa casting of AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites.
- [17] -XIONG, H.P., Kawasaki, A., Kang, Y. S., and Watanabe, R.,(2005).Experimental Study of Heat Insulation Performance of Functionally Graded Metal / Ceramic Coatings and Their Behavior at High Surface Temperature,”Surf. Coat. Technol., vol.194, pp. 203–214.
- [18 ]-Aicha, BESSAIM., Mohammed , Sid Ahmed HOUARI., Abdelkader, MEGUENI., TOUNSI, Abdelouahed. , BEDIA, El Abbas ADDA., (2013). Analyse statique de la flexion des poutres ZrO<sub>2</sub>/ Ti-6Al-4V en P-FGM Revue « Nature & Technologie ». A- Sciences fondamentales et Engineering, n° 09/Juin Pages 28 à 36.
- [19]-MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO , R.,(1992) Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting, Materials Letters, , Vol. 14, p.333-35. [https://personal.icv.csic.es/ajsanchez/papersjavi/1992%20mat%20letter%201992%20\(FGMs\).pdf](https://personal.icv.csic.es/ajsanchez/papersjavi/1992%20mat%20letter%201992%20(FGMs).pdf)
- [20]- Birsan , M., Sadowski b , T., Marsavina , L., Linul , E., Pietras , D., (2012). Mechanical behavior of sandwich composite beams made of foams and functionally graded materials, International Journal of Solids and Structures 0020-7683/\$ - see front matter Elsevier Ltd. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.10.011>
- [21] -STEFFENS, H., DVORAK, D., WEWEL, M., (1990). Plasma Sprayed Functionally Gradient Materials-Processing And Application, In Proceeding Of The First International Symposium On Functionally Gradient Materials-Sendai Japan.
- [22]- BENBAKHTI , Abdeldjalil., (2017). Modélisation Du Comportement Thermomécanique Des Plaques Fgm (Functionally Graded Materials) These Présentée Pour Obtenir Le Diplome De Doctorat Lmd Specialite : Genie Mecanique Universite Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem <https://123dok.net/auth/v1/login>

- [23]- Marin, L., (2005). Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials," Int J Solids Struct, vol. 42, pp. 4338-4351. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0020768305000181>
- [24]- Matsuo, S., Watari, F., and Ohata, N., (2001). Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root," Dental Mater J, vol.20(4), pp. 257-274. [https://www.jstage.jst.go.jp/article/dmj1982/20/4/20\\_4\\_257/\\_pdf/-char/en](https://www.jstage.jst.go.jp/article/dmj1982/20/4/20_4_257/_pdf/-char/en)
- [25]- Lu, L., Chekroun, M., Abraham, O., Maupin, V. and Villain, G., (2011). Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer, NDT & E International, Volume 44, Issue 2, Pages 169-177. <https://www.infona.pl/resource/bwmeta1.element.elsevier-fe4d1752-43c0-3258-b869-56108c814327>
- [26]- EL-Wazery, M. S., EL-Desouky, A. R., (2015). A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials Mater. Environ. Sci. 6 (5) 1369-1376. ISSN: 2028-2508. [https://www.jmaterenvirosci.com/Document/vol6/vol6\\_N5/162-JMES-1428-2015-EL-Wazery.pdf](https://www.jmaterenvirosci.com/Document/vol6/vol6_N5/162-JMES-1428-2015-EL-Wazery.pdf)
- [27]- JIN, Z. H., Batra, R. C., (1996). Journal of Thermal Stresses 19, 317–339. [https://www.researchgate.net/profile/Rc-Batra/publication/255668594\\_Stress\\_Intensity\\_Relaxation\\_at\\_the\\_Tip\\_of\\_an\\_Edge\\_Crack\\_in\\_a\\_Functionally\\_Graded\\_Materials\\_Subjected\\_to\\_a\\_Thermal\\_Shock/links/0a85e535e692e41ad4000000/Stress-Intensity-Relaxation-at-the-Tip-of-an-Edge-Crack-in-a-Functionally-Graded-Materials-Subjected-to-a-Thermal-Shock.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Rc-Batra/publication/255668594_Stress_Intensity_Relaxation_at_the_Tip_of_an_Edge_Crack_in_a_Functionally_Graded_Materials_Subjected_to_a_Thermal_Shock/links/0a85e535e692e41ad4000000/Stress-Intensity-Relaxation-at-the-Tip-of-an-Edge-Crack-in-a-Functionally-Graded-Materials-Subjected-to-a-Thermal-Shock.pdf)
- [28]- Ziou, H., Guenfoud, H.M., (2016). Guenfoud Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. International Journal of Structural Engineering; 7(3), 239-261. [https://www.researchgate.net/publication/305336401\\_Numerical\\_modelling\\_of\\_a\\_Timoshenko\\_FGM\\_beam\\_using\\_the\\_finite\\_element\\_method](https://www.researchgate.net/publication/305336401_Numerical_modelling_of_a_Timoshenko_FGM_beam_using_the_finite_element_method)
- [29]-AIT, Taleb., (2016). Analyse du comportement des poutres non – homogènes renforcées par des plaques composites thèse de doctorat université mouloud mammeri de tizi ouzou. <https://www.ummo.dz/dspace/handle/ummo/1226>
- [30]- BAO, G., WANG, L., (1995). Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002076839400267Z>
- [31]-DELALE, F., ERDOGAN, F., (1983). The crack problem for a non homogeneous panel. ASME « Journal of Applied Mechanics »; 50 (3): 609-614.
- [32] -NAROTTAM, P., Bansal., Jitendra, P., Singh, Jacques Lamon., Sung R, Choi., (2011). Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; John Wiley & Sons; page 110. [https://www.academia.edu/43209847/Contribution\\_%C3%A0\\_l\\_%C3%A9tude\\_des\\_mat%C3%A9riaux\\_%C3%A0\\_gradient\\_de\\_propri%C3%A9t%C3%A9s\\_fonctionnelles\\_F\\_G\\_M](https://www.academia.edu/43209847/Contribution_%C3%A0_l_%C3%A9tude_des_mat%C3%A9riaux_%C3%A0_gradient_de_propri%C3%A9t%C3%A9s_fonctionnelles_F_G_M)

