



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de **Master**
Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Stabilité d'une classe d'équations intégrodifférentielle d'ordre fractionnaire avec des conditions aux limites non locales initiales

Réalisé par : **ARROUF Sara**
FADHLI Lamia

Dirigé par : **M. Dr. Pr. ADJROUD Nacer**

Membres de jury :

M. Dr. Pr. S. KOUACHI **Président**
M. Dr. Pr. L. DJEBARA **Examineur**

2020-2021

DÉDICACES

Je dédie ce mémoire :

A mon père, le chemin à suivre dans cette vie.

A ma mère, la source de tendresse et l'exemple du dévouement.

A mes très chers frères, sœurs et mon mari et mes enfants.

A toute la famille "Fadhli".

Je dédie ce mémoire :

A mon père, qui ont sacrifié leur vie pour être témoignage de tous
ceux

que je leur dois et au grand amour que je leur porte.

A ma mère, la source de tendresse.

A mon très cher frère et sœurs Rayan et Selsabil.

A toute la famille "Arrouf".

REMERCIEMENT

On dit que le trajet est aussi important que la destination. Ces cinq années de formation nous ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple. Ce parcours, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent des longues heures de travail. Nous tenons en premier lieu à rendre grâce à "Dieu" l'aider à compléter ce travail et remercier Monsieur "Adjroud Nacer", qui a dirigé cette mémoire. Nous remercions aussi les membres du jury Mr. S. Kouachi et Mme. L. Djebara pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail. Nous remercions tous les professeurs des mathématiques à l'université Abbes Laghrour Khenchela. Nous remercions tous les professeurs qui nous ont encouragés dans nos études. C'est eux qui nous ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir. Un grand merci à toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail.

Pour finir c'est un grand merci à nos parents et à tous nos amis.

Résumé

Le but de notre présent travail est l'étude de la stabilité au sens de Hyers-Ulam et la stabilité au sens généralisée de Hyers-Ulam parfois appelée stabilité au sens de Hyers-Ulam-Rassias d'une classe d'équation intégral-différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire, avec des conditions aux limites non locales initiales.

Abstract

The aim of the present work is to investigate the Hyers-Ulam stability and Generalised Hyers-Ulam stability, called Hyers-Ulam-Rassias stability of a class of fractional integro-differential equation with non local initial conditions.

TABLE DES MATIÈRES

0.1	Introduction	2
1	Préliminaires	4
1.1	La fonction Gamma	4
1.2	Application strictement contractante	4
1.3	Théorème du point fixe de Banach	4
1.4	Fonction lipschitzienne	6
1.5	Equation différentielle non-linéaire d'ordre fractionnaire (EDF)	6
1.6	Equations intégro-différentielles d'ordre fractionnaire (EIDF)	6
1.7	L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	7
1.8	Dérivées fractionnaires	7
1.8.1	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	8
1.8.2	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	9
2	Stabilité d'une classe d'équations intégro-différentielles d'ordre fractionnaire	11
2.1	Stabilité au sens de Ulam-Hyers	11
2.2	Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée	16

0.1 Introduction

Cette introduction est un aperçu historique de l'intégrale et de la dérivée d'ordre fractionnaire et ses applications pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire.

C'est l'Hopital et Leibnitz qui sont les premiers à avoir posé la notion de dérivation d'ordre fractionnaire. En 1738 Euler a constaté que le résultat de l'évaluation de la dérivée $\frac{d^n x^a}{dt^n}$, de la fonction x^a a une signification lorsque n n'est pas entier. Laplace en 1812 a proposé l'idée de dérivation d'ordre non entier pour des fonctions telles que $\int f(x) x^{-t} dx$. Le mathématicien français Lacroix en 1819 a pu obtenir la formule

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}.$$

Le résultat ci-dessus est analogue au résultat concernant la définition actuelle de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Entre 1832 et 1837, Liouville a publié plusieurs travaux, faisant de lui le véritable créateur de la théorie substantielle de l'intégré-différentielle d'ordre fractionnaire, il a mis la formule de l'intégrale fractionnaire d'ordre $p > 0$ comme suit

$$D^{-p} f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x+t) x^{p-1}}{(-1)^p \Gamma(p)} dx, t \in \mathbb{R}, p > 0.$$

En 1847 Riemann a rédigé un papier alors qu'il n'était qu'un étudiant et son travail ne fut publié qu'en 1876 dix ans après sa mort, dans cet article, Riemann est arrivé à la formule suivante

$$D^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-x)^{p-1} f(x) dx, t > 0.$$

Depuis lors cette formule est devenue l'une des principales formules d'intégration fractionnaire avec la construction de Liouville. La formule ci-dessus s'appelle maintenant formule d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville.

Le calcul fractionnaire a gagné beaucoup d'attention durant les 30 dernières années et est devenu un important domaine de recherche en raison à la fois du développement important de la théorie du calcul fractionnaire lui-même et par le nombre important de ses applications. Il existe deux définitions les plus couramment utilisées de l'intégrale fractionnaire et de la dérivée fractionnaire, l'une au sens de Riemann-Liouville et l'autre au sens de Caputo.

