



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABBES LAGHROUR KHENCHELA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE



Département de Mathématiques et Informatiques

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques Appliquées

Contrôlabilité des systèmes linéaires de dimension infinie soumis à une certaine classe de perturbations

Réalisé par : **Cherraben Ahlem**
Ghaoui Amira

Membres de jury :

Dirigé par : **M.a Merghad Amel**

M.a.Président : **Djabara Lamia**
M.a.Examineur : **Hakkar Naima**

Présenté le 24/06/2018



Remerciement

Avant tout propose, on remercie « **ALLAH** » le tout puissant, de nous avoir données la patience, le courage et la volonté pour réaliser ce travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements et notre profonde gratitude à *Mme. Merghad Amel* de nous avoir encadré dans notre mémoire de fin d'étude, pour son aide, ses conseils, son encouragement, et sa disponibilité dans ce projet.

Nous remercions également l'ensemble des membres du jury *Mme. Djabara Lamia* et *Mme. Hakkar Naima* pour avoir consacré leur temps à examiner ce travail et nous leur respectons pour l'attention qu'ils ont portée à notre travail.

Un gros merci également à nos familles pour leurs soutiens aussi bien moral que nous financier et pour leurs sacrifices.

Finalement, nous remercions tous ce qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci à tous

Cherraben Ahlem et Ghaoui Amira

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mes chères parents ma mère *Cherrab Houria* et mon père *Cherraben Tayeb* pour leurs patience, leurs amour, leurs soutien et leurs encouragements.

A mes chères sœurs *Amira* et *Lamia*

A mon cher frère *Aymen*, A mon ange *Nourcine* et mes princesses *Milina, Ines, Lamis et Maria*

A mes cousines *Sara, Imen, Khacoula, Foula*

A mon encadreur *Mme. Merghad Amel*

A mon binôme *Ghaoui Amira*, mes amis *Mimi, Hanadi, Meryem, Ahlem, Besma, khmissi, Hichem, Khouloud.*

Sans oublier tout les professeurs que ce soit de primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

Cherraben Ahlem



Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mes chères parents ma mère Ghaoui Nassira et mon père Ghaoui Ammar pour leurs patience, leurs amour, leurs soutien et leurs encouragements.

A mes sœurs Ahlem, Hanan, Douaa et Yousra, mes chers frères Sadek et Tarek .

A ma princesse Ranim et mon mari Abbassi Boubakeur,

A mon encadreur Mme. Merghad Amel

A mon binôme Cherraben Ahlem, mon amie Hanadi

Je voudrai aussi dédie ce travail a ma promotion de 2017/2018, et a mes enseignants de mathématique, A toute personne que j'aime ou qui m'aime.

Ghaoui Amira

Table des matières

Introduction	3
1 Contrôlabilité des systèmes linéaires en dimension infini	5
1.1 Semi-Groupes	5
1.2 L'espace $L^2(0, T; H)$	6
1.3 Caractérisation de la contrôlabilité exacte	8
2 Contrôlabilité robuste des systèmes linéaires de dimension infinie	16
2.1 Principaux résultats	20
3 Application	22
Bibliographie	25

Notations

- X : Espace de Banach.
- H, U : Espaces de Hilbert.
- $\dot{x}$: Dérivée partielle par rapport à t .
- A : Un opérateur linéaire.
- A^* : Opérateur adjoint de A .
- A^{-1} : Opérateur inverse de A .
- ImA : L'image de A .
- $\ker A$: Le noyau de A .
- $R(., A)$: La résolvante de A .
- $\mathcal{L}(E, F)$: L'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F .
- $\{S(t)\}_{t \geq 0}$: Une famille des opérateurs linéaires continues sur H .
- $D(A)$: Domaine de définition de A .

Introduction

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité robuste d'un système linéaire de dimension infinie.

La notion de la contrôlabilité est d'une grande importance dans la théorie du contrôle ; c'est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. De nombreux problèmes fondamentaux de la théorie du contrôle ne peuvent être résolus que sous l'hypothèse que le système soit contrôlable. Il s'agit d'imposer à un système un comportement souhaité par exemple dans notre cas amener un système d'un certain état initial à une sortie désirée en respectant éventuellement certains critères.

Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'un contrôle ou d'une commande.

Dans l'étudier de la contrôlabilité, nous choisissons un modèle simple englobant une large classe des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

La notion de contrôlabilité, qui est fondamentale en théorie du contrôle, est parfois insuffisante dans la pratique : on désire en plus souvent une certaine robustesse.

On peut le comprendre facilement avec l'expérience du balai qu'on essaie de faire tenir en équilibre sur un doigt. on se convainc facilement que, partant d'une position du balai arbitraire, on peut amener le balai à la verticale avec une vitesse nulle, il suffit ensuite de ne pas bouger le doigt et le problème est résolu.

Malheureusement c'est impossible à réaliser dans la pratique : le balai ne sera pas exactement à la verticale et la vitesse ne sera pas exactement nulle et donc, si on arrête de bouger le doigt le balai va tomber. En fait pour éviter que le balai ne tombe, on bouge le doigt en fonction de la position du balai et de sa vitesse : on applique au système un contrôle $u(.)$ qui dépend de l'état x du système.

Alors un problème important dans la théorie du contrôle est de fournir une robustesse au système qui sont exposé à des perturbations.

