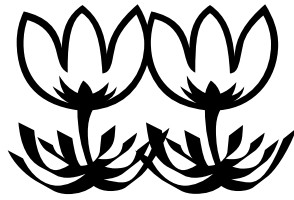


Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mon cher père "Taher" rahimahou elahe,  
A ma chère mère "Yamena"  
Qui m'ont aide à affronter les difficultés.  
A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur prévéance.  
A mes très chers frères.  
A toute ma famille.  
A tous les amis  
A tous ceux qui m'aiment.  
Pour chacun des mentionné mon coeur et oublié mon stylo.  
A tous.



*Dédicaces*



*To my parents and my family, for their love,  
support, and encouragement.*

 *Djamila Chergui*

---

## ❁ Remerciements ❁



Au nom d'**ALLAH** Clément et Miséricordieux!

Je remercie avant tout **Allah** qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

J'exprime tout d'abord ma reconnaissance et mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse Monsieur Merad Ahcene, Professeur à l'Université de Oum El Bouaghi, pour ces conseils, et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de cette thèse.

Je suis très honoré par la présence à mon jury de thèse de doctorat et que je remercie beaucoup

Professeur..... , Pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être président de mon jury de thèse. je tiens à l'assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il porte à ce travail.

Professeur....., pour sa participation à mon jury de thèse pour le temps consacré à la lecture de cette thèse, et pour ses suggestions et ses remarques judicieuses.

Docteur....., pour sa participation à mon jury de thèse en qualité d'examineur de mon travail et pour toutes ses remarques intéressantes.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.


**Johann Von Neumann**

**The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work**







Reste toujours un peu de parfum à la main qui donne des roses.  
CONFUCIUS (551 avant J.C., 479 avant J.C.) Philosophe chinois

 *Un mathématicien est une personne qui peut trouver des analogies entre les théorèmes; un meilleur mathématicien est celui qui peut voir des analogies entre les démonstrations. Les très bons mathématiciens sont ceux qui peuvent déceler des analogies entre les théories. Mais on peut supposer que le meilleur des mathématiciens, est celui qui peut voir des analogies entre les analogies.*      **Stefan Banach**




 *Dans les mathématiques vous ne comprenez pas des choses. Vous vous habituez juste à elles.*      **John Von Neumann**




 *Dans la mesure où les lois des mathématiques se rapportent à la réalité, elles ne sont pas sûres; et jusque elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité.*      **Albert Einstein**




 *Les espaces hilbertiens ou espaces de Hilbert sont l'outil fondamental des applications de l'Analyse à la Physique et aux Sciences de l'ingénieur.*      **L. SCHWARTZ**



 *Analysis is the technically most successful and best-elaborated part of Mathematics.*  
**J. Von Neumann**



 *la vie il n'y a pas de solutions. Il y a des forces en marche : il faut les créer et les solutions suivent.*      **Antoine de Saint-Exupéry**



This document is typeset using  $\LaTeX$ , MikTeX V8. compiler. Font : garamond, 12pt.

Mathematics : `package[urw-garamond]{mathdesign}`. Class : nice LaTeX-Thesis.cls,

© *Djamila Chergui* (2022).



# Thèse Doctorat en Sciences

## Equations Différentielles non Linéaires à Coefficients Fractionnaires Existence et Unicité des Solutions



© 2022 Djamila Chergui, Email:  
djamila.drmath@yahoo.com

Sous la direction du Professeur Merad Ahcene  
Département de Mathématiques, Univ. Oum El-Bouaghi  
(LSDC), Laboratoire des systèmes dyna-  
miques et contrôle, Univ. Oum El-Bouaghi  
Email: merad\_ahcene@yahoo.fr




Année universitaire 2021 / 2022



---

## Publication découlant de cette Thèse

---

 Djamila Chergui, Taki Eddine Oussaeif, Merad Ahcene; Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations depending on lower-order derivative with non-separated type integral boundary conditions. AIMS Mathematics, 4(1) : 112-133. DOI :10.3934/Math.2019.1.112. **Indexation Emerging Sources Citation Index (ESCI - Web of Science), Scopus**, Liste des revues scientifiques de catégorie A



---

## Equations Différentielles Non Linéaires à Coefficients Fractionnaires

### Existence et Unicité Des Solutions

---

#### Résumé



Cette thèse est centrée autour de l'étude de l'existence et l'unicité des équations différentielles non linéaire fractionnaires. Les équations différentielles fraction-


naires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médecine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc. Depuis quelques années, une attention particulière a été focalisée à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires. L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de la théorie d'existence et d'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires

La première partie est consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions pour une nouvelle classe de problèmes de valeurs limites d'équations différentielles fractionnaires non linéaires dépendant de conditions aux limites intégrales de type non séparé. Et la deuxième partie traiter l'existence et l'unicité pour un nouveau type de problèmes intégro-différentielles fractionnaires séquentielles multi-termes avec conditions aux limites non locales. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les techniques du point fixe. Nous concluons les résultats obtenus par des exemples illustratifs.

La troisième partie de cette thèse traite une classe de problèmes aux limites de type intégrale pour une équation différentielle fractionnaire d'ordre supérieur avec conditions purement non-locales de type intégrale. La démonstration est basée sur l'inégalité d'énergie et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré. Nous avons également utilisé une méthode semi-analytique pour estimer cette solution est la méthode de perturbation de l'homotopie. De plus, quelques exemples sont donnés pour comparer les solutions numériques et exactes.

---

1. **2010 Mathematics Subject Classification** : 44A10, 34A08, 35B45, 34B05, 34B15.

 **Mots clés** : Théorème du point fixe, Intégro-différentielle, Inégalité d'énergie, Condition intégrale, Existence et unicité, Estimation a priori, problème fractionnaire, Méthode de perturbation de l'homotopie, Transformation de Laplace.

---

## Nonlinear Differential Equations with Fractional Coefficients Existence and Uniqueness of Solutions

---

### Abstract



This thesis focuses on the study of the existence and uniqueness of fractional nonlinear differential equations.


The fractional differential equations (FDEs) appear as a natural description of observed evolution phenomena in various scientific areas such as physics, engineering, medicine, electrochemistry, control theory, etc. In recent years, a great attention has been focused on the study of the existence and uniqueness of solutions for the fractional differential equations. The aim of this thesis is to contribute to the development of the study of existence and uniqueness of solutions to fractional differential equations.

The first part is devoted to the study of existence and uniqueness of solutions for a new class of boundary value problems of nonlinear fractional differential equations depending with non-separated type integral boundary conditions. And the second part deals with the existence and uniqueness for a new type of multi-term sequential fractional integro-differential equations with non-local boundary conditions. The results obtained in this work are based on fixed point techniques. We conclude the results obtained by illustrative examples.

The third part of this thesis deals with a class of problems with integral type limits for a higher order fractional differential equation with purely non-local integral type conditions. The demonstration is based on an a priori estimate "energy inequality" and the density of the range of the operator generated by the considered problem. We also used semi-analytical method to estimate this solution, is homotopy perturbation. In addition, some examples are given to compare numerical and exact solutions.

---

1. **2010 Mathematics Subject Classification** : 44A10, 34A08, 35B45, 34B05, 34B15.

 **Keywords** : Fixed point theorem, Integro-differential, Energy inequality, Integral condition, A priori estimate, Existence and uniqueness, Integral condition, Fractional problem, Homotopy perturbation method, Laplace Transform.

---

## المعادلات التفاضلية غير الخطية ذات المعامل الكسري وجود و وحدانية الحلول

---

### ملخص



تتمحور هذه الأطروحة حول دراسة وجود و وحدانية الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية الغير الخطية. تظهر هذه المعادلات بشكل طبيعي في مختلف المجالات العلمية مثل الفيزياء ، والهندسة ، والطب ، والكيمياء الكهربائية ، ونظرية التحكم ، إلخ


في السنوات الأخيرة ، تم التركيز بشكل خاص على دراسة وجود و وحدانية حلول المعادلات التفاضلية الكسرية الهدف من هذه الأطروحة هو المساهمة في تطوير نظرية الوجود و وحدانية حلول المعادلات التفاضلية الكسرية

الجزء الأول مخصص لدراسة وجود و وحدانية الحلول لفئة جديدة من مسالة القيمة المحددة للمعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية اعتمادًا على شروط حدية من نوع تكامل لنوع غير منفصل

ويتناول الجزء الثاني وجود و وحدانية نوع جديد من مسالة تفاضلية تكاملية متسلسلة متعددة المدى مع شروط حدية غير محلية تستند النتائج التي تم الحصول عليها في هذا العمل على تقنيات النقطة الثابتة ثم نستنتج النتائج التي تم الحصول عليها بأمثلة توضيحية.

الجزء الثالث من هذه الأطروحة يتعامل مع فئة من مسالة من النوع تكامل لمعادلة تفاضلية كسرية ذات رتبة أعلى مع شروط غير محلية بحتة من النوع تكامل. نبرهن وجود و وحدانية الحل وهذا بفضل طريقة التقديرات القبلية وكثافة صورة المؤثر المولد بالمسالة المراد دراستها . استخدمنا أيضًا طريقة شبه تحليلية لتقدير هذا الحل ، طريقة اضطراب التماثل. بالإضافة إلى ذلك ، يتم إعطاء بعض الأمثلة لمقارنة الحلول العددية والتقريبية.

التصنيف الرياضي (2010 MSC) 34B15 , 34B05, 35B45, 34A08, 44A10

 **كلمات المفتاحية :** نظرية النقطة الثابتة ، التكامل التفاضلي ، طريقة التقديرات القبلية ، شرط حدي من نوع تكامل ، الوجود و الوحدانية ، مسالة كسرية ، طريقة اضطراب التماثل ، تحويل لابلاس.

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>xiv</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>xiv</b>
<b>Table des figures</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>8</b>
1.1 Aperçu historique . . . . .	8
1.2 Notions Générales . . . . .	13
1.2.1 Espace normés . . . . .	14
1.2.2 Espace de Banach . . . . .	14
1.2.3 Espace de Hilbert . . . . .	14
1.2.4 Quelques résultats de la théorie du point fixe . . . . .	15
1.2.5 Opérateurs linéaires bornés . . . . .	16
1.2.6 Opérateurs linéaires non-bornés . . . . .	17
1.2.7 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert . . . . .	17
1.2.8 Espaces des fonctions intégrables . . . . .	18
1.2.9 Espaces des fonctions continues et absolument continues . . . . .	18
1.3 Fonction spécifique pour la dérivation fractionnaire . . . . .	19
1.3.1 La fonction Gamma . . . . .	19
1.3.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma . . . . .	20
1.3.3 Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite . . . . .	22
1.3.4 La fonction Bêta . . . . .	25

1.3.5	La fonction de Mittag-Leffler . . . . .	25
1.3.6	Rappels de quelques inégalités utiles . . . . .	28
1.4	Lemme de Gronwall . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Dérivées et intégrales fractionnaires</b>	<b>31</b>
2.1	Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . . .	31
2.1.1	Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$ . . . . .	31
2.1.2	Intégrales d'ordre arbitraire . . . . .	32
2.1.3	Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .	33
2.1.4	Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles . . . . .	34
2.1.5	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	37
2.1.6	Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles . . . . .	38
2.1.7	Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	40
2.2	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo . . . . .	43
2.2.1	Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo	48
2.2.2	Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo	49
2.3	Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville . . . . .	51
2.4	Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires . . . . .	52
2.4.1	Outils de base de la transformée de Laplace . . . . .	52
2.4.2	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville . . . . .	53
2.4.3	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo . .	53
2.5	Transformée Inverse de Laplace . . . . .	54
2.6	Formule de quadrature de Gauss . . . . .	55
2.7	La méthode de perturbation d'homotopie (HPM) . . . . .	55
2.7.1	Description de la méthode . . . . .	56
2.7.2	Analyse de convergence . . . . .	57
2.7.3	La méthode <b>HPM</b> combinée avec la transformation de Laplace .	63
<b>3</b>	<b>Existence et Unicité des Solutions pour les Equations Différentielles Frac- tionnaires Non Linéaires avec des Conditions aux Limites Intégrales de type Non Séparé</b>	<b>68</b>
3.1	Introduction . . . . .	68
3.2	Position du problème . . . . .	69

3.3	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Existence et Unicité pour les Equations Intégro-Différentielles Fractionnaires Séquentielles Multi-Termes avec Conditions aux Limites Non Locales</b>	<b>90</b>
4.1	Introduction . . . . .	90
4.2	Position du Problème . . . . .	91
4.3	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Existence et Unicité des Solutions pour les équations aux Dérivées Partielles Fractionnaires d'ordre Supérieur avec des Conditions Purement Intégrales</b>	<b>114</b>
5.1	Introduction . . . . .	114
5.2	Position du problème . . . . .	114
5.3	Estimation a priori . . . . .	116
5.4	Résolvabilité du problème . . . . .	120
5.5	Méthode de perturbation de l'homotopie avec transformation de Laplace (LT-HPM) . . . . .	124
<b>A</b>	<b>Théorèmes du point fixe</b>	<b>129</b>
A.1	Théorème du point fixe . . . . .	129
A.2	Théorème du point fixe de Banach . . . . .	129
A.3	Théorème du point fixe de Brouwer . . . . .	131
A.4	Théorème du point fixe de Schauder . . . . .	131
A.5	Théorème du point fixe de Krasnoselskii . . . . .	134
<b>B</b>	<b>Fiches B</b>	<b>136</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>

# Notations

Pour faciliter la lecture, on commence par introduire les différentes notations utilisées tout au long de ce travail.

$\mathbb{N}$  : ensemble des nombres entiers naturels

$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

$\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes.

$\Omega$  : Domaine borné dans  $\mathbb{R}$ .

$\Gamma$  : La frontière de  $\Omega$ .

$L^p(\Omega)$  : espace des fonctions mesurables de puissance  $p \in [0, +\infty[$  intégrables sur  $\Omega$ .

$L^\infty(\Omega)$  : espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur  $\Omega$ .

$C(\Omega)$  : espace des fonctions continues sur  $\Omega$ .

$C^n(\Omega)$  : espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables  $n$  fois et  $f^{(n)}$  continues.

$AC(\Omega)$  : espace des fonctions absolument continues sur  $\Omega$ .

$AC^n(\Omega)$  : espace des fonctions  $f$  dérivables à l'ordre  $n - 1$  et elle que  $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$ .

$T$  : opérateur linéaire.

$D(T)$  : domaine de définition de l'opérateur  $T$ .

$G(T)$  : graphe de l'opérateur  $T$ .

$R(T)$  : image de l'opérateur  $T$ .

$N(T)$  : noyau de l'opérateur  $T$ .

$M$  : fermeture de l'ensemble  $M$ .

$M^\perp$  : orthogonal de l'ensemble  $M$ .

$X; Y$  : des espaces de Banach de normes respectives  $\|\cdot\|_X; \|\cdot\|_Y$ .

$\mathcal{L}(X; Y)$  : espace des opérateurs linéaires continus de  $X$  dans  $Y$ ,

cet espace est muni de la norme  $\|B\|_{\mathcal{L}(X; Y)} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Bu\|_Y}{\|u\|_X}$ .

$H$  : espace de Hilbert où la norme et le produit scalaire sont notées respectivement par  $|\cdot|, (\cdot; \cdot)$ .

$\mathcal{L}(H)$  : espace des opérateurs linéaires continus dans  $H$ .

$\Gamma(\cdot)$  : La fonction Gamma.

$B(\cdot, \cdot)$  : La fonction Bêta.

$\Re(\cdot)$  : Partie réelle d'un nombre complexe.

$[\cdot]$  : Partie entière d'un nombre réel.

$I_a^\alpha$  : intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$ .

${}^R_a D^\alpha$  : dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$ .

${}^c_a D^\alpha$  : dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre  $\alpha > 0$ .

$$\mathfrak{S}_x u = \int_0^x u(t, \xi) d\xi.$$

$$\mathfrak{S}_x^2 u = \int_0^x \int_0^\eta u(t, \xi) d\xi d\eta.$$

# Table des figures

1.1	Courbe représentative de la fonction Gamma . . . . .	20
1.2	La fonction de Mittag Leffler à un seul paramètre . . . . .	27
1.3	La fonction de Mittag Leffler à deux paramètres . . . . .	27
B.1	Georg Friedrich Bernhard Riemann . . . . .	136
B.2	Joseph Liouville . . . . .	137
B.3	Michele Caputo . . . . .	138


# Introduction générale


En mathématiques, le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse, qui étudie la généralisation de la dérivation et d'intégration d'ordre entier  $n$  (ordinaire) à l'ordre non entier (fractionnaire). La théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous connaissons aujourd'hui. Ces origines remontent à la fin du 17<sup>ième</sup> siècle, l'époque où **Isaac Newton** et **Gottfried Wilhelm Leibniz** ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. La première question qui a conduit au calcul fractionnaire était : Est-ce que la dérivée d'ordre entier  $\frac{d^n f}{dx^n}$  peut être étendue à avoir un sens lorsque  $n$  est une fraction ? Plus tard, la question est devenue :  $n$  peut être n'importe quel nombre : Fractionnel irrationnel ou complexe ? Parce que cette dernière question a été répondu par l'affirmative, le calcul fractionnaire est devenu un terme mal approprié et pourrait mieux être appelé intégration et différentiation d'ordre fractionnaire.




Leibniz a introduit le symbole  $\frac{d^n f}{dx^n}$  pour désigner la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'une fonction  $f$  quand il a annoncé dans une lettre à **Guillaume l'Hôpital** datée du 30 septembre en 1695 avec l'hypothèse implicite que  $n \in \mathbb{N}$ , L'Hôpital a répondu : Que signifie  $\frac{d^n f}{dx^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$  ? Leibniz lui a répondu : "*Cela conduit à un paradoxe à partir duquel un jour, on pourra tirer des conséquences utiles*" [**Oldham et Spanier, 1974**]. Aujourd'hui, cette lettre est admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que L'Hôpital a demandé spécifiquement pour  $n = \frac{1}{2}$  c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel), a en fait donné lieu au nom de domaine des mathématiques.














Toutefois, seulement depuis les années soixante-dix, le calcul fractionnaire a fait l'objet de conférences. Pour la première conférence de là, le mérite est due à **B. Ross** qui peu de temps après son doctorat sur le calcul fractionnaire, a organisé la première conférence sur le calcul fractionnaire et ses applications à l'université de NEW HAVEN en Juin 1974 et édité ses travaux. Pour la première monographie, le mérite est attribué à **K.B Oldham** et



**J. Spanier** qui après une collaboration commencée en 1968, ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en <sup>1974</sup> [114].

En 1987, le livre de **S. Samko**, **A. Kilbas** et **O. Marichev**, considéré maintenant comme " *encyclopédie*" du calcul fractionnaire, apparu d'abord en russe, et plus tard avec une édition anglaise en <sup>1993</sup> [210]. Aujourd'hui, la série de livres, de revues et de textes consacrés au calcul fractionnaire et ses applications comprennent plusieurs dizaines de titres et cette liste devrait grandir encore plus dans les années prochaines.

Le calcul fractionnaire en permettant à des intégrales et des dérivées de tout ordre, il représente un outil puissant en mathématiques appliquées pour étudier une myriade de problèmes de différents domaines de la science et de l'ingénierie avec de nombreux résultats trouvés en physique mathématique, finance, hydrologie, biophysique, thermodynamique, théorie du contrôle, statistique, astrophysique, cosmologie et en bio-ingénierie (voir  [[193, 106, 229]])

Maintenant, nous citons quelques mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20<sup>ième</sup> siècle : EULER (1730), P.S. LAPLACE (1812). Ensuite en 1819,  [211] la première mention d'une dérivée d'ordre arbitraire apparaît dans un texte où le mathématicien français S.F. LACROIX a publié un texte sur le calcul différentiel dans lequel il a consacré quelques pages au calcul fractionnaire, et J.B.J. FOURIER (1822). Entre 1832 et 1837, une grande étude du calcul fractionnaire a été faite par J. LIOUVILLE. ENSUITE, B. RIEMANN (1847) propose une approche pour la dérivation fractionnaire. Plus tard d'autres approches ont fait leurs apparitions comme celles D'A.K. GRUNWALD (1867 – 1872), D'A.V. LETNIKOV (1868 – 1872), de H. LAURENT (1884), de WEYL (1917). et celle de M. CAPUTO  [145] en 1967. (Pour plus de détails, voir  [212]).

Au cours des dernières années, les équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire ont attiré l'attention beaucoup de chercheurs en raison d'un large éventail d'applications dans de nombreux domaines de la physique, de la mécanique des fluides, de l'électrochimie, de la viscoélasticité, de la théorie du contrôle non-linéaire, des systèmes biologiques non-linéaires, de l'hydrodynamique et d'autres domaines des sciences et de l'ingénierie [El-Nabulsi,  [3]], [Jafari et al.,  [90]], [Jafari et al.,  [89]], [Kadem et Baleanu,  [4]], [Kadem et Baleanu,  [5]], [Kadem et Baleanu,  [6]], [Katsikadelis,  [111]], [Khalouta et Kadem,  [7]], [Odibat et Momani,  [239]], [Oldham,  [120]], [Singh et al.,  [112]], [Wang et Zhou,  [113]], [Zheng,  [45]].

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux événements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ... etc  [[128],[230]]  [193].

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires. Les équations différentielles fractionnaires peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie tels que l'acoustique, le contrôle, milieux poreux, électrochimie, visco-élasticité, rhéologie, fractales, dynamique chaotique, physique des polymères, électromagnétique, médecine, économie, astrophysique, génie chimique, physique statistique,

thermodynamique, bioingénierie, etc. Il a été prouvé que dans de nombreux cas, ces modèles fournissent des résultats plus appropriés que les modèles analogues avec des dérivées entières. Les dérivés fractionnaires fournissent un excellent instrument pour la description de la mémoire et des propriétés héréditaires de divers matériaux et procédés (📄 [221]). En conséquence, l'étude des équations différentielles fractionnaires gagne beaucoup d'importance et d'attention. Pour plus de détails, on peut voir les références 📄 [49, 50, 129, 149] 📖 [194, 195].

Au cours de ces dernières années, de nombreux phénomènes en physique ont été modélisés par des problèmes aux limites avec conditions non locales. Ces problèmes ont beaucoup d'applications dans divers contextes tels que la dynamique des populations, le processus de conduction de la chaleur, la théorie du contrôle...etc. L'importance des conditions non locales apparaissent lors de la modélisation mathématiques des phénomènes de la physique, la chimie, l'économie, la biologie, thermo-élasticité, élasticité, physique de plasma et en métallurgie 📄 [48, 180]. Parmi les travaux récents dans cette direction, nous citons ceux de **A. Bouziani** 📄 [9, 10, 11, 12] qui a étudié des problèmes mixtes pour une classe d'équations paraboliques et hyperboliques avec conditions intégrales., qui exigent la présence de terme intégrale sur le domaine spatial. Le terme intégral peut apparaître dans des conditions aux limites, dans ce cas, ces conditions sont appelées non locales. Physiquement, les conditions intégrales représentent une moyenne, énergie totale, masse totale, moments,...etc.