La dérivée au sens fractionnaire au sens de Caputo est définie comme suit

$$\begin{aligned} {}^C D_a^p f(t) &= I_a^{n-p} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-s)^{n-p-1} f^{(n)}(s) ds, \text{ pour } p > 0, \\ &= f(t), \text{ pour } p = 0, \end{aligned}$$

avec $t \in [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $(-\infty < a < b < \infty)$, $n = [p]$.

I_a^{n-p} désigne l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $(n - p)$. Les problèmes aux limites d'ordre fractionnaire étudient dans leurs majorités soit l'existence, soit l'unicité des solutions soit les deux à la fois.

la stabilité de Hyers-Ulam a commencé par les équations différentielles ordinaires et équations différences. En 1940 S.M. Ulam posa le problème : quand peut-on affirmer que la solution approchée d'une équation fonctionnelle peut être approchée par la solution de l'équation correspondante. La réponse fut donnée en premier par D.H. Hyers dans un espace de Banach. En 1941 Th. Rassias et d'autres ont approuvés le résultat de Hyers, après beaucoup de chercheurs ont étendu le problème de stabilité de Ulam ad'autres équations fonctionnelles et donnent la généralisation du résultat de Hyers dans plusieurs versions. Dans les 30 dernières années ce domaine est très bien connu sous le nom de stabilité de Ulam-Hyers et parfois sous le nom de stabilité de Ulam-Hyers-Rassias. Dans ce mémoire nous étudions la stabilité de la solution d'un nouveau type de problème qui est une équation intégro-différentielle d'ordre fractionnaire avec des conditions aux limites initiales non locales.

1.1 La fonction Gamma

Au cours des années 1729 et 1730, Euler introduit une fonction analytique qui a la propriété d'interpoler la factorielle lorsque l'argument de la fonction est un entier. Dans une lettre du 8 janvier 1730 à Christian Goldbach, il proposa la définition suivante :

Définition 1.1.1 *L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(\alpha)$. La fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad (1.1.1)$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0) = +\infty$, $\Gamma(\alpha)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < \alpha \leq 1$.

1.2 Application strictement contractante

Définition 1.2.1 *Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et soit $T : E \rightarrow E$ une application. Dire que T est une application strictement contractante s'il existe un réel $k \in [0; 1[$ tel que*

$$\forall (x, y) \in E^2, d(T(x), T(y)) < kd(x, y). \quad (1.2.1)$$

1.3 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit aussi le théorème de l'application contractante, c'est la base de la théorie du point fixe. Ce théorème garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 1.3.1 Soient X un espace de Banach et $T : X \rightarrow X$ une application contractante. Alors T admet un point fixe unique, autrement dit :

$$\exists ! x \in X : Tx = x.$$

Prouve. Existence :

Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_n = T(x_{n-1}), & n \geq 1 \\ x_0 \in X. \end{cases}$$

On démontre que (x_n) est une suite de Cauchy dans X .

Pour $m < n$, on a :

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_{m+1} - x_m\| + \|x_{m+2} - x_{m+1}\| + \dots + \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Puisque T est une contraction, alors :

$$\|x_{p+1} - x_p\| = \|Tx_p - Tx_{p-1}\| \leq k \|x_p - x_{p-1}\|, \quad \text{pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1}) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq k^m (1 + k + \dots + k^{n-m-1}) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{k^m}{1 - k} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

On déduit que la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans X .

Puisque T est continue, alors :

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (Tx_{n-1}) = T \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1} \right) = Tx.$$

Donc x est un point fixe de T .

Unicité :

Supposons que $Tx = x$ et $Ty = y$. Alors :

$$\|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\|,$$

puisque $k < 1$, on déduit que $\|x - y\| = 0$ c'est-à-dire $x = y$, d'où l'unicité du point fixe de T .

■

1.4 Fonction lipschitzienne

Définition 1.4.1 Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques, $f : E \rightarrow F$ une application et k un réel positif. On dit que f est k -lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in E^2, d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y). \quad (1.4.1)$$

1.5 Equation différentielle non-linéaire d'ordre fractionnaire (EDF)

Définition 1.5.1 Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ alors :

$$D^\alpha u(t) = f(t, u(t)), \quad (1.5.1)$$

est appelée équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire au sens Riemann-Liouville, comme conditions initiales pour ce type d'EDF on utilise :

$$\begin{aligned} D^{\alpha-k} u(0) &= b_k \quad k = 1, 2, \dots, (n-1), \\ \lim_{z \rightarrow 0} u(z) &= b_n, \end{aligned}$$

de la même manière :

$${}^C D^\alpha u(t) = f(t, u(t)), \quad (1.5.2)$$

est appelée équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens Caputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales :

$$u^k(0) = b_k \quad k = 1, 2, \dots, (n-1).$$

1.6 Equations intégro-différentielles d'ordre fractionnaire (EIDF)

Définition 1.6.1 Soit $\alpha > 0$, $0 < t < 1$:

$${}^C D^\alpha u(t) = f\left(t, u(t), \int_0^t K(e, u(s)) ds\right), \quad (1.6.1)$$

sous les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u(0) &= \gamma_0, & u'(0) &= \gamma_1, \\ u(1) &= \beta_0, & u'(1) &= \beta_1, \end{aligned}$$

où ${}^C D^\alpha u(t)$ est appelée équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens de Caputo, et f est une fonction non-linéaire continue et $\gamma_0, \gamma_1, \beta_0, \beta_1$: sont des constantes réelles.