- [33]- BELAROUCI, Abdelghani,. (2021). Etude Comparative Du Comportement Des Plaques Epaissees P-FGM et S-FGM.These Doctorat En Sciences Specialite : Genie Civiluniversité Djillali Liabessidi Bel Abbas.  
[2021http://193.194.79.137/bitstream/123456789/3495/1/DS\\_GC\\_BELAROUCI\\_ABDELGHANI.pdf](http://193.194.79.137/bitstream/123456789/3495/1/DS_GC_BELAROUCI_ABDELGHANI.pdf)
- [34]- AISSANI, Khadidja,. (2017). Etude du comportement mécanique des macros et nano structures sur des fondations élastiques, Thèse Docteur de l'Université Université DJILLALI Liabes sidi bel abbes. <https://www.theses-algerie.com/1777374871184270/these-de-doctorat/universite-djillali-liabes-sidi-bel-abbes/etude-du-comportement-mecanique-des-macros-et-nano-structures-sur-des-fondations-elastiques>
- [35] -REISSNER, E,. (1945).The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates .Journal Of Applied Mechanics, A69-A77.
- [36] - Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. and Tong, P,. (2002). Couple ?stress based strain gradient theory for elasticity], Int. J. Solid. Struct.,39, 2731.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S002076830200152X>
- [37] -Timoshenko, S. P. and Gere, J. M,. (1972).Mechanics of Materials. van Nordstrand ReinholdCompany. New York.
- [38]- Murthy, M. V. V,. (1981). An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates. <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19820003615/downloads/19820003615.pdf>
- [39] -Chi, Shyang-Ho., and Yen-Ling , Chung,. (2006) .Mechanical Behavior Of Functionally Graded Material Plates Under Transverse Load—Part I: Analysis". International Journal Of Solids And Structures 43 (13): 3657-3674. doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.04.011.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768305002052>
- [40]-Nguyen, Viet Tung,. ( 2004). Modélisation Globale Et Locale Des Structures Multicouches Par Éléments Finis Des Plaques". Doctoral dissertation, Ecole des Ponts ParisTech. <https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00001003/file/maitre.pdf>
- [41] -Lo, K. H., Christensen, R. M. and Wu, E. M,. (1977). A High-Order Theory Of Plate Deformation— Part 1: Homogeneous Plates ;Journal Of Applied Mechanics 44 (4): 663. doi:10.1115/1.3424154.  
<https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article/45/3/702/422865/Discussion-A-High-Order-Theory-of-Plate>
- [42]-Ambartsumyan, S. A,.( 1969).Basic equations and relations in the theory of anisotropic bodies with different moduli in tension and compression". Inzh. Zhur. MTT, 3, 51-61.
- [43]-Aydogdu, M,. (2005). Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method". International Journal of Mechanical Sciences, 47(11), 1740-1755. doi:10.1016. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2005.06.010>
- [44] -Levinson, M,. (1980). An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates". Mechanics Research Communications;7(6), 343-350. doi:10.1016/0093-6413(80)90049-x. <https://www.sciencedirect.com/sdfe/pdf/download/eid/1-s2.0-009364138090049X/first-page-pdf>