Chapitre 1

Contrôlabilité des systèmes linéaires en dimension infini

Rappels mathématique

1.1 Semi-Groupes

Soit X un espace de Banach réel ou complexe muni de la norme $x \longrightarrow \|x\|_X$, on désigne par $\mathcal{L}(X)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans lui même, $\mathcal{L}(X)$ est un espace de Banach pour la norme $T \longrightarrow \|T\|$ définie par :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_X = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X}$$

Définition 1.1.1 Une famille $\{S(t)_{t \geq 0}\}$ d'éléments $\{S(t)\} \in \mathcal{L}(X)$ forme un Semi-groupe de classe C_0 dans X (on dit aussi fortement continu), si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $S(0) = I$ (identité dans $\mathcal{L}(X)$).
2. $S(t+s) = S(t)S(s), \forall s, t \geq 0$.
3. $\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\|_X = 0, \quad \forall x \in X$.

Remarque 1.1.1 Comme $t+s = s+t$, on a $S(t+s) = S(s+t) = S(t)S(s) = S(s)S(t)$.
Donc les opérateurs d'un Semi-groupe sont commutent.

Définition 1.1.2 On appelle *générateur infinitésimal* d'un Semi-groupe $\{S(t)_{t \geq 0}\}$, l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \end{aligned}$$

Quand cette limite existe, le domaine de l'opérateur A est défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \text{ existe} \right\}$$

Le générateur infinitésimal de $\{S^*(t)_{t \geq 0}\}$ est $(A^*, D(A^*))$.

Proposition 1.1.1 Si $\{S(t)_{t \geq 0}\}$ est un Semi-groupe dans X , alors $\{S^*(t)_{t \geq 0}\}$ est aussi un Semi-groupe dans X .

Proposition 1.1.2 (estimation a priori) Soit $\{S(t)_{t \geq 0}\}$ un Semi-groupe C_0 sur X , $\exists M > 0$ et $\omega > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad (*)$$

La borne inférieure ω_0 de l'ensemble ω vérifiant $(*)$ est appelée le type du semi-groupe $\{S(t)_{t \geq 0}\}$.

1.2 L'espace $L^2(0, T; H)$

Soit H un espace de Hilbert muni de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et la norme $\|\cdot\|_H$. On note par $L^2(0, T; H)$

$$L^2(0, T; H) = \left\{ u :]0, T[\longrightarrow H, \text{ tel que } \int_0^T \|u\|_H^2 dt < \infty \right\}$$

$L^2(0, T; H)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(0, T; H)}$ et la norme $\|\cdot\|_{L^2(0, T; H)}$ définis par :

$$\forall u, v \in L^2(0, T; H) : \langle u, v \rangle_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T \langle u, v \rangle_H dt$$

$$\forall u \in L^2(0, T; H) : \|u\|_{L^2(0, T; H)} = \sqrt{\int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt}$$

Un modèle simple englobant une large classe des systèmes gouvernés par équations aux dérivées partielles est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \text{si } t \in]0, T[\\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{K})$$

où A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe dans un espace de Hilbert H , A fournit la dynamique du système.

$B \in \mathcal{L}(U, H)$ où U est aussi un espace de Hilbert, B excite le système, pour modifier l'état x est appelé l'état du système, u est la fonction du contrôle ou le contrôle qu'on suppose qu'il appartient à $L^2(0, T; U)$.

H est appelé l'espace d'état, U l'espace des contrôles.

Si A est auto-adjoint à résolvante compacte alors le système (K) admet une solution faible unique fortement continue sur $[0, T]$ est donnée par :

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds$$

Le problème de la contrôlabilité consiste en la possibilité de transférer l'état d'un système en un temps fini, d'un état initial vers un état désiré choisi a priori. On va introduire la notion de l'exacte contrôlabilité.

Définition 1.2.1 On dit que le système linéaire $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable si, étant donné deux états du système c'est-à-dire deux points x_0 et x_d de H , et étant donné un temps $T > 0$ il existe une fonction $u(\cdot) \in L^2(0, T; U)$ qui permet de passer de x_0 à x_d au bout du temps T , ce qui signifie que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \text{si } t \in]0, T[\\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{K})$$

qui vérifie :

$$\forall x_d, x_0 \in H, \exists u \in L^2(0, T; U) : \text{ tel que } x(T) = x_d$$

A partir de cette définition, on peut déduire diverses caractérisation de la contrôlabilité exacte.

1.3 Caractérisation de la contrôlabilité exacte

On introduit les opérateurs :

- L_T est l'opérateur de contrôlabilité

$$\begin{aligned} L_T : L^2(0, T; U) &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds \end{aligned}$$

- Q_T est le gramien de contrôlabilité

$$Q_T = L_T L_T^*$$

Théorème 1.3.1 Les opérateurs L_T et Q_T vérifient les propriétés suivantes :

1. L_T est un opérateur linéaire borné ($L_T \in \mathcal{L}(L^2(0, T; U), H)$).
2. $(L_T^* x)(s) = B^* S^*(T-s)x$ pour tout $s \in [0, T]$.
3. Q_T est un opérateur linéaire borné : $Q_T \in \mathcal{L}(H)$

et

$$Q_T x = \int_0^T S(T-s)BB^*S^*(T-s)x ds, \quad x \in H$$

Preuve

1. • L_T linéaire

Soit $u, v \in U$, Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on va montrer que : $L_T(u + \alpha v) = L_T(u) + \alpha L_T(v)$

$$\begin{aligned}
 L_T(u + \alpha v) &= \int_0^T S(T-s)B(u + \alpha v)(s)ds \\
 &= \int_0^T S(T-s)(Bu + \alpha Bv)(s)ds \\
 &= \int_0^T S(T-s)Bu(s) + \alpha \int_0^T S(T-s)Bv(s)ds \\
 &= L_T(u) + \alpha L_T(v)
 \end{aligned}$$