1.7 L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.7.1 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale :

$$\begin{aligned} I^{(1)} f(t) &= \int_a^t f(s) ds, \\ I^{(2)} f(t) &= \int_a^t ds \int_a^s f(u) du. \end{aligned}$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^{(2)} f(t) = \int_a^t (t-s) f(s) ds. \quad (1.7.1)$$

Plus généralement le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I^{(n)} f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} dt_3 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds. \end{aligned}$$

Définition 1.7.2 Pour une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est donné par :

$$I_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (1.7.2)$$

pourvu que l'intégrale existe.

Remarque 1.7.3 On peut écrire I_{0+}^α sous la forme suivante :

$$I_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{\alpha-1} f(t-s) ds. \quad (1.7.3)$$

1.8 Dérivées fractionnaires

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

1.8.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.8.1 On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre α , et on note D_{0+}^{α} la fonction définie par :

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha} f(t) &= D^{(\alpha)} I_{0+}^{(n-\alpha)} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I_{0+}^{(n-\alpha)} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

avec $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$.

Définition 1.8.2 Pour $f \in C[a, b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe :

$$I_{0+}^{\alpha} \left[I_{0+}^{\beta} f(t) \right] = I_{0+}^{\alpha+\beta} f(t) \quad \text{pour } \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.8.2)$$

Exemple 1.8.3 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = \exp(kt), \quad k > 0, \quad (\text{P1})$$

on a :

$$\begin{aligned} I_{0+}^{\alpha} f(t) &= I_{0+}^{\alpha} \exp(kt) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{\alpha-1} \exp(k(t-s)) ds \\ &= \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{\alpha-1} \exp(-ks) ds. \end{aligned}$$

Posons : $y = ks$ alors : $dy = kds$ par suite :

$$\begin{aligned} I_{0+}^{\alpha} \exp(kt) &= \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{kt} \left(\frac{y}{k} \right)^{\alpha-1} \exp(-y) \frac{dy}{k} \\ &= \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{kt} y^{\alpha-1} \exp(-y) dy \right) \frac{k^{-\alpha+1}}{k} \\ &= k^{-\alpha} \exp(kt), \end{aligned}$$

et :)d

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha} \exp(kt) &= D^{(n)} I_{0+}^{(n-\alpha)} \exp(kt) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} I_{0+}^{(n-\alpha)} \exp(kt) = \frac{d^n}{dt^n} k^{\alpha-n} \exp(kt) \\ &= k^{\alpha-n} k^n \exp(kt) = k^{\alpha} \exp(kt). \end{aligned}$$

C'est d'ailleurs cette dernière relation, extension de l'égalité suivante :

$$D^{(n)} \exp(kt) = k^n \exp(kt),$$

avec n un entier naturel.

1.8.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.8.4 La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^C D^\alpha f(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) \geq 0$), sur $[a, b]$ est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :

$${}^C D^\alpha f(t) = D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right), \quad (1.8.3)$$

où

$$n = [Re(\alpha)] + 1 \text{ pour } \alpha \notin \mathbb{N}, \quad n = \alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}. \quad (1.8.4)$$

Si $\alpha = 0$, alors :

$${}^C D^0 f(t) = f(t).$$

En particulier, lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$, la relation (1.12) prend la forme :

$${}^C D^\alpha f(t) = D^\alpha [f(t) - f(0)].$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (1.12) est définie pour les fonctions $f(t)$ pour lesquelles la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville existe en particulier, elle est définie pour les fonctions $f \in AC^n([a, b])$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.8.5 Soit $Re(\alpha) \geq 0$ et soit n donné par (1.13). Si $f \in AC^n([a, b])$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^C D^\alpha f(t)$ existe presque partout sur $[a, b]$.

1) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}^C D^\alpha f(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad t > 0 \\ &= I^{n-\alpha} D^n f(t). \end{aligned} \quad (1.8.5)$$

En particulier, lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$ et $f(t) \in AC([a, b])$, alors :

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad t > 0 \\ &= I^{1-\alpha} f'(t). \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

2) Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$${}^C D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

Prouve. D'après les définitions 10 et 13 on a :

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(t) &= D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right) \\ &= D^n I^{n-\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right). \end{aligned}$$

Par :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^n I^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad t > 0. \end{aligned}$$

On pose :

$$F(t) = I^{n-\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right).$$

D'après (1.8), on a :

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \left(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} s^k \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left\{ -\frac{(t-s)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} s^k \right) \Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-\alpha}}{n-\alpha} D \left(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} s^k \right) ds \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha+1-1} D \left(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} s^k \right) ds \\ &= I^{n-\alpha+1} D \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right). \end{aligned}$$

En répétant ce procédé n fois, on trouve :

$$\begin{aligned} F(t) &= I^{n-\alpha+n} D^n \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right) \\ &= I^n I^{n-\alpha} D^n \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right). \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$ est un polynôme de degré $n-1$, par conséquent

$$F(t) = I^n I^{n-\alpha} D^n f(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(t) &= D^n F(t) \\ &= D^n I^n I^{n-\alpha} D^n f(t) \\ &= I^{n-\alpha} D^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. ■

2.1 Stabilité au sens de Ulam-Hyers

Dans ce travail on va étudier la stabilité du problème fractionnaire intégré-différentielle avec les conditions initiales suivantes :

$${}^C D^\alpha y(t) = F \left(t, y(t), \int_0^t k(t, s, y(s)) ds, \int_0^1 h(t, s, y(s)) ds \right), \quad (2.1.1)$$

$$y(0) = \int_0^1 g(s)y(s)ds. \quad (2.1.2)$$

Où ${}^C D^\alpha$ est la dérivée au sens de Caputo d'ordre $\alpha, 0 < \alpha < 1, t \in I = [0, 1], g(t) \in (0, 1], g \in L^1(I, \mathbb{R}_+), y \in Y = C(I, X)$ est une fonction continue sur I à valeurs dans l'espace de Banach $X, \|y\|_Y = \max_{t \in I} \|y(t)\|_X, F : I \times X \times X \times X \rightarrow X, k : D \times X \rightarrow X,$ et $h : D_0 \times X \rightarrow X$ sont des fonctions continues dans X . Ici on note que $D = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq 1\}$ est $D_0 = I \times I$. Pour plus de commodité, notons $Ky(t) = \int_0^t k(t, s, y(s)) ds, Hy(t) = \int_0^1 h(t, s, y(s)) ds$.

On va étudier la stabilité au sens de Ulam-Hyers.

Définition 2.1.1 *Pour un ensemble non vide X , une fonction $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ est appelée métrique généralisée sur X si et seulement si d satisfait :*

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in X$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $x, y, z \in X$.

Ce concept diffère du concept habituel d'un espace métrique complet par le fait que tous les deux points dans X ont nécessairement une distance finie. On pourrait appeler un tel espace un espace métrique complet généralisé.

Théorème 2.1.2 *Soit (X, d) un espace métrique complet généralisé. Suppose que $\Lambda : X \rightarrow X$ est un opérateur strictement contractant de constante de Lipschitz $L < 1$. S'il existe un entier non négatif k tel que $d(\Lambda^{k+1}x, \Lambda^k x) < \infty$ pour certains $x \in X$, alors les affirmations suivantes sont vraies :*

- (a) *La séquence $\{\Lambda^n x\}$ converge vers le point final fixe x^* de Λ .*
- (b) *x^* est l'unique point fixe de Λ dans $X^* = \{y \in X \mid d(\Lambda^k x, y) < \infty\}$.*
- (c) *Si $y \in X^*$, alors $d(y, x^*) \leq \frac{1}{1-L} d(\Lambda y, y)$.*

Supposons ce qui suit :

(H1) Si $f \in (C[0, 1] \times X \times X \times X, X)$ et $p_f \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$ non négatif et bornée, il existe $M > 0$, $p_f(t) \leq M$ pour $t \in [0, 1]$ tel que

$$\|f(t, x, Kx, Hx)\| \leq p_f(t) \|x\| \quad \text{pour } x \in X.$$

(H2) Ils existent des constantes positives L_1, L_2 et L telles que

$$\|f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)\| \leq L_1 (\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|)$$

pour tout $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in Y$, $L_2 = \max_{t \in I} \|f(t, 0, 0, 0)\|$, et $L = \max\{L_1, L_2\}$.

(H3) Ils existent des constantes positives N_1, N_2 et N telles que

$$\|k(t, s, x_1) - k(t, s, x_2)\| \leq N_1 \|x_1 - x_2\|$$

pour tout $x_1, x_2 \in Y$, $N_2 = \max_{(t,s) \in D} \|k(t, s, 0)\|$, et $N = \max\{N_1, N_2\}$.

(H4) Ils existent des constantes positives C_1, C_2 et C telles que

$$\|h(t, s, x_1) - h(t, s, x_2)\| \leq C_1 \|x_1 - x_2\|$$

pour tout $x_1, x_2 \in Y$, $C_2 = \max_{(t,s) \in D_0} \|h(t, s, 0)\|$, et $C = \max\{C_1, C_2\}$.

(H5) $p = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + C + \frac{N}{(\alpha+1)}\right)$ tel que $0 \leq p \leq 1$.

