الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministry of Higher Education and Scientific Research

جامعة عباس لغرور ـ خنشلة

Abbes Laghrour - Khenchela University

Faculty of Science and Technology

Departement of Mathematics and Computer Science

N° de série:..........................

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**

Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par:

Etude d'explosion des solutions pour un système d'équations singulier non local viscoélastique à source généralisé

Réalisé par : **GOSSA Bilal**

BENABBAS Sadek

Dirigé par : **Dr. MECHERAOUI Rachid**

Membres de jury:

M.SAHRAOUI Allaeddine	**MAA Université Abbes Laghrour - Khenchela**	**Président**
M.MANSOURI Djamel	**MAA Université Abbes Laghrour - Khenchela**	**Examinateur**
M^{elle}.KHALDI Somia	**Université Abbes Laghrour - Khenchela**	**Co-encadreur**

2019-2020

Remerciements

Je remercie tout d'abord le Grand Dieu de m'avoir donné tous qu'il faut et suffit d'achever cet humble travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire Monsieur Dr. MECHERAOUI Rachid non seulement d'avoir accepté de m'avoir encadré, mais pour son long accompagnement dès le début de mon cursus, cela n'est qu'un fruit de ses efforts permanents.

Je remercie beaucoup tous les professeurs de département des mathématiques et informatique à l'université Abbes Laghrour Khenchela dont les membres du jury, le président Monsieur SAHRAOUI Allaeddine et l'examinateur Monsieur MANSOURI Djamel qui ont bien voulu rapporter ce travail.

Un grand merci également à la doctorante co-encadreur M^{elle}*.KHALDI Somia pour avoir eu la patience de répondre à mes innombrables questions et son disponibilité permanente malgré ses préoccupations.*

Je remercie très profondément mes Parents Abdesselam et Hafsia pour tout ses sacrifices et soutiens.

J'aimerais exprimer ma gratitude à tous les chercheurs de vérité, trop nombreux pour les citer.

GOSSA Bilal

Remerciements

Je tiens à remercier mon Dieu tout puissante de la santé de la volonté, de la patience et de courage.

Et avec mes agréables d'exprimer ma gratitude et mes sincères remerciements à tout ceux qu'ont contribue de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Je remercie en particulier Dr. MECHERAOUI Rachid mon encadreur qui m'a dirigé soigneusement avec sa grande attention et sa patience.

BENABBAS Sadek

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'explosion en temps fini des solutions pour un système d'équations vsicoélastique singulier non local en présence des termes sources généralisés, sous certaines conditions sur les fonctions de relaxation et les termes sources, l'explosion en temps fini est achevée.

Abstract

This dissertation is devoted to study the blow-up of solutions for a system of nonlocal singular viscoelastic equations in presence of generalised source term, under specified conditions on relaxation functions and source terms, the blow-up happens.

Table des matières

Notations **2**

Introduction générale **3**

1 Rappels d'analyse fonctionnelle **7**

1.1 Espace de Hilbert 7

1.1.1 Espace normé et espace de Banach 7

1.1.2 Espace de Hilbert 8

1.2 Espaces de Lebesgue 9

1.3 Espace de Sobolev 12

1.3.1 Espace de Sobolev d'ordre entier H^m 13

1.3.2 Espace de Sobolev d'ordre réel $W^{m,p}$ 13

1.4 Espace pondéré (à poids) 14

1.5 Théorèmes et lemmes outils 16

2 Explosion en temps fini des solutions pour un système d'équations viscoélastiques singulières non locales à source généralisé **19**

2.1 Propriété d'explosion en temps fini 19

Bibliographie **38**

Conclusion **41**

Notations

$\mathbb{R}$	:	Corps des nombres réels.
$\mathbb{C}$	:	Corps des nombres complexes.
$\triangle$	:	Opérateur de Laplace.
$L_p(\Omega)$	:	Espace de Lebesgue sur Ω.
$L^p_\omega(\Omega)$	:	Espace de Lebesgue pondéré sur Ω.
$\mathcal{B}(\Omega)$	:	La tribu borélienne sur Ω.
C^k	:	Espace des fonctions k fois continûment différentiables.
C^∞	=	$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k$.
C^∞_c	:	Espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à support compact dans $\mathbb{R}$ (dit aussi; espace des fonctions test) on le note aussi $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$	:	Dual topologiques de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ou espace des distributions.

Introduction générale

Les equations aux dérivées partiels ont une grande histoire qui est liée au naissance de la notion de la “dérivée” elle-même, depuis Newton et Leibnitz ces equations ont connues un intérêt incessant progressivement et en parallèle avec ce que la physique pose en terme des problèmes. Avec l'évolution de cette discipline, des différents types d'équations et problèmes sont émergés dont lequel “les problèmes mixtes non locaux” ces derniers sont issues majoritairement des différents phénomènes physique et biologiques.

Les problèmes d'évolutions de seconde ordre peuvent en générale être rencontrés dans de nombreux domaines scientifiques et de nombreux modèles d'ingénierie et sont largement appliquées dans la théorie de la transmission de la chaleur, flux du l'eau souterraine, science médicale, processus biologiques, thermoélectricité, diffusion de réaction chimique, la physique de plasma, le génie chimique, les processus de conduction thermique, la dynamique des populations et la théorie du contrôle. Voir à ce propos les travaux de Cannon [1], Shi [2], Capasso et Kunisch [3], Cahlon, Kulkarni et Shi [4], Ionkin et Moiseev [5], Andrews, Mikelić, Shi, Shillor et Wright [6], Choi et Chan [7], et Ewing et Lin [8]. La plupart de la recherche sur les problèmes mixtes non locaux a été consacrée aux solutions classiques. Plus tard, des problèmes avec des conditions intégrales pour les équations paraboliques et hyperboliques ont été étudies par Ionkin [9], Pul'kina [10, 11], Yurchuk [12], Kartynnik [13], Mesloub et Bouziani [14, 15], Mesloub et Messaoudi [16, 17], Mesloub et Lekrine [18], Mesloub [19, 20] et Kamynin [21].

Dans ce travail, nous étudions le système d'équation viscoélastique non locale singulier suivant:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int\limits_0^t g_1(t-s)\frac{1}{x}\big(xu_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}s + \frac{3}{4}u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - \frac{1}{x}(xv_x)_x + \int\limits_0^t g_2(t-s)\frac{1}{x}\big(xv_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}s + \frac{3}{4}v_t = f_2(u,v), \\ u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in (0,\alpha), \\ v(x,0) = 0,\ \ v_t(x,0) = 0,\ \ x \in (0,\alpha), \\ u(\alpha,t) = v(\alpha,t) = 0,\ \ \int\limits_0^\alpha xu\mathrm{d}x = \int\limits_0^\alpha xv\mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

telle que: $(u,v) = (u(x,t), v(x,t))$, $Q = (0,\alpha) \times (0,T)$, $\alpha < \infty$, $T < \infty$, et $g_1(\cdot), g_2(\cdot) : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$ sont des fonctions données.

Ce type de problèmes se pose dans la viscoélasticité et dans les systèmes régissant le mouvement longitudinal d'une configuration viscoélastique obéissant à un modèle de Boltzmann singulier non linéaire. La motivation de notre travail est due à quelques résultats concernant les documents de recherche suivants: Dans [22], Messaoudi a montré, dans des conditions adaptées à la fonction de relaxation, que les solutions avec explosion initiale d'énergie négative en temps fini si $p > m$ et continue d'exister si $m \geq p$, pour le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + \int\limits_0^t g(t-s) \triangle u\mathrm{d}s + u_t|u_t|^{m-2} = |u|^{p-2}u,\ \text{dans } \Omega \times \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,\infty)\ , \\ u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x),\ \ x \in \Omega. \end{cases}$$

Dans [23], un modèle décrivant le mouvement d'un corps viscoélastique bidimensionnel sur le disque de l'unité dans le cas de solutions radiales est étudié. En utilisant des estimations a priori et des arguments de densité, les auteurs prouvent l'existence et l'unicité d'une solution généralisée du problème non local

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int\limits_0^t g(t-s)\frac{1}{x}\big(xu_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}s = f(x,t,u,u_x),\ \text{da} \\ u(1,t) = 0,\ \int\limits_0^\alpha xu(x,t)\mathrm{d}x = 0,\ t \in (0,T), \\ u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \Psi(x)\ ,\ \ x \in (0,1), \end{cases}$$

où $Q = (0,1) \times (0,T)$ et f est une fonction de Lipschitz.

Plus tard dans [17], Mesloub et Messaoudi pour une large classe des données initiales ont montré l'explosion de la solution et pour des données initiales suffisamment petites ont montré l'existence globale et aussi ils ont obtenu un résultat de comportement asymptotique pour le problème singulier non local suivant:

$$\begin{cases} u_{tt} - \dfrac{1}{x}(xu_x)_x + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\frac{1}{x}\big(xu_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}s = |u|^{p-2}u, \text{ dans } Q \\ u(\alpha,t) = 0, \displaystyle\int_0^\alpha xu(x,t)\mathrm{d}x = 0, \ t \in (0,T), \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \Psi(x), \ x \in (0,1). \end{cases}$$

En effet, ils ont obtenu les propriétés d'explosion de la solution locale par la méthode de Georgiev-Todorova avec énergie initiale négative pour $a = 0$. Ensuite, Wu dans [24] pour $a = 0$, a prouvé l'explosion des solutions avec des conditions appropriées sur les données initiales en utilisant la méthode directe [25, 26] et [19].