• L_T bornée

$$\begin{aligned}
 \|L_T(u)\|_H &= \left\| \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds \right\|_H \\
 &\leq \int_0^T \|S(T-s)Bu(s)\|_H ds \\
 &\leq \int_0^T \|S(T-s)\|_{\mathcal{L}(H)} \|B\|_{\mathcal{L}(U,H)} \|u(s)\|_U ds \\
 \text{pour } \omega > \omega_0 & \\
 &\leq \int_0^T M e^{\omega(T-s)} \|B\|_{\mathcal{L}(U,H)} \|u(s)\|_U ds \\
 &\leq M \|B\|_{\mathcal{L}(U,H)} \int_0^T e^{\omega(T-s)} \|u(s)\|_U ds \\
 &\leq M \|B\|_{\mathcal{L}(U,H)} \left(\int_0^T e^{2\omega s} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u(s)\|_U^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

On a utilisé Cauchy-Schwarz et un changement de variable

$$\leq M \|B\|_{\mathcal{L}(U,H)} \left(\frac{e^{2\omega T} - 1}{2\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(0,T;U)}$$

d'où L_T est linéaire et borné.

2. Déterminons L_T^*

$$\begin{aligned}
 \langle u, L_T^* x \rangle_{L^2(0,T;U)} &= \langle L_T u, x \rangle_H \\
 &= \left\langle \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds, x \right\rangle_H \\
 &= \int_0^T \langle S(T-s)Bu(s), x \rangle_H ds \\
 &= \int_0^T \langle u(s), B^*S^*(T-s)x \rangle_U ds \\
 &= \langle u(s), B^*S^*(T-s)x \rangle_{L^2(0,T;U)}
 \end{aligned}$$

Alors $L_T^* x = B^*S^*(T - \cdot)x$.

3. $Q_T = L_T L_T^*$

$L_T L_T^*$ sont des opérateurs bornés, Alors Q_T est borné.

De la définition de Q_T , il résulte :

$$Q_T x = \int_0^T S(T-s)BB^*S^*(T-s)x ds$$

□

Proposition 1.3.1 (Caractérisation de l'exacte contrôlabilité) *Le système (K) est exactement contrôlable si et seulement si L_T est surjectif.*

Preuve Supposons que le système (K) est exactement contrôlable sur $[0, T]$ et on montre que L_T est surjectif.

Soit $x_d \in H$, on a aussi $x_d + S(T)x_0 \in H$, Alors $\exists u \in L^2(0, T; U)$ tel que

$$x_d + S(T)x_0 = x(t)$$

donc

$$x_d + S(T)x_0 = S(T)x_0 + \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds$$

d'où

$$x_d = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds$$

Alors L_T est surjectif.

Supposons maintenant que L_T est surjectif et on montre que (K) est exactement contrôlable. Soit $x_d \in H$, Alors $x_d - S(T)x_0 \in H$, Comme L_T est surjectif, Alors il existe $u \in L^2(0, T; U)$ tel que

$$\begin{aligned} x_d S(T)x_0 &= L_T u \\ \text{d'où} \quad x_d &= S(T)x_0 + L_T u \end{aligned}$$

et par conséquent (K) est exactement contrôlable sur $[0, T]$ □

Lemme 1.3.1 *Soit H un espace de Hilbert, Si $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ et A positif, auto adjoint et coercive (c-à-d $\exists \alpha > 0, \langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|, \forall x \in H$), alors A est continument inversible (c-à-d A^{-1} existe, borné et défini sur H tout entier ($D(A^{-1}) = H$), $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$).*

Maintenant, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes de la contrôlabilité exacte du système (K)

Lemme 1.3.2 *Si A est un opérateur linéaire fermé de l'espace de Banach X dans un espace de Banach Y et si A admet un inverse A^{-1} , alors A^{-1} est un élément de $\mathcal{L}(X, Y)$ si et seulement si :*

$$D(A^{-1}) = \text{Im} A$$

Théorème 1.3.2 *Le système (K) est exactement contrôlable sur $[0, T]$ si et seulement si pour un certain $\gamma > 0$ et pour tout $z \in H$ une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. $\langle Q_T z, z \rangle \geq \gamma^2 \|z\|_H^2$
2. $\|L_T^* z\|_{L^2(0, T; U)}^2 = \int_0^T \|(L_T^* z)(s)\|_U^2 ds \geq \gamma^2 \|z\|_H^2$
3. $\int_0^T \|B^* S^*(s) z\|_U^2 ds \geq \gamma^2 \|z\|_H^2$
4. $\text{Ker} L_T^* = 0$ et $\text{Im} L_T^*$ est fermé

Preuve Premièrement on va montrer l'équivalence entre les quatres conditions, ensuite on montera l'équivalence entre l'exacte contrôlabilité de (K) et une de ces conditions.