Ces problème peuvent être rencontrés dans la théorie de transmission de la chaleur, voir : **J.R.Cannon** 📄 [116], **W.A.Doy** 📄 [231], **L.I:Kamynin** 📄 [140], en élasticité et thermoélasticité, voir : **A.Samarskii** 📄 [22], dans la théorie de population, voir : **A.Hillon** 📖 [91], **P.A.Raviart** 📖 [191] : L'étude des problèmes unidimensionnelles avec conditions intégrales pour les équations de type : parabolique, hyperbolique, parabolique intégral-différentielle, hyperbolique intégral-différentielle, pseudoparabolique, pseudohyperbolique par la méthode des inégalités énergétiques (estimations à priori) voir : les travaux de **A. Merad** 📄 [13, 14, 15, 16, 17, 21] : Les équations multidimensionnelles avec des conditions intégrales sont traitées dans les travaux de **L.S.Pulkina** 📄 [141].

Dans tous ces domaines scientifiques, il est important de trouver des solutions exactes ou approximatives à ces problèmes. Il existe donc un intérêt marqué pour le développement de méthodes de résolution de problèmes liés aux équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire. Les solutions exactes de ces problèmes sont parfois trop compliquées à atteindre par les techniques classiques en raison de la complexité des parties non-linéaires les impliquant. La méthode de perturbation de l'homotopie **HPM** à été proposée par **Ji-Huan He** 📖 <sup>1998</sup> [98]. Cette méthode à été appliqué par plusieurs auteurs à différents problèmes linéaires et non linéaires. **Momani** et **Odi-bat** 📄 [219] ont appliqué la méthode de perturbation d'homotopie aux équations différentielles fractionnaires et ils ont révélé que la méthode **HPM** à été aussi combinée avec des transformations comme celle de **Laplace**, **Sumudu** 📖 [232] ou encore **d'El-zaki** 📄 [78] pour résoudre des équations différentielles ordinaires et aussi aux dérivées partielles fractionnaires.

Cette thèse est scindée en cinq chapitres comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront introduits comme, la fonction gamma d'Euler, la fonction bêta et la fonction de Mittag-Leffler avec des exemples et quelques propriétés intéressantes qui jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Un rappelle quelques résultats d'analyse fonctionnelle (éléments de la théorie des opérateurs) ainsi que les outils mathématiques nécessaires pour l'étude des problèmes.

Dans le second chapitre de cette thèse est dédié les approches (Riemann-Liouville et Caputo) et les liens entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés complémentaires, transformation de Laplace est sa transformation inverse, nous donnons la description de la méthode de perturbation d'homotopie et nous faisons l'analyse de sa convergence, nous traitons quelques applications numériques de la méthode **HPM** pour résoudre des équations différentielles non-linéaire et nous exposons la méthode de perturbation d'homotopie **HPM** combinée avec la transformation de Laplace **LT**.

Dans le troisième chapitre, on abordera la question d'existence et de l'unicité des solutions pour une nouvelle classe de problèmes de valeurs limites d'équations différentielles fractionnaires non linéaires dépendant de conditions aux limites intégrales de type non séparé suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = f(t, x(t), {}^c D^r x(t)), & t \in [0, T], \quad T > 0, \quad 1 < q \leq 2, \quad 0 < r \leq 1 \\ x(0) - \lambda_1 x(T) = \mu_1 \int_0^T g(s, x(s)) ds, \\ x'(0) - \lambda_2 x'(T) = \mu_2 \int_0^T h(s, x(s)) ds. \end{cases} \quad (1)$$

Où  ${}^c D^q$  désigne la dérivé fractionnaire de Caputo de l'ordre  $q$ , et  $f \in C([0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $g, h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reçoivent des fonctions continues et  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$  avec  $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$ . La démonstration des résultats est basée sur le théorème du point fixe de Banach, théorème du point fixe de Schauder et l'Alternative non-linéaire de Leray-Schauder. On termine ce chapitre avec deux exemples illustratifs.

Dans le quatrième chapitre, nous discutons l'existence et l'unicité de solutions pour l'équation intégral-différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions aux limites intégrales fractionnaires multi-termes à  $m$  points.

$$\begin{cases} ({}^c D^q + k {}^c D^{q-1})u(t) = f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\beta_1} u(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(t)), & t \in [0, 1] \\ u(0) = 0, \quad \sum_{i=1}^{m-1} a_i u(\xi_i) = \beta \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} u(s) ds, \end{cases} \quad (2)$$

où  ${}^c D^q$  est le dérivé fractionnaire standard de l'ordre de Caputo  $q$ , avec  $1 < q \leq 2, 0 < \beta_i < 1, k > 0, 0 < \eta < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-1} < 1, \beta, a_i, i = 1, \dots, m$  sont des constantes réelles,  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et pour les applications  $\gamma, \lambda : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  avec

les propriétés  $\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t \lambda(t,s) ds \right| < \infty$  et  $\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t \gamma(t,s) ds \right| < \infty$ , l'application  $\phi$  et  $\psi$  sont définis par  $(\phi u)(t) = \int_0^t \gamma(t,s) u(s) ds$  et  $(\psi u)(t) = \int_0^t \lambda(t,s) u(s) ds$ . La démonstration des résultats est basée sur le théorème du point fixe de Banach, théorème du point fixe de Schauder et l'Alternative non-linéaire de Leray-Schauder. On termine ce chapitre avec des exemples illustratifs.

Le cinquième chapitre, nous présentons une analyse complète de notre méthode pour un problème aux limites avec des conditions non-locales. L'analyse est basée sur ce qu'on appelle la méthode des inégalités énergétiques (dite aussi, méthode des estimations a priori). Ce problème avec des condition purement non locales de type intégrale pour une équation fractionnaire d'ordre  $2(m+1)th$  et  $2mth$  au sens de Caputo. Nous avons également utilisé une méthode semi-analytique pour estimer cette solution est la méthode de perturbation de l'homotopie avec la transformée de Laplace (**LT-HPM**) pour obtenir la solution numérique, quelques exemples sont donnés pour justifier l'efficacité de cette méthode.

Soit  $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ . On considère l'équation suivante :

$$\mathcal{L}u = {}^c \partial_t^{\alpha+1} u + (-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} + (-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} = f(x, t), \quad (x, y) \in \Omega \quad (E)$$

avec les conditions initiales et intégrales non locales :

$$\begin{cases} \ell_1 u = u(x, 0) = \varphi(x), & \ell_2 u = u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, 1) \\ \int_0^1 x^i u(x, t) dx = 0, & i = \overline{0, 2m-1}, & t \in (0, T), \end{cases} \quad (CNL)$$

Pour notre problème on établit théorème d'existence, d'unicité de la solution forte généralisée, sa dépendance continue par rapport aux données  $(f, \varphi, \psi)$ , ainsi que sa continuité par rapport aux paramètres. Ces résultats sont obtenus grâce à la méthode des estimations a priori qui est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique basée sur la technique des multiplicateurs. Cette méthode résulte des idées introduites par [J.Leray](#) [114], [L. Garding](#) [138], [L.G. Petrovsky](#) [139] dans leurs travaux, et de celles développées dans l'ouvrage de [A.A. Dezin](#) [8], et dans les travaux de [N.I. Yurchuk](#) [173, 174, 175, 176] et [V.I. Korzyuk](#) [228]. Elle est caractérisée de la manière suivante :

- D'abord écrire le problème posé sous forme opérationnelle :

$$Lu = F, \quad u \in D(L), \quad (3)$$

où l'opérateur  $L = (\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2)$  est engendré par l'équation (E) et les conditions intégrale non local et est considéré de l'espace de Banach  $\mathbb{E}$  dans l'espace de Hilbert  $\mathbb{F}$  convenablement choisis.

• Établir ensuite les estimations a priori pour l'opérateur  $L$ . On démontre ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace  $\mathbb{F}$ .

Plus précisément nous suivrons dans ce travail l'un des deux schémas suivant :

### Schéma 1

Pour l'opérateur  $L$  engendré par le problème considéré, nous démontrons l'inégalité de l'énergie du type

$$\|u\|_{\mathbb{E}} \leq c \|Lu\|_{\mathbb{F}}, \quad \forall u \in D(L). \quad (4)$$

Cette démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur  $Mu$  contenant la fonction  $u$  ou ses dérivées et une certaine fonction poids, et en intégrant sur le domaine.

Le choix de l'opérateur  $Mu$  est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites. On montre ensuite que l'opérateur  $L$  dans  $\mathbb{E}$  admet une fermeture  $\bar{L}$ . La solution de l'équation opérationnelle

$$\bar{L}u = F, \quad (5)$$

est appelée solution forte généralisée du problème considéré.

Par passage à la limite, l'estimation (4) est prolongée aux solutions fortes généralisées, i.e., on a

$$\|u\|_{\mathbb{E}} \leq c \|\bar{L}u\|_{\mathbb{F}}. \quad (6)$$

A partir de là, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (5), l'égalité des ensembles  $R(\bar{L})$  et  $\overline{R(L)}$ , et l'inversibilité de  $\bar{L}$ . L'inverse  $(\bar{L})^{-1}$  étant défini sur l'ensemble des valeurs de l'opérateur  $\bar{L}$ .

La dernière étape, consiste à établir la densité de l'ensemble  $R(L)$  dans  $\mathbb{F}$  et donc l'existence d'une solution forte généralisée du problème (3).

### Schéma 2

On établit deux estimation a priori bilatérales

$$\begin{aligned} \|Lu\|_{\mathbb{F}} &\leq c \|u\|_{\mathbb{E}}, \\ \|u\|_{\mathbb{E}} &\leq c' \|Lu\|_{\mathbb{F}}, \end{aligned}$$

Il résulte de la première estimation que l'opérateur  $L$  de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$  est continu et de la deuxième estimation, qu'il admet un inverse continu et que l'ensemble des valeurs de l'opérateurs  $L$  est fermé. En d'autre termes, l'opérateur  $L$  réalise un homéomorphisme linéaire de l'espace  $\mathbb{E}$  sur l'ensemble fermé  $R(L)$ .

Ainsi, pour démontrer l'existence de la solution il suffit de démontrer que  $R(L)$  est dense dans  $\mathbb{F}$ .

**Commentaire** La méthode des estimations a priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi lesquelles nous citons :

- ☞ Le choix de l'espace des solutions.
- ☞ Le choix du multiplicateur.
- ☞ Le choix de l'opérateur de régularisation.

Finalement, nous concluons par **Conclusion Générale** Cette partie est dédiée aux rappels de différentes contributions apportées dans cette thèse ainsi que les perspectives considérées.

À la fin de cette thèse, pour la commodité des lecteurs intéressés par une autre investigation sur ces et d'autres sujets étroitement liés, on inclut une grande Bibliographie.




## Préliminaires

---

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives à l'analyse fonctionnelle telles que : les espaces  $L^p$ , les fonctions absolument continues, espace de Banach et d'autres notions dont on aura besoin dans la suite de notre travail. Nous commencerons par donner un aperçu historique sur le développement de la théorie de dérivation fractionnaire.

### 1.1 Aperçu historique

Notre but dans cette partie n'est pas de dresser un état de l'art complet sur le calcul fractionnaire et ce pour deux raisons :

1. Les domaines de recherche sont actuellement si variés qu'il semble difficile d'avoir un aperçu complet, même si plusieurs ouvrages tels que [196],[117] offrent une vision très large sur ce domaine.
2. Des historiques très détaillés sont donnés dans les ouvrages de références tels que [120],[210]. Nous présentons ici les principales étapes historiques de l'élaboration du calcul fractionnaire, jusqu'à son essor dans le développement d'applications dans les années 1970. Nous nous appuyons sur les ouvrages  [120, 210, 125, 197] pour couvrir la période de 1695 à 1974.

#### 1695

L'origine du calcul fractionnaire semble remonter à Leibniz. Dans une lettre au Marquis de L'Hospital, il propose de généraliser sa formule pour la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'un produit de deux fonctions à  $n > 0$  et introduit la notation  $d^{\frac{1}{2}}h$ . Il écrit notamment que " $d^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt{dx} : x$ ". Dans une autre lettre à Bernoulli, il mentionne des dérivées "d'ordres généraux".

#### 1730

Euler est le second grand mathématicien à aborder la question. Dans son article [142] où il introduit sa célèbre fonction Gamma  $\Gamma$  qui généralise la factorielle ( $\Gamma(n+1) = n!$ ), il

conclut en proposant une définition pour la dérivée d'ordre  $\alpha > 0$  de  $x^\beta$ , avec  $\beta > 0$ . Son cheminement est le suivant : pour  $m, n \in \mathbb{N}$  avec  $m \geq n$ , on a tout d'abord

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}.$$

Grâce à sa fonction Gamma cette formule s'étend directement à une puissance  $m > 0$  :

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \quad (1.1)$$

Le terme de droite de (1.1) conservant un sens pour un réel  $n > 0$  (tel que  $n < m+1$ ), on peut donc le considérer comme une définition pour la dérivée d'ordre réel  $\alpha > 0$  de la puissance réelle  $\beta > 0$  :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \quad (1.2)$$

Notons ici qu'Euler ne considère en fait que des nombres rationnels (appelés aussi fractionnaires) et non des nombres réels. La dénomination actuelle de dérivée "fractionnaire" pour exprimer en fait une dérivée d'ordre réel pourrait donc trouver son origine historique dans ce travail.

## 1822

Mentionnons ensuite le travail de Fourier qui, grâce à sa célèbre transformée, obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel. En composant la transformée de Fourier (réelle) d'une fonction  $f$  avec sa transformée inverse, Fourier retrouve l'identité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cos(p(x-\alpha)) d\alpha dp. \quad (1.3)$$

Il remarque ensuite que la dérivée  $n^{\text{ième}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) du terme en cos peut s'écrire comme :

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos(p(x-\alpha)) = p^n \cos\left[p(x-\alpha) + \frac{n\pi}{2}\right]. \quad (1.4)$$

Le membre de droite garde un sens si on remplace  $n$  par  $u > 0$ , ce qui permet de définir la dérivée d'ordre  $u$  de  $\cos(p(x-\alpha))$ . En utilisant cette définition dans (1.3), Fourier obtient ainsi la dérivée d'ordre  $u > 0$  de  $f$  :

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) p^u \cos\left[p(x-\alpha) + \frac{u\pi}{2}\right] d\alpha dp. \quad (1.5)$$

## 1823

Abel utilise le calcul fractionnaire pour résoudre le problème du tautochrone généralisé.

### 1832-37

Liouville est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semblent l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837. Partant de la relation

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax}, \quad (1.6)$$

pour  $n \in \mathbb{N}$ , il propose de l'étendre pour  $\alpha > 0$ , définissant ainsi la dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $e^{ax}$ . Par conséquent toute fonction  $f$  pouvant s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}, \quad (1.7)$$

admet une dérivée d'ordre  $\alpha > 0$  donnée par

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha e^{a_k x}. \quad (1.8)$$

Afin d'étendre cette définition à d'autres types de fonctions que (1.7), Liouville remarque que :

$$\forall \beta > 0, \forall x > 0, x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-xu} du.$$

À l'aide de (1.6), il trouve :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-xu} du,$$

soit

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}. \quad (1.9)$$

Même si (1.2) et (1.9) concernant des exposants  $\beta$  différents, la limite  $\beta = 0$  est problématique.

Par exemple, pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , avec la définition d'Euler

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}},$$

alors qu'avec celle de Liouville

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^0 = 0.$$

Ce paradoxe est en fait résolu si on utilise les définitions modernes des dérivées fractionnaires. On peut vérifier que la définition d'Euler correspond à la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Liouville à sa propre version moderne. Par exemple, pour  $0 < \alpha < 1$  et  $\beta > 0$ ,

$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Euler} x^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-y)^{-\alpha} y^\beta dy,$$

$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Liouville} x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy.$$

Comme il est signalé dans [197] ces définitions diffèrent en fait par les bornes de leurs intégrales.

**Remarque 1.1.** *L'expression*

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy,$$

est défini ici comme

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{d}{dx} \int_s^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy.$$

**1847**

À partir d'une généralisation de la formule de Taylor, Riemann propose une définition d'intégrale fractionnaire :

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy + \psi(x),$$

où  $\psi(x)$  est une "fonction complémentaire" qui le gênera en fait dans ses travaux ultérieurs. Elle sera finalement abandonnée pour donner la définition moderne de l'intégrale fractionnaire.

**1867-68**

Grunwald puis Letnikov proposent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie (opposée à infinitésimale) entre  $f(x+h)$  et  $f(x)$  divisée par  $h$ .

**1869**

L'expression définitive de ce qui est maintenant appelé intégrale fractionnaire de Riemann apparaît pour la première fois dans le travail de Sonin. Pour une fonction complexe, en dérivant  $n$  fois la formule de Cauchy ( $n \in \mathbb{N}$ ), on obtient :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(y)}{(y-z)^{n+1}} dz.$$

Sonin, en choisissant un chemin approprié d'intégration, généralise cette formule à  $n < 0$ . Il obtient finalement une définition de l'intégrale d'ordre  $\alpha > 0$ , que l'on notera par la suite  ${}_a I_x^\alpha$  :

$${}_a I_x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy.$$

**1892**

Heaviside fournit cette année-là la première application concrète du calcul fractionnaire (le tautochrone d'Abel relevant davantage du cas d'école) pour la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t). \quad (1.10)$$

La démarche d'Heaviside est loin d'être rigoureuse (elle ne sera justifiée qu'en 1919), mais fournit toutefois la bonne solution, il trouve que

$$T(x, t) = T_0 \exp(-axp^{\frac{1}{2}}).$$

Il suppose ensuite que  $p^{\frac{1}{2}} T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{\pi t}} \dots$  ce qui correspond en fait à la dérivée d'ordre  $\frac{1}{2}$  de  $T_0$ ! En développant la solution en série entière, il obtient finalement la solution exacte de (1.10).

**1917**

Weyl définit une intégrale fractionnaire adaptée aux fonctions périodiques.

**1927**

Marchaud introduit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire :

$$D_+^\alpha f(x) = c \int_0^\infty \frac{\Delta_t^l f(x)}{t^{1+\alpha}} dt,$$

où  $\alpha > 0$ ,  $l \in \mathbb{N}$  avec  $l > \alpha$  et  $c$  est une constante de renormalisation. L'opérateur  $\Delta_t^l$  est une différence finie d'ordre  $l$  (par exemple,  $\Delta_t^1 f(x) = f(x) - f(x - t)$ ). L'avantage d'une telle définition par rapport aux autres est qu'elle est moins restrictive quant à la régularité de  $f$ .

### 1928

Hardy et Littlewood étudient comment agit l'intégrale fractionnaire  ${}_a I_x^\alpha$  sur certaines classes de fonctions. En particulier, leur théorème majeur stipule que pour  $0 < \alpha < 1$  et  $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ ,  ${}_a I_x^\alpha$  est un opérateur borné de  $L^p$ , dans  $L^q$  où  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ .

### 1937

Riesz cherche à donner un sens à l'intégrale fractionnaire pour des fonctions à plusieurs variables. Il donne la définition suivante :

$$I^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x - y\|^{n-\alpha}} dy.$$

Cet opérateur vérifie notamment  $I^\alpha \circ I^\beta = I^{\alpha+\beta}$  et  $\Delta I^{\alpha+2} = -I^\alpha$ , où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien.

### 1970

Dans [126] Oldham et Spanier traitent le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique. Ils montrent que lors d'un phénomène de diffusion, le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée  $\frac{1}{2}$  du paramètre physique (température, concentration d'espèces chimique, potentiel électrique, etc). D'après l'historique de Ross reproduit dans [120], ce problème semble être à l'origine de l'extension du calcul fractionnaire hors du champ des mathématiques.

### 1974

Cette année-là se tient à l'Université de New Haven (Connecticut) la première conférence sur le calcul fractionnaire organisée par Ross.

## 1.2 Notions Générales

Dans cette partie, nous présentons des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui représentent un outil indispensable dans la théorie du calcul fractionnaire.

### 1.2.1 Espace normés

**Définition 1.1.** (voir [[92], page 21]).(Norme) Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Une norme sur  $E$ , est une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , vérifiant les conditions suivantes :

1.  $\|x\| \geq 0$  et  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ .
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , pour tout  $x \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  pour tout  $x, y \in E$ .

**Remarque 1.2.** L'espace vectoriel  $E$  muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par  $(E, \|\cdot\|)$ .

### 1.2.2 Espace de Banach

**Définition 1.2.** (Suite de Cauchy) Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  est de Cauchy si et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > m > N \implies \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

**Définition 1.3.** (Espace Complet) Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On dit que  $E$  est complet si toute suite de Cauchy dans  $E$  est convergente dans  $E$ .

**Définition 1.4.** (Espace de Banach) Un espace de Banach est un espace normé complet.

### 1.2.3 Espace de Hilbert

**Définition 1.5.** (produit scalaire) Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$ . Un produit scalaire sur  $E$  est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  telle que pour tout  $x, y, x_1, x_2 \in E$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$  on a :

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  et  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ .
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
3.  $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ .
4.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ .

**Définition 1.6.** (voir [[106], page 6]). (Espace préhilbertien) Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire .

**Définition 1.7.** (Espace de Hilbert) Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur  $\mathbb{K}$  complet pour la norme induite par le produit scalaire .

### 1.2.4 Quelques résultats de la théorie du point fixe

Dans cette partie, on étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach, Schauder, Alternative de Leray Schauder et krasnoselskii. Etant donné un ensemble  $X$  et une application  $T : X \rightarrow X$  on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur  $T$  et  $X$  pour que  $T$  ait un point fixe.

**Théorème 1.1. (Théorème du point fixe de Banach)[[24]]** Soient  $X$  un espace de Banach et  $T : X \rightarrow X$  une application contractante. Alors  $T$  admet un point fixe unique, autrement dit :

$$\exists ! x \in X : Tx = x.$$

**Théorème 1.2. (Théorème du point fixe de Schauder)[[76]]** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet, soit  $K$  une partie convexe et fermé de  $X$ , et soit  $T : X \rightarrow X$  une application telle que l'ensemble  $\{Tx : x \in X\}$  est relativement compacte. Alors  $T$  admet au moins un point fixe.

**Théorème 1.3. (Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)[[127]].** Soit  $U$  un ensemble ouvert borné d'un espace de Banach  $E$  tel que  $0 \in U$  et  $T : \bar{U} \rightarrow E$  un opérateur complètement continu. Alors

- 1)  $T$  a un point fixe sur  $\bar{U}$  ou bien
- 2) il existe  $\lambda \in (0, 1)$  et  $u \in \partial U$  tel que :  $x = \lambda T(x)$ .

**Théorème 1.4. (Théorème du point fixe de Krasnoselskii)[[198]]** Soit  $F$  un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach  $X$ .  $T_1$  et  $T_2$  sont deux applications de  $F$  dans  $X$  telles que :

- 1)  $T_1(x) + T_2(y) \in F, \quad \forall x, y \in F,$
- 2)  $T_1$  est une contraction,
- 3)  $T_2$  est compacte et continue.

Alors  $T_1 + T_2$  admet un point fixe dans  $F$ , autrement dit, il existe  $x \in F$  tel que  $T_1(x) + T_2(x) = x$ .