Pour le cas des systèmes, Zrai, Draifia et Boulaaras [27] ont obtenu des résultats d'explosion pour un problème mixte non local pour le système viscoélastique singulière non linéaire:

$$\begin{cases} u_{tt} - \dfrac{1}{x}(xu_x)_x + \displaystyle\int_0^t g_1(t-s)\frac{1}{x}\big(xu_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}s + au_t = |v|^{q+1}|u|^{p} \\ v_{tt} - \dfrac{1}{x}(xv_x)_x + \displaystyle\int_0^t g_2(t-s)\frac{1}{x}\big(xv_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}s + av_t = |u|^{p+1}|v|^{q} \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = u_1(x), \ \ x \in (0,\alpha), \\ v(x,0) = v_0(x), \ \ v_t(x,0) = v_1(x), \ \ x \in (0,\alpha), \\ u(\alpha,t) = v(\alpha,t) = 0, \ \displaystyle\int_0^\alpha xu\mathrm{d}x = \int_0^\alpha xv\mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

Dans notre modèle, les termes source $|v|^{q+1}\ u\ ^{p-1}u$ et $|u|^{p+1}|v|^{q-1}v$ dans [27] ont été remplacés, respectivement, par $f_1(u,v)$ et $f_2(u,v)$, les conditions (0.0.8) et (0.0.9) sont posés identiquement nulles et la fonction d'amortissement prend la valeur $a = \dfrac{3}{4}$.

Le mémoire est composé de deux chapitres et d'une bibliographie. Nous commençons par une introduction où nous présentons l'historique du problème sujet d'étude, en suite dans le chapitre 1 nous rappelons certaines notions préliminaires qui seront utilisées par la suite dans le chapitre 2.

Au seconde chapitre nous étudions l'explosion en temps fini des solutions pour un problème mixte non local pour le système viscoélastique singulière non linéaire, pour montrer l'explosion des solutions en temps fini, nous avons utilisé la méthode directe dû à Li [28]. Cet méthode a été développée pour l'équation des ondes avec une dissipation non linéaire et une source polynomiale. Elles consistent à construire une inéquation différentielle. L'explosion en temps fini découle alors de la résolution de cette inéquation différentielle où trois cas différents sur le signe de l'énergie initiale est considéré. De plus, les estimations pour le temps d'explosion sont prouvées.

Nous donnons à la fin les différentes références utilisées dans cette thèse.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Espace normé et espace de Banach

Dans ce chapitre nous introduisons quelques espaces fonctionnels, notions, théorèmes et propriétés utiles pour la suite de travail.

Définition 1.1.1 (Espace victoriel normé). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *norme* sur E toute application $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(u, v) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
1) $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ *(séparation)*
2) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ *(inégalité triangulaire)*
3) $||\lambda u|| = |\lambda|||u||$ *(homogénéité)*
On appelle *espace vectoriel normé* (sur $\mathbb{K}$) tout couple $(E, ||\cdot||)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $||\cdot||$ une norme sur E.

Définition 1.1.2 (Espace métrique). Soit E un ensemble non vide.
On appelle *distance* sur E toute application d : $E^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(u, v, w) \in E^3$,
1) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ *(séparation)*
2) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ *(inégalité triangulaire)*
3) $d(u, v) = d(v, u)$ *(symétrie)*

On appelle *espace métrique* tout couple (E, d), où E est un ensemble non vide et d une sur distance E.

Définition 1.1.3 (Distance associée à une norme). Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. On appelle *distance associé* à $||\cdot||$ l'application d : $E^2 \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $(u, v) \in E^2$ par

$$d(u, v) = ||u - v||.$$

Définition 1.1.4 (Equivalence des normes). Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $||\cdot||$ et $||\cdot||'$ deux normes sur E.
On dit que $||\cdot||$ et $||\cdot||'$ sont *équivalentes* s'il existe $(\lambda, \mu) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ tel que pour tout $u \in E$,

$$\lambda||u|| \leq ||u||' \leq \mu||u||$$

Définition 1.1.5 (Suite de Cauchy). Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et (u_n) une suite de E.
On dit que (u_n) est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \ p \geq N \ et \ q \geq N \Rightarrow ||u_p - u_q|| < \epsilon.$$

Définition 1.1.6 (Espace complet). Soient E un espace vectoriel normé et $A \subset E$. On dit que A est *complet* si toute suite de Cauchy de A converge dans A.

Définition 1.1.7 (Espace de Banach). Soient E un espace vectoriel normé et $A \subset E$. On appelle *espace de Banach* tout espace vectoriel normé complet.

1.1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.1.8 (Produit scalaire). Soit E un espace vectoriel normé. On appelle *produit scalaire* toute application $(\cdot, \cdot) : E^2 \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $(u, v, w) \in E^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
1) $(u, v) = \overline{(v, u)}$
2) $(\lambda u + v, w) = \lambda(u, w) + (v, w)$
3) $(u, \lambda v) = \overline{\lambda}(u, v)$
4) $(u, u) \geq 0 \ et \ (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
On appelle *espace préhilbertien réel* (respectivement hermitien) tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel (respectivement $\mathbb{C}$-espace vectoriel) muni d'un produit scalaire.

Définition 1.1.9 (Espace de Hilbert). Un *espace de Hilbert* $(E, ||\cdot||_E)$ sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ tel que l'espace vectoriel normé $\big(E, ||\cdot||_E = \sqrt{(\cdot|\cdot)}\big)$ soit complet.

1.2 Espaces de Lebesgue

Définition 1.2.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$. On définit

$$L^p(\Omega,\mu) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}\ classe\ des\ fonctions\ mesurables : \left\|u\right\|_{L^p(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

et

$$L^\infty(\Omega,\mu) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}\ classe\ des\ fonctions\ mesurables : \left\|u\right\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} = \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} |u(x)| < \infty \right\},$$

où

$$\sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} |u(x)| = inf \Big\{ C \in \mathbb{R} : |u(x)| \leq C\ \mu - p.p\ dans\ \Omega \Big\}.$$

Lemme 1.2.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace $L^2(\Omega,\mu)$ est un espace de Hilbert muni de la norme $\left\|u\right\|_{L^2(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{2}}$ et de produit scalaire $(u,v)_{L^2(\Omega,\mu)} = \int_\Omega u\overline{v}\mathrm{d}\mu$ pour tout $u, v \in L^2(\Omega,\mu)$.

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Hölder). Soient $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ et $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (on dit que p et q sont conjugués).
Si $u \in L^p(\Omega,\mu)$ et $v \in L^q(\Omega,\mu)$ alors $uv \in L^1(\Omega,\mu)$ et

$$\left\|uv\right\|_1 \leq \left\|u\right\|_p \left\|v\right\|_q$$

En outre, l'égalité aura lieu si et seulement si il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2_{+*}$ tel que $\alpha\,|u|^p = \beta\,|v|^q\ \ \mu - p.p.$.
Si $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder s'appelle *inégalité de Cauchy-Schwarz*.

Théorème 1.2.2 (Inégalité de Minkowski). Si $p \geq 1$ alors, pour tous $u, v \in L^p(\Omega,\mu)$,

$$\left\|u+v\right\|_p \leq \left\|u\right\|_p + \left\|v\right\|_p$$

En outre, l'égalité aura lieu si et seulement si:
- $u = 0\ \mu - p.p.$ ou $u = \alpha v\ \mu - p.p.$, pour un $\alpha \geq 0$ si $p \geq 1$.
- $u = 0\ \mu - p.p.$ ou $u\overline{v} \geq 0\ \mu - p.p.$ si $p = 1$.

Théorème 1.2.3 (Inégalité de Young). Soient $p, q \in (0, \infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (on dit que p et q sont conjugués) et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ alors on a:

$$|uv| \leq \frac{1}{p} |u|^p + \frac{1}{q} |v|^q$$

Si on pose $c(\epsilon) = \frac{1}{q}(\epsilon p)^{\frac{-q}{p}}$ tel que $\epsilon > 0$ alors l'inégalité de Young devient:

$$|uv| \leq \epsilon |u|^p + c(\epsilon) |v|^q$$

On peut aussi l'écrire comme suit:

$$|uv| \leq \frac{1}{p} |\epsilon u|^p + \frac{p-1}{p} \left|\frac{v}{\epsilon}\right|^{\frac{p}{p-1}} \quad \textit{pour tout } p > 1$$

Proposition 1.2.1. On a pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$

$$\beta - \alpha \leq \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}. \tag{1.2.1}$$

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\alpha \leq \beta$, on a:

$$\beta^2 - \alpha^2 \geqslant (\beta - \alpha)^2$$

Et comme $\beta - \alpha \geq 0$ donc:

$$\beta - \alpha \leq \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \text{ pour tout } \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$$

□

Proposition 1.2.2. On a pour tout $(a, b, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*$

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(\beta a^2 + \frac{b^2}{\beta}\right) \tag{1.2.2}$$

Démonstration. Soit $(a, b, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$(\beta a - b)^2 = \beta^2 a^2 - 2\beta ab + b^2 \geq 0$$

Ensuite:

$$2\beta ab \leq \beta^2 a^2 + b^2$$

Donc:

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(\beta a^2 + \frac{b^2}{\beta}\right)$$

□

Proposition 1.2.3. Soient $m, n > 0$ et $q \geq 1$, on a

$$2^{1-q}(x+y)^q \leq x^q + y^q \tag{1.2.3}$$

Démonstration. Pour $q = 1$, l'inégalité (1.2.3) est bien vérifiée.