L'équivalence entre (2) et (3) découle du théorème 1.3.1

Depuis qui nous avons :

$$L_T^* = B^* S^*(T - \cdot)$$

d'autre part :

Comme $Q_T = L_T L_T^*$ (par définition)

Alors :

$$\begin{aligned}\langle Q_T z, z \rangle &= \langle L_T (L_T^*) z, z \rangle \\ &= \langle L_T^* z, L_T^* z \rangle \\ &= \|L_T^* z\|_{L^2(0,T;U)}^2\end{aligned}$$

Il en résulte :

$$[\exists \alpha > 0, \forall z \in H, \langle Q_T z, z \rangle \geq \gamma^2 \|z\|_H^2] \iff [\exists \alpha > 0, \forall z \in H, \|L_T^* z\|_{L^2(0,T;U)}^2 \geq \gamma^2 \|z\|_H^2]$$

d'où l'équivalence entre les affirmations (1),(2) et (3). Il reste à prouver l'équivalence de ceux-ci avec l'affirmation (4). On va montrer que (2) implique (4), puis (4) implique (2).

$2 \Rightarrow 4$ Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\text{pour tout } z \in H, \text{ on a } \|L_T^* z\|_{L^2(0,T;U)}^2 \geq \alpha^2 \|z\|_H^2$$

Si

$$z \in \ker L_T^* \iff L_T^* z = 0 \iff \|L_T^* z\| = 0 \Rightarrow \|z\| = 0 \iff z = 0$$

donc $\ker L_T^* = 0$

Pour montrer que $Im L_T^*$ est fermé, on prend une suite $(L_T^* z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $Im L_T^*$ qui converge dans $L^2(0, T; U)$ et montrons que la limite est un élément de $Im L_T^*$

$$\begin{aligned}(L_T^* z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} &\implies (L_T^* z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} \\ &\implies (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est de Cauchy}\end{aligned}$$

En effet

$$\|z_p - z_q\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L_T^* z_p - L_T^* z_q\|$$

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H qui est de Hilbert.

Alors

$$\exists z \in H \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$$

et de la continuité de l'opérateur L_T^* et de l'unicité de la limite, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_T^* z_n = L_T^* z$$

Ce qui signifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_T^* z_n \in \text{Im} L_T^*$$

Maintenant montrons l'inverse :

$4 \Rightarrow 2$

Supposons que $\ker L_T^* = 0$ et $\text{Im} L_T^*$ est fermé, alors L_T^* admet un inverse défini sur $\text{Im} L_T^*$ qui est borné sur son domaine de définition d'après le lemme 1.3.2 , alors

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad \|(L_T^*)^{-1}u\| \leq M\|u\|, \quad \text{pour tout} \quad u \in \text{Im} L_T^*$$

Substituons $(L_T^*)^{-1}u$ par z :

$$\begin{aligned} \|z\| &\leq M\|L_T^* z\| \\ \text{d'où} \quad \|L_T^* z\| &\geq \frac{1}{M}\|z\| \end{aligned}$$

Maintenant montrer que si l'affirmation (1) est vérifiée alors le système est exactement contrôlable.

Supposons que :

$$\forall z \in H, \langle Q_T z, z \rangle \geq \gamma \|z\|^2$$

d'après le lemme 1.3.1 Q_T est continuement inversible.

Et comme

$$\text{Im} Q_T = D(Q_T^{-1}) = H \quad \text{et} \quad \text{Im} Q_T \subset \text{Im} L_T$$

Alors

$$\text{Im} Q_T = H$$

d'où (K) est exactement contrôlable sur $[0, T]$.

Inversement, nous montrons que l'exacte contrôlabilité implique l'affirmation (2), supposons que (K) est exactement contrôlable sur $[0, T]$, alors $\text{Im} L_T = H$

Supposons que L_T est injective, il résulte que $(L_T)^{-1} \in \mathcal{L}(H, L^2(0, T; U))$

(En vertu du Théorème de Banach et ensuite : $(L_T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(0, T; U), H)$)

c'est-à-dire

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que : } \|(L_T^*)^{-1}u\|_H \leq \beta \|u\|_2, \forall u \in L^2(0, T; U)$$

Avec $z = (L_T^*)^{-1}u$ on obtient :

$$\|z\| \leq \beta \|L_T^* z\|$$

Pour le cas général, on pose $X = (\ker L_T)^\perp$

Puisque L_T est un opérateur linéaire continu alors $\ker L_T$ est fermé, d'où $L^2(0, T; U)$ se décomposer en somme directe

$$L^2(0, T; U) = (\ker L_T) \bigoplus (\ker L_T)^\perp$$

Prenons $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_2$, $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace de Hilbert.

On définit :

$$\hat{L}_T u = L_T u$$

Donc $\hat{L}_T u$ est bijective de X sur H , En effet si

$$\begin{aligned} \hat{L}_T u_1 &= \hat{L}_T u_2 \text{ (avec } u_1 \neq u_2) \\ &= u_1 - u_2 \in \ker L_T \text{ contradiction} \end{aligned}$$

$$\ker L_T \cap X = \{0\}$$

Il en résulte que : $\exists \beta > 0$ tel que $\forall z \in H$, on a

$$\begin{aligned} \beta \|\hat{L}_T^* z\|_X &\geq \|z\|_H \\ \|\hat{L}_T^* z\|_X &= \sup_{u \in X} \langle u, \hat{L}_T^* z \rangle \\ &= \sup_{u \in X} \langle \hat{L}_T u, z \rangle \\ &= \sup_{u \in X} \langle L_T u, z \rangle \\ \text{car } \hat{L}_T z &= L_T z \\ &= \sup_{u \in L^2(0, T; U)} \langle L_T u, z \rangle \\ &= \|L_T^* z\|_{L^2(0, T; U)} \end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$\|L_T^* z\|_{L^2(0, T; U)} = \|\hat{L}_T^* z\|_X \geq \frac{1}{\beta} \|z\|_H$$