**Théorème 1.5. (Ascoli-Arzelà)[[118]]** Soit  $A$  un sous ensemble de  $C(J, X)$ ,  $A$  est relativement compacte dans  $C(J, X)$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- i) L'ensemble  $A$  est borné. i.e il existe une constante  $K > 0$  tel que :

$$\|f(x)\| \leq K \text{ pour tout } x \in J \text{ et tout } f \in A,$$

- ii) L'ensemble  $A$  est équicontinue. i.e pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \epsilon \text{ pour tous } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A,$$

- iii) Pour tout  $x \in J$  l'ensemble  $\{f(x), \quad f \in A\} \subset E$  est relativement compacte

### 1.2.5 Opérateurs linéaires bornés

► sous-section rappelle quelques notions de bases et les principaux résultats mathématiques de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés tout le long de ce travail.

On désigne ici par  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$X, Y$  des espaces de Banach.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité.

$H$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K}$  muni de la norme  $\|\cdot\|$  et le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

De manière générale, un opérateur linéaire est une application  $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow Y$  linéaire, où  $D(T)$  est le domaine de définition de l'application linéaire  $T$ , qui est un sous-espace vectoriel de  $X$ , que l'on suppose en général dense dans  $X$ . L'opérateur  $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow Y$  est dit borné si l'image de la boule d'unité ( $T(B_X(0, 1))$ ) de  $X$  est bornée dans  $Y$ .

Tout opérateur  $T$  est complètement défini par son graphe  $G(T)$  qui est un sous-espace vectoriel de  $X \times Y$  défini par  $G(T) = \{(u, Tu), u \in D(T)\}$ .

Pour tout opérateur linéaire  $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow Y$ , on note par :

$$R(T) = \{u \in D(T), Tu = 0\} \quad (\text{noyau de } T),$$

$$N(T) = \{Tu : u \in D(T)\} \quad (\text{image de } T).$$

On note  $\mathcal{L}(X, Y)$  (resp.  $\mathcal{L}(X)$ ) l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de  $X$  dans  $Y$  (resp. des endomorphismes continus de  $X$ ) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathcal{L}(X, Y), \quad \|B\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Bu\|_Y}{\|u\|_X}.$$

**Définition 1.8.** On dit qu'une application linéaire continue  $B \in \mathcal{L}(X, Y)$  est inversible ssi il existe une application  $B' \in \mathcal{L}(Y, X)$  telle que

$$B' \circ B = I_X, \quad B \circ B' = I_Y.$$

L'application  $B'$  si elle existe est unique. On notera  $B' = B^{-1}$ .

**Théorème 1.6.** Toute bijection linéaire continue  $B \in \mathcal{L}(X, Y)$  est inversible.

**Théorème 1.7.** Soit  $B : X \longrightarrow Y$  une application linéaire. Alors  $B$  est continu si et seulement si le graphe de  $B$  est fermé dans  $X \times Y$ , c'est-à-dire : pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$  vérifiant  $(x_n \longrightarrow x, n \longrightarrow \infty)$  dans  $X$  et  $(Bx_n \longrightarrow y, n \longrightarrow \infty)$  dans  $Y$ , on a  $y = Bx$ .

### 1.2.6 Opérateurs linéaires non-bornés

**Définition 1.9.** On dit qu'un opérateur  $T$  est fermé si son graphe  $G(T)$  est fermé dans  $X \times Y$ , i.e., pour toute suite  $(u_n) \subset D(T)$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $X$  et  $Tu_n \rightarrow v$  dans  $Y$ , alors  $u \in D(T)$  et  $v = Tu$ .

L'opérateur fermé  $T$  peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition  $D(T)$  muni de la norme du graphe ( $\|u\|_G = \|u\|_X + \|Tu\|_Y$ ) dans  $X$ .

**Définition 1.10.** On dit qu'un opérateur  $T$  est fermable dans  $X$  s'il admet un prolongement fermé. Autrement dit  $T$  est fermable si et seulement si pour toute suite  $(u_n) \subset D(T)$  telle que  $u_n \rightarrow 0$  et  $Tu_n \rightarrow v$ , alors  $v = 0$ . L'opérateur fermé  $\bar{T}$  dont le graphe  $G(\bar{T}) = \overline{G(T)}$  est appelé fermeture de  $T$ .

**Théorème 1.8. [Théorème du graphe fermé].** Si l'opérateur fermé  $T$  est défini sur tout l'espace  $X$ , alors  $T$  est borné

$$(T \text{ fermé et } D(T) = X \implies T \text{ borné}).$$

### 1.2.7 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert

**Définition 1.11.** Soit  $M$  un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert  $H$ , on définit  $M^\perp$  l'orthogonal de  $M$ , par

$$M^\perp = \{f \in H, (f, g)_H = 0, \forall g \in M\}.$$

**Proposition 1.1.** Soit  $M$  un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert  $H$ . Alors  $M$  est dense dans  $H$  si et seulement si  $M^\perp = \{0\}$ .

*Démonstration.* ► d'abord que  $M$  est dense dans  $H$ . Soit  $f \in M^\perp \subset H$ , soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  suite d'éléments de  $M$  qui converge vers  $f$ . On a  $\langle f, f_n \rangle_H = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En passant à la limite, on en conclut que  $\|f\|_H = 0$ . Donc  $f = 0$ , qui donne  $M^\perp = \{0\}$ .

► Réciproquement, supposons que  $M^\perp = \{0\}$ . Alors on a  $(M^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$  et comme  $M \subset \bar{M}$  il s'en suit que  $(\bar{M})^\perp \subset M^\perp$  et donc  $(M^\perp)^\perp \subset ((\bar{M})^\perp)^\perp$ , mais  $\bar{M}$  est un fermé, alors  $((\bar{M})^\perp)^\perp = \bar{M}$ , alors on trouve  $(M^\perp)^\perp \subset \bar{M} \implies H \subset \bar{M}$ . D'où  $H = \bar{M}$ . ■

### 1.2.8 Espaces des fonctions intégrables

**Définition 1.12.** [Podlubny, 1999] Soit  $\Omega = [0, T]$  ( $0 < T < +\infty$ ) un intervalle fini de  $\mathbb{R}$  et  $1 \leq p \leq \infty$ .

- 1) Pour  $1 \leq p < \infty$ , l'espace  $L^p(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $f$  réelles sur  $\Omega$  telles que  $f$  est mesurable et

$$\int_0^T |f(t)|^p dt < \infty.$$

- 2) Pour  $p = \infty$ , l'espace  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables  $f$  bornées presque partout (p.p) sur  $\Omega$ .

**Théorème 1.9.** [Podlubny, 1999] Soit  $\Omega = [0, T]$  ( $0 < T < +\infty$ ) un intervalle fini de  $\mathbb{R}$ .

- 1) Pour  $1 \leq p < \infty$ , l'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left( \int_0^T |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- 2) L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ M \geq 0 : |f(t)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega \right\}.$$

### 1.2.9 Espaces des fonctions continues et absolument continues

**Définition 1.13.** [Kilbas et al., 2006] Soit  $\Omega = [0, T]$  ( $0 < T < +\infty$ ) un intervalle fini de  $\mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On désigne par  $C^n(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à  $n$  continues sur  $\Omega$ , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \max_{t \in \Omega} |f^{(k)}(t)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si  $n = 0$ ,  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  continues sur  $\Omega$  muni de la norme :

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

**Définition 1.14.** [Kilbas et al., 2006] Soit  $\Omega = [0, T]$  ( $0 < T < +\infty$ ) un intervalle fini de  $\mathbb{R}$ . On désigne par  $AC(\Omega)$  l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est-à-dire :

$$AC(\Omega) = \left\{ f \mid \exists \varphi \in L^1(\Omega) : f(t) = c + \int_0^t \varphi(s) ds \right\},$$

et on appelle  $AC(\Omega)$  l'espace des fonctions absolument continues sur  $\Omega$ .

**Définition 1.15.** [Kilbas et al., 2006] Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on désigne par  $C_\mu^n(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  qui ont des dérivées continues sur  $\Omega$  jusqu'à l'ordre  $(n - 1)$  et telles que  $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$  c'est-à-dire

$$AC^n(\Omega) = \left\{ f \mid f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, f^{(k)} \in C(\Omega), k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}, f^{(n-1)} \in AC(\Omega) \right\}.$$

En particulier  $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$ .

Une caractérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :


**Lemme 1.1.** [Kilbas et al., 2006] Une fonction  $f \in AC^n(\Omega)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , si et seulement si elle est représentée sous la forme :

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

## 1.3 Fonction spécifique pour la dérivation fractionnaire

Dans cette partie, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et l'exponentielle de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses application.

### 1.3.1 La fonction Gamma

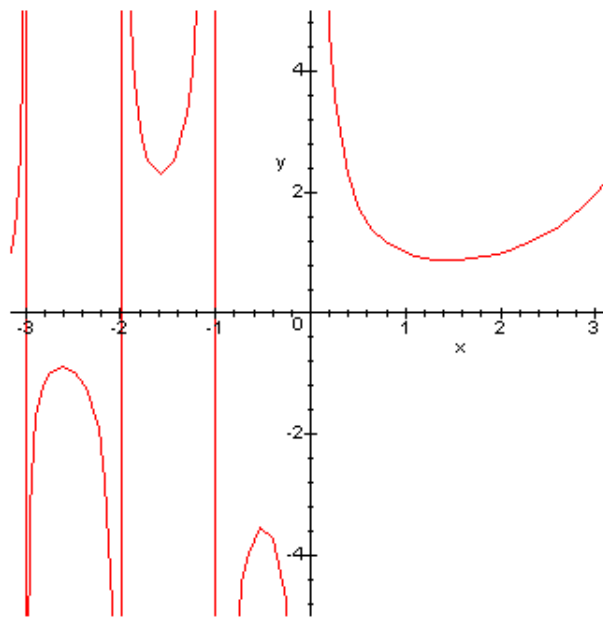
La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 – 1783) dans son objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entières. Plus tard, en raison de sa grande importance, elle a été étudiée par d'autres éminents mathématiciens comme Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Christoph Gudermann (1798 – 1852), Joseph Liouville (1809 – 1882), Karl Weierstrass (1815 – 1897), Charles Hermite (1822 – 1901) et beaucoup d'autres. La fonction Gamma appartient à la catégorie des fonctions transcendentes spéciales et nous verrons que certaines constantes mathématiques célèbres se produisent dans son étude. Elle apparaît également dans divers domaines, comme les séries asymptotiques, l'intégration définie, série hypergéométrique, fonction zêta de Riemann, théorie des nombres ... Pour plus de détails sur cette fonction (voir  [75, 147]).

**Définition 1.16.** [Podlubny, 1999] Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(z) > 0$ . La fonction Gamma  $\Gamma(z)$  est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.11)$$

où  $z$  est un nombre complexe quelconque tel que  $\Re(z) > 0$ .

avec  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(0_+) = +\infty$ ,  $\Gamma(z)$  est une fonction strictement décroissante pour  $0 < z \leq 1$ .



**FIG. 1.1** : Courbe représentative de la fonction Gamma

### 1.3.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma

Une propriété importante de la fonction Gamma  $\Gamma(z)$  est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Re(z) > 0, \quad (1.12)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = [-t^z e^{-t}]_{t=0}^{t=+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car  $\Gamma(n + 1) = n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , en effet  $\Gamma(1) = 1$ , et en utilisant (1.12) nous obtenons :

$$\begin{cases} \Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ \dots \quad \dots\dots\dots \\ \Gamma(n + 1) = n.\Gamma(n) = n.(n - 1)! = n! \end{cases} \quad (1.13)$$

Nous montrons maintenant que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

De la définition (1.11), nous avons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Si nous posons  $t = y^2$ , alors  $dt = 2y dy$ , et nous obtenons maintenant

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \quad (1.14)$$

De façon analogue, on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \quad (1.15)$$

Si nous multiplions ensemble (1.14) et (1.15) nous obtenons :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \quad (1.16)$$

L'équation (1.16) est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi. \quad (1.17)$$

Ainsi,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

L'équation fonctionnelle (1.12) entraîne pour les entiers relatifs positifs  $n$  (voir [148]).

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) = \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) = \frac{1.5.9\dots(34n-3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5\dots(2n-1)} \sqrt{\pi}.$$

Aucune expression de base est connue pour  $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$  ou  $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ , mais il a été prouvé que ces chiffres sont transcendantales (respectivement par Le Lionnais en 1983 et Chudnovsky en 1984).

Maximum de chiffres, les valeurs numériques de certaines de ces constantes sont :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1.772453850905516027298167483341145182797549456122383\dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2.67893853470774763365569294097467764412868937795730\dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3.62560990822190831193068515586767200299516768288006\dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) = 4.590843711998803053200475827592915200343410999829340\dots$$

### 1.3.3 Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite

**Proposition 1.2.** [Podlubny, 1999] La fonction Gamma peut être représentée par la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad (1.18)$$

où nous supposons que  $\Re(z) > 0$ .

*Démonstration.* Pour prouver (1.18), nous introduisons la fonction auxiliaire suivante :

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt. \quad (1.19)$$

Effectuant maintenant la substitution  $\tau = \frac{t}{n}$ , puis en répétant l'intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 f_n(z) &= n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau & (1.20) \\
 &= \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau \\
 &= \frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau \\
 &= \frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n-1)(z+n)}.
 \end{aligned}$$

En exploitant la limite connue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \tag{1.21}$$

nous arrivons à :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{1.22}$$

ce qui termine la preuve de la représentation (1.18) de la fonction Gamma, si la relation (1.22) est justifiée. Pour ce faire, nous estimons la différence

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt - f_n(z) & (1.23) \\
 &= \int_0^n [e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n] t^{z-1} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.
 \end{aligned}$$

Prenons un  $\varepsilon > 0$  arbitraire. En raison de la convergence de l'intégrale (1.11), il existe un  $N$  tel que pour  $n \geq N$ , on a

$$\left| \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (x = \Re(z)). \tag{1.24}$$

Fixons maintenant  $N$  et considérons  $n > N$ , nous prouvons écrire  $\Delta$  comme une somme de trois intégrales :

$$\Delta = \left( \int_0^N + \int_N^n \right) [e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n] t^{z-1} dt + \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.25}$$

Le dernier terme est inférieur à  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Pour la seconde intégrale, nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \int_N^n \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt \right| &\leq \int_N^n \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{x-1} dt \\ &< \int_N^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

où, comme ci-dessus, ( $x = \mathcal{R}e(z)$ ).

Pour l'estimation de la première intégrale dans (1.25) nous avons besoin de l'inégalité auxiliaire suivante :

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}, \quad (0 < t < n), \quad (1.27)$$

qui découle, des relations

$$1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \int_0^t e^\tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n} d\tau \quad (1.28)$$

et

$$0 < \int_0^t e^\tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n} d\tau < \int_0^t e^\tau \frac{\tau}{n} d\tau = e^t \frac{t^2}{2n}. \quad (1.29)$$

(La relation (1.28) peut être vérifiée en différenciant les deux cotés).

En utilisant l'inégalité auxiliaire (1.27), nous obtenons pour  $n$  assez grand et  $N$  fixé

$$\left| \int_0^N \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt \right| < \frac{1}{2n} \int_0^N t^{x+1} dt < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.30)$$

En tenant compte des inégalités (1.24), (1.26) et (1.30) et que  $\varepsilon$  est arbitraire, nous concluons que (1.22) est justifiée.

Ceci termine certainement la preuve de la formule (1.18) pour  $\mathcal{R}e(Z) > 0$ .

À l'aide de (1.12), la condition  $\mathcal{R}e(z) > 0$ , peut être affaiblie pour  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  de la manière suivante.

Si  $-m < \mathcal{R}e(z) < -m + 1$ , où  $m$  est un nombre entier positif, alors

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\dots(z+m-1)} & (1.31) \\
&= \frac{1}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{z+m} n!}{(z+m)\dots(z+m+n)} \\
&= \frac{1}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-m)^{z+m} (n-m)!}{(z+m)(z+m+1)\dots(z+n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la représentation (1.18) est vraie pour tout  $z, z \neq 0, -1, -2, \dots$  ■

### 1.3.4 La fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

**Définition 1.17.** [Podlubny, 1999] La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes  $z$  et  $w$  par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \Re(z) > 0, \Re(w) > 0. \quad (1.32)$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \Re(z) > 0, \Re(w) > 0, \quad (1.33)$$

il s'ensuit de (1.33) que :

$$B(z, w) = B(w, z), \quad \Re(z) > 0, \Re(w) > 0.$$

### 1.3.5 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Elle est aussi largement utilisée dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire, cette fonction à été introduite par G .M. Mittag-Leffler [MittagLeffler, 1905]

**Définition 1.18.** [Podlubny, 1999] Pour  $z \in \mathbb{C}$ , la fonction de Mittag-Leffler  $E_\alpha(z)$  est définie comme suit :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0. \quad (1.34)$$

En particulier :

$$E_1(z) = e^z, \quad E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}).$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en 1953 – 1954 et elle est définie par un développement en serie suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (1.35)$$

A partir de la relation (1.35), on trouve les relations suivantes

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z). \quad (1.36)$$

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (1.37)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k + 1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k + 1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \quad (1.38)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k + 2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k + 2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad (1.39)$$

et en général

$$E_{1,p}(z) = \frac{1}{z^{p-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{z^k}{k!} \right\}. \quad (1.40)$$

Les cosinus et les sinus hyperboliques sont aussi des cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler (1.35) :

$$E_{2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k)!} = \cosh(z), \quad (1.41)$$

$$E_{2,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{\Gamma(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}. \quad (1.42)$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle. Les deux figure ci-dessous montrent le comportement de la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre pour différentes valeurs de  $\alpha$  et à deux paramètres pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  :

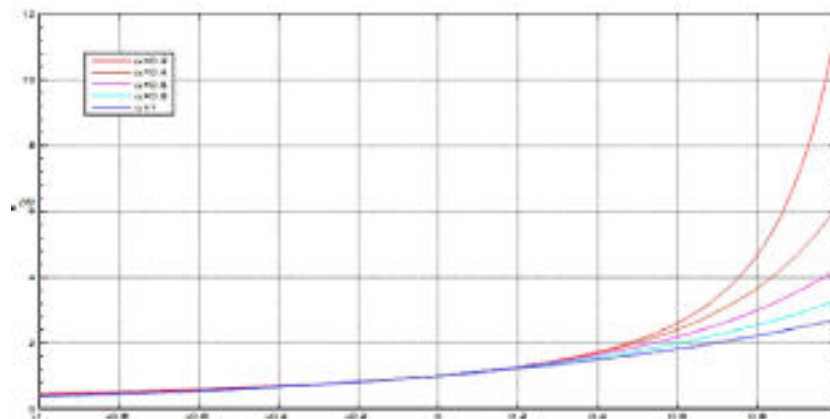


FIG. 1.2 : La fonction de Mittag Leffler à un seul paramètre

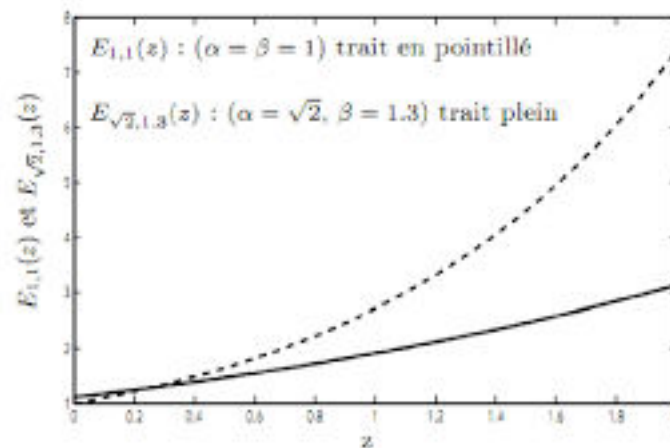


FIG. 1.3 : La fonction de Mittag Leffler à deux paramètres

### 1.3.6 Rappels de quelques inégalités utiles

Pour obtenir les estimations à priori, nous avons besoin des quelques inégalités auxiliaires.

#### Inégalité de Young

Soit  $p, q$  deux nombres réels strictement positifs vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

#### Inégalité de Young avec $\epsilon$

Soit  $\epsilon$  un nombre strictement positif, alors  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, p > 1$

$$|ab| \leq \frac{1}{p} \epsilon |a|^p + \frac{p-1}{p} \frac{|b|^p}{\epsilon^{p-1}}.$$

#### Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall (f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} |f(t)g(t)| dt \leq \left( \int_{\Omega} (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} (g(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

où

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

#### Inégalité de Cauchy

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$|ab| \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$$

#### Inégalité de Cauchy avec $\epsilon$

Soit  $\epsilon$  un nombre strictement positif, alors  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2$$

**Inégalité de Hölder**

$\forall (f, g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$ . Alors  $f, g \in L^1$  et

$$\int_{\Omega} |f(t)g(t)| dt \leq \left( \int_{\Omega} (f(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} (g(t))^q dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

où  $p, q$  sont strictement positifs telle que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Inégalité de Poincaré**

**Lemme 1.2.** *Pour  $m \in \mathbb{N}$  on a l'estimation :*

$$\|\mathfrak{S}_x^{2m} u\|_{L^2(0,l)} \leq \left(\frac{l}{2}\right)^{2m} \|u\|_{L^2(0,l)}. \quad (1.43)$$

où

$$\mathfrak{S}_x^{2m} u = \int_0^x \int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\xi_{2m-1}} u(\eta, t) d\eta d\xi_{2m-1} \dots d\xi_1 = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{2m-1}}{(2m-1)!} u(\xi, t) d\xi.$$

**Lemme 1.3.** *[Alikhanov, A. A, 2010] Pour toute fonction  $u(s)$  absolument continue sur l'intervalle  $[0, T]$ , on a l'inégalité suivante*

$$u(s)\partial_s^\alpha u(s) \geq \frac{1}{2}\partial_s^\alpha u^2(s), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.44)$$

**Lemme 1.4.** *[Ladyzhenskaya, O.A, 1985] Soit  $u(t)$  non négatif et absolument continu sur  $[0, T]$ , et pour tout  $t \in [0, T]$ , satisfait l'inégalité*

$$\frac{d\varphi}{dt} \leq C(t)\varphi(t) + B(t), \quad (1.45)$$

où les fonctions  $C(t)$  et  $B(t)$  sont sommables et non négatives sur  $[0, T]$ . Ensuite,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq e^{\int_0^t C(\tau) d\tau} \left( \varphi(0) + \int_0^t B(\xi) e^{\int_0^\xi C(\tau) d\tau} d\xi \right) \\ &\leq e^{\int_0^t C(\tau) d\tau} \left( \varphi(0) + \int_0^t B(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Le lemme 1.4 peut être généralisé comme

**Lemme 1.5.** [Alikhanov. A. A, 2010] Soit une fonction absolument continue non négative  $Z(t)$  satisfaisant l'inégalité

$$\partial_t^\alpha Z(t) \leq c_1 Z(t) + c_2(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.47)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ , où  $c_1$  est une constante positive et  $c_2(t)$  est une fonction non négative intégrable sur  $[0, T]$ . Ensuite,

$$Z(t) \leq Z(0)E_\alpha(c_1 t^\alpha) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha, \alpha^*}(c_1 t^\alpha)D_t^{-\alpha}c_2(t) \quad (1.48)$$

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad \text{et} \quad E_{\alpha, \alpha^*}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha^*)}. \quad (1.49)$$

sont les fonctions de Mittag-Leffler

## 1.4 Lemme de Gronwall

Le lemme de Gronwall et ses variantes jouent un grand rôle dans les estimations des termes intégrés-différentiels et dont l'utilisation est fréquente pour l'obtention des estimations a priori dans les normes des espaces suscités et autres.