- [45]- Reddy, J. N., (1984). A Simple Higher-Order Theory For Laminated Composite Plates". *Journal Of Applied Mechanics* 51 (4): 745. doi:10.1115/1.3167719.  
<https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-abstract/51/4/745/422977/A-Simple-Higher-Order-Theory-for-Laminated?redirectedFrom=fulltext>
- [46] -Touratier, M., (1991). An Efficient Standard Plate Theory". *International Journal Of Engineering Science* 29(8): 901-916. doi:10.1016/0020-7225(91)90165-y.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/002072259190165Y>
- [47] -El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda Bedia E. A., (2011). A New Hyperbolic Shear Deformation Theory for Buckling and Vibration of Functionally Graded Sandwich Plate, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, no. 4, pp. 237–247.  
<https://www.infona.pl/resource/bwmeta1.element.elsevier-0c0e00b6-6c0d-3de9-9787-e471464c1e49>
- [48] -Reddy, J.N. and Cheng, Z. Q., (2001). Three-Dimensional Thermomechanical Deformations Of Functionally Graded Rectangular Plates". *European Journal Of Mechanics - A/Solids*. 20(5): 841-855.doi:10.1016/s0997-7538(01)01174-3.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0997753801011743>
- [49] -Zenkour, AM., (2006). Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model*.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X0500048X>
- [50]-Zenkour , A.M., (2009). The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *Int J Mech Sci*; 51(11–12):869–80. <https://www.infona.pl/resource/bwmeta1.element.elsevier-e060a9f6-4242-35e1-8a50-55c822644e3e>
- [51]- Akavci , S.S., (2007). Buckling and free vibration analysis of symmetric and anti-symmetric laminated composite plates on an elastic foundation. *J Reinf Plast Compos*; 26(18):1907–19. <https://doi.org/10.1177%2F0731684407081766>
- [52]- Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Ait Atmane , H., Adda Bedia , EA., (2010). Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Mech Compos Mater*; 46(4):425–34.  
[https://www.researchgate.net/publication/226015879\\_Bending\\_of\\_thick\\_functionally\\_graded\\_plates\\_resting\\_on\\_Winkler-Pasternak\\_elastic\\_foundations/citation/download](https://www.researchgate.net/publication/226015879_Bending_of_thick_functionally_graded_plates_resting_on_Winkler-Pasternak_elastic_foundations/citation/download)
- [53]-Thanh Trung, Tran., (2019). Bending and thermal buckling of unsymmetric functionally graded sandwich beams in high-temperature environment based on a new third-order sheared deformation theory, *Journal of Sandwich Structures & Materials*;0(0) 1–25,doi.org/10.1177/1099636219849268
- [54]-Osofero, AI., Vo, TP and Thai, H.T., (2014). Bending behavior of functionally graded sandwich beams using a Quasi-3D Hyperbolic shear deformation theory. *J Eng Res*; 19: 1–19.  
[https://www.researchgate.net/profile/Pham-Vinh-5/publication/353449452\\_Static\\_bending\\_analysis\\_of\\_functionally\\_graded\\_sandwich\\_beams\\_using\\_a\\_novel\\_mixed\\_beam\\_element\\_based\\_on\\_first-order\\_shear\\_deformation\\_theory/links/61051b1c1ca20f6f86ed9ec2/Static-bending-analysis-of-functionally-graded-sandwich-beams-using-a-novel-mixed-beam-element-based-on-first-order-shear-deformation-theory.pdf?origin=publication\\_detail](https://www.researchgate.net/profile/Pham-Vinh-5/publication/353449452_Static_bending_analysis_of_functionally_graded_sandwich_beams_using_a_novel_mixed_beam_element_based_on_first-order_shear_deformation_theory/links/61051b1c1ca20f6f86ed9ec2/Static-bending-analysis-of-functionally-graded-sandwich-beams-using-a-novel-mixed-beam-element-based-on-first-order-shear-deformation-theory.pdf?origin=publication_detail)