□

Théorème 1.3.3 Soit Z et H deux espaces de Hilbert, et $L_T \in \mathcal{L}(Z, H)$, Alors les énoncés suivants sont équivalents :

- $Im(L_T) = H$
- $\exists \gamma > 0$ tel que :

$$\gamma \|L_T^* z\|_H \geq \|z\|_Z$$

Preuve Est une conséquence du théorème 1.3.2 et de la proposition 1.3.1. □

Corollaire 1.3.1 Si $\gamma > 0$, pour tout $S \in \mathcal{L}(Z, H)$ avec $\|L_T - S\| < \frac{1}{\gamma}$
Alors

$$Im(S) = H$$

Preuve puisque

$$\|L_T - S\| = \|L_T^* - S^*\| < \frac{1}{\gamma}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma \|L_T^* z\|_H &\geq \|z\|_Z \\ \|L_T^* z - S^* z\|_H &\leq \|L_T^* - S^*\| \|z\|_Z \quad , \quad z \in Z \\ \text{Alors} \quad \|S^* z\|_H &\geq \|L_T^* z\|_H - \|L_T^* z - S^* z\|_H \\ &\geq \frac{1}{\gamma} \|z\|_Z - \|L_T^* - S^*\| \|z\|_Z \\ &= \left(\frac{1}{\gamma} - \|L_T^* - S^*\| \right) \|z\|_Z \end{aligned}$$

Si on pose :

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\gamma} - \|L_T^* - S^*\| > 0$$

nous obtenons

$$\Gamma \|S^* z\|_H \geq \|z\|_Z \quad , \quad z \in Z$$

□

Chapitre 2

Contrôlabilité robuste des systèmes linéaires de dimension infinie

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dans l'espace de Hilbert H et P est un opérateur linéaire borné dans H , Alors $A + P$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{S_p(t)\}_{t \geq 0}$ qui est donné par la formule suivante :

$$S_p(t) = S(t) + \int_0^t S(t-s)PS_p(s)zds \quad , z \in H$$

Si P est un opérateur linéaire non borné ,Alors $A + P$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{S_p(t)\}_{t \geq 0}$ mais la formule précédente n'est pas vrai en générale.

On notera $D(T)$ le domaine d'un opérateur T dans un espace de Banach W .

$\mathcal{L}(W)$ l'espace des opérateurs linéaires et bornés

On considérera la classe suivante des opérateurs linéaires non bornés :

Si A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ on note $\mathcal{P}(A)$ la classe des opérateurs linéaires fermés P satisfaisant les conditions suivantes :

1. $D(A) \subseteq D(P)$
2. pour chaque $t > 0, \exists h(t) \geq 0$ tel que :

$$\|PS(t)z\| \leq h(t)\|z\| \quad , \forall z \in D(A)$$

3. l'intégrale $\int_0^1 h(t)dt$ existe.

Remarque 2.0.1 A est borné si et seulement si $A \in \mathcal{P}(A)$

Théorème 2.0.4 Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dans H , si $P \in \mathcal{P}(A)$, Alors $A + P$ défini sur $D(A + P) = D(A)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{S_p(t)\}_{t \geq 0}$ de plus :

$$S_p(t)z = \sum_0^\infty S_n(t), \quad t \geq 0$$

où

$$S_0(t) = S(t)$$

et

$$S_n(t) = \int_0^t S(s)PS_{n-1}(s)zds, \quad n \geq 1, z \in H$$

La série est absolument convergente pour la norme uniforme de $L(H)$, pour chaque n et z la fonction $T_n(t)z$ est continue pour $t \geq 0$

- $\bigcup_{t > 0} S(t)z \subseteq \mathcal{D}(P)$
- $z \rightarrow PS(t)z$, $z \in \mathcal{D}(A)$ a une extension unique à un opérateur borné défini sur H , afin de simplifier la notation, nous appellerons cette extension $PS(t)$.
- $PS(t)z$ est continue sur $t > 0$ pour tout $z \in H$

Si

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t}$$

Alors

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|PT(t)\|}{t} \leq \omega_0$$

- Si $R(\lambda) > \omega_0$, alors

$$PR(\lambda; A)z = \int_0^\infty e^{-\lambda t} PT(t)zdt, \quad z \in Z$$

où $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$

- Si $\omega > \omega_0$, alors $\exists M_\omega < \infty$ tel que :

$$\|S(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \text{et} \quad \|PS(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \quad t \geq 0$$

- pour tout $\beta > 0$

$$\int_0^\beta \|PS(t)\|dt < \infty$$

- Si $\gamma = \int_0^\infty e^{-\omega t} \|PS(t)\| dt < 1$, Alors

$$\|S_n(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \gamma^n, \quad n \geq 0$$

Pour plus de détail voir 2.