Pour $q > 1$, soit la fonction convexe définie par:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto |x|^q \end{aligned}$$

Alors on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0, 1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Donc pour $t = \dfrac{1}{2}$, on obtient

$$2^{1-q}(x+y)^q \leq x^q + y^q \tag{1.2.4}$$

Ce qui termine la preuve du proposition. $\square$

Théorème 1.2.4 (Dérivabilité d'une intégrale par rapport à un paramètre). Soient $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, où $I \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(\Omega)$ est la tribu borélienne. On suppose que $x \to f(x,t)$ est $\mathcal{B}(\Omega)$-mesurable.

Si f vérifie les hypothèses suivantes:

1) Pour tout $x \in \Omega$, $f(x, \cdot)$ est dérivable sur I,

2) Pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t) \in L^1(\mathcal{B}(\Omega), \mu)$,

3) Il existe une fonction $g \in L^1(\mathcal{B}(\Omega), \mu)$, telle que, pour tout $t \in I$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)\right| \leq \left|g(x)\right|.$$

Alors,

1) La fonction

$$t \longmapsto F(t) = \int_\Omega f(x,t) \mathrm{d}\mu(x)$$

est dérivable sur I.

2) Pour tout $t \in I$,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in L^1(\mathcal{B}(\Omega), \mu) \quad et \quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \mathrm{d}\mu(x).$$

Théorème 1.2.5 (Théorème de Fubini-Tonelli). Soient $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ et $(\Omega_2, \Sigma_2, \upsilon)$ deux espaces mesurés σ-finis.

1) ***(Tonelli)*** Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, +\infty]$ une fonction $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)$-mesurable. Alors, pour tout $x \in \Omega_1$, la fonction $f_x : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ est Σ_2-mesurable et, pour tout $y \in \Omega_2$, la fonction $f_y : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ est Σ_1-mesurable. De plus, la fonction $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = \int_{\Omega_2} f_x(y)\mathrm{d}\upsilon(y)$ est Σ_1-mesurable, et la fonction $h : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ définie par $h(x) = \int_{\Omega_1} f_y(x)\mathrm{d}\mu(x)$ est Σ_2-mesurable. Enfin, on a

$$\int_{\Omega_1} g(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}(\mu \otimes \upsilon)(x,y) = \int_{\Omega_2} h(y)\mathrm{d}\upsilon(y),$$

c'est-à-dire,

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}\upsilon(x) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}(\mu \otimes \upsilon)(x,y) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\upsilon(y).$$

2) ***(Fubini)*** Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}$ une fonction $(\mu \otimes \upsilon)$-intégrable. Alors, pour μ-presque tout $x \in \Omega_1$, la fonction $f_x : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ est υ-intégrable et, pour υ-presque tout $y \in \Omega_2$, la fonction $f_y : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ est μ-intégrable. De plus, la fonction $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ définie μ-presque partout par $g(x) = \int_{\Omega_2} f_x(y)\mathrm{d}\upsilon(y)$ est μ-intégrable, et la fonction $h : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ définie υ-presuqe partout par $h(x) = \int_{\Omega_1} f_y(x)\mathrm{d}\mu(x)$ est υ-intégrable. Enfin, on a

$$\int_{\Omega_1} g(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}(\mu \otimes \upsilon)(x,y) = \int_{\Omega_2} h(y)\mathrm{d}\upsilon(y),$$

c'est-à-dire,

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}\upsilon(x) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}(\mu \otimes \upsilon)(x,y) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\upsilon(y).$$

1.3 Espace de Sobolev

Les *espaces de Sobolev* sont des espaces vectoriels normés qui sont bien adaptés à la résolution de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles.

1.3.1 Espace de Sobolev d'ordre entier H^m

Définition 1.3.1 (Espace de Sobolev H^m). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N}$, on appelle *espace de Sobolev* d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$ l'ensemble

$$H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ \alpha_j \in \mathbb{N},\ |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n,\ et\ D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Définition 1.3.2 (Espace de Sobolev H_0^1). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, et on le note aussi $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.

Quelques propriétés des espaces $H^m(\Omega)$

1) On munit l'espace $H^m(\Omega)$ d'un produit scalaire

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},\ \forall u, v \in H^m(\Omega) \\ &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

2) On associe l'espace $H^m(\Omega)$ à la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},\ \forall u \in H^m(\Omega).$$

3) L'espace $H^m(\Omega)$ est un *espace de Hilbert.*

4) Pour $m = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour tout $m > n$ on a l'injection continue $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^n(\Omega) \hookrightarrow ... \hookrightarrow H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

1.3.2 Espace de Sobolev d'ordre réel $W^{m,p}$

Définition 1.3.3 (Espace de Sobolev $W^{m,p}$). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 1$ et $p \in [1; +\infty]$, on définit l'espace

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N},\ |\alpha| \leq m\}$$

où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ \alpha_j \in \mathbb{N},\ |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n,\ et\ D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Définition 1.3.4 (Espace de Sobolev $W_0^{m,p}$). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m > 0$ et $p \in [1; +\infty]$, on définit le sous-espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ et on le note aussi $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$.

Quelques propriétés des espaces $W^{m,p}(\Omega)$

1) L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}$$

2) L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

3) Pour $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega) = H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

4) Pour $m = 0$, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

1.4 Espace pondéré (à poids)

Définition 1.4.1 (Fonction poids). On appelle un *poids* toute fonction w: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ localement intégrable presque partout pour $x \in \mathbb{R}^n$.

Tout poids w donne une naissance à une mesure sur un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ par intégration. Cette mesure ainsi est dénotée par w.

Donc , $w(E) = \displaystyle\int_E w\mathrm{d}x$ pour l'ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.2 (Espace pondéré). Soient w un poids et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Pour $0 < p < \infty$, on définit $L^p_w(\omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω telle que:

$$\|f\|_{L^p_w(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \, w\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

On appelle *espace pondéré* tout couple $(L^p_w(\Omega), \|\cdot\|_{L^p_w(\Omega)})$.

On définit aussi wk-$L^1_w(\omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables f sur Ω qui satisfait

$$\|f\|_{wk\text{-}L^1_w(\Omega)} = \sup_{\lambda > 0} \lambda w(\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}) < \infty.$$

Définition 1.4.3. Soient $L^p_x = L^p_x((0, \alpha))$ l'*espace pondéré de Banach* équipé de la norme suivante:

$$\|u\|_{L^p_x} = \left(\int_0^\alpha x \, |u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}},$$

$H = L^2_x((0,\alpha))$ l'espace de Hilbert des fonctions intégrales carrées ayant la norme finie

$$\|u\|_H = \Big(\int_0^\alpha xu^2 \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$V = V^{1,1}_x((0,\alpha))$ l'espace de Hilbert équipé de la norme

$$\|u\|_V = \left(\|u\|^2_H + \|u_x\|^2_H\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$V_0 = \{u \in V, u(\alpha) = 0\}.$$

Lemme 1.4.1 (**Inégalité de type Poincaré**). Pour tout v dans V_0 on a:

$$\int_0^\alpha xv^2(x,t)\mathrm{d}x \leq C_p \int_0^\alpha xv^2_x(x,t)\mathrm{d}x \tag{1.4.1}$$

Démonstration. Soit $v \in V_0$ une fonction différentiable qui satisfait les conditions aux limites de système d'équations (0.0.1)-(0.0.5), on a

$$0 = \int_0^\alpha (xv^2(x,t))_x \mathrm{d}x = \int_0^\alpha (v^2(x,t) + 2xv(x,t)v_x(x,t))\mathrm{d}x \tag{1.4.2}$$

d'où

$$\int_0^\alpha xv^2(x,t)\mathrm{d}x \leq \alpha \int_0^\alpha v^2(x,t)\mathrm{d}x = -2\int_0^\alpha xv(x,t)v_x(x,t))\mathrm{d}x$$

Utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\int_0^\alpha xv^2(x,t)\mathrm{d}x \leq \left|2\alpha\int_0^\alpha xv(x,t)v_x(x,t))\mathrm{d}x\right| \leq 2\alpha^2\int_0^\alpha xv^2_x(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\alpha xv^2(x,t)\mathrm{d}x,$$

Donc

$$\int_0^\alpha xv^2(x,t)\mathrm{d}x \leq C_p \int_0^\alpha xv^2_x(x,t)\mathrm{d}x$$

telle que $C_p = 4\alpha^2$. □

1.5 Théorèmes et lemmes outils

Lemme 1.5.1. Soient $\delta > 0$ et $B(t) \in C^2(0, \infty)$ une fonction non-négative qui vérifié

$$B''(t) - 4(\delta + 1)B'(t) + 4(\delta + 1)B(t) \geq 0 \tag{1.5.1}$$

Si

$$B'(0) > r_2 B(0) + k_0 \tag{1.5.2}$$

Alors:

$$B'(t) > k_0$$

Pour $t > 0$, où k_0 est une constante et r_2 est la plus petite racine de l'équation

$$r^2 - 4(\delta + 1)r + 4(\delta + 1) = 0$$

Démonstration. Soient: $\delta > 0$, $B(t) \in C^2(0, \infty)$ vérifiant (1.5.1) et r_1 la plus grande racine de l'équation: $r^2 - 4(\delta + 1)r + 4(\delta + 1) = 0$.
Alors l'inégalité (1.5.1) est équivalent à

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - r_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - r_2\right)B(t) \geq 0$$