**Lemme 1.6.** (voir [158]) Soit  $Z_i(\tau)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont des fonctions non négatives sur  $[0, T]$ ,  $Z_1(\tau), Z_2(\tau)$  sont intégrables et la fonction  $Z_3(\tau)$  soit non-décroissante. Alors :

$$\int_0^t Z_1(\tau) d\tau + Z_2(t) \leq Z_3(t) + c \int_0^t Z_2(\tau) d\tau$$

,  
découle l'inégalité

$$\int_0^t Z_1(\tau) d\tau + Z_2(t) \leq e^{ct} Z_3(t).$$

## Dérivées et intégrales fractionnaires

---

Le concept du calcul fractionnaire est une généralisation de la dérivation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire. Les dérivées d'ordres non entiers sont à présent largement appliquées dans de nombreux domaines, par exemple, en probabilité, viscoélasticité, électronique, économie, mécanique et en biologie, etc. Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommés et des caoutchoucs. En bref, toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations antérieures notamment à caractère viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement. Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions. Dans ce chapitre, on introduira l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les deux définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires à savoir celle de Riemann-Liouville et de Caputo, en donnant les propriétés les plus importantes de ces notions ainsi que la relation entre ces deux approches.

### 2.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Dans cette section, nous citons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Nous allons commencer par la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville.

#### 2.1.1 Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , on considère l'intégrale :

$$I^{(1)} f(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u) du$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt$$

Plus généralement le  $n^{\text{ième}}$  itéré de l'opérateur  $I$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} I^{(n)} f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

pour tout entier  $n$ .

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma :  $(n-1)! = \Gamma(n)$ , Riemann a rendu compte que le second membre de (2.1) pourrait avoir un sens même quand  $n$  prenant une valeur non-entière, il était naturel donc de définir l'intégration fractionnaire.

### 2.1.2 Intégrales d'ordre arbitraire

Soit  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue.  $b$  pouvant être fini ou infini.

Une primitive de  $f$  est donnée par l'expression

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left( \int_a^s f(t) dt \right) ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

en itérant, on arrive à :

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau.$$

### 2.1.3 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville


**Définition 2.1.** [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soit  $f \in L^1([a, b])$ , avec  $(-\infty < a < b < +\infty)$ . L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction  $f$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\Re(\alpha) > 0$ ) notée  $I_a^\alpha$  est définie par :

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{2.2}$$

où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma donnée par (1.11)

Le tableau suivant montre pour quelles classes de fonctions cette définition a un sens et plus précisément quelles sont les images de ces ensembles par cet opérateur :

	f	${}_a I_t^\alpha f$	conditions
1.	$L^p([a, b])$	$L^q([a, b])$	$0 < \alpha < 1, 1 < p < \frac{1}{\alpha}, 1 \leq q \leq \frac{p}{1-\alpha p}$
2.	$L^1([a, b])$	$L^p([a, b])$	$0 < \alpha < 1, 1 \leq p \leq \frac{1}{1-\alpha}$
3.	$L^{\frac{1}{\alpha}}([a, b])$	$L^q([a, b])$	$0 < \alpha < 1, q \geq 1$
4.	$L^p([a, b])$	$H^{\frac{\alpha-1}{p}}([a, b])$	
5.	$L^\infty([a, b])$	$H^\infty([a, b])$	
6.	$L^p([a, b])$	$L^p([a, b])$	$p \geq 1$
7.	$C^0([a, b])$	$C_+^0([a, b])$	
8.	$AC([a, b])$	$AC([a, b])$	

Toutes les démonstrations se trouvent dans  [210].

**Théorème 2.1.** [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Si  $f \in L^1([a, b])$ , avec  $(-\infty < a < b < +\infty)$ . alors  $I_a^\alpha f$  existe pour presque tout  $t \in [a, b]$  et de plus  $I_a^\alpha f \in L^1([a, b])$ .

*Démonstration.* En introduisant (2.2) puis en utilisant le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_a^b |I_a^\alpha f(t)| dt &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau)| d\tau dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(\tau)| \left( \int_\tau^b (t-\tau)^{\alpha-1} dt \right) d\tau \\ &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(\tau)| (b-\tau)^\alpha d\tau \\ &\leq \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Puisque  $f \in L^1([a, b])$ , la dernière quantité est fini, ce qui établit le résultat. ■

### 2.1.4 Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Soit la fonction  $f(t) = (t - a)^\beta$  où  $\beta > -1$ .

$$I_a^\alpha (t - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\beta d\tau.$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variables  $\tau = a + (t - a)s$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\ &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1) \\ &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} (t - a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La relation (2.3) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  d'une constante est donnée par :

$${}^R D_t^{-\alpha} C = I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^\alpha.$$

Et en particulier, si  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} {}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\ {}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\ {}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}} \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres complexes et  $f \in C^0([a, b])$ .

$$i) I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f, \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0) \tag{2.4}$$

$$ii) \frac{d}{dt} (I_a^\alpha f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t), \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 1 \tag{2.5}$$

$$iii) \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) = f(t), \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \tag{2.6}$$

*Démonstration.* i) Pour la démonstration on utilise la fonction Bêta d'Euler. En effet :

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha (I_a^\beta f)](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds, \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$$[I_a^\alpha (I_a^\beta f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left[ \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right] d\tau.$$

Le changement de variables  $s = \tau + (t-\tau)\mu$ , nous donne

$$\begin{aligned} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

D'où

$$[I_a^\alpha (I_a^\beta f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t).$$

ii) Pour justifier la deuxième identité on utilise les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et la relation fondamentale de la fonction gamma d'Euler :  $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ .

iii) Pour la dernière identité, on considère la fonction  $f \in C^0([a, b])$ , on a

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De la relation (2.3), on peut écrire

$$(I_a^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \longrightarrow 1 \quad \text{quand} \quad \alpha \longrightarrow 0^+.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau - f(t)) d\tau.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

D'une part, on a  $f$  est continue sur  $[a, b)$  qui nous permet d'écrire

$$\forall t, \tau \in [a, b), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \varepsilon,$$

ce qui entraîne

$$\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \varepsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha}. \tag{2.8}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} (|f(\tau)| + |f(t)|) d\tau \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} 2 \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)| \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \forall t \in [a, b) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} 2M \left( \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha} \right), \text{ où } M = \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)|.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Une combinaison de (2.7), (2.8) et (2.9) nous donne :

$$\begin{aligned}
 \left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left[ \varepsilon \delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha) \right] \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ \varepsilon \delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha) \right],
 \end{aligned}$$

en faisant tendre  $\alpha$  vers  $0^+$ , on obtient :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| \leq \varepsilon$$

autrement dit :

$$\left| \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) - f(t) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$



### 2.1.5 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 2.2.** [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soit  $f \in L^1([a, b])$ , une fonction intégrable sur  $[a, b]$ , la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\text{Re}(\alpha) > 0$ ) notée  ${}^R D_t^\alpha f$  est définie par :

$$\begin{aligned} ({}^R D_t^\alpha f)(t) &= \left( \frac{d}{dt} \right)^n [(I_a^{n-\alpha} f)(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

où  $n-1 < [\text{Re}(\alpha)] < n$ , et  $[\text{Re}(\alpha)]$  est la partie entière de  $\text{Re}(\alpha)$ .

En particulier, si  $\alpha = 0$ , alors

$$({}^R D_t^0 f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left( \frac{d}{dt} \right) \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t).$$

Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors

$$({}^R D_t^n f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left( \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \right) \int_a^t f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t).$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

Si de plus  $0 < \alpha < 1$ , alors  $n = 1$ , d'où

$$({}^R D_t^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

**Remarque 2.1.** • Contrairement à la dérivée usuelle d'une fonction  $f(t)$  en un point qui ne dépend que des valeurs de  $f(t)$  au voisinage de ce point, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre non-entier dépend de toutes les valeurs de  $f(t)$  dans l'intervalle  $(a, t)$ . On dit qu'elle est à caractère non-local.

• Pour  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ , la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée ordinaire.

### 2.1.6 Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Calculons la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction  $f(t) = (t - a)^\beta$ . Par la formule (2.3) on peut écrire :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha (t - a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} (t - a)^{\beta + n - \alpha} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t - a)^{\beta + n - \alpha}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

on sait que :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t - a)^{\beta + n - \alpha} = (\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1) (t - a)^{\beta - \alpha}. \quad (2.12)$$

Par substitution de (2.12) dans (2.11), on obtient :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)}{(\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

**Remarque 2.2.** i) Pour  $\alpha = 1$ , la formule de dérivation (2.13) se réduit à

$${}^R D_t^1 (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta)} (t - a)^{\beta - 1} = \beta (t - a)^{\beta - 1} = \frac{d}{dt} (t - a)^\beta. \quad (2.14)$$

ii) Si on prend  $\beta = 0$  dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$${}^R D_t^\alpha 1 = \frac{(t - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)},$$

c'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas ni nulle ni constant! mais on a :

$${}^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Il est aisé d'établir le résultat suivant :

**Lemme 2.1.** Soient  $n-1 < \alpha < n$  et  $n = [\alpha] + 1$ , et  $f$  une fonction vérifiant

$${}^R D_a^\alpha f(t) = 0,$$

alors

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-1)} t^{j+\alpha-n}, \quad \forall c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si  $0 < \alpha < 1$ , alors

$$f(t) = ct^{\alpha-1}, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* Soit  ${}^R D_a^\alpha f(t) = 0$ , d'après (2.10) on a :

$${}^R D_a^\alpha f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} f(t) = 0.$$

Et par suite :

$$I_a^{n-\alpha} f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j, \tag{2.15}$$

Maintenant, l'application de l'opérateur  $I_a^\alpha$  à l'équation (2.15) donne :

$$I_a^n f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j I_a^\alpha t^j,$$

En utilisant la relation (2.13), on obtient :

$$I_a^n f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)} t^{j+\alpha}, \tag{2.16}$$

L'application de l'opérateur  $D^n$  à l'équation (2.16) donne :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)} D^n t^{j+\alpha},$$

Enfin, la dérivation classique et l'utilisation de la formule :

$$D^n t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} t^{\alpha - n},$$

donne :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)} \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+\alpha-n+1)} t^{j+\alpha-n}.$$

Finalement on obtient :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha-n+1)} t^{j+\alpha-n}.$$

Ceci complète la preuve du Lemme. ■

La proposition suivante établit une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire.

**Proposition 2.2.** [Kilbas et al., 2006] Soient  $\alpha \geq 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f \in AC^n([a, b])$ , alors la dérivée fractionnaire  ${}^R_a D_t^\alpha f$  existe presque partout sur  $[a, b]$  de plus, elle est représentée sous la forme :

$${}^R_a D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (2.17)$$

### 2.1.7 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans les propositions suivantes :

**Proposition 2.3.** [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Pour  $n-1 < \alpha \leq n$ ,  $m-1 < \beta \leq m$ , on a :

1) L'opérateur de Riemann-Liouville est linéaire

$${}^R_a D^\alpha (\lambda f + g)(t) = \lambda ({}^R_a D^\alpha f)(t) + ({}^R_a D^\alpha g)(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) En général

$${}^R_a D^\alpha ({}^R_a D^\beta f(t)) \neq {}^R_a D^\beta ({}^R_a D^\alpha f(t)).$$

*Démonstration.* 1) Soit  $f, g \in L^1([a, b])$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} {}^R_a D^\alpha (\lambda f + g)(t) &= D^n I_a^{n-\alpha} (\lambda f + g)(t) \\ &= \lambda D^n I_a^{n-\alpha} f(t) + D^n I_a^{n-\alpha} g(t) \end{aligned}$$

Comme la dérivée  $n^{\text{ième}}$  et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned} {}^R_a D^\alpha (\lambda f + g)(t) &= \lambda D^n I_a^{n-\alpha} f(t) + D^n I_a^{n-\alpha} g(t) \\ &= \lambda ({}^R_a D^\alpha f)(t) + ({}^R_a D^\alpha g)(t). \end{aligned}$$

2) On a :

$${}^R_a D^\alpha ({}^R_a D^\beta f(t)) = {}^R_a D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{\beta-k} f(0) \frac{t^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)},$$

et

$${}^R_a D^\beta ({}^R_a D^\alpha f(t)) = {}^R_a D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^{\alpha-k} f(0) \frac{t^{-\beta-k}}{\Gamma(1-\beta-k)}.$$

Par suite les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ne commutent que si  $\alpha = \beta$  et  $D^{\alpha-k} f(0) = 0$ , pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$  et  $D^{\beta-k} f(0) = 0$ , pour tout  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Ce qui complète la preuve ■

**Proposition 2.4.** [Podlubny, 1999], [Kilbas et al., 2006] Soient  $\alpha, \beta > 0$  tels que  $n-1 < \alpha \leq n$ ,  $m-1 < \beta \leq m$  tel que  $n, m \in \mathbb{N}^*$ .

1) Pour  $f \in L^1([a, b])$ , l'égalité :

$${}^R_a D_t^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t),$$

est vraie pour presque tout  $t \in [a, b]$ .

2) Si  $\alpha > \beta > 0$ , alors pour  $f \in L^1([a, b])$ , la relation :

$${}^R_a D_t^\beta (I_a^\alpha f(t)) = I_a^{\alpha-\beta} f(t),$$

est vrai presque partout sur  $t \in [a, b]$ .

En particulier, lorsque  $\beta = k \in \mathbb{N}$  et  $\alpha > k$ , alors :

$${}^R_a D_t^k (I_a^\alpha f(t)) = I_a^{\alpha-k} f(t),$$

3) Si  $\beta \geq \alpha > 0$  et la dérivée fractionnaire  ${}^R D_t^{\beta-\alpha} f$  existe, alors on a :

$${}^R D_t^\beta (I_a^\alpha f(t)) = {}^R D_t^{\beta-\alpha} f(t).$$

4) Pour  $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$ . Si les dérivées fractionnaires  ${}^R D_t^\alpha f$  et  ${}^R D_t^{k+\alpha} f$  existent, alors :

$${}^R D_t^k ({}^R D_t^\alpha f(t)) = {}^R D_t^{k+\alpha} f(t).$$

*Démonstration.* 1) En utilisant (2.10) et la Proposition 2.1, on a pour  $n = [\alpha] + 1$

$${}^R D_t^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(t) = f(t), p.p \text{ sur } [a, b].$$

2) D'après (2.10) et la Proposition 2.1 on obtient :

Pour  $\alpha > \beta > 0$ , alors  $n \geq m$ , on a :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\beta (I_a^\alpha f(t)) &= D^n I_a^{n-\beta} (I_a^\alpha f)(t) \\ &= D^n (I_a^{n+\alpha-\beta} f)(t) \\ &= D^n I_a^n (I_a^{\alpha-\beta} f)(t) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(t). \end{aligned}$$

3) Pour  $\beta \geq \alpha > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\beta (I_a^\alpha f(t)) &= D^m I_a^{m-\beta} (I_a^\alpha f)(t) \\ &= D^m I_a^{m-(\beta-\alpha)} f(t) \\ &= {}^R D_t^{\beta-\alpha} f(t), \end{aligned}$$

existe pour  $i - 1 \leq \beta - \alpha < i$  et  $i \leq m$ .

4) On a pour  $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} D^k ({}^R D_t^\alpha f(t)) &= D^k D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= D^{k+n} I_a^{n-\alpha+k-k} f(t) \\ &= D^{k+n} I_a^{k+n-(k+\alpha)} f(t) \\ &= {}^R D_t^{k+\alpha} f(t). \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve.

**Définition 2.3.** (*Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche*)

$$\forall t > a, \quad {}^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

**Définition 2.4.** (*Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche*)

$$\forall t > a, \quad {}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Les deux définitions précédentes utilisent le passé de  $f$ , c'est-à-dire les valeurs de  $f(\tau)$  pour  $a < \tau < t$ . Nous pouvons définir des opérateurs similaires, qui utilisent le futur de  $f$ , c'est-à-dire les valeurs de  $f(\tau)$  pour  $t < \tau < b$ . On définit ensuite les deux opérateurs suivants :

**Définition 2.5.** (*Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite*)

$$\forall t < b, \quad {}^R D_b^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau-t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

**Définition 2.6.** (*Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite*)

$$\forall t < b, \quad {}^R D_b^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \int_t^b (\tau-t)^{m-\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Notons bien que  $f$  est une fonction telle que  ${}^R D_t^\alpha f(t)$  et  ${}^R D_b^\beta f(t)$  sont définies.

## 2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouer un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs dont [Caputo\(1967 – 1969\)](#) ont rendu compte que cette définition doit être révisé [[Caputo, 1967](#)], car les problèmes appliqués en viscoélasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques comme par exemple  $u(0), u'(0), etc \dots$ , ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, la solution de ce problème a été proposée par [M. Caputo](#) dans sa définition qu'il a adapté avec [F. Mainardi](#) dans la structure de la théorie de viscoélasticité [[Caputo et Mainardi, 1971](#)].

Dans cette partie on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Soit  $[a, b]$  un intervalle fini de  $\mathbb{R}$ , et soit  $I_a^\alpha$  et  ${}^R D^\alpha$  les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires donnés par (2.2) et (2.10) respectivement.

**Définition 2.7.** [Kilbas et al., 2006] La dérivée fractionnaire de Caputo  ${}^c D^\alpha f(t)$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\Re(\alpha) \geq 0$ ), sur l'intervalle  $[a, b]$  est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) \quad (2.18)$$

où

$$n = [\Re(\alpha)] + 1, \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N}, \quad \text{et } n = \alpha \text{ si } \alpha \in \mathbb{N}^*. \quad (2.19)$$

Si  $\alpha = 0$ , alors

$${}^c D^0 f(t) = f(t).$$

En particulier, lorsque  $0 < \Re(\alpha) < 1$ , la relation (2.18) prend la forme

$$({}^c D^\alpha) f(t) = {}^R D^\alpha ([f(t) - f(a)]).$$

Donc, si  $\alpha \notin \mathbb{N}$  et  $f$  est une fonction pour laquelle les dérivées fractionnaires de Caputo (2.18), et celle de Riemann-Liouville (2.10) existent, alors elles sont liées à l'autre par la relation

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1). \quad (2.20)$$

En particulier, lorsque  $0 < \Re(\alpha) < 1$ , on a

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} \quad (2.21)$$

D'après la relation (2.20), si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , alors la dérivée de Caputo (2.18) coïncide avec la dérivée de Riemann-Liouville (2.10) si la fonction  $f$  ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n-1$  ( $n = [\alpha] + 1$ ) s'annulent au point  $a$ , i.e.

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) \iff f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  et la dérivée usuelle  $f^{(n)}(t)$  existe, alors  ${}^c D^\alpha f(t)$  coïncide avec  $f^{(n)}(t)$  i.e

$${}^c D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t). \quad (2.22)$$

**Remarque 2.3.** ► *principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.*

► La dérivée fractionnaire de Caputo (2.18) est définie pour les fonctions  $f(t)$  pour lesquelles la dérivée de Riemann-Liouville (2.10) existe, en particulier, elle est définie pour les fonctions  $f(t) \in AC^n[a, b]$ . On a le théorème suivant :

**Théorème 2.2.** [Kilbas et al., 2006] *Soit  $\Re(\alpha) > 0$  et soit  $n$  donné par (2.19). Si  $f \in AC^n[a, b]$ , alors la dérivée fractionnaire de Caputo  ${}^c D^\alpha f(t)$  existe presque partout sur  $[a, b]$ .*

1) Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , alors  ${}^c D^\alpha f(t)$  est donnée par

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n f(t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

En particulier, lorsque  $0 < \Re(\alpha) < 1$  et  $f \in AC[a, b]$ , alors

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad t > 0 \\ &= I_a^{1-\alpha} f'(t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

2) Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors  ${}^c D^n f(t) = f^{(n)}(t)$ .

*Démonstration.* D'après la définition (2.7) et (2.2), on a

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= {}^R D^\alpha \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right). \end{aligned}$$

Posons

$$F(t) = I_a^{n-\alpha} \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right).$$

D'après (2.2), on a

$$F(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left( f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k \right) ds.$$

Intégrant par parties, on aura

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left( f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k \right) ds \\
 &= -\frac{(t-s)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left( f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k \right) \Big|_{s=a}^{s=t} \\
 &\quad + \frac{(t-s)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha} D \left( f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k \right) ds \\
 &= I_a^{n-\alpha+1} D \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right).
 \end{aligned}$$

En répétant ce procédé  $n$  fois, on trouve

$$\begin{aligned}
 F(t) &= I_a^{n-\alpha+n} D^n \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) \\
 &= I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right).
 \end{aligned}$$

Or,  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$  est un polynôme de degré  $n-1$ , par conséquent

$$F(t) = I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 {}^c D^\alpha f(t) &= D^n F(t) \\
 &= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\
 &= I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds
 \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. ■

**Théorème 2.3.** [Kilbas et al., 2006] Soient  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ ,  $n$  donné par (2.19) et  $f \in C^n([a, b])$ . Alors la dérivée fractionnaire de Caputo  ${}^c D^\alpha f$  est continue sur  $[a, b]$ .

1) Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , alors  ${}^c D^\alpha f$  est donnée par (2.23). En particulier, elle prend la forme (2.24) pour  $0 < \alpha < 1$ .

2) Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors  ${}^c D_a^n f(t) = f^{(n)}(t)$ .

**Exemple 2.1.** La dérivée de  $f(t) = (t - a)^\gamma$ , au sens de Caputo.

Soit  $\alpha$  un entier et  $0 \leq n - 1 < \alpha < n$  avec  $\gamma > n - 1$ , alors :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - n + 1)} (\tau - a)^{\gamma - n}. \quad (2.25)$$

d'où

$${}^c_a D^\alpha (t - a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\gamma - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^{\gamma - n} d\tau.$$

En effectuant le changement de variable  $\tau = a + s(t - a)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , nous arrivons à :

$$\begin{aligned} {}^c_a D^\alpha (t - a)^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^{\gamma - n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - n + 1)} (t - a)^{\gamma - \alpha} \int_a^t (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{\gamma - n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\gamma - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\gamma - n + 1)\Gamma(\gamma - \alpha + 1)} (t - a)^{\gamma - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha + 1)} (t - a)^{\gamma - \alpha}. \end{aligned}$$

En particulier, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est nulle :

$${}^c_a D^\alpha C = 0, \quad \forall C \in \mathbb{R}. \quad (2.26)$$

La dérivée fractionnaire de Caputo  ${}^c_a D^\alpha$ , comme celle de Riemann-Liouville, représente l'opération inverse à gauche de l'intégrale fractionnaire  $I_a^\alpha$ .

**Lemme 2.2.** [[213, 214]] Soit  $\alpha > 0$ , alors l'équation différentielles

$${}^c_a D^\alpha h(t) = 0.$$

admet les solutions  $h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $n = [\alpha] + 1$ .

**Lemme 2.3.** [[213, 214]] Soit  $\alpha > 0$ , alors

$$I_a^{\alpha c} {}^c_a D^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ,  $n = [\alpha] + 1$ .