Lemme 2.1.3 *Si $Q(\tau, \alpha) = \Gamma(\alpha) I_{1-}^\alpha g(\tau) = \int_\tau^1 g(s)(s - \tau)^{\alpha-1} ds$ pour $\tau \in [0, 1]$, et si $g \in L^1[I, \mathbb{R}]$ satisfait $0 \leq g(s) \leq 1$ pour $0 \leq s \leq 1$ et $\alpha > 0$, alors*

$$\frac{Q(\tau, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} < e \quad \text{et} \quad \frac{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds}{\Gamma(\alpha)} < e.$$

Prouve. preuve du lemme, nous avons que

$$\begin{aligned} \frac{Q(\tau, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} &= \frac{\int_{\tau}^1 g(s)(s-r)^{\alpha-1} ds}{\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \leq \frac{\int_{\tau}^1 (s-r)^{\alpha-1} ds}{\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} = \frac{\int_0^{1-\tau} s^{\alpha-1} ds}{\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \\ &= \frac{e^{1-\tau} \int_0^{1-\tau} s^{\alpha-1} e^{-(1-\tau)s} ds}{\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \prec \frac{e^{1-\tau} \int_0^{1-\tau} s^{\alpha-1} e^{-\tau s} ds}{\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \\ &\prec \frac{e^{1-\tau} \int_0^{1-\tau} s^{\alpha-1} e^{-\tau s} ds}{\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \prec e. \end{aligned}$$

Aussi nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds}{\Gamma(\alpha)} &= \frac{\int_0^t s^{\alpha-1} ds}{\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \\ &= \frac{e^t \int_0^t s^{\alpha-1} e^{-t} ds}{\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \\ &= \frac{e^t \int_0^t s^{\alpha-1} e^{-s} ds}{\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \\ &= \frac{e \int_0^t s^{\alpha-1} e^{-s} ds}{\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds} \\ &\prec e. \end{aligned}$$

Lemme 2.1.4 Soit $\alpha \succ 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si $y \in C^n(I, \mathbb{R})$, alors

$$I_{0+}^{\alpha} ({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(t) = y(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i)}(0)}{i!} t^i.$$

Lemme 2.1.5 Soit $y \in C(I, \mathbb{R})$, et $1 \prec \alpha \leq 2$, alors

$$I_{0+}^{\alpha} ({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(t) = y(t) + k_0,$$

où k_0 est une constante réelle.

■

Théorème 2.1.6 Si (H1)-(H5) sont satisfaites, alors l'équation intégro-différentielle fractionnaire (2,1) avec la condition initial (2,2) a une solution unique dans I définie par :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, f(s), Kf(s), Hf(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau, \alpha) F(\tau, f(\tau), Kf(\tau), Hf(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Prouve. D'après lemme 19 et Lemme 20, la solution du problème (2.1) – (2.2) est donnée par

$$y(t) = k_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, f(s), Kf(s), Hf(s)) ds, \quad (2.1.3)$$

d'après la condition aux limites (2,2)

$$y(0) = \int_0^1 g(s)y(s)ds,$$

$$\begin{aligned}
\text{on obtient que } y(0) = k_0 &= \int_0^1 g(s)y(s)ds \\
&= \int_0^1 g(s) \left[k_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} F(\tau, f(\tau), Kf(\tau), Hf(\tau)) d\tau \right] ds \\
&= k_0 \int_0^1 g(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 p(s) \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} F(\tau, f(\tau), Kf(\tau), Hf(\tau)) d\tau ds. \\
&= k_0 \int_0^1 g(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 F(\tau, f(\tau), Kf(\tau), Hf(\tau)) d\tau \left[\int_\tau^1 (s-\tau)^{\alpha-1} g(s) ds \right]
\end{aligned}$$

Alors on tire que

$$k_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\mu)} \int_0^1 Q(\tau, \alpha) F(\tau, f(\tau), Kf(\tau), Hf(\tau)) d\tau, \text{ avec } \mu = \int_0^1 g(s)ds.$$

Par substitution de k_0 dans l'équation (2.3), nous obtenons la solution donnée. ■

Théorème 2.1.7 Soit $l := (L(1 + N + M)) < 1$. Soit L, M , et N des constantes positives avec $0 < \frac{t^\alpha(1-\mu)}{\Gamma(\alpha+1)(1-\mu-le)-lt^\alpha} < 1$ et $I = [0, 1]$ désigne un intervalle fermé et borné. On suppose que $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifie la condition de Lipschitz suivante :

$$|F(t, x_1, y_1, z_1) - F(t, x_2, y_2, z_2)| \leq L(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) \quad (2.1.4)$$

$k : I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifie la condition de Lipschitz suivante :

$$|k(t, s, f) - k(t, s, g)| \leq N|f - g| \quad \text{pour tout } t, s \in I \text{ et } f, g \in \mathbb{R}. \quad (2.1.5)$$

Et $h : I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifie la condition de Lipschitz suivante :

$$|h(t, s, f) - h(t, s, g)| \leq M|f - g| \quad \text{pour tout } t, s \in I \text{ et } f, g \in \mathbb{R}. \quad (2.1.6)$$