On intègre sur $(0, t)$, on obtient

$$B'(t) \geq r_2 B(t) + (B'(0) - r_2 B(0))e^{r_1 t} \tag{1.5.3}$$

Par la condition (1.5.2), on trouve

$$B'(t) > k_0 \; pour \; t > 0. \tag{1.5.4}$$

□

Lemme 1.5.2. Si $J(t)$ est une fonction non-croissante sur $[t_0, \infty)$ et satisfait l'inégalité différentielle

$$J'^2(t) \geq a + bJ^{2+\frac{1}{\gamma}}(t), \quad \text{pour tout} \quad t \geq t_0 \tag{1.5.5}$$

où $a > 0$ *et* $b \in \mathbb{R}$, alors il existe un temps fini T^* tel que $\lim\limits_{\substack{< \\ t \to T^{*-}}} J(t) = 0$ et la borne supérieure de T^* est donnée respectivement, par les cas suivants:

(i) Si $b < 0$ et $J(t_0) < min\left\{1, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}\right\}$ alors

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} ln \frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}}{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} - J(t_0)}. \tag{1.5.6}$$

(ii) Si $b = 0$ alors

$$T^* \leq t_0 + \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}. \tag{1.5.7}$$

(iii) Si $b > 0$ alors

$$T^* \leq \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}. \tag{1.5.8}$$

où

$$T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\gamma+1}{2\gamma}} \frac{\gamma}{c\sqrt{a}} \Big(1 - \big(1 + cJ(t_0)\big)^{-\frac{1}{2\gamma}}\Big) \tag{1.5.9}$$

et

$$c = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma}{2\gamma+1}} \tag{1.5.10}$$

Démonstration. Supposons que (i) tient, alors de (1.5.5) on a:

$$a + bJ^2(t) \leq J'^2(t),$$

Ensuite, on peut écrire

$$(\sqrt{a})^2 - \left(\sqrt{-bJ^2(t)}\right)^2 \leq J'^2(t)$$

Moyennant l'inégalité (1.2.1), on obtient

$$\sqrt{a} - \sqrt{-bJ^2(t)} \leq \sqrt{(\sqrt{a})^2 - \left(\sqrt{-bJ^2(t)}\right)^2} \leq |J'(t)|$$

Par transitivité, on a

$$\sqrt{a} - \sqrt{-b}\,|J(t)| \leq |J'(t)|$$

En vertu des propriétés de la fonction $J(t)$, on obtient

$$J'(t) \leq -\sqrt{a} + \sqrt{-b}J(t) \tag{1.5.11}$$

On intègre sur $[t_0, t)$, on trouve

$$J(t) \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} + \Big(-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} + J(t_0) \Big) e^{(t-t_0)\sqrt{-b}}$$

Utilisant (i), on déduit que $\exists T^* = T(t_0) > 0$ telle que

$$\lim_{\substack{< \\ t \to T^*}} J(t) = 0, \quad \text{où} \quad T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} ln \frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}}{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} - J(t_0)}$$

Si $b = 0$ alors l'inégalité différentielle (1.5.11) devient

$$J'(t) \leq -\sqrt{a}$$

On intègre sur $[t_0, t)$, on obtient

$$J(t) \leq -\sqrt{a}(t - t_0) + J(t_0)$$

Donc $\exists T^* = T(t_0) > 0$ telle que

$$\lim_{\substack{< \\ t \to T^*}} J(t) = 0 \quad \text{où} \quad T^* \leq t_0 + \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}$$

Si $b > 0$ alors de l'inégalité différentielle (1.5.5), on a

$$\sqrt{J'^2(t)} \geq \sqrt{a + bJ^{2+\frac{1}{\gamma}}(t)}$$

D'après les propriétés de la fonction $J(t)$, on a

$$-J'(t) \geq \sqrt{a + bJ^{2+\frac{1}{\gamma}}(t)}$$

d'où

$$J'(t) \leq -\sqrt{a\Big(1 + [cJ(t)]^{\frac{2\gamma+1}{\gamma}}\Big)},$$

telle que $c = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma}{2\gamma+1}}$.

En utilisant l'inégalité (1.2.3) pour $q = \dfrac{2\gamma+1}{\gamma}$ et avec quelques manipulations, on obtient

$$\frac{1}{c}(1 + cJ(t))^{-\frac{2\gamma+1}{2\gamma}} cJ'(t) \leq -2^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \sqrt{a}$$

On intègre sur (t_0, t), on obtient:

$$J(t) \leq \frac{1}{c} \left\{ \left[2^{-\frac{3\gamma+1}{2\gamma}} (t - t_0) \frac{c\sqrt{a}}{\gamma} + (1 + cJ(t_0))^{-\frac{1}{2\gamma}} \right]^{-2\gamma} - 1 \right\}$$

Alors $\exists T^* = T(t_0) > 0$ telle que

$$\lim_{\substack{< \\ t \to T^*}} J(t) = 0 \quad \text{où} \quad T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\gamma+1}{2\gamma}} \frac{\gamma}{c\sqrt{a}} \Big(1 - \big(1 + cJ(t_0)\big)^{-\frac{1}{2\gamma}} \Big) \tag{1.5.12}$$

Ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

Chapitre 2

Explosion en temps fini des solutions pour un système d'équations viscoélastiques singulières non locales à source généralisé

2.1 Propriété d'explosion en temps fini

Dans cette section, on considère la propriété d'explosion en temps fini de la solution du problème (0.0.1)-(0.0.5), pour établir notre résultat on pose d'autres hypothèses sur g_1, g_2, f_1 et f_2:

(S_1) $g_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ des fonctions différentiables décroissantes, $\quad (i = 1, 2)$.

(S_2) $\exists \beta \in (-\infty, 0) \cup (0, 4)$ telle que: $\quad 1 - \left(1 + \frac{1}{2\beta}\right) \int\limits_0^t g_i(s)\mathrm{d}s = l_i > 0, \quad (i = 1, 2)$.

(S_3) $\exists f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable vérifiant pour toutes z_1, z_2 dans $\mathbb{R}$:

- $$\frac{3}{16} \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_i} = f_i(z_1, z_2), \tag{2.1.1}$$

- $$\sum_{i=1}^{2} z_i f_i\big(z_1, z_2\big) = \frac{3}{5} f(z_1, z_2), \tag{2.1.2}$$

- $f_i(z_1,z_2) \leq |z_i|$ et pour toutes fonctions $u,v:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, il existe une fonction $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} g(z_1,z_2) &= \int_0^t xf\big(u(x,s),v(x,s)\big)\mathrm{d}s \\ \text{et la fonction } t \mapsto &\int_0^\alpha \left[\frac{1}{4}x(z_1^2+z_2^2) - \frac{3}{10}g(z_1,z_2)\right]\mathrm{d}x \text{ soit croissante,} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

telle que: $(z_1,z_2) = \big(u(x,t),v(x,t)\big)$ et $(i=1,2)$.

Définition 2.1.1 (Explosion en temps fini). On dit que la solution (u,v) du problème (0.0.1)-(0.0.5) explose en temps fini s'il existe un temps fini T^* telle que

$$\lim_{t\to T^{*-}} \left(\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\mathrm{d}x\right)^{-1} = 0 \tag{2.1.4}$$

Définition 2.1.2 (Fonction d'énergie). Soit (u,v) la solution de système (0.0.1)-(0.0.5), on définit sur $[0,t)$ la fonction d'énergie $E(t)$ par la formule suivante

$$\begin{aligned} E(t) = &\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x - \frac{3}{16}\int_0^\alpha xf\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x \\ &+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(g_2\circ v_x)(t) \\ &+\frac{1}{2}\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(g_1\circ u_x)(t) \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

où, pour tout $u \in C((0,T^*);V_0)\cap C^1((0,T^*);H)$, et $T^*>0$ assez plus petit,

$$\begin{aligned} (g_1\circ u_x)(t) &= \int_0^\alpha\int_0^t xg(t-s)|u_x(x,t)-u_x(x,s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ (g_2\circ v_x)(t) &= \int_0^\alpha\int_0^t xg(t-s)|v_x(x,t)-v_x(x,s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Lemme 2.1.1. Supposons que (S_1) et (2.1.1) sont vérifiées, et soit (u,v) la solution de système (0.0.1)-(0.0.5), alors $E(t)$ est une fonction non-croissante sur $[0,t)$ et on a:

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(g_1'\circ u_x)(t) - \frac{1}{2}g_1(t)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{2}(g_2' \circ v_x)(t) - \frac{1}{2}g_2(t)\int_0^\alpha x v_x^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.7}$$
$$-\frac{3}{4}\int_0^\alpha x u_t^2(x,t)\mathrm{d}x - \frac{3}{4}\int_0^\alpha x v_t^2(x,t)\mathrm{d}x \leq 0$$

Démonstration. Multipliant l'équation (0.0.1) par le terme $xu_t(x,t)$ et l'équation (0.0.2) par le terme $xv_t(x,t)$, résumions, intégrions le résultat sur $(0,\alpha)$ et moyennant le théorème 1.2.5, on obtient:

$$\int_0^\alpha x u_t(x,t)u_{tt}(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v_t(x,t)v_{tt}(x,t)\mathrm{d}x$$
$$-\int_0^\alpha \big(xu_x(x,t)\big)_x u_t(x,t)\mathrm{d}x - \int_0^\alpha \big(xv_x(x,t)\big)_x v_t(x,t)\mathrm{d}x$$
$$+\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)\big(xu_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}s u_t(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^\alpha\int_0^t g_2(t-s)\big(xv_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}s v_t(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.8}$$
$$+\frac{3}{4}\int_0^\alpha x u_t^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_0^\alpha x v_t^2(x,t)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\alpha x v_t(x,t) f_2\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x + \int_0^\alpha x u_t(x,t) f_1\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x$$

Simplifions le résultat terme par terme.