On définit la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction  $f$  sur un intervalle fini  $[a, b]$  par (2.18), et on a vu dans le théorème 2.2 qu'elle peut être représentée par (2.22) et (2.23) à conduit que  $f \in AC^n[a, b]$ . En fait, la formule (2.23) peut être utilisée pour définir la dérivée fractionnaire de Caputo sur le demi axe  $\mathbb{R}^+$ . En effet, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction  $f \in AC^n[0, \infty)$  sur le demi axe  $\mathbb{R}^+$  est donnée par

$$({}^c_0D^{\alpha+} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad t > 0.$$

En particulier, lorsque  $0 < \alpha < 1$  et  $f \in AC^1[0, \infty)$ , alors

$$({}^c_0D^{\alpha+} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad t > 0.$$

### 2.2.1 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo, ont les propriétés résumées dans les propositions suivantes :

**Proposition 2.5.** [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  tels que  $n-1 < \Re(\alpha) < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et soient les deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  telles que  ${}^cD^\alpha f(t)$  et  ${}^cD^\alpha g(t)$  existent. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire :

$${}^cD^\alpha(\lambda f + g)(t) = \lambda({}^cD^\alpha f)(t) + ({}^cD^\alpha g)(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* On a d'après (2.23)

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha(\lambda f + g)(t) &= I^{n-\alpha} D^n((\lambda f + g)(t)) \\ &= \lambda I^{n-\alpha} D^n(f(t)) + I^{n-\alpha} D^n(g(t)). \end{aligned}$$

Comme la dérivée  $n^{\text{ième}}$  et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha(\lambda f + g)(t) &= \lambda I^{n-\alpha} D^n f(t) + I^{n-\alpha} D^n g(t) \\ &= \lambda({}^cD^\alpha f)(t) + ({}^cD^\alpha g)(t) \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

**Proposition 2.6.** [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] On suppose que  $n-1 < \Re(\alpha) < n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}^*$  et soit la fonction  $f(t)$  telle que  ${}^cD^\alpha f(t)$  existe, alors :

$${}^cD^\alpha D^m f(t) = {}^cD^{\alpha+m} f(t) \neq {}^cD^{m\alpha} D^\alpha f(t).$$

**Exemple 2.2.** Soient  $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$  et  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ , on a

$$D^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds \right),$$

soit le changement de variable suivant :

$$\tau = \frac{s}{t} \Rightarrow d\tau = \frac{ds}{t},$$

alors

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (t-t\tau)^{-\frac{1}{2}} (\tau t)^{-\frac{1}{2}} t d\tau \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)} \right) = \frac{d}{dt} \sqrt{\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ainsi

$$D^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} = 0, \quad D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} = 0, \quad D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} = D^1 t^{-\frac{1}{2}} = \frac{-t^{-\frac{3}{2}}}{2},$$

finalemt

$$D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} \neq D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}.$$

## 2.2.2 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

**Théorème 2.4.** [Podlubny, 1999], [Kilbas et al., 2006] Soit  $\Re(\alpha) > 0$  avec  $n-1 < \Re(\alpha) < n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), et soit  $f$  une fonction telle que les dérivées fractionnaires  ${}^c D^\alpha f(t)$  et  ${}^R D^\alpha f(t)$  existent alors :

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}.$$

*Démonstration.* On considère le développement limité en série de Taylor de la fonction  $f$  en  $t = 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \frac{f''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{(n-1)} + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} t^k + R_{n-1}, \end{aligned}$$

avec

$$R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(n-1)!} (t-\tau)^{n-1} d\tau.$$

En utilisant les propriétés d'intégration d'ordre  $n$ , on a :

$$R_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f^{(n)}(\tau) (t-\tau)^{n-1} d\tau = I^n f^{(n)}(t).$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville et la relation (2.13) on a :

$$\begin{aligned} {}^R D^\alpha f(t) &= {}^R D^\alpha \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} t^k + R_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} D_a^\alpha t^k + {}^R D^\alpha R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) \Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1) \Gamma(k+1)} t^{k-\alpha} + D^\alpha I^n f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} + I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} + {}^c D^\alpha f(t) \end{aligned}$$

Donc

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}.$$

D'où le résultat. ■

**Remarque 2.4.** ► Si  $f^{(k)}(0) = 0$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , on aura :

$${}^c D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t).$$

► **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire**

L'opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville mais pas un inverse à droite car :

● Si  $f$  est une fonction continue sur  $[0, T]$  on a :

$${}^c D^\alpha (I^\alpha f(t)) = f(t) \quad \text{et} \quad I^\alpha ({}^c D^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k. \quad (2.27)$$

### 2.3 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

Dans une modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires à la borne inférieure de l'intervalle. Caputo a utilisé une approche pour éviter ce problème.

Pour  $0 \leq n - 1 \leq \alpha < n$ , et une fonction  $f$  telle que  $\frac{d^n}{dx^n} f \in L^1[a, b]$ ; la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  d'une fonction  $f$  est donnée par :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = I_a^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) d\tau,$$

avec  $n - 1 \leq \alpha \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et la relation entre les dérivés de Riemann-Liouville et Caputo est donnée comme suit : supposons que  $f$  est fonction telle que  ${}^R D_a^\alpha f(t)$  et  ${}^c D_a^\alpha f(t)$  existent, alors

$${}^R D_a^\alpha f(t) = {}^c D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a).$$

Les deux dérivées sont égales dans le cas où  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

L'avantage principal de l'approche Caputo et que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure  $x = a$ .

Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo et que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est  $\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$ .

Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville), c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  où  $n-1 \leq \alpha \leq n$  par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre  $(n-\alpha)$  pour la fonction  $f(x)$  et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier  $n$ , mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  où  $n-1 \leq \alpha \leq n$  par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier  $n$  de la fonction  $f(x)$  et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire  $(n-\alpha)$ .

## 2.4 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous présentons quelques outils de base et des formules fondamentales de la transformée de Lapalce pour les dérivées fractionnaires selon les approches de Riemann-Liouville et Caputo.

### 2.4.1 Outils de base de la transformée de Laplace

Rappelons quelques résultats fondamentaux de la transformée de Lapalce (voir [1], [106]).

La fonction  $F(s)$  de la variable complexe  $s$  définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (2.28)$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  où  $t \in \mathbb{R}^+$ .

La transformée inverse de Lapalce est donnée par :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \mathcal{R}e(s) > c_0, \quad (2.29)$$

$c_0$  réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Lapalce (2.28).

La transformée de Lapalce de la convolution

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau, \quad (2.30)$$

de deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  qui sont nulles pour  $t < 0$ , est égale au produit de leurs transformées de Lapalce

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t); s\} = F(s).G(s),$$

sous l'hypothèse que  $F(s)$  et  $G(s)$  existent.

La transformée de Lapalce de la dérivée d'ordre entier de la fonction  $f(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \quad (2.31)$$

ce qui peut être obtenu à partir de la définition (2.28) par une intégration par parties avec sous l'hypothèse que les intégrales correspondantes existent.

### 2.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

On commence par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\Re(\alpha) > 0$ ) de Riemann-Liouville définie par (2.2), laquelle peut être comme une convolution des deux fonctions  $g(t) = t^{\alpha-1}$  et  $f(t)$  comme suit (voir [106]) :

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t),$$

telle que la transformée de Laplace de la fonction  $t^{\alpha-1}$  est donnée par :

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}.$$

On obtient la formule de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville suivante :

$$\mathcal{L}\{(I_{0+}^{\alpha} f)(t); s\} = s^{-\alpha} F(s), \quad (2.32)$$

où  $F(s)$  dénote la transformée de Laplace de  $f(t)$ .

La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \geq 0$  est donnée par :

$$\mathcal{L}\{(D_{0+}^{\alpha} f)(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [(D_{0+}^{\alpha-k-1} f)(t)]_{t=0}, \quad (n-1 \leq \alpha < n). \quad (2.33)$$

### 2.4.3 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

Pour établir la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ([106]), écrivons la dérivée au sens de Caputo sous la forme :

$$({}^C D_{0+}^{\alpha} f)(t) = (I_{0+}^{n-\alpha} g)(t), \quad g(t) = f^{(n)}(t), \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

Utilisons la formule (2.32) de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville on obtient :

$$\mathcal{L}\{(I_{0+}^{\alpha} f)(t); s\} = s^{-(n-\alpha)} F(s), \quad (2.34)$$

où selon la formule suivante :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (2.35)$$

En substituant (2.35) dans (2.34), on obtient la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivante :

$$\mathcal{L}\{{}^c D_{0+}^{\alpha} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 < \alpha \leq n). \quad (2.36)$$

## 2.5 Transformée Inverse de Laplace

### Méthode analytique

Il n'existe pas de méthode analytique générale permettant de calculer  $u(x, t)$  si on connaît  $U(x, s)$ . Cependant, on connaît l'expression exacte  $u(x, t)$  pour certaines fonctions  $U(x, s)$ . L'inversion de la transformée de Laplace s'effectue par le biais d'une intégrale dans le plan complexe, la formule de Bromwich Mellin est donnée par :

$$u(x, t) = \mathcal{L}(U(x, s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} U(x, s) ds,$$

Avec  $\gamma$  choisi de sorte que l'intégrale soit convergente. C'est-à-dire  $\gamma$  doit être supérieur à la partie réelle de tout singularité de  $U(x, s)$  et qu'à l'infini ( $\gamma$  est réelle positive  $\mathcal{R}e(s) = \gamma$ ),  $U(x, s) \rightarrow 0$  au moins rapidement que  $\frac{1}{|s|^2}$ . En pratique la formule de Bromwich

Mellin est peu utilisée, et on calcule les inverses des transformées de Laplace à partir des tables de transformées de Laplace.

### Méthode numérique (l'algorithme de Stehfest)

Pour les cas de figure pour lesquels on ne peut pas trouver une solution analytique, on peut employer la méthode numérique suivante : La méthode de Stehfest, aussi connu sous le nom d'algorithme de Stehfest, est une méthode qui permet de calculer les valeurs de  $u(x, t)$ . Elle a été publiée par Harald Stehfest en 1970. La transformée inverse de la fonction  $U(x, s)$  peut se calculer par :

$$u(x, t) \simeq \frac{\ln 2}{t} \sum_{n=1}^{2m} B_n U\left(x, \frac{x \ln 2}{t}\right), \quad (2.37)$$

avec

$$B_n = (-1)^{n+m} \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{\min(n,m)} \frac{k^m (2k)!}{(m-k)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!} \quad (2.38)$$

où  $m$  est un nombre entier positif impair et  $\lfloor q \rfloor$  désigne la partie entière du nombre réel  $q$ .

Pour  $m = 10$ , les 10 premiers  $B_n$  sont donnés par :

$$B_1 = \frac{1}{12}, B_2 = \frac{-385}{12}, B_3 = 1279, B_4 = \frac{-46871}{3}, B_5 = \frac{505465}{6}, B_6 = \frac{-473915}{2},$$

$$B_7 = \frac{1127735}{3}, B_8 = \frac{-1020215}{3}, B_9 = \frac{328125}{2}, B_{10} = \frac{-65625}{2}.$$

## 2.6 Formule de quadrature de Gauss

La formule de quadrature de Gauss est une approximation numérique d'une intégrale donnée comme suit :

$$\int_a^b f(y) dy = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i f(y_i) + R_n,$$

où

$$\omega_i = \frac{2}{(1-x_i^2)(p'_n(x_i))^2}, \quad y_i = \frac{b-a}{2} x_i + \frac{b+a}{2},$$

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi),$$

$x_i$  étant le  $i$ ème  $i^{\text{ème}}$  zéro du polynôme de Legendre  $p_n(x)$ .

## 2.7 La méthode de perturbation d'homotopie (HPM)

De nombreux modèles mathématiques de systèmes physiques conduisent à des équations fonctionnelles dans différents domaines des sciences physiques et de l'ingénierie. Ces équations ne sont pas en général facile à résoudre analytiquement. Il existe cependant des méthodes pour obtenir des solutions approchées de ce type d'équations. L'une d'entre elles est celle de perturbation d'homotopie établie par Ji-Huan He [98] en 1998, développée et améliorée par lui-même. Il l'a appliquée à des problèmes aux limites d'équations des ondes non linéaires, ainsi qu'à de nombreux autres sujets [95], [96], [97] et [99]. La méthode de perturbation d'homotopie peut être considérée comme une méthode universelle capable de résoudre différents types d'équations fonctionnelles non

linéaires. Cette méthode a été appliquée entre autre à des équations de Schrodinger non linéaires [62], à des systèmes d'équations intégrales de Volterra de seconde espèce et à beaucoup d'autres équations (voir : [79], [95],[97], [99]).

La solution numérique selon la méthode **HPM** est de considérée une série de fonctions qui converge rapidement vers la solution exacte (quand elle existe). Cette méthode permet de transformer la résolution d'un problème difficile en un problème simple à résoudre. La méthode de perturbation d'homotopie (**HPM**) est basée sur l'hypothèse de l'existence d'un petit paramètre  $p \in [0, 1]$ , affublé à l'équation étudiée.

### 2.7.1 Description de la méthode

Pour illustrer le concept de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.39)$$

avec les conditions aux limites

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (2.40)$$

où  $A$  est un opérateur différentielle générale,  $B$  est un opérateur définissant les conditions aux limites,  $f(r)$  est une fonction analytique comme,  $u$  est la fonction inconnue et  $\Gamma$  la frontière du domaine  $\Omega$ .

D'une façon générale, l'opérateur  $A$  peut être décomposé en deux opérateurs  $L$  et  $N$ , où  $L$  est un opérateur linéaire et  $N$  est un opérateur non-linéaire. Donc l'équation (2.39) peut être réécrite comme suit :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0.$$

On construit une homotopie  $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , qui satisfait :

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad (2.41)$$

où

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (2.42)$$

où  $r \in \Omega, p \in [0, 1]$  est le paramètre d'homotopie et  $u_0$  est une approximation initiale de l'équation (2.39) qui satisfait les conditions aux limites (2.40). D'après les équations (2.41) et (2.42), nous avons :

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0, \quad H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0.$$

Le changement de  $p$  de zéro à l'unité transforme  $u_0(r)$  en  $u(r)$ . En topologie avec cette dernière propriété, la fonction  $v(r, p)$  est appelée homotopie. Selon la méthode HPM, nous pouvons utiliser le paramètre  $p$  comme un petit paramètre et supposons que les solutions des équations (2.41) et (2.42) peuvent être écrites comme une série de puissance de  $p$  :

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i. \quad (2.43)$$

Pour  $p = 1$ , la solution approximative de l'équation (2.43) devient

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} v_i. \quad (2.44)$$

### 2.7.2 Analyse de convergence

Dans cette paragraphe, on étudie la convergence de la méthode HPM [62], [33]. On peut réécrire la relation (2.40) comme suit :

$$L(v) - L(u_0) = p[f(r) - L(u_0) - N(v)]. \quad (2.45)$$

En remplaçons (2.43) dans (2.45), on obtient :

$$L\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) - L(u_0) = p[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right)]. \quad (2.46)$$

Ainsi

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right)]. \quad (2.47)$$

Selon le développement de Maclaurin de  $N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right)$  par rapport à  $p$ , nous avons :

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) = \sum_{i=n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) \right)_{p=0} p^i. \quad (2.48)$$

D'après [85], on a

$$\left( \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) \right)_{p=0} = \left( \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^n p^i v_i\right) \right)_{p=0}.$$

Alors

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^n p^i v_i\right) \right)_{p=0} p^i$$

Posons :

$$H_n(v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[ N \left( \sum_{i=0}^n p^i v_i \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.49)$$

où  $H_n$  sont appelés polynômes de He [85]. Alors

$$N \left( \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i. \quad (2.50)$$

En remplaçons (2.50) dans (2.47), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p \left[ f(r) - L(u_0) - \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i \right]. \quad (2.51)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de  $p$ , on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^0 : L(v_0) - L(u_0) = 0, \\ p^1 : L(v_1) = f(r) - L(u_0) - H_0, \\ p^2 : L(v_2) = -H_1, \\ p^3 : L(v_3) = -H_2, \\ \vdots \\ p^{n+1} : L(v_{n+1}) = -H_n, \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Donc, on conclut que

$$\left\{ \begin{array}{l} p^0 : v_0 = u_0, \\ p^1 : v_1 = L^{-1}(f(r)) - u_0 - L^{-1}(H_0), \\ p^2 : v_2 = -L^{-1}(H_1), \\ p^3 : v_3 = L^{-1}(H_2), \\ p^{n+1} : v_{n+1} = -L^{-1}(H_n), \end{array} \right. \quad (2.53)$$

**Théorème 2.5.** [33] La solution de l'équation (2.39) obtenue par la méthode de perturbation d'homotopie est équivalente à la détermination de  $S_n$  donnée par :

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n, \quad S_0 = 0, \quad (2.54)$$

en utilisant le schéma itératif

$$S_{n+1} = -L^{-1} N_n(S_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)), \quad (2.55)$$

où

$$N_n\left(\sum_{i=0}^n v_i\right) = \sum_{i=0}^n H_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

*Démonstration.* Pour  $n = 0$ , d'après (2.55), on a :

$$S_1 = -L^{-1}N_0(S_0 + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) = -L^{-1}(H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)).$$

Alors

$$v_1 = -L^{-1}(H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)).$$

Pour

$$\begin{aligned} S_2 &= -L^{-1}N_1(S_1 + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1}(H_1 + H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1}(H_1) + v_1. \end{aligned}$$

Selon  $S_2 = v_1 + v_2$ , on obtient :

$$v_2 = -L^{-1}(H_1).$$

La démonstration de ce théorème se fera par induction. Supposons que :

$$v_{k+1} = -L^{-1}(H_k), \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n-1,$$

donc :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= -L^{-1}N_n(S_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1}\left(\sum_{i=0}^n H_i\right) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -\sum_{i=0}^n L^{-1}(H_i) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= v_1 + v_2 + \dots + v_n - L^{-1}(H_n). \end{aligned}$$

Puis, à partir de (2.54), on peut trouver

$$v_{n+1} = -L^{-1}(H_n).$$

Ce résultat est identique à celui de (2.52) obtenu par la méthode de **HPM**. ■

**Théorème 2.6.** *Soit  $B$  un espace de Banach.*

$$1) \sum_{i=0}^{\infty} v_i \text{ converge vers } S \in B, \text{ si}$$

$$\exists(0 \leq \lambda < 1) \quad \text{telque} \quad (\forall n \in \mathbb{N} \implies \|v_n\| \leq \lambda \|v_{n-1}\|). \quad (2.57)$$

2)  $S = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$  vérifie

$$S = -L^{-1}N(S + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)). \quad (2.58)$$

*Démonstration.* 1) on a :

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|v_{n+1}\| \leq \lambda \|v_n\| \leq (\lambda)^2 \|v_{n-1}\| \leq \dots \leq \lambda^{n+1} \|v_0\|.$$

Pour  $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \dots + (S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \|S_n - S_{n-1}\| + \|S_{n-1} - S_{n-2}\| + \dots + \|S_{m+1} - S_m\| \\ &\leq \lambda^n \|v_0\| + \lambda^{n-1} \|v_0\| + \dots + \lambda^{m+1} \|v_0\| \\ &\leq (\lambda^n + \lambda^{n-1} + \dots + \lambda^{m+1}) \|v_0\| \\ &\leq (\lambda^{m+1} + \dots + \lambda^n + \dots) \|v_0\| \\ &\leq \lambda^{m+1} (1 + \lambda + \dots + \lambda^n + \dots) \|v_0\| \\ &\leq \frac{\lambda^{m+1}}{1 - \lambda} \|v_0\|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0.$$

$(S_n)_{n \geq 0}$  est suite de cauchy dans l'espace de Banach et elle est convergente, c'est-à-dire :

$$\exists S \in B, \text{ avec : } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S.$$

2) D'après (2.55), on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} N_n(S_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} N_n\left(\sum_{i=0}^n v_i\right) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ S &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n H_i - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} H_i - u_0 + L^{-1}(f(r)). \end{aligned}$$

Par (2.56) et (2.50), pour  $p = 1$ , il vient

$$\sum_{i=0}^{\infty} H_i = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} S &= -L^{-1}N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i\right) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1}N(S + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)). \end{aligned}$$



**Lemme 2.4.** *L'équation (2.58) est équivalent à :*

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \tag{2.59}$$

*Démonstration.* On écrit l'équation (2.58) comme suit :

$$S + u_0 = -L^{-1}N(S + v_0) + L^{-1}(f(r)).$$

En appliquant l'opérateur  $L$  à l'équation précédente, on obtient :

$$L(S + u_0) = -N(S + v_0) + f(r),$$

comme  $u_0 = v_0$ ,

$$L(S + v_0) = -N(S + v_0) + f(r).$$

Soit  $u = S + v_0 = \sum_{i=0}^{\infty} v_i$ , l'équation (2.59) devient l'équation d'origine. La solution de l'équation (2.58) est la même que celle de la solution de  $A(u) - f(r) = 0$ . ■

**Définition 2.8.** *Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on définit :*

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|}, & \|v_i\| \neq 0, \\ \|v_i\| = 0. \end{cases}$$

*Dans le Théorème 2.6  $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$  converge vers la solution exacte, lorsque  $0 \leq \lambda_i < 1$ .*

*Si  $v_i$  et  $v'_i$  sont obtenus par deux différentes homotopies et  $\lambda_i < \lambda'_i$  pour chaque  $i \in \mathbb{N}$ , le taux de convergence de  $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$  est supérieure à  $\sum_{i=0}^{\infty} v'_i$ .*

**Exemple 2.3.** On considère l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, & t \geq 0, & t \in \Omega, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (2.60)$$

Selon la méthode HPM, on peut construire l'homotopie suivante :  $u : \Omega \times [0, 1] \longleftrightarrow \mathbb{R}$

$$(1 - p)(v' - u'_0) + p(v' + v^2) = 0, \quad p \in [0, 1], \quad t \in \Omega, \quad (2.61)$$

avec  $u_0 = 1$ .