Proposition 2.0.2 Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi- groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de type ω_0 définissant :

$$d_A(P_1, P_2) = \int_0^1 \|(P_1 - P_2)S(t)\| dt, \quad P_1, P_2 \in \mathcal{P}(A)$$

et pour $\omega > \omega_0$ fixé $\delta_A(P_1, P_2) = \int_0^\infty e^{-\omega t} \|(P_1 - P_2)S(t)\| dt, \quad P_1, P_2 \in \mathcal{P}(A)$

Alors $\delta_A(P_1, P_2)$ et $d_A(P_1, P_2)$ sont deux distances sur $\mathcal{P}(A)$ qui sont équivalentes i.e il existe des constantes strictement positives M_A et m_A telle que :

$$m_A \delta_A(P_1, P_2) \leq d_A(P_1, P_2) \leq M_A \delta_A(P_1, P_2), \quad P_1, P_2 \in \mathcal{P}(A)$$

Remarque 2.0.2 Si $P_1 - P_2$ est bornée, Alors

$$d_A(P_1, P_2) \leq \left(\int_0^1 \|S(t)\| dt \right) \|P_1 - P_2\|$$

Théorème 2.0.5 La fonction $P \in \mathcal{P}(A) \longrightarrow S_p(t) \in \mathcal{L}(H)$ est continue uniformément par rapport à t dans chaque intervalle du $[0, \beta], \beta > 0$

i.e

$$\lim_{d_A(P, P_0) \rightarrow 0} \|S_p(t) - S_{p_0}(t)\| = 0$$

on outre, si $\delta_A(P_1, P_2) < 1$, Alors il existe une constante $M = M(p_0)$ telle que :

$$\|S_p(t) - S_{p_0}(t)\| \leq \frac{\delta_A(P, P_0)}{1 - \delta_A(P, P_0)} M e^{\omega t}, \quad t \geq 0$$

Preuve Comme

$$S_p(t) = S_{P_0 + P - P_0}(t)$$

et on a :

$$S(t)z = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t), \quad t \geq 0$$

$$T_0(t) = S_{p_0}(t)$$

et

$$T_n(t)z = \int_0^t S_{p_0}(t-s)(P-P_0)T_{n-1}(s)zds, \quad n \geq 1, z \in Z$$

et

$$\|T_0(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

Selon l'indication mathématique, nous avons :

$$\|T_n(t)\| \leq M^n e^{\omega t} \|P - P_0\|^{n-1} \delta_{A+P_0}(P, P_0) \frac{t^{n-1}}{(n-1)}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|S_p(t) - S_{p_0}(t)\| &\leq M^n e^{\omega t} \|P - P_0\|^{n-1} \delta_{A+P_0}(P, P_0) \frac{t^{n-1}}{(n-1)} \\ &= M \delta_{A+P_0}(P, P_0) e^{(\omega + M\|P-P_0\|)t} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{d_A(P, P_0) \rightarrow 0} \|S_p(t) - S_{p_0}(t)\| = 0$$

continu uniformément par rapport à t sur l'intervalle $[0, \beta]$, $\beta > 0$

Si

$$\delta_{A+P_0}(P, P_0) < 1$$

$$\begin{aligned} \|T_1(t)\| &\leq \int_0^t (\|S_{p_0}(t-s)\| \|P - P_0\| \|S_{p_0}(s)\|) ds \\ &\leq Me^{\omega t} \|P - P_0\| \int_0^t e^{-\omega t} \|S_{p_0}(s)\| ds \\ &\leq Me^{\omega t} \delta_{A+P_0}(P, P_0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|T_2(t)\| &\leq \int_0^t (\|S_{p_0}(t-s)\| \|P - P_0\| \|T_1(s)\|) ds \\ &\leq Me^{\omega t} \int_0^\infty e^{-\omega t} \int_0^s (\|(P - P_0)S_{p_0}(s-\tau)\| \|(P - P_0)S_{p_0}(\tau)\|) d\tau ds \\ &\leq Me^{\omega t} \left(\int_0^\infty e^{-\omega s} \|(P - P_0)S_{p_0}(s)\| ds \right)^2 \\ &\leq Me^{\omega t} (\delta_{A+P_0}(P, P_0))^2 \end{aligned}$$

En utilisant l'induction mathématique nous avons cela :

$$\begin{aligned}
 \|T_n(t)\| &\leq \int_0^t \|S_{p_0}(t-s)\| \|(P - P_0)T_{n-1}(s)\| ds \\
 &\leq M e^{\omega t} [\delta_{A+P_0}(P, P_0)]^n \\
 \text{Ainsi} \quad \|S_p(t) - S_{p_0}(t)\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n(t)\| \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} M e^{\omega t} [\delta_{A+P_0}(P, P_0)]^n \\
 &\leq \frac{\delta_{A+P_0}(P, P_0)}{1 - \delta_{A+P_0}(P, P_0)} M e^{\omega t}, \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

□

2.1 Principaux résultats

De la section précédente, nous avons que $(\mathcal{P}(A), d_A)$ est un espace métrique noté de la distance d_A . maintenant, nous sommes prêts à étudier la famille suivante de système de contrôle dimensionnel infinie

$$Y' = (A + P)Y + B(t)u(t) \quad , \quad t > 0, P \in \mathcal{P}(A)$$

Théorème 2.1.1 *Soit Z et H des espaces de Hilbert et $G \in \mathcal{L}(Z, H)$ avec $\text{Im}(G) = H$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que :*

pour tout $S \in \mathcal{L}(Z, H)$ avec $\|G - S\| < \alpha$ on a $\text{Im}(S) = H$

Théorème 2.1.2 *Si pour un $P_0 \in (\mathcal{P}(A), d_A)$ le système linéaire est exactement contrôlable sur $[0, t]$, alors il existe un voisinage $\mathcal{N}(P_0)$ tel que pour chaque $P \in \mathcal{N}(P_0)$ le système est également contrôlable sur $[0, t]$*