On a

$$\int_0^\alpha x u_{tt}(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^\alpha \frac{1}{2}x\frac{\partial u_t^2(x,t)}{\partial t}dx$$

Grâce au théorème 1.2.4, on obtient

$$\int_0^\alpha x u_{tt}(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\alpha x u_t^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.9}$$

De manière analogue, on obtient aussi

$$\int_0^\alpha x v_{tt}(x,t)v_t(x,t)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\alpha x v_t^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.10}$$

En utilisant l'intégration par partie par rapport à la variable d'espace x, et la condition $u(\alpha,t)=0$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \big(xu_x(x,t)\big)_x u_t(x,t)\mathrm{d}x &= xu_x(x,t)u(x,t)\Big|_0^\alpha - \int_0^\alpha xu_x(x,t)u_{xt}(x,t)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\alpha x\frac{\partial u_x^2(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Moyennant le théorème 1.2.4, on trouve

$$-\int_0^\alpha \big(xu_x(x,t)\big)_x u_t(x,t)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.11}$$

De façon similaire, on obtient aussi

$$-\int_0^\alpha \big(xv_x(x,t)\big)_x v_t(x,t)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.12}$$

On a par le théorème 1.2.5

$$\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)\big(xu_x(x,s)\big)_x\mathrm{d}s u_t(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^t g_1(t-s)\bigg(\int_0^\alpha \big(xu_x(x,s)\big)_x u_t(x,t)\mathrm{d}x\bigg)\mathrm{d}s$$

À l'aide d'une intégration par partie par rapport à la variable d'espace x et la condition $u(\alpha,t)=0$, on obtient

$$\int_0^\alpha \big(xu_x(x,s)\big)_x u_t(x,t)\mathrm{d}x = -\int_0^\alpha xu_x(x,s)u_{xt}(x,t)\mathrm{d}x$$

On remarque que

$$xu_x(x,s)u_{xt}(x,t) = -x\frac{1}{2}\frac{\partial\big[u_x(x,s)-u_x(x,t)\big]^2 - u_x^2(x,t)}{\partial t}$$

En vertu du théorème 1.2.4 et le fait que $\int_0^t g_1(t-s)\mathrm{d}s = \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s$, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)\big(xu_x(x,s)\big)_x\mathrm{d}s u_t(x,t)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^t g_1(t-s)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\alpha x\big[u_x(x,s)-u_x(x,t)\big]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\Big(\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Moyennant la loi de dérivation en chaîne, on a que

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\Big(g_1(t-s)\int_0^\alpha x(u_x(x,s)-u_x(x,t))^2\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{\partial g_1(t-s)}{\partial t}\Big(\int_0^\alpha x(u_x(x,s)-u_x(x,t))^2\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s + \int_0^t g_1(t-s)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\alpha x(u_x(x,s)-u_x(x,t))^2\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s$$

Il vient ensuite, grâce aux théorème 1.2.4 et théorème 1.2.5

$$\int_0^t g_1(t-s)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\alpha x(u_x(x,s)-u_x(x,t))^2\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)x(u_x(x,s)-u_x(x,t))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\Big) - \Big(\int_0^\alpha\int_0^t g_1'(t-s)x(u_x(x,s)-u_x(x,t))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\Big)$$

Utilisant la notation (2.1.6), on obtient

$$\int_0^t g_1(t-s)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\alpha x(u_x(x,s)-u_x(x,t))^2\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s = \frac{\partial(g_1\circ u_x)(t)}{\partial t} - (g_1'\circ u_x)(t) \tag{2.1.14}$$

Au moyen de la loi de dérivation en chaîne, on a

$$\Big(\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x\Big) - g_1(t)\Big(\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x\Big) \tag{2.1.15}$$

On substitue (2.1.14) et (2.1.15) dans (2.1.13), on obtient

$$\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)\big(xu_x(x,s)\big)_x\mathrm{d}s u_t(x,t)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(g_1\circ u_x)(t) - \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x\Big)\Big] + \frac{1}{2}\Big[g_1(t)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x\Big] - \frac{1}{2}(g_1'\circ u_x)(t) \tag{2.1.16}$$

Effectuant un raisonnement analogue au précédent, on obtient aussi

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha\int_0^t g_2(t-s)\big(xv_x(x,s)\big)_x \mathrm{d}s v_t(x,t)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(g_2\circ v_x)(t)\\ -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\mathrm{d}x\right)\right] &+ \frac{1}{2}\left[g_2(t)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\mathrm{d}x\right]\\ &-\frac{1}{2}(g_2'\circ v_x)(t)\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Utilisant l'hypothèse (2.1.1), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha xu_t(x,t)f_1\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x &+ \int_0^\alpha xv_t(x,t)f_2\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{16}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\alpha xf(u(x,t),v(x,t))\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

On substitue (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.16), (2.1.17) et (2.1.18) par son équivalent dans (2.1.8), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(g_1\circ u_x)(t)\right.\\ &-\frac{1}{2}\left(\int_0^1 g_1(s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{2}\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\mathrm{d}x\\ &+\frac{1}{2}(g_2\circ v_x)(t) - \frac{1}{2}\left(\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\mathrm{d}x\right)\\ &\left.+\frac{1}{2}\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\mathrm{d}x - \frac{3}{16}\int_0^\alpha xf(u(x,t),v(x,t))\mathrm{d}x\right]\\ &= -\frac{1}{2}g_1(t)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(g_1'\circ u_x)(t) - \frac{3}{4}\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\mathrm{d}x\\ &-\frac{3}{4}\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}g_2(t)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(g_2'\circ v_x)(t)\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(t)}{\partial t} &= \frac{1}{2}(g_1'\circ u_x)(t) - \frac{1}{2}g_1(t)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x - \frac{3}{4}\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\mathrm{d}x\\ &+\frac{1}{2}(g_2'\circ v_x)(t) - \frac{1}{2}g_2(t)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\mathrm{d}x - \frac{3}{4}\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Utilisons l'hypothèse (S_1) et les notations (2.1.6), on déduit que: $\dfrac{\partial E(t)}{\partial t} \leq 0$.
Ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

Remarque 2.1.1. On intègre (2.1.19) sur $(0,t)$, on obtient

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t (g_1' \circ u_x)(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^t g_1(s)\int_0^\alpha x u_x^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &\frac{1}{2}\int_0^t (g_2' \circ v_x)(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^t g_2(s)\int_0^\alpha x v_x^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &-\frac{3}{4}\int_0^t\int_0^\alpha x u_s^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \frac{3}{4}\int_0^t\int_0^\alpha x v_s^2(x,s)\mathrm{d}x + E(0) \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Maintenant, soit (u,v) la solution de système d'équations (0.0.1)-(0.0.5). On définit

$$H(t) = \int_0^\alpha x u^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^\alpha x v^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int_0^t\int_0^\alpha x u^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{2.1.21}$$

Lemme 2.1.2. Supposons que (S_1), (S_2) et (2.1.1) tient, alors on a

$$\begin{aligned} H''(t) + 8E(0) &\geq 6\Big[\|u_t(x,t)\|_H^2 + \|v_t(x,t)\|_H^2\Big] \\ &+6\Big[\int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s + \int_0^t \|v_s(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s\Big]. \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Démonstration. On dérive la formule (2.1.21) par rapport à la variable du temps t, on obtient

$$H'(t) = 2\int_0^\alpha x u(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x + 2\int_0^\alpha x v(x,t)v_t(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^\alpha x u^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^\alpha x v^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.23}$$

Par une autre dérivation encore par rapport à la variable du temps t, on obtient

$$\begin{aligned} H''(t) &= 2\int_0^\alpha x u_t^2(x,t)dx + 2\int_0^\alpha x u(x,t)u_{tt}(x,t)dx + 2\int_0^\alpha x u(x,t)u_t(x,t)dx \\ &+2\int_0^\alpha x v_t^2(x,t)dx + 2\int_0^\alpha x v(x,t)v_{tt}(x,t)dx + 2\int_0^\alpha x v(x,t)v_t(x,t)dx \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

En multipliant l'équation (0.0.1) par le terme $2xu(x,t)$ et l'équation (0.0.2) par le terme $2xv(x,t)$, intégrions le résultat sur $(0,\alpha)$ et moyennant le théorème 1.2.5, on obtient

$$2\int_0^\alpha x u(x,t)u_{tt}(x,t)\mathrm{d}x = -2\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)\big(xu_x(x,s)\big)_x\mathrm{d}s u(x,t)\mathrm{d}x$$

$$+2\int_0^\alpha \big(xu_x(x,t)\big)_x u(x,t)\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int_0^\alpha xu(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.25}$$
$$+2\int_0^\alpha xu(x,t)f_1\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x$$

et

$$2\int_0^\alpha xv(x,t)v_{tt}(x,t)\mathrm{d}x = -2\int_0^\alpha\int_0^t g_2(t-s)\big(xv_x(x,s)\big)_x\mathrm{d}s v(x,t)\mathrm{d}x$$
$$+2\int_0^\alpha \big(xv_x(x,t)\big)_x v(x,t)\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int_0^\alpha xv(x,t)v_t(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.26}$$
$$+2\int_0^\alpha xv(x,t)f_2\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x$$

Simplifions les formules (2.1.25) et (2.1.26) terme par terme.