Les solutions de l'équation (2.60), peuvent être écrites sous forme de série :

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots \quad (2.62)$$

En remplaçons (2.62) dans (2.61) et en identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de  $p$ , on obtient :

$$\begin{cases} p^0 : v'_0 = u'_0 \\ p^1 : v'_1 = -u_0 - v_0'^2, & v_1(0) = 0, \\ p^2 : v'_2 = -2v_0 v_1, & v_2(0) = 0, \end{cases}$$

Par conséquent, les premiers termes de la solution sont données par :

$$\begin{cases} p^0 : v_0 = 1 \\ p^1 : v_1 = -t, \\ p^2 : v_2 = t^2, \end{cases}$$

Donc la solution de l'équation (2.60) est :

$$\begin{aligned} u &= \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots = 1 - t + t^2 - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1+t}. \end{aligned}$$

**Exemple 2.4.** On considère l'équation de Riccati suivante :

$$\begin{cases} u' = 2u - u^2 + 1, & t \geq 0, & t \in \Omega, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (2.63)$$

On cherche la solution avec la méthode HPM, nous pouvons construire l'homotopie suivante :  $u : \Omega \times [0, 1] \longleftrightarrow \mathbb{R}$

$$(1 - p)(v' - u'_0) + p(v' - 2v + v^2 - 1) = 0, \quad p \in [0, 1], \quad t \in \Omega. \quad (2.64)$$

Les solutions de l'équation (2.64), peuvent être écrites sous forme de série :

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de  $p$ , on obtient

$$p^0 : v'_0 = u'_0,$$

$$p^1 : v'_1 + u'_0 + u_0^2 - 1 = 0,$$

$$p^2 : v'_2 + 2v_0 v_1 = 0,$$

$$p^3 : v'_3 + v'_1 + 2v_0 v_1 = 0,$$

$$p^4 : v'_4 + v'_1 + 2v_0 v_3 + 2v_1 v_2 = 0,$$

Par conséquent, les premiers termes de la solution sont donnés par :

$$p^0 : v_0 = t$$

$$p^1 : v_1 = \frac{1}{4}(-1 + e^t - 2t + 2t^2),$$

$$p^2 : v_2 = \frac{1}{4}(t^2 - t^2 e^t + 2t^3),$$

En prenant  $p = 1$ , la solution approximative de l'équation (2.64) est donnée par :

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

ce que veut dire que

$$u = t + \frac{1}{4}(-1 + e^t - 2t + 2t^2) + \frac{1}{4}(t^2 - t^2 e^t + 2t^3) + \dots$$

D'autre part, après l'utilisation du développement de Taylor de  $e^t$  au voisinage de zéro, la solution de l'équation (2.64) est donnée par

$$\begin{aligned} u &= t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \frac{71}{315}t^8 + \dots \\ &= 1 + \sqrt{2} \tanh\left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right). \end{aligned}$$

### 2.7.3 La méthode HPM combinée avec la transformation de Laplace

Dans les exemples suivant nous exposons la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) combinée avec la transformation de Laplace (LT).

**Exemple 2.5.** On considère l'équation de Riccati suivante :

$$\frac{du}{dt} = 2u - u^2 + 1, \quad t \in \Omega \quad (\Omega = [0, +\infty[), \quad (2.65)$$

$$u(0) = 0, \quad (2.66)$$

la solution exacte de (2.65)-(2.66) est donnée par :

$$u(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh\left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right),$$

d'autre part, le développement de Taylor de  $u$  au voisinage de 0 est

$$u(t) = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \frac{71}{315}t^8 + \dots$$

On cherche maintenant la solution selon la méthode (LT-HPM). Appliquant l'opérateur  $\mathcal{L}$  à l'équation (2.65) on obtient :

$$sU(s) - u(0) = \mathcal{L}\left(2u(t) - u^2(t) + 1\right),$$

d'où

$$U(s) - \frac{1}{s}u(0) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left(2u(t) - u^2(t) + 1\right), \quad (2.67)$$

en appliquant l'inverse de l'opérateur  $\mathcal{L}$  à l'équation (2.67) on obtient :

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}(2u(t) - u^2(t) + 1)\right\} + u(0). \quad (2.68)$$

Nous pouvons construire l'homotopie suivante :

$$v(t, p) : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$v(t) - u(0) = p\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}(2v(t) - v^2(t) + 1)\right), \quad (2.69)$$

supposons que la solution de (2.69) soit écrite comme la série suivante

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(t), \quad (2.70)$$

en remplaçant (2.70) dans (2.69), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(t) - u(0) = p\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(2\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(t) - \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(t)\right)^2 + 1\right)\right).$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de  $p$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 p^0 : v_0(t) &= u(0) = 0, \\
 p^1 : v_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(s^{-1}\mathcal{L}(2v_0 - v_0^2 + 1)\right) = t, \\
 p^2 : v_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(s^{-1}\mathcal{L}(2v_1 - 2v_0v_1)\right) = t^2, \\
 p^3 : v_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(s^{-1}\mathcal{L}(2v_2 - 2v_0v_2 - v_1^2)\right) = \frac{1}{3}t^3, \\
 p^4 : v_4(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(s^{-1}\mathcal{L}(2v_3 - 2v_0v_3 - 2v_1v_2)\right) = -\frac{1}{3}t^4, \\
 &\dots\dots\dots \\
 p^i : v_i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(s^{-1}\mathcal{L}\left(2v_{i-1} - \sum_{j=0}^{i-1} v_jv_{i-j-1}\right)\right).
 \end{aligned}$$

lorsque  $p \rightarrow 1$ , (2.70) devient la solution approximative de l'équation (2.65), c-à-d,

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + \dots \\
 u(t) &= t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \frac{71}{315}t^8 + \dots
 \end{aligned}$$

**Exemple 2.6.** Dans le rectangle  $\Omega = (0, l) \times (0, T)$  on considère l'équation différentielle partielle non linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Omega, \tag{2.71}$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = x. \tag{2.72}$$

La solution exacte de (2.71)-(2.72) est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t},$$

le développement de Taylor par rapport à  $t$  de la fonction  $u$  au voisinage de 0 est

$$u(x, t) = x\left(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7 + t^8 + \dots\right).$$

On cherche maintenant la solution selon la méthode (LT-HPM), en appliquant l'opérateur  $\mathcal{L}$  à l'équation (2.71) on obtient :

$$sU(x, s) - u(x, 0) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

d'où

$$U(x, s) - \frac{1}{s}u(x, 0) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{2.73}$$

Appliquons l'opérateur  $\mathcal{L}^{-1}$  à l'équation (2.73) on obtient :

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u(x, 0)\right),$$

nous pouvons construire l'homotopie suivante :

$$v(x, t, p) : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$v(x, t) - u(x, 0) = p\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right), \tag{2.74}$$

supposons que la solution de (2.74) soit écrite comme la série suivante

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(t), \tag{2.75}$$

en remplaçant (2.75) dans (2.74), on obtient

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(x, t) - u(x, 0) = p\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} - \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i \sum_{i=0}^{\infty} p^i \frac{\partial v_i}{\partial x}\right)\right). \tag{2.76}$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de  $p$ , on trouve :

$$p^0 : v_0(x, t) = u(x, t) = x,$$

$$p^1 : v_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\left(s^{-1}\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - v_0\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right) = -tx,$$

$$p^2 : v_2(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\left(s^{-1}\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - v_0\frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right) = t^2x,$$

$$p^3 : v_3(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\left(s^{-1}\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} - v_0\frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right) = -t^3x,$$

$$p^4 : v_4(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\left(s^{-1}\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} - v_0\frac{\partial v_3}{\partial x} - v_1\frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2\frac{\partial v_1}{\partial x} - v_3\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right) = t^4x,$$

.....

$$p^i : v_i(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\left(s^{-1}\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x^2} - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial v_{i-j-1}}{\partial x}\right)\right).$$

lorsque  $p \rightarrow 1$ , (2.75) devient la solution approximative de l'équation (2.71), c-à-d

$$u(t) = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + \dots$$

$$u(t) = x(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 + \dots).$$

## Existence et Unicité des Solutions pour les Equations Différentielles Fractionnaires Non Linéaires avec des Conditions aux Limites Intégrales de type Non Séparé

---

### 3.1 Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergée comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ...etc [87, 100, 152].

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires. Elles peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie, tels que le contrôle, les milieux poreux et l'électrochimie. Il a été prouvé que dans de nombreux cas, ces modèles fournissent des résultats plus appropriés que les modèles analogues avec des dérivées. En conséquence, l'étude des équations différentielles fractionnaires gagne beaucoup d'importance et d'attention. Pour plus de détails, on peut voir les références [49, 50, 129, 149, 194, 195].

Le principe du point fixe a beaucoup d'applications. Il intervient dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires en particulier, dans l'étude de l'existence et de l'unicité voir par exemple [181, 237, 240].

Ahmad et Ntouyas [44] ont étudié l'existence de solutions à un problème aux limites fractionnaire avec des conditions aux limites séparées fractionnaires données par :

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T], \quad 1 \leq q \leq 2, \\ \alpha_1 x(0) + \beta_1 ({}^c D^p x(0)) = \gamma_1, \\ \alpha_2 x(1) + \beta_2 ({}^c D^p x(1)) = \gamma_2, \quad 0 < p < 1. \end{cases}$$

Où  ${}^c D^q$  désigne la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $q$ ,  $f$  est une fonction continue sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$  et  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, (i = 1, 2)$  sont des constantes réelles, avec  $\alpha_i \neq 0$ .

De plus, Xiaoyou Liu et Zhenhai Liu [235] ont étudié l'existence et l'unicité des solutions du problème aux limites fractionnaire non linéaire avec des conditions aux limites fractionnaires séparées données par :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) = f(t, x(t), {}^c D^\beta x(t)), & t \in [0, T], \quad 1 \leq \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1 \\ a_1 x(0) + b_1 ({}^c D^\gamma x(0)) = c_1, \\ a_2 x(T) + b_2 ({}^c D^\gamma x(T)) = c_2, \quad 0 < \gamma < 1. \end{cases}$$

Où  ${}^c D^\alpha$  désigne la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$ ,  $f$  est une fonction continue sur  $[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et  $a_i, b_i, c_i, (i = 1, 2)$  sont des constantes, avec  $a_1 \neq 0$  et  $T > 0$ .

Bashir Ahmad, Juan J, Nieto et Ahmed Alsaedi [43] ont étudié l'existence et l'unicité des solutions à une nouvelle classe de problèmes d'équations différentielles fractionnaires non linéaires avec des conditions aux limites intégrales de type non séparé, nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T], \quad T > 0, \quad 1 < q \leq 2, \\ x(0) - \lambda_1 x(T) = \mu_1 \int_0^T g(s, x(s)) ds, \\ x'(0) - \lambda_2 x'(T) = \mu_2 \int_0^T h(s, x(s)) ds. \end{cases}$$

Où  ${}^c D^q$  désigne la dérivée fractionnaire de Caputo de d'ordre  $q$ , et  $f, g, h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions données et  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$  avec  $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$ .

L'objectif de ce chapitre est d'étudier de l'existence et de l'unicité des solutions pour une nouvelle classe de problèmes de valeurs limites d'équations différentielles fractionnaires non linéaires dépendant de conditions aux limites intégrales de type non séparé, citée dans Dj. Chergui, T-E. oussaief, A. Merad [AIMS Mathematics, 4(1) : 112-133] [69].

### 3.2 Position du problème

Dans l'intervalle  $[0, T], T < \infty$ , nous discutons l'existence et l'unicité des solutions pour une nouvelle classe de problèmes de valeurs limites d'équations différentielles fractionnaires non linéaires dépendant de conditions aux limites intégrales de type non séparé, nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = f(t, x(t), {}^c D^r x(t)), & t \in [0, T], \quad T > 0, \quad 1 < q \leq 2, \quad 0 < r \leq 1 \\ x(0) - \lambda_1 x(T) = \mu_1 \int_0^T g(s, x(s)) ds, \\ x'(0) - \lambda_2 x'(T) = \mu_2 \int_0^T h(s, x(s)) ds. \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  ${}^c D^q$  désigne la dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre  $q$ , et  $f \in C([0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $g, h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues données et  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$  avec  $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$ .

### 3.3 Résultats d'existence et d'unicité

Soit  $I = [0, T]$  et  $C(I, \mathbb{R})$  l'espace de toutes les fonctions réelles continues définies sur  $I$ . Définissons l'espace  $X = \{x(t) : x(t) \in C(I, \mathbb{R}) \text{ et } {}^c D^r x \in C(I, \mathbb{R})\}$ , ( $0 < r \leq 1$ ) muni de la norme :  $\|x\| = c_1 \max_{t \in I} |x(t)| + c_2 \max_{t \in I} |{}^c D^r x(t)|$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_*^+$ , nous sachans que  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach.

Nous présentons maintenant la fonction de Green pour le problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire.

**Lemme 3.1.** *Pour un  $y \in C([0, T], \mathbb{R})$ , la solution unique du problème aux limites fractionnaire non séparé :*

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = y(t), & t \in [0, T], \quad T > 0, \quad 1 < q \leq 2, \\ x(0) - \lambda_1 x(T) = \mu_1 \int_0^T g(s, x(s)) ds, \\ x'(0) - \lambda_2 x'(T) = \mu_2 \int_0^T h(s, x(s)) ds, \end{cases} \quad (3.2)$$

est donné par :

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_0^T G(t, s) f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds + \frac{\mu_2 [\lambda_1 T + (1 - \lambda_1) t]}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_1 - 1)} \int_0^T h(s, x(s)) ds \\ & - \frac{\mu_1}{\lambda_1 - 1} \int_0^T g(s, x(s)) ds, \end{aligned}$$

où  $G(t, s)$  est la fonction de Green donnée par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} - \frac{\lambda_1 (t-s)^{q-1}}{(\lambda_1 - 1)\Gamma(q)} + \frac{\lambda_2 [\lambda_1 T + (1 - \lambda_1) t] (t-s)^{q-1}}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_1 - 1)\Gamma(q-1)} & s \leq t, \\ -\frac{\lambda_1 (t-s)^{q-1}}{(\lambda_1 - 1)\Gamma(q)} + \frac{\lambda_2 [\lambda_1 T + (1 - \lambda_1) t] (t-s)^{q-1}}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_1 - 1)\Gamma(q-1)} & t \leq s, \end{cases} \quad (3.3)$$

*Démonstration.* Nous omettons la preuve car elle utilise les arguments standard par exemple, voir [41]. ■

Dans cette section, nous avons donnée quelques résultats d'existence pour le problème (3.1). En vertu de Lemme 3.1, nous définissons un opérateur  $F : X \rightarrow X$

$$\begin{aligned}
 (Fx)(t) = & \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds \\
 & - \xi_1 \lambda_1 \int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds \\
 & + \xi_2 \lambda_2 [\lambda_1 (T-t) + t] \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds \\
 & + \xi_2 \mu_2 [\lambda_1 (T-t) + t] \int_0^T h(s, x(s)) ds - \mu_1 \xi_1 \int_0^T g(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, T],
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\lambda_1 - 1}, \quad \xi_2 = \frac{1}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_1 - 1)}.$$

Il est clair que le problème (3.1) a des solutions, si et seulement si l'équation de l'opérateur  $Fx = x$  a des points fixes. Pour tout  $x \in X$ , soit

$$(Nx)(t) = f(t, x(t), {}^c D^r x(t)), \quad t \in [0, T].$$

Puisque la fonction  $f$  est continue, alors

$$({}^c D^r Fx)(t) = (I^{q-r} Nx)(t) - \frac{kt^{1-r}}{\Gamma(2-r)}. \tag{3.5}$$

Où

$$k = \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 - 1)\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-s)^{q-2} f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds + \frac{\mu_2}{(\lambda_2 - 1)} \int_0^T h(s, x(s)) ds.$$

Nous posons  $Fx = F_1 x + F_2 x$ , où

$$\begin{aligned}
 (F_1 x)(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds, \\
 (F_2 x)(t) &= -\xi_1 \lambda_1 \int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds \\
 &+ \xi_2 \lambda_2 [\lambda_1 (T-t) + t] \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds \\
 &+ \xi_2 \mu_2 [\lambda_1 (T-t) + t] \int_0^T h(s, x(s)) ds - \mu_1 \xi_1 \int_0^T g(s, x(s)) ds.
 \end{aligned}$$

Observez que le problème (3.1) a une solution si l'opérateur (3.4) a des points fixes, notre premier résultat est basé sur le théorème de point fixe de Banach (voir [192]).

**Théorème 3.1.** *Nous supposons :*

(A<sub>1</sub>) *les fonctions  $g, h \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , il existe  $L_1, L_2 > 0$  et  $0 < L < 1$ , tel que :*

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq L_1|x - y|, |h(t, x) - h(t, y)| \leq L_2|x - y|, \forall t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R},$$

(A<sub>2</sub>)  *$f \in C([0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  et il existe des constantes*

$$0 < c_2 < \frac{\Gamma(2-r)[Lc_1 - c_1|\xi_2\mu_2||1 + \lambda_1|T^2L_2 - c_1|\mu_1\xi_1|TL_1]}{T^{2-r}|\mu_2\xi_2||\lambda_1 - 1|L_2},$$

$$L > |\xi_2\mu_2||1 + \lambda_1|T^2L_2 + |\mu_1\xi_1|TL_1$$

et

$$\theta_1, \theta_2 \geq 0,$$

avec

$$\theta_1 \leq \frac{M'_1}{N'_1}, \quad \theta_2 \leq \frac{M'_2}{N'_2},$$

tel que :

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq \theta_1|x_1 - x_2| + \theta_2|y_1 - y_2|, \quad \text{pour } t \in [0, T], x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

où :

$$M'_1 = \Gamma(q+1)\Gamma(2-r)\Gamma(q-r+1)\{\Gamma(2-r)[Lc_1 - c_1|\xi_2\mu_2||1 + \lambda_1|T^2L_2 - c_1|\mu_1\xi_1|TL_1] - T^{2-r}|\mu_2\xi_2||\lambda_1 - 1|L_2c_2\},$$

$$N'_1 = \Gamma(2-r)^2\Gamma(q-r+1)c_1T^q + \Gamma(2-r)^2\Gamma(q-r+1)c_1|\xi_1\lambda_1|T^q + \Gamma(2-r)^2\Gamma(q-r+1)c_1|\xi_2\lambda_2||1 + \lambda_1|T^qq + \Gamma(2-r)^2\Gamma(q+1)T^{q-r}c_2 + \Gamma(2-r)\Gamma(q-r+1)T^{q-r}|\lambda_2\xi_2||\lambda_1 - 1|c_2q$$

et

$$M'_2 = Lc_2\Gamma(q+1)\Gamma(2-r)\Gamma(q-r+1),$$

$$\begin{aligned} N'_2 = & \Gamma(2-r)\Gamma(q-r+1)T^q c_1 + \Gamma(2-r)\Gamma(q-r+1)|\xi_1 \lambda_1| T^q c_1 \\ & + \Gamma(2-r)\Gamma(q-r+1)|\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| T^q c_1 q \\ & + \Gamma(q+1)\Gamma(2-r) T^{q-r} c_2 + \Gamma(q-r+1) T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| c_2 q. \end{aligned}$$

Alors le problème aux limites (3.1) admet une solution unique.

*Démonstration.* Soient  $\sup_{t \in I} |f(t, 0, 0)| = M$ ,  $\sup_{t \in I} |g(t, 0)| = M_1$ ,  $\sup_{t \in I} |h(t, 0)| = M_2$ ,

$B_R = \{x \in X, \|x\| \leq R\}$ , où  $R \geq \frac{\gamma}{1-L}$  avec :

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{MT^q c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| T^q M c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| T^q M c_1}{\Gamma(q)} + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T^2 M_2 c_1 \\ & + |\mu_1 \xi_1| T M_1 c_1 + \frac{T^{q-r} M c_2}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| M c_2}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \\ & + \frac{T^{2-r} |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| M_2 c_2}{\Gamma(2-r)}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons que  $F(B_R) \subset B_R$ , où  $F : X \rightarrow X$  est défini par (3.4) pour  $x \in B_R$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| \leq & \left( \frac{T^q \theta_1}{\Gamma(q+1)} + |\xi_1 \lambda_1| \frac{T^q \theta_1}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| \frac{T^q \theta_1}{\Gamma(q)} \right. \\ & \left. + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T^2 L_2 + |\mu_1 \xi_1| T L_1 \right) |x| \\ \leq & \left( \frac{T^q \theta_2}{\Gamma(q+1)} + |\xi_1 \lambda_1| \frac{T^q \theta_2}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| \frac{T^q \theta_2}{\Gamma(q)} \right) |{}^c D^r x| \\ & + \frac{T^q M}{\Gamma(q+1)} + |\xi_1 \lambda_1| \frac{T^q M}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| \frac{T^q M}{\Gamma(q)} \\ & + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T^2 M_2 + |\mu_1 \xi_1| T M_1. \end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}
 |({}^c D^r f x)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(q-r)} \int_0^t (t-s)^{q-r-1} (\theta_1 |x| + \theta_2 |{}^c D^r x| + M) ds \\
 &+ \frac{T^{1-r}}{\Gamma(2-r)} \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_2-1| \Gamma(q-1)} \int_0^T (T-s)^{q-2} (\theta_1 |x| + \theta_2 |{}^c D^r x| + M) ds \\
 &+ \frac{T^{1-r}}{\Gamma(2-r)} \frac{|\mu_2|}{|\lambda_2-1|} \int_0^T (L_2 |x| + M_2) ds \\
 &\leq \left( \frac{T^{q-r} \theta_1}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1-1| \theta_1}{\Gamma(2-r) \Gamma(q)} + \frac{T^{2-r} |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1-1| L_2}{\Gamma(2-r)} \right) |x| \\
 &+ \left( \frac{T^{q-r} \theta_2}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1-1| \theta_2}{\Gamma(2-r) \Gamma(q)} \right) |{}^c D^r x| \\
 &+ \frac{T^{q-r} M}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1-1| M}{\Gamma(2-r) \Gamma(q)} + \frac{T^{2-r} |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1-1| M_2}{\Gamma(2-r)}.
 \end{aligned}$$