Preuve Supposons que $P_0 = 0$, considère l'opérateur borné linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 L_T^p : L^2(0, T; U) &\longrightarrow H \\
 L_T^p u(t) &= \int_0^t S_p(t-s) B(s) u(s) ds
 \end{aligned}$$

il suffit de prouver que L_T^p est surjectif pour tout P dans un voisinage $\mathcal{N}(0)$

$$\begin{aligned}\|L_T^p u - L_T u\| &= \left\| \int_0^t (S_p(t-s) - S(t-s))B(s)u(s)ds \right\| \\ &\leq \frac{\delta_A(P, 0)}{1 - \delta_A(P, 0)} M e^{\omega t} \int_0^t \|B(s)\|_{\mathcal{L}(U, H)} \|u(s)\|_U ds \\ &\leq \frac{\delta_A(P, 0)}{1 - \delta_A(P, 0)} M e^{\omega t} \|B\|_{\mathcal{L}(U, H)} \|u\|_U\end{aligned}$$

$$\text{Par conséquent} \quad \|L_T^p u - L_T u\| \leq \frac{\delta_A(P, 0)}{1 - \delta_A(P, 0)} M e^{\omega t} \|B\|_{\mathcal{L}(U, H)}$$

alors nous pouvons prendre $\delta_A(P, 0)$ assez petit tel que

$$\begin{aligned}\frac{\delta_A(P, 0)}{1 - \delta_A(P, 0)} M e^{\omega t} \|B\|_{\mathcal{L}(U, H)} &< \alpha \\ \delta_A(P, 0) &< \frac{\alpha}{\|B\|_{\mathcal{L}(U, H)} M e^{\omega t} + \alpha} = r\end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre, nous allons voir que certains résultats vus aux chapitre 01 et 02 peuvent s'appliquer .

Nous allons considérer un système d'intérêt physique décrits par une équation integro-différentielle du type hyperbolique

$$\begin{cases} y_{tt}(t, x) = y_{xx} + \varepsilon \int_0^x \Phi(x) y(t, s) ds + u(t) \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0, \quad t \in [0, \tau] \end{cases} \quad (1,1)$$

où $\Phi \in H = L^2[0, 1]$ (l'espace des fonctions de carré intégrable)

$$\int_0^\tau \int_0^1 u(t, x) dx dt < \infty \quad , \text{ et } \varepsilon > 0 \quad \text{petit suffisamment}$$

Avant de nous intéresser à la contrôlabilité d'un tel système, nous allons voir comment nous ramener à la forme abstraite (à la situation (K)) et appliquons alors nos résultats.

Pour ramener (1,1) à la représentation (K) posons : $H = L^2(0, T; U)$

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset H &\longrightarrow H \\ f &\longmapsto -f_{xx} \end{aligned}$$

Avec $D(A) = H^2 \cap H_0^1$

$$L : H \longrightarrow H \quad , \quad (Lf)(x) = \int_0^x \Phi(s) f(s) ds.$$

d'où le système (1,1) peut être écrit sous la forme abstraite :

$$\ddot{y} = -Ay + \varepsilon Ly + u(t) \quad (1,2)$$

Par un changement de variable nous pouvons transformer cette équation en équation différentielle de premier ordre :

Posons

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \quad , \quad Z = D(A^{1/2}) \times H$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ -Ay(t) + \varepsilon Ly \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où :

$$z' = \mathcal{A}z + \varepsilon Pz + Bu \quad (1,3)$$

où : $B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L & 0 \end{bmatrix}$ $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans Z et engendre un semi-groupe fortement continu

$$T(t)z = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left[\langle z_1, \Phi_n \rangle_H \cos n\pi t + \frac{1}{n\pi} \langle z_2, \Phi_n \rangle_H \sin n\pi t \right] \Phi_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left[-n\pi \langle z_1, \Phi_n \rangle_H \sin n\pi t + \langle z_2, \Phi_n \rangle_H \cos n\pi t \right] \Phi_n \end{bmatrix}$$

Le produit scalaire dans Z étant donné par :

$$\langle z, \bar{z} \rangle_Z = \int_0^1 z_1(x) \bar{z}_1(x) dx + \int_0^1 z_2(x) \bar{z}_2(x) dx \quad , \text{ et } \Phi_n = \sin n\pi x$$

Pour plus de détails ,voir 5 il est facile de montrer que $T^*(t) = T(-t)$, et $B^* = (0 \ I)$, en appliquant le théorème 1.3.2, on a que pour $u \in L^2([0, \tau]; L^2(0, 1))$, le système sera exactement contrôlable sur $[0, \tau]$ s'il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\|B^*T^*(.)z\|_{L^2([0,\tau];L^2(0,1))}^2 \geq \gamma^2 \|z\|_Z^2 \quad (1,4)$$

le calcul des termes de (1,4) donne l'inégalité équivalente

$$\begin{aligned} \gamma \|z\|^2 &\leq \int_0^\tau \left[\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2\pi^2 [\langle z_1, \Phi_n \rangle]^2 \sin^2(n\pi t) + (\langle z_2, \phi_n \rangle \langle \phi_n, z_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle z_1, \phi_n \rangle \langle \phi_n, z_2 \rangle) 2n\pi \sin(n\pi t) \cos(n\pi t) + 2 |\langle z_2, \phi_n \rangle|^2 \cos^2(n\pi t) \right] dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 |\langle z_1, \Phi_n \rangle|^2 \left(\tau - \frac{\sin(2n\pi\tau)}{2n\pi} \right) + (\langle z_2, \phi_n \rangle \langle \phi_n, z_1 \rangle \\ &\quad + \langle z_1, \phi_n \rangle \langle \phi_n, z_2 \rangle) \frac{1}{2} (\cos(2n\pi\tau) - 1) + |\langle z_2, \Phi_n \rangle|^2 \left(\tau + \frac{\sin(2n\pi\tau)}{2n\pi} \right) \end{aligned}$$