Par une intégration par partie par rapport à la variable d'espace x et la condition $u(\alpha,t)=0$, on obtient

$$\int_0^\alpha \big(xu_x(x,t)\big)_x u(x,t)\mathrm{d}x = -\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.27}$$

Par le théorème 1.2.5, on a que

$$-\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)\big(xu_x(x,s)\big)_x\mathrm{d}s u(x,t)\mathrm{d}x = -\int_0^t g_1(t-s)\int_0^\alpha \big(xu_x(x,s)\big)_x u(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

On intègre par partie par rapport à la variable d'espace x et la condition $u(\alpha,t)=0$, on obtient

$$-\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)\big(xu_x(x,s)\big)_x\mathrm{d}s u(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)u_x(x,s)u_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{2.1.28}$$

On substitue (2.1.27) et (2.1.28) dans (2.1.25), on trouve

$$2\int_0^\alpha xu(x,t)u_{tt}(x,t)\mathrm{d}x = 2\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)u_x(x,s)u_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$-2\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int_0^\alpha xu(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.29}$$
$$+2\int_0^\alpha xu(x,t)f_1\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x$$

De façon analogue, on obtient

$$\begin{aligned}2\int_0^\alpha xv(x,t)v_{tt}(x,t)\mathrm{d}x &= 2\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)v_x(x,s)v_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &-2\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\mathrm{d}x-\frac{3}{2}\int_0^\alpha xv(x,t)v_t(x,t)\mathrm{d}x\\ &+2\int_0^\alpha xv(x,t)f_2\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.1.30}$$

On substitue (2.1.29) et (2.1.30) dans (2.1.24) et utilisant l'hypothèse (2.1.2), on obtient

$$\begin{aligned}H''(t) &= 2\Big[\big\|u_t(x,t)\big\|_H^2+\big\|v_t(x,t)\big\|_H^2\Big]-2\Big[\big\|u_x(x,t)\big\|_H^2+\big\|v_x(x,t)\big\|_H^2\Big]\\ &+2\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)u_x(x,s)u_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+2\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)v_x(x,s)v_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &\frac{6}{5}\int_0^\alpha xf\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^\alpha xu(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^\alpha xv(x,t)v_t(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.1.31}$$

En multipliant (2.1.5) et (2.1.20) par 8 et par substitution, on obtient

$$\begin{aligned}&8E(0)+4\int_0^t(g_1'\circ u_x)(s)\mathrm{d}s+4\int_0^t(g_2'\circ v_x)(s)\mathrm{d}s\\ &-4\int_0^t g_1(s)\big\|u_x(x,s)\big\|_H^2\mathrm{d}s-4\int_0^t g_2(s)\big\|v_x(x,s)\big\|_H^2\mathrm{d}s\\ &-6\int_0^t\big\|u_s(x,s)\big\|_H^2\mathrm{d}s-6\int_0^t\big\|v_s(x,s)\big\|_H^2\mathrm{d}s\\ &=4\big\|u_t(x,t)\big\|_H^2+4\big\|v_t(x,t)\big\|_H^2\\ &+4\left(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\big\|u_x(x,t)\big\|_H^2+4(g_1\circ u_x)(t)\\ &+4\left(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\big\|v_x(x,t)\big\|_H^2+4(g_2\circ v_x)(t)\\ &-\frac{3}{2}\int_0^\alpha xf\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.1.32}$$

En sommant (2.1.31) et (2.1.32) membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned}
H''(t) = 6\left[\left\|u_t(x,t)\right\|_H^2 + \left\|v_t(x,t)\right\|_H^2\right] - 8E(0) + 6\left[\int_0^t \left\|u_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \left\|v_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s\right] \\
-2\left[\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2 + \left\|v_x(x,t)\right\|_H^2\right] - \frac{3}{10}\int_0^\alpha x f\big(u(x,t),v(x,t)\big)\mathrm{d}x \\
+2\left[\int_0^t\int_0^\alpha x g_1(t-s)u_x(x,s)u_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int_0^t\int_0^\alpha x g_2(t-s)v_x(x,s)v_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right] \qquad (2.1.33) \\
-4\left[\int_0^t (g_1'\circ u_x)(s)\mathrm{d}s + \int_0^t (g_2'\circ v_x)(s)\mathrm{d}s\right] + 4\left[\int_0^t g_1(s)\left\|u_x(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s + \int_0^t g_2(s)\left\|v_x(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s\right] \\
+4\left[(g_1\circ u_x)(t) + (g_2\circ v_x)(t)\right] + \frac{1}{2}\left[\int_0^\alpha x\Big[u(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x + v(x,t)v_t(x,t)\Big]\mathrm{d}x\right] \\
+4\left[\left(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2 + \left(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\left\|v_x(x,t)\right\|_H^2\right]
\end{aligned}$$

On utilisant l'hypothèse (S_1) et (2.1.6), on a

$$\begin{aligned}
-4\left[\int_0^t (g_1'\circ u_x)(s)\mathrm{d}s + \int_0^t (g_2'\circ v_x)(s)\mathrm{d}s\right] \\
+4\left[\int_0^t g_1(s)\left\|u_x(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s + \int_0^t g_2(s)\left\|v_x(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s\right] \geq 0
\end{aligned}$$

Et d'autres part, à l'aide de l'hypothèse (2.1.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha x\Big[u(x,t)u_t(x,t) + v(x,t)v_t(x,t)\Big]\mathrm{d}x \geq \\
\int_0^\alpha x\Big[u(x,t)f_1\big(u(x,t),v(x,t)\big) + v(x,t)f_2\big(u(x,t),v(x,t)\big)\Big]\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Alors l'estimation (2.1.33) devient

$$\begin{aligned}
H''(t) + 8E(0) \geq 6\left[\left\|u_t(x,t)\right\|_H^2 + \left\|v_t(x,t)\right\|_H^2\right] + 6\left[\int_0^t \left\|u_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \left\|v_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s\right] \\
+2\left[\left(1-2\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2 + \left(1-2\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\left\|v_x(x,t)\right\|_H^2\right] \qquad (2.1.34)
\end{aligned}$$

$$+2\left[\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)u_x(x,s)u_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)v_x(x,s)v_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right]$$
$$+4\left[(g_1\circ u_x)(t)+(g_2\circ v_x)(t)\right]$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)u_x(x,s)u_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s&=\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)u_x^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+\int_0^t\int_0^\alpha\sqrt{xg_1(t-s)}u_x(x,t)\sqrt{xg_1(t-s)}\left[u_x(x,s)-u_x(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{2.1.35}$$

On utilisant l'inégalité (1.2.2), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^\alpha\sqrt{xg_1(t-s)}u_x(x,t)\sqrt{xg_1(t-s)}\left[u_x(x,s)-u_x(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&\leq\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\alpha\left[\frac{xg_1(t-s)u_x^2(x,t)}{\beta}+\beta xg_1(t-s)[u_x(x,s)-u_x(x,t)]^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Et comme l'estimation et majorée par une quantité de signe positive, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^\alpha\sqrt{xg_1(t-s)}u_x(x,t)\sqrt{xg_1(t-s)}\left[u_x(x,s)-u_x(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&\geq-\frac{1}{2\beta}\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2-\frac{\beta}{2}(g_1\circ u_x)(t)\end{aligned}$$

On substitue dans (2.1.35), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)u_x(x,s)u_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s&\geq\left(1-\frac{1}{2\beta}\right)\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2\\&-\frac{\beta}{2}(g_1\circ u_x)(t)\end{aligned}\tag{2.1.36}$$

On procède le même raisonnement précédent, on obtient aussi

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)v_x(x,s)v_x(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s&\geq\left(1-\frac{1}{2\beta}\right)\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\left\|v_x(x,t)\right\|_H^2\\&-\frac{\beta}{2}(g_2\circ v_x)(t)\end{aligned}\tag{2.1.37}$$

On substitue (2.1.36) et (2.1.37) dans (2.1.34), on obtient

$$H''(t) + 8E(0) \geq 6\Bigg[\left\|u_t(x,t)\right\|_H^2 + \left\|v_t(x,t)\right\|_H^2\Bigg] + 6\Bigg[\int_0^t \left\|u_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \left\|v_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s\Bigg]$$

$$+(4-\beta)\Bigg[(g_1 \circ u_x)(t) + (g_2 \circ v_x)(t)\Bigg] \tag{2.1.38}$$

$$+2\Bigg[\Bigg(1 - \Big(1 + \frac{1}{2\beta}\Big)\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Bigg)\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2 + \Bigg(1 - \Big(1 + \frac{1}{2\beta}\Big)\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Bigg)\left\|v_x(x,t)\right\|_H^2$$

On utilisant l'hypothèse (S_2), on obtient

$$H''(t) + 8E(0) \geq 6\Bigg[\left\|u_t(x,t)\right\|_H^2 + \left\|v_t(x,t)\right\|_H^2\Bigg] + 6\Bigg[\int_0^t \left\|u_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \left\|v_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s\Bigg]$$

Ce qui achève la preuve du lemme. □

Lemme 2.1.3. Supposons que (S_1) tient et l'une ou l'autre des conditions suivantes est satisfaite:

(i) $E(0) < 0$,

(ii) $E(0) = 0$, et

$$H'(0) > 0 \tag{2.1.39}$$

(iii) $E(0) > 0$ et $H'(0) > 2\Bigg[H(0) + E(0)\Bigg]$

$$Alors \quad H'(t) \geq 0, \quad pour \quad t > t_0, \tag{2.1.40}$$

et

$$t^* = max\left\{0, \frac{H'(0)}{4E(0)}\right\}, \tag{2.1.41}$$

où $t_0 = t^*$ dans le cas (i) et $t_0 = 0$ dans les cas (ii) et (iii).