Si pour $\varepsilon \geq 0$, une fonction continuellement différentielle $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$|{}^C D^\alpha y(t) - F(t, y(t), Ky(t), Hy(t))| \leq \varepsilon, \quad (2.1.7)$$

Pour tout $t \in I$, alors il existe une fonction continue unique $y_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, f(s), Kf(s), Hf(s)) ds \\
&\quad - \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau, \alpha) F(\tau, f(\tau), Kf(\tau), Hf(\tau)) d\tau.
\end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Et

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{t^\alpha(1-\mu)}{\Gamma(\alpha+1)(1-\mu-le) - (1-\mu)lt^\alpha} \varepsilon. \quad (2.1.9)$$

Prouve. Soit X désigne l'ensemble des fonctions continues de valeurs réels sur I . On définit une métrique complète généralisée dans X comme suit :

$$d(f, g) = \inf \{C \in [0, \infty], |f(t) - g(t)| \leq C \text{ pour tout } t \in I\}. \quad (2.1.10)$$

Maintenant, définissant un opérateur $\Lambda : X \rightarrow X$ par :

$$\begin{aligned} (\Lambda f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, f(s), Kf(s), Hf(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau, \alpha) F(\tau, f(\tau), Kf(\tau), Hf(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

pour tout $f \in X$.

Ensuite nous vérifions que Λ est strictement contractant dans X .

Soient $f, g \in X$ et soit $C_{fg} \in [0, \infty]$ un constant arbitraire tel que $d(f, g) \leq C_{fg}$. Alors, d'après (.), on obtient

$$|f(t) - g(t)| \leq C_{fg} \tag{2.1.11}$$

pour chaque $t \in I$.

Utilisant (2.3),(2.4),(2.5) et (2.10), on a :

$$\begin{aligned} &|(\Lambda f) - (\Lambda g)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |F(s, f(s), Kf(s), Hf(s)) - F(s, g(s), Kg(s), Hg(s))| ds \\ &\quad - \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |F(\tau, f(\tau), Kf(\tau), Hf(\tau)) - F(\tau, g(\tau), Kg(\tau), Hg(\tau))| d\tau \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [|f(s) - g(s)| + |Kf(s) - Kg(s)| + |Hf(s) - Hg(s)|] ds \\ &\quad + \frac{eL}{(1-\mu)} \int_0^1 [|f(\tau) - g(\tau)| + |Kf(\tau) - Kg(\tau)| + |Hf(\tau) - Hg(\tau)|] ds \\ &\leq \frac{L(1+N+M)}{\Gamma(\alpha)} C_{fg} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{eL(1+N+M)}{(1-\mu)} C_{fg} \int_0^1 ds \\ &\leq \frac{L(1+N+M)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} C_{fg} + \frac{eL_1(1+N+M)}{(1-\mu)} C_{fg} \\ &\leq L(1+N+M) \left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{e}{(1-\mu)} \right] C_{fg} \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$. C'est

$$d(\Lambda f, \Lambda g) \leq \left[\frac{lt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{le}{(1-\mu)} \right] C_{fg}.$$

On peut donc conclure que

$$d(\Lambda f, \Lambda g) \leq \left[\frac{lt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{le}{(1-\mu)} \right] C_{fg} \leq \left[\frac{lt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{le}{(1-\mu)} \right] d(f, g)$$

pour tout $f, g \in X$. Soit g_0 un élément arbitraire dans X . Alors il existe un constante $0 < C < \infty$ avec

$$|(\Lambda g_0)(t) - g_0(t)| = \left| \begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, g_0(s), Kg_0(s), Hg_0(s)) ds \\ &- \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau, \alpha) F(\tau, g_0(\tau), Kg_0(\tau), Hg_0(\tau)) d\tau - g_0(t) \end{aligned} \right| \leq C$$

pour tout $t \in I$, puisque $F(t, g_0(t), Kg_0(t), Hg_0(t))$ et $g_0(t)$ sont bornées sur I . Donc, (2.9) implique que

$$d(\Lambda g_0, g_0) < \infty. \quad (2.1.12)$$

Donc d'après le théorème 18, il existe une fonction continue $y_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la suite $\{\Lambda^n g_0\}$ converge vers y_0 et $\Lambda y_0 = y_0$, c'est, y_0 la solution de (2.1), (2.2). Maintenant On va vérifier que

$$\{g \in X \mid d(g_0, g) < \infty\} = X.$$

Puisque g et g_0 sont bornées dans I , pour chaque $g \in X$, il existe une constante $0 < C_g < \infty$ telle que

$$|g_0(t) - g(t)| \leq C_g.$$

Par conséquent, on a $d(g_0, g) < \infty$ pour tout $g \in X$. Alors $\{g \in X \mid d(g_0, g) < \infty\} = X$.