[55]- Xian-Fang, Li., Bao-Lin, Wang ., Jie-Cai, Han,.(2010). A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams. Arch Appl Mech) 80: 1197–1212  
DOI 10.1007/s00419-010-0435-6 <https://sci-hub.se/10.1007/s00419-010-0435-6>

[56] Latifa, Ould Larbi., Lazreg, Hadji. Mohamed., Ait, Amar Meziane. and E.A. Adda Bedia,.( 2018). An analytical solution for free vibration of functionally graded beam using a simple first-order shear deformation theory. Volume 27,, pages 247-254  
DOI: <https://doi.org/10.12989/was.2018.27.4.247>

[57]- Abdelbaki Chikh a,. (2019). Analysis of static behaviour of a P-FGM beamjournal of materials and engineering structures 6 513–524  
<https://revue.ummo.dz/index.php/JMES/article/download/2062/pdf>

## Résumé

### **Analyse du comportement mécanique des poutres sandwich composites avancées FGM**

Cette étude tente d'étudier l'impact des propriétés géométriques et mécaniques sur le comportement en flexion des poutres sandwich FG simplement supportées selon une théorie de déformation de cisaillement raffinée. Les caractéristiques des matériaux sont considérées comme variant progressivement et continûment selon une distribution en loi de puissance en termes de fractions volumiques des matériaux constitutifs. En utilisant le modèle analytique développé actuellement et la technique de résolution de Navier, les résultats numériques des contraintes et des déplacements non dimensionnels sont calculés et comparés à ceux obtenus par d'autres théories 2D. De plus, le présent modèle analytique est approprié pour étudier la flexion statique de poutres sandwich FG simplement supportées exposées à des charges mécaniques intenses utilisées pour des applications techniques spéciales dans les constructions aérospatiales, automobiles et de génie civil.

**Mots clés:** matériaux-fonctionnellement-gradués, faisceau P-FGM, la solution de Navier, comportement en flexion charge uniforme

ملخص:

### تحليل السلوك الميكانيكي لعوارض الساندويتش المركبة المتدرجة وظيفيًا للمواد المتقدمة

تحاول هذه الدراسة التحقيق في تأثير الخصائص الهندسية والميكانيكية على سلوك الانحناء لحزم ساندويتش المواد المتدرجة وظيفيًا المدعومة ببساطة وفقًا لنظرية تشوه القص المكررة. تعتبر خصائص المواد متغيرة تدريجيًا ومستمرًا وفقًا لتوزيع قانون القوة من حيث الكسور الحجمية للمواد المكونة. باستخدام النموذج التحليلي المطور حاليًا وتقنية للحل نافير ، يتم حساب النتائج العددية للضغوط غير الأبعاد والتهجير ومقارنتها مع تلك التي تم الحصول عليها بواسطة نظريات ثنائية الأبعاد أخرى. علاوة على ذلك ، يعد النموذج التحليلي الحالي مناسبًا لدراسة الانحراف الثابت لحزم ساندويتش المواد المتدرجة وظيفيًا المدعومة ببساطة والمعرضة لأحمال ميكانيكية مكثفة تستخدم للتطبيقات الهندسية الخاصة في صناعة الطيران والإنشاءات والهندسة المدنية.

**الكلمات المفتاحية:** المواد المتدرجة وظيفيًا ، شعاع قانون القوة المواد المتدرجة وظيفيًا ، حل نافير ، سلوك الانحناء الموحد

### Abstract

#### **Analysis of the mechanical behaviour of FGM advanced composite sandwich beams**

This study attempts to investigate the impact of geometric and mechanical properties on the bending behaviour of simply supported FG sandwich beams according to a refined shear deformation theory. The characteristics of the materials are considered to vary gradually and continuously according to a power-law distribution in terms of volume fractions of the constituent materials. Using the currently developed analytical model and the Navier solving technique, the numerical results of the non-dimensional stresses and displacements are calculated and compared with those obtained by other 2D theories. Moreover, the present analytical model is suitable to study the static deflection of simply supported FG sandwich beams exposed to intense mechanical loads used for special engineering applications in aerospace, automotive and civil engineering constructions.

**Keywords:** functionally-graded-materials, P-FGM beam, Navier's solution, uniform-loaded bending behaviour