Démonstration. (i) Si $E(0) < 0$, alors de (2.1.22) on a:

$$H''(t) \geq -8E(0)$$

On intègre sur $[0,t)$ on obtient

$$H'(t) \geq H'(0) - 8E(0)t,$$

Soit $t \geq \dfrac{H'(0)}{8E(0)}$, alors on obtient

$$H'(t) \geq 0$$

Et comme $t \geq 0$ alors pour $t \geq t^*$ (2.1.40) est vérifiée.

$$\text{où} \quad t^* = max\left\{0, \frac{H'(0)}{8E(0)}\right\},$$

(ii) Si $E(0) = 0$, on a de (2.1.22)

$$H''(t) \geq 0$$

On intègre sur $[0,t)$, on obtient

$$H'(t) \geq H'(0)$$

Supposons que (2.1.39) tient, alors on a

$$H'(t) \geq 0 \quad pour \quad t \geq 0 \tag{2.1.42}$$

(iii) On remarque que

$$\begin{aligned} 2\int_0^\alpha \int_0^t xu(x,s)u_s(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x &= \int_0^\alpha \int_0^t x\frac{\partial u^2(x,s)}{\partial s}\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\alpha x \int_0^t \frac{\partial u^2(x,s)}{\partial s}\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\alpha x\ u^2(x,s)\big|_0^t\,\mathrm{d}x \\ &= \left\|u(x,t)\right\|_H^2 - \left\|u_0(x)\right\|_H^2 \end{aligned}$$

Par la condition (0.0.4), on obtient

$$\left\|u(x,t)\right\|_H^2 = 2\int_0^\alpha \int_0^t xu(x,s)u_s(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \tag{2.1.43}$$

De façon analogue, on obtient aussi

$$\|v(x,t)\|_H^2 = 2\int_0^\alpha\int_0^t xv(x,s)v_s(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

On utilisant l'inégalité de Young et en vertu du théorème 1.2.5, on obtient

$$2\int_0^\alpha\int_0^t \sqrt{x}u(x,s)\sqrt{x}u_s(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \leq \int_0^t \|u(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s + \int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s \tag{2.1.44}$$

On substitue (2.1.44) dans (2.1.43), on obtient:

$$\|u(x,t)\|_H^2 \leq \int_0^t \|u(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s + \int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s \tag{2.1.45}$$

D'une manière similaire, on obtient aussi

$$\|v(x,t)\|_H^2 \leq \int_0^t \|v(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s + \int_0^t \|v_s(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s \tag{2.1.46}$$

On utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\int_0^\alpha xu(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\Big(\|u(x,t)\|_H^2 + \|u_t(x,t)\|_H^2\Big) \tag{2.1.47}$$

et

$$\int_0^\alpha xv(x,t)v_t(x,t)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\Big(\|v(x,t)\|_H^2 + \|v_t(x,t)\|_H^2\Big) \tag{2.1.48}$$

On substitue (2.1.45), (2.1.46), (2.1.47) et (2.1.48) dans (2.1.23), on obtient

$$\begin{aligned} H'(t) &\leq \|u(x,t)\|_H^2 + \|v(x,t)\|_H^2 + \int_0^t \|u(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s + \int_0^t \|v(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s \\ &+\|u_t(x,t)\|_H^2 + \|v_t(x,t)\|_H^2 + \int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s + \int_0^t \|v_s(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{2.1.49}$$

On peut écrire (2.1.21) sous la forme suivante

$$H(t) = \big\|u(x,t)\big\|_H^2 + \big\|v(x,t)\big\|_H^2 + \int_0^t \big\|u(x,s)\big\|_H^2\mathrm{d}s + \int_0^t \big\|v(x,s)\big\|_H^2\mathrm{d}s \tag{2.1.50}$$

On substitue (2.1.50) dans (2.1.49) on obtient

$$H'(t) \leq H(t) + \|u_t(x,t)\|_H^2 + \|v_t(x,t)\|_H^2$$
$$+ \int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \|v_s(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s$$

En multipliant par 4 on obtient

$$4H'(t) - 4H(t) \leq$$
$$4\left[\|u_t(x,t)\|_H^2 + \|v_t(x,t)\|_H^2\right] + 4\left[\int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \|v_s(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s\right] \tag{2.1.51}$$

On peut écrire l'estimation (2.1.22) sous la forme suivante:

$$6\left[\left\|u_t(x,t)\right\|_H^2 + \left\|v_t(x,t)\right\|_H^2\right] + 6\left[\int_0^t \left\|u_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \left\|v_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s\right] \leq$$
$$H''(t) + 8E(0) \tag{2.1.52}$$

Sommant (2.1.51) et (2.1.52), on obtient

$$2\left[\left\|u_t(x,t)\right\|_H^2 + \left\|v_t(x,t)\right\|_H^2\right] + 2\left[\int_0^t \left\|u_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \left\|v_s(x,s)\right\|_H^2 \mathrm{d}s\right] \leq$$
$$H''(t) - 4H'(t) + 4H(t) + 8E(0)$$

d'où

$$H''(t) - 4H'(t) + 4H(t) + k_0 \geq 0, \tag{2.1.53}$$

telle que: $k_0 = 8E(0)$.

Soit

$$B(t) = H(t) + \frac{k_0}{8}$$

Dérivons $B(t)$ par rapport à la variable du temps t deux fois, on obtient

$$B'(t) = H'(t), \quad et \quad B''(t) = H''(t) \tag{2.1.54}$$

Et comme $B(t)$ satisfait l'inégalité

$$B''(t) - 4B'(t) + 4B(t) \geq 0, \tag{2.1.55}$$

la solution de l'équation caractéristique associé à l'inégalité différentielle (2.1.55) est: $r_0 = 2$
Et d'autre part de (2.1.54) on a

$$B'(0) = H'(0)$$

Supposons (iii) tient, alors en vertu du lemme 1.5.1 on obtient

$$H'(t) \geq 2E(0) \quad pour\, t > 0$$

Donc on a

$$H'(t) \geq 0 \quad pour\, t > 0.$$

□

Théorème 2.1.1. Supposons que (S_1) tient et l'une ou l'autre des conditions suivantes est satisfaite:

(i) $E(0) < 0$,

(ii) $E(0) = 0$ et (2.1.39) tient,

(iii) $0 < E(0) < \dfrac{J'(t_0)^2}{2J(t_0)^{2+\frac{1}{\gamma}}}$, et (iii) tient.
Alors la solution (u, v) explose en temps fini T^* au sens de 2.1.4.

Dans le cas (i):

$$T^* \leq t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)}. \tag{2.1.56}$$

de plus, si $J(t_0) < min\left\{1, \sqrt{\dfrac{a}{-b}}\right\}$, alors on a

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} ln \frac{\sqrt{\frac{a}{-b}}}{\sqrt{\frac{a}{-b}} - J(t_0)} \tag{2.1.57}$$

Dans le cas (ii):

$$T^* \leq t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)}. \tag{2.1.58}$$

Dans le cas (iii):

$$T^* \leq \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}. \tag{2.1.59}$$

ou

$$T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\gamma+1}{2\gamma}} \frac{\gamma}{c\sqrt{a}}(1 - [1 + cJ(t_0)]^{-\frac{1}{2\gamma}}) \tag{2.1.60}$$

où $c = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma}{2\gamma+1}}$, $\gamma = \dfrac{1}{2}$, et $J(t)$, a et b sont donnés respectivement dans (2.1.61).
Notez que dans le **cas (i)**, $t_0 = t^*$ est donné dans (2.1.41) et $t_0 = 0$ dans les **cas (ii)** et **(iii)**.

Démonstration. Soit

$$J(t) = H^{-\gamma}(t) \tag{2.1.61}$$

Dérivons $J(t)$ par rapport à la variable du temps t deux fois, on obtient

$$J'(t) = -\gamma H^{-\gamma-1}(t)H'(t) \tag{2.1.62}$$

et

$$J''(t) = -\gamma J(t)^{1+\frac{2}{\gamma}} Q(t) \tag{2.1.63}$$

où

$$Q(t) = -(1+\gamma)H'^2(t) + H(t)H''(t) \tag{2.1.64}$$

En utilisant (2.1.23) et (2.1.22), on obtient

$$Q(t) \geq -4(1+\gamma)\left[\int_0^t \langle u, u_s\rangle_H \mathrm{d}s + \langle u, u_t\rangle_H + \int_0^t \langle v, v_s\rangle_H \mathrm{d}s + \langle v, v_t\rangle_H\right]^2$$

$$+6H(t)\left[\|u_t(x,t)\|_H^2 + \int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s + \|v_t(x,t)\|_H^2 + \int_0^t \|v_s(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s\right] - 8E(0)H(t)$$

En utilisant (2.1.50) et (2.1.61), on obtient

$$Q(t) \geq -4(1+\gamma)B^2 + 6AC - 8E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{2.1.65}$$

où:

$$A = \|u(x,t)\|_H^2 + \int_0^t \|u(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s + \|v(x,t)\|_H^2 + \int_0^t \|v(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s$$

$$B = \langle u, u_t\rangle_H + \int_0^t \langle u, u_s\rangle_H \mathrm{d}s + \langle v, v_t\rangle_H + \int_0^t \langle v, v_s\rangle_H \mathrm{d}s$$

$$C = \|u_t(x,t)\|_H^2 + \int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s + \|v_t(x,t)\|_H^2 + \int_0^t \|v_s(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s$$