Donc, compte tenu du théorème .., nous concluons que y_0 donnée par (2.7) est la fonction continue unique. D'après (2.7) on a

$$-\varepsilon \leq {}^C D^\alpha y(t) - F(t, y(t), Ky(t), Hy(t)) \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Si nous intégrons chaque terme dans l'inégalité ci-dessus de 0 à t et appliquons la condition initiale, on obtient

$$\left| y(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, y(s), y(s), Hy(s)) ds + \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau, \alpha) F(\tau, y(\tau), Ky(\tau), Hy(\tau)) d\tau \right| \leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \varepsilon, \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Ainsi on aura

$$|y(t) - (\Lambda y)(t)| \leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \varepsilon,$$

c'est-à-dire,

$$d(y, \Lambda y) \leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \varepsilon \quad \text{pour chaque } t \in I. \quad (2.1.13)$$

Finalement, le théorème 16 et (2.12) impliquent que

$$d(y, y_0) \leq \frac{1}{1 - \left[\frac{lt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{le}{(1-\mu)} \right]} d(y, \Lambda y) \leq \frac{t^\alpha (1-\mu)}{\Gamma(\alpha+1) (1-\mu-le) - (1-\mu) lt^\alpha} \varepsilon,$$

donc, l'inégalité (2.8) est vraie pour tout $t \in I$. ■

2.2 Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée

Théorème 2.2.1 Soit $l := (L(1+N+M)) < 1$. Soit $I = [0, 1]$ borné et fermé, et L, M, N, P_1 et P_2 sont des constantes positifs avec $0 < \left[lP_1 + \frac{leP_2}{(1-\mu)} \right] < 1$. Supposons que $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

est une fonction continue que vérifie la condition de Lipschitz (2.3), $K : I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui vérifie la condition de Lipschitz (2.4) et $H : I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui vérifie la condition de Lipschitz (2.5). Si la fonction continuellement différentielle $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$|{}^C D^\alpha y(t) - F(t, y(t), Ky(t), Hy(t))| \leq \varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in I, \quad (2.2.1)$$

où $\varphi : I \rightarrow (0, \infty)$ est fonction continue avec

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \right| \leq P_1 \varphi(t) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \varphi(s) ds \leq P_2 \varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in I, \quad (2.2.2)$$

donc, il existe une fonction continue unique $y_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, f(s), Kf(s), Hf(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau, \alpha) F(\tau, y(\tau), Ky(\tau), Hy(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

et

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{(1-\mu)P_1}{(1-\mu) - [l(1-\mu)P_1 + leP_2]} \varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in I. \quad (2.2.4)$$

Prouve. Soit X désigne l'ensemble de toutes les fonctions continues à valeurs réelles sur I . On définit une métrique complète sur X comme suit

$$d(f, g) = \inf \{C \in [0, \infty] \mid |f(t) - f'(g)| \leq C\varphi(t) \text{ pour tout } t \in I\}. \quad (2.2.5)$$

Définissons un opérateur $\Lambda : X \rightarrow X$ par

$$\begin{aligned} (\Lambda f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, f(s), Kf(s), Hf(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau, \alpha) F(\tau, y(\tau), Ky(\tau), Hy(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

pour tout $t \in I$ et $f \in X$.

Maintenant, on vérifie que Λ est strictement contractant sur X . Pour chaque $f, g \in X$, soit $C_{fg} \in [0, \infty]$ un constante arbitraire avec $d(f, g) \leq C_{fg}$, alors par (2.17), on a

$$|g(t) - g(t)| \leq C_{fg} \varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in I. \quad (2.2.7)$$

Donc de (2.3),(2.4),(2.5),(2.14),(2.18), et (2.19) il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& |(\Lambda f)(t) - (\Lambda g)(t)| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |F(s, f(s), Kf(s), Hf(s)) - F(s, g(s), Kg(s), Hg(s))| ds \\
& \quad + \frac{e}{(1-\mu)} \int_0^1 |F(\tau, f(\tau), Kf(\tau), Hf(\tau)) - F(\tau, g(\tau), Kg(\tau), Hg(\tau))| ds \\
& \leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [|f(s) - g(s)| + |Kf(s) - Kg(s)| + |Hf(s) - Hg(s)|] ds \\
& \quad + \frac{eL}{(1-\mu)} \int_0^1 [|f(\tau) - g(\tau)| + |Kf(\tau) - Kg(\tau)| + |Hf(\tau) - Hg(\tau)|] ds \\
& \leq \frac{L(1+N+M)}{\Gamma(\alpha)} C_{fg} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(t) ds + \frac{eL(1+N+M)}{(1-\mu)} C_{fg} \int_0^1 \varphi(t) ds \\
& \leq lP_1 C_{fg} \varphi(t) + \frac{le}{(1-\mu)} P_2 C_{fg} \varphi(t) \\
& \leq \left[lP_1 + \frac{leP_2}{(1-\mu)} \right] C_{fg} \varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in I.
\end{aligned}$$

Alors

$$d(\Lambda f, \Lambda g) \leq \left[lP_1 + \frac{leP_2}{(1-\mu)} \right] C_{fg} \varphi(t).$$

Donc, on peut conclure que

$$d(\Lambda f, \Lambda g) \leq \left[lP_1 + \frac{leP_2}{(1-\mu)} \right] \leq d(f, g)$$

pour chaque $f, g \in X$, où on note que $\delta < \left[lP_1 + \frac{leP_2}{(1-\mu)} \right] < 1$.