À partir des inégalités ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \|Fx\| &\leq c_1 \left( \left( \frac{T^q \theta_1}{\Gamma(q+1)} + |\xi_1 \lambda_1| \frac{T^q \theta_1}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| \frac{T^q \theta_1}{\Gamma(q)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T^2 L_2 + |\mu_1 \xi_1| T L_1 \right) |x| \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{T^q \theta_2}{\Gamma(q+1)} + |\xi_1 \lambda_1| \frac{T^q \theta_2}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| \frac{T^q \theta_2}{\Gamma(q)} \right) |{}^c D^r x| \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T^q M}{\Gamma(q+1)} + |\xi_1 \lambda_1| \frac{T^q M}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| \frac{T^q M}{\Gamma(q)} \right. \\
 &\quad \left. + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T^2 M_2 + |\mu_1 \xi_1| T M_1 \right) \\
 &\quad + c_2 \left( \left( \frac{T^{q-r} \theta_1}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| \theta_1}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} + \frac{T^{2-r} |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| L_2}{\Gamma(2-r)} \right) |x| \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{T^{q-r} \theta_2}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| \theta_2}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \right) |{}^c D^r x| \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T^{q-r} M}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| M}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} + \frac{T^{2-r} |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| M_2}{\Gamma(2-r)} \right) \\
 &\leq \left( \frac{c_1 T^q \theta_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{c_1 |\xi_1 \lambda_1| T^q \theta_1}{\Gamma(q+1)} + c_1 |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| \frac{T^q \theta_1}{\Gamma(q)} + c_1 |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T^2 L_2 \right. \\
 &\quad \left. + c_1 |\mu_1 \xi_1| T L_1 + \frac{T^{q-r} \theta_1 c_2}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| \theta_1 c_2}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T^{2-r} |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| L_2 c_2}{\Gamma(2-r)} \right) |x| \\
 &\quad + \left( \frac{T^q \theta_2 c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| T^q \theta_2 c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| T^q \theta_2 c_1}{\Gamma(q)} + \frac{T^{q-r} \theta_2 c_2}{\Gamma(q-r+1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| \theta_2 c_2}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \right) |{}^c D^r x| + \frac{M T^q c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| T^q M c_1}{\Gamma(q+1)} \\
 &\quad + \frac{|\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| T^q M c_1}{\Gamma(q)} + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T^2 M_2 c_1 + |\xi_1 \mu_1| T M_1 c_1 \\
 &\quad + \frac{T^{q-r} M c_2}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| M c_2}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} + \frac{T^{2-r} |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| M_2 c_2}{\Gamma(2-r)} \\
 &\leq L(c_1 |x| + c_2 |{}^c D^r x|) + \gamma \\
 &\leq LR + \gamma \\
 &\leq R.
 \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout  $x, y \in X$  et pour chaque  $t \in [0, T]$ , nous obtenons :

$$|(F_1 x)(t) - (F_1 y)(t)| \leq \frac{T^q}{\Gamma(q+1)} \left( \theta_1 |x - y| + \theta_2 |{}^c D^r x - {}^c D^r y| \right),$$

$$\begin{aligned}
 |(F_2x)(t) - (F_2y)(t)| &\leq \left( \frac{T^{q-r}\theta_1}{\Gamma(q-r-1)} + \frac{T^{q-r}|\lambda_2\xi_2||\lambda_1-1|\theta_1}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T^{2-r}|\mu_2\xi_2||\lambda_1-1|L_2}{\Gamma(2-r)} \right) |x-y| \\
 &\quad + \left( \frac{T^{q-r}\theta_2}{\Gamma(q-r-1)} + \frac{T^{q-r}|\lambda_2\xi_2||\lambda_1-1|\theta_2}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \right) |{}^c D^r x - {}^c D^r y|.
 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 |(Fx)(t) - (Fy)(t)| &\leq \left( \frac{T^q\theta_1}{\Gamma(q+1)} + |\xi_1\lambda_1| \frac{T^q\theta_1}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2\lambda_2||1+\lambda_1| \frac{T^q\theta_1}{\Gamma(q)} \right. \\
 &\quad \left. + |\xi_2\mu_2||1+\lambda_1|T^2L_2 + |\mu_1\xi_1|TL_1 \right) |x-y| \\
 &\quad + \left( \frac{T^q\theta_2}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1\lambda_1|T^q\theta_2}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2\lambda_2||1+\lambda_1| \frac{T^q\theta_2}{\Gamma(q)} \right) |{}^c D^r x - {}^c D^r y|.
 \end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}
 |({}^c D^r Fx)(t) - ({}^c D^r Fy)(t)| &= |(I^{q-r}Nx)(t) \\
 &\quad - \frac{t^{1-r}}{\Gamma(2-r)} \frac{\lambda_2}{(\lambda_2-1)\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-s)^{q-2} N(x)(s) ds \\
 &\quad - \frac{t^{1-r}}{\Gamma(2-r)} \frac{\mu_2}{(\lambda_2-1)} \int_0^T h(s, x(s)) ds - (I^{q-r}Ny)(t) \\
 &\quad + \frac{t^{1-r}}{\Gamma(2-r)} \frac{\lambda_2}{(\lambda_2-1)\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-s)^{q-2} N(y)(s) ds \\
 &\quad + \frac{t^{1-r}}{\Gamma(2-r)} \frac{\mu_2}{(\lambda_2-1)} \int_0^T h(s, y(s)) ds| \\
 &\leq \left( \frac{T^{q-r}\theta_1}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r}|\lambda_2\xi_2||\lambda_1-1|\theta_1}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T^{2-r}|\mu_2\xi_2||\lambda_1-1|L_2}{\Gamma(2-r)} \right) |x-y| \\
 &\quad + \left( \frac{T^{q-r}\theta_2}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r}|\lambda_2\xi_2||\lambda_1-1|\theta_2}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \right) |{}^c D^r x - {}^c D^r y|.
 \end{aligned}$$

De ces inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \|(Fx)(t) - (Fy)(t)\| &\leq \left( \frac{T^q \theta_1 c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| T^q \theta_1 c_1}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| \frac{T^q \theta_1 c_1}{\Gamma(q)} \right. \\
 &\quad + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T^2 L_2 c_1 + |\mu_1 \xi_1| T L_1 c_1 + \frac{T^{q-r} \theta_1 c_2}{\Gamma(q-r+1)} \\
 &\quad \left. + \frac{T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| \theta_1 c_2}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} + \frac{T^{2-r} |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| L_2 c_2}{\Gamma(2-r)} \right) |x - y| \\
 &\quad + \left( \frac{T^q \theta_2 c_1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| T^q \theta_2 c_1}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| \frac{T^q \theta_2 c_1}{\Gamma(q)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T^{q-r} \theta_2 c_2}{\Gamma(q-r+1)} + T^{q-r} |\lambda_2 \xi_2| \frac{|\lambda_1 - 1| \theta_2 c_2}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \right) |{}^c D^r x - {}^c D^r y| \\
 &\leq L(c_1 |x - y| + c_2 |{}^c D^r x - {}^c D^r y|) \\
 &\leq L \|x - y\|.
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que  $F$  est contraction. Au moyen du principe de contraction de Banach,  $F$  admet un point fixe unique, solution unique du problème aux limites (3.1). ■

**Exemple 3.1.** *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases}
 {}^c D^{\frac{3}{2}} x(t) = \frac{1}{(t+4)^2} \tan^{-1}(x) + \frac{|{}^c D^{\frac{3}{4}} x(t)|}{(t+3)^2 (1 + |{}^c D^{\frac{3}{4}} x(t)|)}, & t \in [0, 1] \\
 x(0) + \frac{1}{2} x(1) = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3|x|}{4+|x|} dx, \\
 x'(0) + \frac{1}{3} x'(1) = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{2|x|}{3+|x|} dx.
 \end{cases} \quad (3.6)$$

Ici,

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{3}{2}, r = \frac{3}{4}, \lambda_1 = \frac{-1}{2}, \lambda_2 = \frac{-1}{3}, \mu_1 = \frac{1}{3}, \mu_2 = \frac{3}{2}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{3}, \xi_1 = \frac{-2}{3}, \\
 \xi_2 &= \frac{1}{2}, T = 1 \quad \text{and} \quad |f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq \frac{1}{16} |x_1 - x_2| + \frac{1}{9} |y_1 - y_2|, \\
 |g(t, x) - g(t, y)| &\leq \frac{3}{4} |x - y|, |h(t, x) - h(t, y)| \leq \frac{2}{3} |x - y|, \theta_1 = \frac{1}{16}, \theta_2 = \frac{1}{9}, \\
 L_1 &= \frac{3}{4}, L_2 = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

de plus :

$$\theta_1 \leq 0.14971, \quad \theta_2 \leq 0.54173, \quad 1 > L > 0,6666.$$

Ainsi, selon le théorème 3.1, le problème aux limites (3.6) a une solution unique sur  $[0, 1]$ .

Maintenant, nous énonçons un résultat connu dû à Schauder qui est nécessaire pour prouver l'existence au moins d'une solution de (3.1).

**Théorème 3.2.** Soit  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $g, h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues. Suppose que :

$$|f(t, x, y)| \leq m_1(t) + d_1|x|^{\rho_1} + d'_1|y|^{\rho'_1},$$

$$|g(t, x)| \leq m_2(t) + d_2|x|^{\rho_2}, \quad |h(t, x)| \leq m_3(t) + d_3|x|^{\rho_3},$$

pour chaque  $t \in [0, T]$  et  $x, y \in \mathbb{R}$  avec  $m_1 \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^+)$ ,  $m_2, m_3 \in L^1([0, T], \mathbb{R}^+)$  et  $d_i, d'_i \geq 0, 0 \leq \rho_i, \rho'_i < 1, i = 1, 2, 3$ . Alors le problème (3.1) admet au moins une solution sur  $[0, T]$ .

*Démonstration.* Le théorème du point fixe de Schauder est utilisé pour prouver que  $F$  défini par Eq. (3.4) admet au moins un point fixe. La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

**Etape 1 :**  $F(B_R) \subset B_R$

On note  $\|m_1\| = \sup_{t \in [0, T]} |m_1(t)|$ , soit  $B_R = \{x \in X, \|x\| \leq R\}$  et  $R > 0$  est un nombre positif.

Il est clair que  $B_R$  est un sous-ensemble fermé, borné et convexe de l'espace de Banach  $X$ . Pour tout  $x \in B_R$ , nous avons :

$$|(F_1x)(t)| \leq \frac{\|m_1\| T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{(d_1 r^{\rho_1} + d'_1 r^{\rho'_1}) T^q}{\Gamma(q+1)},$$

$$|(F_2x)(t)| \leq \left( |\xi_1 \lambda_1| \frac{T^q}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| \frac{T^q}{\Gamma(q)} \right) \|m_1\| + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T \|m_3\|$$

$$+ |\xi_1 \mu_1| \|m_2\| + \left( |\xi_1 \lambda_1| \frac{T^q}{\Gamma(q+1)} + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| \frac{T^q}{\Gamma(q)} \right) (d_1 r^{\rho_1} + d'_1 r^{\rho'_1})$$

$$+ |\xi_1 \mu_1| T d_2 r^{\rho_2} + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T^2 d_3 r^{\rho_3}.$$

Nous avons donc :

$$|(Fx)(t)| \leq \left( \frac{T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| T^q}{\Gamma(q)} \right) \|m_1\|$$

$$+ |\xi_1 \mu_1| \|m_2\| + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T \|m_3\|$$

$$+ \left( \frac{T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| T^q}{\Gamma(q)} \right) (d_1 r^{\rho_1} + d'_1 r^{\rho'_1})$$

$$+ |\xi_1 \mu_1| T d_2 r^{\rho_2} + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T^2 d_3 r^{\rho_3}.$$

Puis de (3.4), nous avons :

$$|({}^c D^r Fx)(t)| \leq \frac{T^{q-r} \|m_1\|}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{T^{q-r}}{\Gamma(q-r+1)} (d_1 r^{\rho_1} + d_1' r'^{\rho_1}) + |k| \frac{T^{1-r}}{\Gamma(2-r)},$$

où

$$|k| \leq \frac{|\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| T^{q-1}}{\Gamma(q)} \|m_1\| + |\mu_2 \xi_2| |\lambda_2 - 1| \|m_3\| + \frac{|\xi_2 \lambda_2| |\lambda_1 - 1| T^{q-1}}{\Gamma(q)} (d_1 r^{\rho_1} + d_1' r'^{\rho_1}) + |\xi_2 \mu_2| |\lambda_2 - 1| T d_3 r^{\rho_3}.$$

Nous avons, donc :

$$|({}^c D^r Fx)(t)| \leq \left( \frac{T^{q-r}}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{|\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| T^{q-r}}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \right) \|m_1\| + \frac{|\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| T^{1-r}}{\Gamma(2-r)} \|m_3\| + \left( \frac{T^{q-r}}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{|\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| T^{q-r}}{\Gamma(q)\Gamma(2-r)} \right) (d_1 r^{\rho_1} + d_1' r'^{\rho_1}) + \frac{T^{2-r}}{\Gamma(2-r)} |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| d_3 r^{\rho_3}.$$

A travers les inégalités ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \|(Fx)(t)\| &\leq \left( \frac{c_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| c_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{\xi_2 \lambda_2 \|1 + \lambda_1\| c_1 T^q}{\Gamma(q)} \right) \|m_1\| \\ &+ c_1 |\xi_1 \mu_1| \|m_2\| + c_1 |\xi_2 \mu_2| \|1 + \lambda_1\| T \|m_3\| \\ &+ \left( \frac{c_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| c_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_2 \lambda_2| \|1 + \lambda_1\| c_1 T^q}{\Gamma(q)} \right) (d_1 r^{\rho_1} + d_1' r'^{\rho_1}) \\ &+ c_1 |\xi_1 \mu_1| T d_2 r^{\rho_2} + c_1 |\xi_2 \mu_2| \|1 + \lambda_1\| T^2 d_3 r^{\rho_3} \\ &+ \left( \frac{c_2 T^{q-r}}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{|\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| c_2 T^{q-r}}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \right) \|m_1\| \\ &+ \frac{|\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| c_2 T^{1-r}}{\Gamma(2-r)} \|m_3\| \\ &+ \left( \frac{c_2 T^{q-r}}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{|\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| c_2 T^{q-r}}{\Gamma(q)\Gamma(2-r)} \right) (d_1 r^{\rho_1} + d_1' r'^{\rho_1}) \\ &+ \frac{c_2 T^{2-r}}{\Gamma(2-r)} |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| d_3 r^{\rho_3}. \end{aligned}$$

Notons :

$$L = \left( \frac{c_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| c_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{\xi_2 \lambda_2 \|1 + \lambda_1| c_1 T^q}{\Gamma(q)} \right) \|m_1\| + c_1 |\xi_2 \mu_2| \|1 + \lambda_1| T \|m_3\| + c_1 |\xi_1 \mu_1| \|m_2\| + \left( \frac{c_2 T^{q-r}}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{|\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| c_2 T^{q-r}}{\Gamma(2-r)\Gamma(q)} \right) \|m_1\| + \frac{|\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| c_2 T^{1-r}}{\Gamma(2-r)} \|m_3\|,$$

$$M_1 = \left( \frac{c_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| c_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_2 \lambda_2| \|1 + \lambda_1| c_1 T^q}{\Gamma(q)} + \frac{c_2 T^{q-r}}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{|\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| c_2 T^{q-r}}{\Gamma(q)\Gamma(2-r)} \right)$$

$$M_2 = c_1 |\xi_1 \mu_1| T,$$

et

$$M_3 = c_1 |\xi_2 \mu_2| \|1 + \lambda_1| T^2 + c_2 |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| \frac{T^{2-r}}{\Gamma(2-r)}.$$

Soit maintenant  $R$  un nombre positif tel que :

$$R \geq \max \left( 5L, (5M_1 d_1)^{\frac{1}{1-\rho_1}}, (5M_1 d_1')^{\frac{1}{1-\rho_1'}}, (5M_2 d_2)^{\frac{1}{1-\rho_2}}, (5M_3 d_3)^{\frac{1}{1-\rho_3}} \right).$$

Ensuite, il est évident que pour tout  $x \in B_R$ ,

$$\|Fx\| \leq L + M_1(d_1 r^{\rho_1} + d_1' r^{\rho_1'}) + M_2 d_2 r^{\rho_2} + M_3 d_3 r^{\rho_3} \leq \frac{R}{5} + \frac{R}{5} + \frac{R}{5} + \frac{R}{5} + \frac{R}{5} = R.$$

Cela implique que  $F : B_R \rightarrow B_R$ .

**Etape 2 :**  $F$  est continue.

Supposons :  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  sous-ensemble  $X$  et  $x_n(t)$  converge vers  $x(t)$  uniformément sur  $[0, T]$  quand  $n \rightarrow \infty$ ; c'est-à-dire,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ .

Nous avons donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{\infty} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|{}^c D^r x_n - {}^c D^r x\|_{\infty} = 0,$$

ce qui implique que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} {}^c D^r x_n(t) = {}^c D^r x(t), \quad t \in [0, T],$$

par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t, x_n(t), {}^c D^r x_n(t)) = f(t, x(t), {}^c D^r x(t))$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t, x_n(t)) = g(t, x(t)), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h(t, x_n(t)) = h(t, x(t)), \quad t \in [0, T],$$

qui donne :

$$\begin{aligned} |(Fx_n)(t) - (Fx)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |f(s, x_n, {}^c D^r x_n) - f(s, x, {}^c D^r x)| ds \\ &+ |\xi_1 \lambda_1| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |f(s, x_n, {}^c D^r x_n) - f(s, x, {}^c D^r x)| ds \\ &+ |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| T \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} |f(s, x_n, {}^c D^r x_n) - f(s, x, {}^c D^r x)| ds \\ &+ |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_2| T \int_0^T |h(s, x_n) - h(s, x)| ds \\ &+ |\mu_1 \xi_1| \int_0^T |g(s, x_n) - g(s, x)| ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |({}^c D^r Fx_n)(t) - ({}^c D^r Fx)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-r-1}}{\Gamma(q-r)} \left( |f(s, x_n, {}^c D^r x_n) - f(s, x, {}^c D^r x)| \right) ds \\ &+ \frac{T^{1-r}}{\Gamma(2-r)} |\xi_2 \lambda_2| |\lambda_1 - 1| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \\ &\times (|f(s, x_n, {}^c D^r x_n) - f(s, x, {}^c D^r x)|) ds \\ &+ \frac{T^{1-r}}{\Gamma(2-r)} |\xi_2 \mu_2| |\lambda_1 - 1| \int_0^T |h(s, x_n) - h(s, x)| ds. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons :

$$\|(Fx_n)(t) - (Fx)(t)\| = c_1 \|(Fx_n)(t) - (Fx)(t)\|_\infty + c_2 \|({}^c D^r Fx_n)(t) - ({}^c D^r Fx)(t)\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui signifie que  $F$  est continue.

**Etape 3 :**  $F(B_R)$  est équicontinu avec  $B_R$  est défini dans **Etape 2**.

Puisque  $f$  est continue, on peut supposer que :  $|f(t, x(t), {}^c D^r x(t))| \leq N_1$  et  $|h(t, x(t))| \leq N_2$  pour tout  $x \in B_R$  et  $t \in [0, T]$ .

Maintenant pour,  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ . Alors nous avons :

$$\begin{aligned}
 |(F_1 x)(t_2) - (F_1 x)(t_1)| &= \left| \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_0^{t_1} \frac{|(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}|}{\Gamma(q)} |f(s, x(s), {}^c D^r x(s))| ds \\
 &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |f(s, x(s), {}^c D^r x(s))| ds \\
 &\leq \frac{|t_2^q - (t_2 - t_1)^q - t_1^q|}{\Gamma(q+1)} N_1 + \frac{(t_2 - t_1)^q}{\Gamma(q+1)} N_1 \\
 &\leq \frac{2N_1(t_2 - t_1)^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{N_1|t_2^q - t_1^q|}{\Gamma(q+1)},
 \end{aligned}$$

$$|(F_2 x)(t_2) - (F_2 x)(t_1)| \leq \left( |\xi_2 \lambda_2| |1 - \lambda_1| \frac{T^{q-1}}{\Gamma(q)} N_1 + |\xi_2 \mu_2| |1 - \lambda_2| T N_2 \right) |t_2 - t_1|.$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 |(F x)(t_2) - (F x)(t_1)| &\leq \frac{2N_1(t_2 - t_1)^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{N_1|t_2^q - t_1^q|}{\Gamma(q+1)} + \left( |\xi_2 \lambda_2| |1 - \lambda_1| \frac{T^{q-1}}{\Gamma(q)} N_1 \right. \\
 &\quad \left. + |\xi_2 \mu_2| |1 - \lambda_2| T N_2 \right) |t_2 - t_1|,
 \end{aligned}$$

nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
 \left| ({}^c D^r Fx)(t_2) - ({}^c D^r Fx)(t_1) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(q-r)} \int_0^{t_1} ((t_2-s)^{q-r-1} \right. \\
 &\quad \left. - (t_1-s)^{q-r-1}) f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(q-r)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-r-1} f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\lambda_2}{(\lambda_2-1)\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-s)^{q-2} f(s, x(s), {}^c D^r x(s)) ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\mu_2}{(\lambda_2-1)} \int_0^T h(s, x(s)) ds \right) \frac{(t_2^{1-r} - t_1^{1-r})}{\Gamma(2-r)} \right| \\
 &\leq \frac{N_1 |t_2^{q-r} - t_1^{q-r}|}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{2N_1 (t_2 - t_1)^{q-r}}{\Gamma(q-r+1)} \\
 &\quad + \left( |\lambda_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| \frac{T^{q-1}}{\Gamma(q)} N_1 \right. \\
 &\quad \left. + |\mu_1 \xi_2| |\lambda_1 - 1| T N_2 \right) \frac{|t_2^{1-r} - t_1^{1-r}|}{\Gamma(2-r)}.
 \end{aligned}$$

Nous avons donc (car  $q > 1$ ,  $q - r > 0$  et  $1 - r \geq 0$ ) :

$$\|(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t_2 \longrightarrow t_1$$

et la limite est indépendante de  $x \in B_R$ . En conséquence de l'étape 1, 2 et 3 et d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, cela signifie que  $F(B_R)$  est relativement compact dans  $X$ . Du théorème 1.2 le problème (3.1) admet au moins une solution et la preuve est terminée. ■

**Exemple 3.2.** *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$\left\{ \begin{aligned}
 & {}^c D^{\frac{5}{3}} x(t) = (4t^2 - 9t)e^{-x^3(t)} + \frac{1}{4}|x(t)|^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{|{}^c D^{\frac{3}{4}} x(t)|}{1 + \cos^2 x(t)} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad t \in [0, 1] \\
 & x(0) + \frac{1}{2}x(1) = \frac{1}{5} \int_0^1 [(s-1)e^{-x^2(s)} + \frac{1}{3}|x(s)|^{\frac{1}{2}}] ds, \\
 & x'(0) + \frac{1}{5}x'(1) = \frac{1}{3} \int_0^1 [(s^3 - 2s)e^{-x^2(s)} + \frac{1}{9}|x(s)|^{\frac{1}{2}}] ds.
 \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

Dans ce cas, nous avons :

$$f(t, x, y) = (4t^2 - 9t)e^{-x^3} + \frac{1}{4}|x|^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{|y|}{1 + \cos^2 x} \right)^{\frac{1}{3}}$$

et  $q = \frac{5}{3}$ ,  $r = \frac{3}{4}$ ,  $T = 1$ ,  $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{-1}{5}$ ,  $\mu_1 = \frac{1}{5}$ ,  $\mu_2 = \frac{1}{3}$

$$g(t, x) = (t - 1)e^{-x^2} + \frac{1}{3}|x(s)|^{\frac{1}{2}}, \quad h(t, x) = (t^3 - 2t)e^{-x^2} + \frac{1}{9}|x|^{\frac{1}{2}},$$

puisque,

$$|f(t, x, y)| \leq |4t^2 - 9t| + \frac{1}{4}|x|^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}|y|^{\frac{1}{3}},$$

$$|g(t, x)| \leq |t - 1| + \frac{1}{3}|x|^{\frac{1}{2}}, \quad |h(t, x)| \leq |t^3 - 2t| + \frac{1}{9}|x|^{\frac{1}{2}}.$$

Soient :

$$d_1 = \frac{1}{4}, \quad d_2 = \frac{1}{2}, \quad \rho_1 = \frac{1}{2}, \quad \rho_2 = \frac{1}{3}, \quad d_3 = \frac{1}{3}, \quad d_4 = \frac{1}{9}, \quad \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{2}$$

et

$$m(t) = |4t^2 - 9t| \in L^\infty(0, 1), \quad m_1(t) = |t - 1| \in L^1(0, 1), \quad m_2(t) = |t^3 - 2t| \in L^1(0, 1)$$

Maintenant, il est facile de vérifier que toutes les conditions du théorème 3.2 sont remplies. Par conséquent, le problème aux limites fractionnaire (3.7) a au moins une solution sur  $[0, 1]$ .

Maintenant, nous prouvons l'existence de la solution de (3.1) en appliquant l'alternative du théorème à points fixes de Leray-Schauder.

**Théorème 3.3.** Soit  $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et que :

(H<sub>1</sub>) Il existe des fonctions positives  $a_i(t), b_i(t), d_i(t) \in C([0, T], \mathbb{R})$  tel que :

$$|f(t, x, y)| \leq a_1(t) + a_2(t)|x| + a_3(t)|y|,$$

$$|g(t, x)| \leq b_1(t) + b_2(t)|x|, \quad |h(t, x)| \leq d_1(t) + d_2(t)|x|, \quad \forall t \in [0, T].$$

(H<sub>2</sub>) Supposons que  $A$  et  $\rho$  des constantes positives telles que,  $0 < A < \infty$  et  $0 < \rho < 1$ .