Pour $\gamma = \dfrac{1}{2}$, on obtient

$$Q(t) \geq -8E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}} + 6(AC - B^2) \tag{2.1.66}$$

On observe que pour tout $(\rho, \eta) \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$

$$A\rho^2 + 2B\rho\eta + C\eta^2 = \rho^2\|u(x,t)\|_H^2 + \rho^2 \int_0^t \|u(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s$$

$$+\rho^2\|v(x,t)\|_H^2 + \rho^2 \int_0^t \|v(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s + 2\rho\eta \int_0^t \langle u, u_s\rangle_H \mathrm{d}s$$

$$+2\rho\eta\langle u, u_t\rangle_H + 2\rho\eta \int_0^t \langle v, v_s\rangle_H \mathrm{d}s + 2\rho\eta\langle v, v_t\rangle_H + \eta^2\|u_t(x,t)\|_H^2$$

$$+\eta^2 \int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s + \eta^2\|v_t(x,t)\|_H^2 + \eta^2 \int_0^t \|v_s(x,s)\|_H^2 \mathrm{d}s$$

Passons à la forme canonique de produit scalaire

$$A\rho^2 + 2B\rho\eta + C\eta^2 =$$

$$\rho^2\langle u, u\rangle_H + 2\rho\eta\langle u, u_t\rangle_H + \eta^2\langle u_t, u_t\rangle_H$$

$$+\rho^2\langle v, v\rangle_H + 2\rho\eta\langle v, v_t\rangle_H + \eta^2\langle v_t, v_t\rangle_H$$

$$+\rho^2 \int_0^t \langle v, v\rangle_H \mathrm{d}s + 2\rho\eta \int_0^t \langle v, v_s\rangle_H \mathrm{d}s + \eta^2 \int_0^t \langle v_s, v_s\rangle_H \mathrm{d}s$$

$$+\rho^2 \int_0^t \langle u, u\rangle_H \mathrm{d}s + 2\rho\eta \int_0^t \langle u, u_s\rangle_H \mathrm{d}s + \eta^2 \int_0^t \langle u_s, u_s\rangle_H \mathrm{d}s$$

En vertu des propriétés de produit scalaire et du norme, on obtient

$$A\rho^2 + 2B\rho\eta + C\eta^2 = \|\rho u + \eta u_t\|_H^2 + \int_0^t \|\rho v + \eta v_s\|_H^2 \mathrm{d}s$$

$$+\|\rho v + \eta v_t\|_H^2 + \int_0^t \|\rho u + \eta u_s\|_H^2 \mathrm{d}s$$

d'où $A\rho^2 + 2B\rho\eta + C\eta^2 \geq 0$ et comme $A > 0$, alors

$$B^2 - AC \leq 0 \tag{2.1.67}$$

Ce qui entraîne

$$Q(t) \geq -8E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}}, t \geq t_0 \tag{2.1.68}$$

On utilisant (2.1.63), on trouve

$$J''(t) \leq 4E(0)J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}}, \ pour \ t \geq t_0 \tag{2.1.69}$$

On a de (2.1.50): $H(t) \geq 0$, de (2.1.61) on a que: $H(t)^{-1-\gamma} > 0$ et de lemme 2.1.3 on a que: $H'(t) \geq 0$. Alors on déduit de (2.1.62) que: $J'(t) < 0$ pour $t \geq t_0$.

On multiplie (2.1.69) par $J'(t)$ et on intègre sur $[t_0, t)$ on obtient

$$\int_{t_0}^{t} J'(s)J''(s)\mathrm{d}s \geq 4E(0)\int_{t_0}^{t} J(s)^{1+\frac{1}{\gamma}}J'(s)\mathrm{d}s$$

Puis remplaçant γ par sa valeur et simplifiant, on trouve

$$J'(t)^2 \geq a + bJ(t)^{2+\frac{1}{\gamma}}$$

où:

$$a = J'(t_0)^2 - 2E(0)J(t_0)^{2+\frac{1}{\gamma}} \quad et \quad b = 2E(0)$$

Et par le Lemme 1.5.2, la preuve du théorème est terminée. □

Bibliographie

[1] Cannon J.R., “The solution of heat equation subject to the specification of energy,” *Quart. Appl. Math.*, vol. 21, pp. 155–160, 1963. 3

[2] Shi P., “Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint,” *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 24, pp. 46–58, 1993. 3

[3] Capasso V., Kunisch K., “A reaction-diffusion system arising in modeling man-environment diseases,” *Quart. Appl. Math.*, vol. 46, pp. 431–450, 1988. 3

[4] Cahlon B., Kulkarni D.M, Shi P., “Stepwise stability for the heat equation with a nonlocal constraint,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 32, p. 571, 1995. 3

[5] Ionkin N.I., Moiseev E.I., “A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition,” *Differ. Uravn.*, vol. 15, pp. 1284–1295, 1979. 3

[6] Andrews K.T., Mikelić A., Shi P., Shillor M. , Wright S., “One-dimensional thermoelastic contact with a stress-dependent radiation condition,” *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 23, pp. 1393–1416, 1992. 3

[7] Choi Y.S., Chan K.Y., “A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry,” *Nonlinear Anal*, vol. 18, pp. 317–331, 1992. 3

[8] Ewing R.E, Lin T., “A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media,” *Adv. Water Resources*, vol. 14, pp. 89–97, 1991. 3

[9] Ionkin N.I., “Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonclassical boundary condition,” *Differ. Uravn.*, vol. 13, pp. 294–304, 1977. 3

[10] Pul’kina L.S., “A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations,” *Electronic J. Differ. Equ.*, vol. 45, pp. 1–6, 1999. 3

[11] Pul’kina L.S., “The $\mathbb{L}_2$ solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation,” *Differ. Uravn.*, vol. 36, pp. 316–318, 2000. 3

[12] Yurchuk N.J., “A mixed problem with an integral condition for some certain parabolic equations,” *Differ. Uravn.*, vol. 22, pp. 2117–2126, 1986. 3

[13] Kartynnik A.V., “A three-point boundary mixed problem with an integral condition with respect to the space variable for second-order parabolic equations,” *Differ. Uravn.*, vol. 26, pp. 1568–1575, 1990. 3

[14] Mesloub S., Bouziani A., “Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classe d’équations paraboliques bidimensionnelles,” *Bull. Classe Sci. Acad. R. Belg*, vol. 9, pp. 61–72, 1998. 3

[15] Mesloub S, Bouziani A, “Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with the bessel operator,” *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, vol. 15, pp. 277–286, 2002. 3

[16] Mesloub S., Messaoudi S.A., “Global existence, decay, and blow up of solutions of a singular nonlocal viscoelastic problem,” *Acta Appl Math*, vol. 110, pp. 705–724, 2010. 3

[17] Mesloub S, Messaoudi SA, “A nonlocal mixed semilinear problem for second order hyperbolic equations,” *Electron. J. Differ. Equ.*, vol. 2003, pp. 1–17, 2003. 3, 5

[18] Mesloub S, Lekrine N, “Analysis on a nonlocal hyperbolic mixed problem,” *Acta Sci. Math.*, vol. 70, pp. 65–76, 2004. 3

[19] Mesloub S., “On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with nonlocal conditions,” *Nonlinear Anal.*, vol. 68, pp. 2594–2607, 2008. 3, 5

[20] Mesloub S., “A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pseudoparabolic equation,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 316, pp. 189–209, 2006. 3

[21] Kamynin L.I., “A boundary value problem in the theory of heat conduction with nonclassical boundary conditions,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vol. 4, pp. 1006–1024, 1964. 3

[22] Messaoudi S.A., “Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation,” *Mathematische Nachrichten*, vol. 260, pp. 58–66, 2003. 4

[23] Mesloub S., Mesloub F., “Solvability of a mixed nonlocal problem for a nonlinear singular viscoelastic equation,” *Acta Appl. Math.*, vol. 110, pp. 109–129, 2010. 4

[24] Wu Shuntang, “Blow-up of solutions for a singular nonlocal viscoelastic equation,” *J. Part. Diff. Eq.*, vol. 24, pp. 140–149, 2011. 5

[25] Chunlai Mu, Jie Ma, “On a system of nonlinear wave equations with balakrishnan-taylor damping,” *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 65, pp. 91–114, 2013. 5

[26] Kafini M., Messaoudi S.A., “A blow up result for a viscoelastic system in $\mathbb{R}^n$,” *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 113, pp. 1–7, 2007. 5

[27] Zarai A., Draifia A., Boulaaras S., “Blow-up of solutions for a system of nonlocal singular viscoelastic equations,” *Applicable Analysis*, vol. 97, pp. 2231–2245, 2018. 5

[28] Li M.R., Tsai L.Y., “Existence and nonexistence of global solutions of some systems of semilinear wave equations,” *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, vol. 54, pp. 1397–1415, 2003. 6

Conclusion

En terme de ce mémoire, nous avons prouvés sous certaines conditions sur les fonctions de relaxation et les termes sources, que les solutions du système d'équations viscoélastiques singulières non locales explosent en temps fini utilisant la méthode directe de Li, où les estimations pour le temps d'explosion sont prouvés.