Cela équivaut à trouver un $\tilde{\gamma} = \frac{1}{\gamma} > 0$ tel que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[|X_n|^2 n^2 \pi^2 (\tilde{\gamma} S_n - 2) - \tilde{\gamma} C_n \operatorname{Re}(X_n Y_n) + |Y_n|^2 (\tilde{\gamma} T_n - 2) \right] \geq 0$$

Où $X_n = \langle z_1, \phi_n \rangle, Y_n = \langle z_2, \phi_n \rangle, S_n = \tau - \frac{\sin(2n\pi\tau)}{2n\pi}, C_n = (-1 + \cos(2n\pi\tau))$

et $T_n = \tau + \frac{\sin(2n\pi\tau)}{2n\pi}$

Le nième terme sera non négatif si $\tilde{\gamma} S_n > 2, \tilde{\gamma} T_n > 2,$ et $(n\pi)^2 (\tilde{\gamma} S_n - 2)(\tilde{\gamma} T_n - 2) \geq \frac{1}{4} \tilde{\gamma}^2 C_n^2$

Cette expression est équivalente à

$$(n^2 \pi^2 \tau^2 - \sin(n\pi\tau)) \tilde{\gamma}^2 - 4n^2 \pi^2 \tau \tilde{\gamma} + 4n^2 \pi^2 \geq 0$$

Depuis la vraie fonction $x^2 - \sin^2(x)$ est non négatif, la dernière expression (considérée comme quadratique dans $\tilde{\gamma}$) sera satisfait si

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &\geq \frac{4n^2 \pi^2 \tau + \sqrt{16n^4 \pi^4 \tau^2 - 16n^2 (n^2 \pi^2 \tau^2 - \sin^2(n\pi\tau))}}{2(n^2 \pi^2 \tau^2 - \sin^2(n\pi\tau))} \\ &= \frac{2n^2 \pi^2 \tau + 2n\pi |\sin(n\pi\tau)|}{(n\pi\tau - |\sin(n\pi\tau)|)(n\pi\tau + |\sin(n\pi\tau)|)} \\ &= \frac{2}{\tau - \left| \frac{\sin(n\pi\tau)}{n\pi} \right|} \end{aligned}$$

Nous devons donc trouver un $\tilde{\gamma}$ tel que

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &> \max_{n \geq 1} \left(\frac{2}{\tau - \left| \frac{\sin(n\pi\tau)}{n\pi} \right|}, \frac{2}{\tau - \frac{\sin 2(n\pi\tau)}{2n\pi}}, \frac{2}{\tau + \frac{\sin 2(n\pi\tau)}{2n\pi}} \right) \\ &= \max n \geq 1 \frac{2}{\tau - |\sin(n\pi\tau)n\pi|} \end{aligned}$$

Depuis $\tau - |\sin(n\pi\tau)n\pi| > 0$ pour tous $\tau > 0$ et il diminue en n , nous pouvons toujours trouver un approprié $\tilde{\gamma}$ à condition de $\tau > 0$. Donc le système est exactement contrôlable sur $[0, \tau]$ pour toute $\tau > 0$.

Bibliographie

- [1] R.F. Curtain,A.J. Pritchard,infinite Dimensional Linear Systems,in :Lecture Notes in Control and Information Sciences,Vol.8,Springer-Verlag,Berlin,1978.
- [2] Dunford,Schwartz,Linear Operators General Theory,Part 1,in :Wiley Classics Library,Wiley,New York,1988.
- [3] A.N.Kolmogorow,S.V.Fomin,Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale,Mir,Moscow,1980.
- [4] H.Leviat,J.Math.Anal.Appl.280(2003),Unbounded Perturbation Of The Controllability For Evolution Equations.
- [5] R.F.Curtain, H.J.Zwart.An Introduction To Infinite Dimensional Linear Systems Théory.

Résumé

Dans ce mémoire nous montrons que la contrôlabilité des équations d'évolution dans les espaces de Banach n'est pas détruite si nous perturbons l'équation par un petit opérateur linéaire non borné. Ceci est fait en utilisant un principe de perturbation de l'opérateur linéaire et une caractérisation des opérateurs surjectifs. Enfin, nous les appliquons à un système de contrôle décrit par des équations intégral-différentielles.

Abstract

In this thesis we show that the controllability of evolution equations in Banach spaces is not destroyed if we disturb the equation by a small unbounded linear operator. This is done using a linear operator perturbation principle and surjective operator characterization. Finally, we apply them to a control system described by integro-differential equations.

ملخص

في هذه الرسالة ، نبين أن التحكم في معادلات التطور في مساحات باناخ لا يتم تدميرها إذا قمنا بتعطيل المعادلة عن طريق عامل خطي صغير غير محدود. ويتم ذلك باستخدام مبدأ اضطراب العامل الخطي وتوصيف العامل الجاني. وأخيراً ، نطبقها على نظام التحكم الموضح في معادلات التكامل التفاضلي.