De (2.18), il s'ensuit que pour chaque $g_0 \in X$ arbitraire, il existe un constante $0 < C < \infty$ avec

$$\begin{aligned}
|(\Lambda g_0)(t) - g_0(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, g_0(s), Kg_0(s), Hg_0(s)) ds \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau, \alpha) F(\tau, g_0(\tau), Kg_0(\tau), Hg_0(\tau)) d\tau - g_0(t) \right| \\
&\leq C\varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in I.
\end{aligned}$$

Puisque $F(s, g_0(s), Kg_0(s), Hg_0(s))$ et $g_0(t)$ sont bornées sur I et $\min_{t \in I} \varphi(t) > 0$. Donc (2.17) implique que

$$d(\Lambda g_0, g_0) < \infty.$$

Donc, d'après le théorème ..., il existe une fonction continue $y_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la suite $\{\Lambda^n g_0\}$ converge vers y_0 dans (X, d) et $\Lambda y_0 = y_0$, c'est-à-dire y_0 est la solution de (2.1)-(2.4) pour chaque $t \in I$.

Maintenant, on va vérifier que

$$\{g \in X \mid d(g_0, g) < \infty\} = X,$$

car g et g_0 sont bornée sur I pour chaque $g \in X \in .$ Alors, $\{g \in X \mid d(g_0, g) < \infty\} = X.$ Alors, d'après le théorème 16, on conclut que y_0 est la fonction continue unique avec la propriété (2.7). De (2.13), on a

$$-\varphi(t) \leq^C D^\alpha y(t) - F(s, y(s), Ky(s), Hy(s)) \leq \varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in I. \quad (2.2.8)$$

Si nous intégrons chaque terme dans l'inégalité ci-dessus et substituons les conditions aux limites, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left| y(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, f(s), Kf(s), Hf(s)) ds \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(\tau, \alpha) F(\tau, f(\tau), Kf(\tau), Hf(\tau)) d\tau \right| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \quad \text{pour chaque } t \in I. \end{aligned}$$

Donc, par (2.14) et (2.18), on obtient

$$|y(t) - (\Lambda y)(t)| \leq P_1 \varphi(t) \quad \text{pour chaque } t \in I,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} d(y, \Lambda y) & \leq \frac{1}{1 - \left[lP_1 + \frac{leP_2}{(1-\mu)} \right]} d(y, \Lambda y) \\ & \leq \frac{(1-\mu) P_1}{(1-\mu) - [l(1-\mu) P_1 + leP_2]} \varphi(t). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Par conséquent, cela donne l'inégalité (2.16) pour tout $t \in I.$

Dans le théorème .., nous avons examiné la stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée de l'équation intégro-différentielle fractionnaire (2.1) définie sur un intervalle borné et fermé. Nous pouvons montrer que le théorème 20 est également valable pour le cas des intervalles non bornés. ■

- [1] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benitez-Read, and R. Byrne. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In ACC 1993, 3106-3107, (1993).
- [2] R. A. Adams, Fournier, J.F. John : Sobolev Spaces, 2nd edition. Elsevier, Singapore (2009).
- [3] R. A. Adams, , J.F. Fournier, : Sobolev Spaces, of Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2140 (2003).
- [4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Dunod, Paris (1999).
- [5] F. Conrad and M. Pierre, Stabilization of second order evolution equation by unbounded nonlinear feedbacks, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 11, 485-515, (1994).
- [6] C. M. Dafermos, Asymptotic behavior of solutions equations, in non linear Evolution Equations, M. G. Crandall Ed., Academic press, New York, 103-123, (1978).
- [7] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Volume 19, American Mathematical Society, (1997).
- [8] A. Haraux, Comportement l'infini pour une équation des ondes non linéaires dissipative. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 287, 507-509, (1978).
- [9] V. Komornik, Decay estimates for the wave equation with internal damping ; International Series of Numerical Mathematics, vol, 118, 253-266, (1994).
- [10] J. E. Lagnese, uniforme asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary. Nonlinear, Anal. 16, 35-54, (1991).

- [11] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Paris, Dunod, (1969).
- [12] N.Mezouar, M.Abdelli, A.Rachah : Existence of global solution and decay estimates for a viscoelastic Petrovsky equation with a delay term in the non-linear internal feedback. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 , No. 58, pp. 1-2,(2017)
- [13] S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay, Differential Integral Equations 21 (9-10), 935-958, (2008).
- [14] J. Y. Park, J. R. Kang ; Global Existence and Uniform Decay for a Nonlinear Viscoelastic Equation with Damping, Acta Appl Math 110, 1393-1406, (2010).
- [15] I. H. Suh and Z. Bien. Use of time delay action in the controller design, 25 : 600 603, (1980).
- [16] M. Tucsnak, Boundary stabilization for the stretched string equation, Differential Internal Equations 6, 925-935, (1993).

END