Alors le problème (3.1) admet au moins une solution.

*Démonstration.* C'est trivialement que  $F : X \rightarrow X$ .

Nous avons montré dans le théorème 3.2 que  $F$  est continue.

Premièrement, Soit  $\bar{B}$  un sous-ensemble uniformément borné de  $X$  et soit  $R > 0$  tel que  $\|x\| \leq R$  pour tout  $x \in \bar{B}$ . Nous prouvons que  $F : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ . Pour tout  $x \in \bar{B}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &\leq \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} ds + |\xi_1 \lambda_1| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} ds \right. \\ &\quad \left. + |\xi_2 \lambda_2| |1 + \lambda_1| T \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} ds \right\} |f(s, x(s), {}^c D^r x(s))| \\ &\quad + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T \int_0^T |h(s, x(s))| ds + |\mu_1 \xi_1| \int_0^T |g(s, x(s))| ds \\ &\leq \left\{ \frac{T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\xi_1 \lambda_1| |1 + \lambda_1| T^q}{\Gamma(q)} \right\} M_1 + |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T M_2 + |\mu_1 \xi_1| M_3. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} |({}^c D^r Fx)(t)| &\leq \left\{ \frac{1}{\Gamma(q-r)} \int_0^t (t-s)^{q-r-1} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{T^{1-r}}{\Gamma(2-r)} |\xi_2 \lambda_2| |\lambda_1 - 1| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} ds \right\} |f(s, x(s), {}^c D^r x(s))| \\ &\quad + |\xi_2 \mu_2| |\lambda_1 - 1| \int_0^T |h(s, x(s))| ds \\ &\leq \left\{ \frac{T^{q-r}}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{|\xi_2 \lambda_2| |\lambda_1 - 1| T^{q-r}}{\Gamma(q)} \right\} M_1 + \frac{|\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| T^{1-r}}{\Gamma(2-r)} M_2. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons :

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &\leq \left\{ \frac{c_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{c_1 |\xi_1 \lambda_1| T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{c_1 |\xi_1 \lambda_1| |1 + \lambda_1| T^q}{\Gamma(q)} + \frac{c_2 T^{q-r}}{\Gamma(q-r+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_2 |\xi_2 \lambda_2| |\lambda_1 - 1| T^{q-r}}{\Gamma(q)} \right\} M_1 + \left\{ c_1 |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T + \frac{c_2 |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| T^{1-r}}{\Gamma(2-r)} \right\} M_2 \\ &\quad + c_1 |\mu_1 \xi_1| M_3 \\ &\leq K_1 M_1 + K_2 M_2 + K_3 M_3. \end{aligned}$$

Où :

$$M_1 = \max_{(s, z_1, z_2) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2} |f(s, z_1, z_2)|, \quad M_2 = \max_{(s, z_1) \in [0, T] \times \mathbb{R}} \int_0^T |h(s, z_1)|,$$

$$M_3 = \max_{(s, z_1) \in [0, T] \times \mathbb{R}} \int_0^T |g(s, z_1)|$$

$$K_1 = \frac{c_1 T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{c_1 |\xi_1 \lambda_1| T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{c_1 |\xi_1 \lambda_1| |1 + \lambda_1| T^q}{\Gamma(q)} + \frac{c_2 T^{q-r}}{\Gamma(q-r+1)} + \frac{c_2 |\xi_2 \lambda_2| |\lambda_1 - 1| T^{q-r}}{\Gamma(q)}$$

$$K_2 = c_1 |\xi_2 \mu_2| |1 + \lambda_1| T + \frac{c_2 |\mu_2 \xi_2| |\lambda_1 - 1| T^{1-r}}{\Gamma(2-r)}, \quad K_3 = c_1 |\mu_1 \xi_1|.$$

Par conséquent,  $Fu$  est uniformément borné.

Deuxièmement, nous prouvons la compacité de l'opérateur  $F$ , nous définissons

$|f(t, x(t), {}^c D^r x(t))| \leq N_1, |h(t, x(t))| \leq N_2$ . Pour tout  $t_1, t_2 \in [0, T]$  sont tels que :

$t_1 \leq t_2$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)| &\leq \frac{2(t_2 - t_1)^q + |t_2^q - t_1^q|}{\Gamma(q+1)} N_1 \\ &+ \left( |\xi_2 \lambda_2| |\lambda_1 - 1| \frac{T^{q-1}}{\Gamma(q)} N_1 + |\xi_2 \mu_2| |\lambda_1 - 1| T N_2 \right) |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} |({}^c D^r Fx)(t_2) - ({}^c D^r Fx)(t_1)| &\leq \frac{2|t_2 - t_1|^{q-r} + (t_2^{q-r} - t_1^{q-r})}{\Gamma(q-r+1)} N_1 \\ &+ \left( |\xi_2 \lambda_2| |\lambda_1 - 1| \frac{T^{q-1}}{\Gamma(q)} N_1 \right. \\ &\left. + |\xi_2 \mu_2| |\lambda_1 - 1| T N_2 \right) \frac{|t_2^{1-r} - t_1^{1-r}|}{\Gamma(2-r)}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \|(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)\| &\leq \frac{2c_1(t_2 - t_1)^q + c_1|t_2^q - t_1^q|}{\Gamma(q+1)} N_1 \\ &+ \left( |\xi_2 \lambda_2| |\lambda_1 - 1| \frac{T^{q-1}}{\Gamma(q)} c_1 N_1 + |\xi_2 \mu_2| |\lambda_1 - 1| T c_1 N_2 \right) |t_2 - t_1| \\ &+ \frac{2c_2|t_2 - t_1|^{q-r} + c_2(t_2^{q-r} - t_1^{q-r})}{\Gamma(q-r+1)} N_1 + \left( |\xi_2 \lambda_2| |\lambda_1 - 1| \frac{T^{q-1}}{\Gamma(q)} c_2 N_1 \right. \\ &\left. + |\xi_2 \mu_2| |\lambda_1 - 1| T c_2 N_2 \right) \frac{|t_2^{1-r} - t_1^{1-r}|}{\Gamma(2-r)} \rightarrow_{t_2 \rightarrow t_1} 0 \end{aligned}$$

et la limite est indépendante de  $x \in \overline{B}$ . L'opérateur  $F$  est donc équicontinu. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, l'opérateur  $F$  est complètement continue.

Troisièmement, le résultat découlera de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder une fois que nous aurons prouvé la délimitation de l'ensemble des solutions des équations  $x = \lambda Fx$  pour  $\lambda \in (0, 1)$ .

Soit  $U = \{x \in X : \|x\| < R\}$  où  $R = \frac{A}{1-\rho}$ . Alors

$$\begin{aligned}
 |(Fx)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_1(s) ds + |\xi_1 \lambda_1| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_1(s) ds \\
 &+ |\xi_2 \lambda_2 [\lambda_1(T-t) + T]| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q)} a_1(s) ds \\
 &+ |\xi_2 \mu_2 [\lambda_2(T-t) + T]| \int_0^T d_1(s) ds + |\mu_1 \xi_1| \int_0^T b_1(s) ds \\
 &+ \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_2(s) ds + |\xi_1 \lambda_1| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_2(s) ds \right. \\
 &+ |\xi_2 \lambda_2 [\lambda_1(T-t) + T]| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q)} a_2(s) ds \\
 &+ |\xi_2 \mu_2 [\lambda_2(T-t) + T]| \int_0^T d_2(s) |x| ds + |\mu_1 \xi_1| \int_0^T b_2(s) ds \left. \right\} |x| \\
 &+ \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_3(s) |{}^c D^r x| ds + |\xi_1 \lambda_1| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_3(s) ds \right. \\
 &+ |\xi_2 \lambda_2 [\lambda_1(T-t) + T]| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q)} a_3(s) ds \left. \right\} |{}^c D^r x| \\
 &\leq A_1 + A_2 |x| + A_3 |{}^c D^r x|.
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_1(s) ds + |\xi_1 \lambda_1| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_1(s) ds \\
 &+ |\xi_2 \lambda_2 [\lambda_1(T-t) + T]| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q)} a_1(s) ds \\
 &+ |\xi_2 \mu_2 [\lambda_2(T-t) + T]| \int_0^T d_1(s) ds + |\mu_1 \xi_1| \int_0^T b_1(s) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_2(s) ds + |\xi_1 \lambda_1| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_2(s) ds \\
 &+ |\xi_2 \lambda_2 [\lambda_1(T-t) + T]| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q)} a_2(s) ds \\
 &+ |\xi_2 \mu_2 [\lambda_2(T-t) + T]| \int_0^T d_2(s) |x| ds + |\mu_1 \xi_1| \int_0^T b_2(s) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_3(s) |{}^c D^r x| ds + |\xi_1 \lambda_1| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} a_3(s) ds \\
 &+ |\xi_2 \lambda_2 [\lambda_1(T-t) + T]| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q)} a_3(s) ds
 \end{aligned}$$

Selon la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo avec  $0 < r \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 |{}^c D^r (Fx)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(q-r)} \int_0^t (t-s)^{q-r-1} a_1(s) ds \\
 &+ \frac{T^{1-r} |\lambda_2|}{\Gamma(2-r) \Gamma(q-1) |\lambda_2 - 1|} \int_0^T (T-s)^{q-2} a_1(s) ds \\
 &+ \frac{T^{1-r} |\mu_2|}{\Gamma(2-r) |\lambda_2 - 1|} \int_0^T d_1(s) ds \\
 &+ \left\{ \frac{1}{\Gamma(q-r)} \int_0^t (t-s)^{q-r-1} a_2(s) ds \right. \\
 &+ \frac{T^{1-r} |\lambda_2|}{\Gamma(2-r) \Gamma(q-1) |\lambda_2 - 1|} \int_0^T (T-s)^{q-2} a_2(s) ds \\
 &+ \left. \frac{T^{1-r} |\mu_2|}{\Gamma(2-r) |\lambda_2 - 1|} \int_0^T d_2(s) ds \right\} |x| \\
 &+ \left\{ \frac{1}{\Gamma(q-r)} \int_0^t (t-s)^{q-r-1} a_3(s) ds \right. \\
 &+ \left. \frac{T^{1-r} |\lambda_2|}{\Gamma(2-r) \Gamma(q-1) |\lambda_2 - 1|} \int_0^T (T-s)^{q-2} a_3(s) ds \right\} |{}^c D^r x| \\
 &\leq A'_1 + A'_2 |x| + A'_3 |{}^c D^r x|.
 \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
 A'_1 &= \frac{1}{\Gamma(q-r)} \int_0^t (t-s)^{q-r-1} a_1(s) ds \\
 &+ \frac{T^{1-r} |\lambda_2|}{\Gamma(2-r)\Gamma(q-1)|\lambda_2-1|} \int_0^T (T-s)^{q-2} a_1(s) ds \\
 &+ \frac{T^{1-r} |\mu_2|}{\Gamma(2-r)|\lambda_2-1|} \int_0^T d_1(s) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A'_2 &= \frac{1}{\Gamma(q-r)} \int_0^t (t-s)^{q-r-1} a_2(s) ds \\
 &+ \frac{T^{1-r} |\lambda_2|}{\Gamma(2-r)\Gamma(q-1)|\lambda_2-1|} \int_0^T (T-s)^{q-2} a_2(s) ds \\
 &+ \frac{T^{1-r} |\mu_2|}{\Gamma(2-r)|\lambda_2-1|} \int_0^T d_2(s) ds
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 A'_3 &= \frac{1}{\Gamma(q-r)} \int_0^t (t-s)^{q-r-1} a_3(s) ds \\
 &+ \frac{T^{1-r} |\lambda_2|}{\Gamma(2-r)\Gamma(q-1)|\lambda_2-1|} \int_0^T (T-s)^{q-2} a_3(s) ds
 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons obtenir que :

$$\begin{aligned}
 \|Fx(t)\| &\leq c_1(A_1 + A_2|x(t)| + A_3|^c D^r x(t)|) + c_2(A'_1 + A'_2|x(t)| + A'_3|^c D^r x(t)|) \\
 &= \underbrace{(c_1 A_1 + c_2 A'_1)}_{=A} + (c_1 A_2 + c_2 A'_2)|x(t)| + (c_1 A_3 + c_2 A'_3)|^c D^r x(t)| \\
 &\leq A + \rho(c_1 \max_{t \in I} |x(t)| + c_2 \max_{t \in I} |^c D^r x(t)|) \\
 &\leq A + \rho \|x\|.
 \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe un  $x \in \partial U$  et un  $\lambda \in [0, 1]$  tels que :  $x = \lambda Fx$ , alors pour ce  $x$  et  $\lambda$ , nous avons :

$$R = \|x\| = \lambda \|Fx\| < A + \rho \|x\| = R,$$

ce qui est une contradiction. Selon le théorème 1.3, il existe un point fixe  $x \in \bar{U}$  de  $F$ . Ce point fixe est une solution de (1.1), cqfd. ■

# Existence et Unicité pour les Equations Intégré-Différentielles Fractionnaires Séquentielles Multi-Termes avec Conditions aux Limites Non Locales

---

## 4.1 Introduction

Le sujet du calcul fractionnaire a reçu une grande attention au cours des deux dernières décennies. Les équations différentielles d'ordre fractionnaire apparaissent dans plusieurs domaines de recherche de la science et de l'ingénierie, tels que la physique, la chimie, l'aérodynamique, la rhéologie des polymères, l'économie, la théorie du contrôle, le traitement du signal et de l'image, la biophysique [1, 56, 57, 58, 59, 192, 204, 205]. De plus, des applications plus différentes dans les informations quantiques me donnent de nouvelles fonctionnalités en utilisant le calcul fractionnaire [34, 35, 36, 37]. Récemment, de nombreux chercheurs se sont intéressés à l'existence de solutions aux problèmes de valeurs initiales et aux limites pour les équations différentielles fractionnaires. Certains articles ont étudié l'existence de solutions aux problèmes de valeur limite avec deux points, trois points, conditions aux limites multi-points ou intégrales (voir les exemples [56, 57, 58, 59]).

Une application importante du quantum de temps fractionnaire l'information est la non-unitarité de l'évolution quantique et plus de perspicacités et d'observations conduisent à détruire l'équivalence entre l'équation de Schrödinger et l'images de Heisenberg [101]. Un examen des fondamentaux et applications physiques de la mécanique quantique fractionnaire a été présenté [185]. Récemment, Iomin [108] a discuté.

le problème de l'évolution fractionnaire en mécanique quantique et les résultats peuvent être appliqués dans différents modèles [161, 162, 163, 164, 186, 187, 223, 187].

Xinwei et Landong [215], ont étudié l'existence de solutions pour l'équation différentielle fractionnaire non linéaire :

$${}^c D^\alpha u(t) = f(t, u(t), {}^c D^\beta u(t)), \quad (0 < t < 1),$$

avec des conditions aux limites :  $u(0) = u'(0) = 0$  ou  $u'(0) = u(1) = 0$  ou  $u(0) = u(1) = 0$ ,

où

$1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \beta \leq 1$  et  $f$  est continue sur  $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Su et Zhang [216], ont étudié l'existence et l'unicité de solutions pour le problème aux limites fractionnaire à deux points non linéaire suivant :

$${}^c D^\alpha u(t) = f(t, u(t), {}^c D^\beta u(t)), \quad (0 < t < 1),$$

avec des conditions aux limites :  $a_1 u(0) - a_2 u'(0) = A$  et  $b_1 u(1) + b_2 u'(1) = B$ , où  $\alpha, \beta, a_i, b_i (i = 1, 2)$  satisfaire à certaines conditions.

Ahmad et Sivasundaram [60], ont étudié l'existence de solutions pour l'équation fractionnaire intégro-différentielle non linéaire :

$${}^c D^q u(t) = f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t)), \quad (0 < t < 1, \quad 1 < q \leq 2),$$

avec des conditions aux limites :  $u'(0) + a u(\eta_1) = 0$ ,  $b u'(1) + u(\eta_2) = 0$  et  $0 < \eta_1 \leq \eta_2 < 1$ , où  ${}^c D^q$  est la dérivée fractionnaire de Caputo,  $a, b \in [0, 1]$ ,  $f : [0, 1] \times X \times X \times X \rightarrow X$  est conti-

nue et les applications  $\gamma, \lambda : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  avec les propriétés :  $\sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t \lambda(t, s) ds \right| < \infty$  et  $\sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t \gamma(t, s) ds \right| < \infty$ , les applications  $\phi$  et  $\psi$  sont définies par :  $(\phi u)(t) = \int_0^t \gamma(t, s) u(s) ds$

et  $(\psi u)(t) = \int_0^t \lambda(t, s) u(s) ds$ . Ici,  $X$  est un espace de Banach (voir [3]).

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions pour une nouvelle classe d'équations intégro-différentielles fractionnaires séquentielles multi-termes avec conditions aux limites non locales.

## 4.2 Position du Problème

Nous discutons l'existence et l'unicité de solutions pour l'équation intégro-différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions aux limites intégrales fractionnaires multi-termes à  $m$  points.

$$\begin{cases} ({}^c D^q + k {}^c D^{q-1}) u(t) = f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\beta_1} u(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(t)), & t \in [0, 1] \\ u(0) = 0, \quad \sum_{i=1}^{m-1} a_i u(\xi_i) = \beta \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} u(s) ds, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  ${}^c D^q$  est la dérivée fractionnaire standard de l'ordre de Caputo  $q$ , avec  $1 < q \leq 2$ ,  $0 < \beta_i < 1$ ,  $k > 0$ ,  $0 < \eta < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-1} < 1$ ,  $\beta, a_i, i = 1, \dots, m$  sont des constantes réelles,  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et pour les applications  $\gamma, \lambda : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty[$  avec

les propriétés  $\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t \lambda(t,s) ds \right| < \infty$  et  $\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t \gamma(t,s) ds \right| < \infty$ , les applications :  $\phi$  et  $\psi$  sont définies par :  $(\phi u)(t) = \int_0^t \gamma(t,s) u(s) ds$  et  $(\psi u)(t) = \int_0^t \lambda(t,s) u(s) ds$ .

**Lemme 4.1.** Soit  $y(t) \in C([0, 1])$  une fonction,  $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$  est une solution de l'équation différentielle fractionnaire séquentielle linéaire :

$$({}^c D^q + k {}^c D^{q-1}) u(t) = y(t),$$

avec des conditions aux limites  $u(0) = 0$  et  $\sum_{i=1}^{m-1} a_i u(\xi_i) = \beta \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} u(s) ds$  admet une solution unique donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{(e^{-kt} - 1)}{\Delta} \left( \beta \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \left( \int_0^s e^{-k(s-x)} \right. \right. \\ & \times \left( \int_0^x \frac{(x-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(\tau) d\tau \right) dx \Big) ds \\ & - \sum_{i=1}^{m-1} a_i \int_0^{\xi_i} e^{-k(\xi_i-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(x) dx \right) ds \\ & + \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(x) dx \right) ds, \end{aligned} \quad (4.2)$$

où

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-1} a_i \left( e^{-k\xi_i} - 1 \right) - \beta \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-ks} ds + \frac{\beta \eta^q}{\Gamma(q+1)} \neq 0. \quad (4.3)$$

*Démonstration.* Pour  $q \in [1, 2]$ , nous considérons l'équation différentielle fractionnaire linéaire suivante :

$$({}^c D^q + k {}^c D^{q-1}) u(t) = y(t), \quad (4.4)$$

où  ${}^c D^q$  désigne la dérivée fractionnaire de l'ordre de Caputo  $q$ , nous pouvons écrire sa solution comme suit :

$$u(t) + k {}^c D^{-1} u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} y(s) ds + c_0 + c_1 t, \quad (4.5)$$

où  $c_0, c_1$  sont des constantes arbitraires. à présent (4.5) peut être exprimé comme

$$u(t) = -k \int_0^t u(s) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} y(s) ds + c_0 + c_1 t. \quad (4.6)$$

En différenciant (4.6), on obtient :

$$u'(t) = -ku(t) + \frac{1}{\Gamma(q-1)} \int_0^t (t-s)^{q-2} y(s) ds + c_1, \quad (4.7)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$(u(t)e^{kt})' = e^{kt} \left( \frac{1}{\Gamma(q-1)} \int_0^t (t-s)^{q-2} y(s) ds + c_1 \right). \quad (4.8)$$

En intégrant de 0 à  $t$ , nous aurons :

$$u(t) = Ae^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(x) dx ds + B, \quad (4.9)$$

en utilisant les données  $u(0) = 0$  dans (4.9), on trouve que :  $A = -B$ . Ainsi (4.9) prend la forme :

$$u(t) = A(e^{-kt} - 1) + \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(x) dx ds. \quad (4.10)$$

En utilisant la condition :  $\sum_{i=1}^{m-1} a_i u(\xi_i) = \beta \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} u(s) ds$  dans (4.10), nous obtenons :

$$A = \frac{1}{\Delta} \left( \beta \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \left( \int_0^s e^{-k(s-x)} \left( \int_0^x \frac{(x-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(\tau) d\tau \right) dx \right) ds \right) - \sum_{i=1}^{m-1} a_i \int_0^{\xi_i} e^{-k(\xi_i-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(x) dx \right) ds,$$

où  $\Delta$  est donné par (4.3). En remplaçant la valeur de  $A$  dans (4.10), nous obtenons la solution (4.2). L'inverse s'ensuit par calcul direct. Ceci complète la preuve. ■

Dans le lemme suivant, nous présentons quelques estimations dont nous avons besoin dans la suite.

**Lemme 4.2.** Pour  $y \in C([0, 1], \mathbb{R})$  avec  $\|y\| = \sup_{t \in [0,1]} |y(t)|$ , nous obtenons :

$$(i) \quad \left| \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \left( \int_0^s e^{-k(s-x)} \left( \int_0^x \frac{(x-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(w) d\tau \right) dx \right) ds \right| \leq \frac{\eta^{2q-2}}{(k\Gamma(q))^2} (k\eta + e^{-k\eta} - 1) \|y\|.$$

$$(ii) \quad \left| \sum_{i=1}^{m-1} a_i \int_0^{\xi_i} e^{-k(\xi_i-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(x) dx \right) ds \right| \\ \leq \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| \xi_i^{q-1} (1 - e^{-k\xi_i}) \frac{\|y\|}{k\Gamma(q)}.$$

$$(iii) \quad \left| \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(x) dx \right) ds \right| \\ \leq \frac{1}{k\Gamma(q)} (1 - e^{-k}) \|y\|.$$

*Démonstration.* (i) évidemment,

$$\int_0^x \frac{(x-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} d\tau = -\frac{(x-\tau)^{q-1}}{\Gamma(q)} \Big|_0^x = \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)}$$

et

$$\int_0^s e^{-k(s-x)} \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)} dx \leq \frac{s^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_0^s e^{-k(s-x)} dx \leq \frac{s^{q-1}}{k\Gamma(q)} (1 - e^{-ks}).$$

Aussi

$$\left| \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \left( \int_0^s e^{-k(s-x)} \int_0^\tau \frac{(x-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(\tau) d\tau \right) dx \right| \\ \leq \|y\| \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \cdot \left( \frac{s^{q-1}}{k\Gamma(q)} \right) (1 - e^{-ks}) ds \\ \leq \|y\| \frac{\eta^{2q-2}}{(k\Gamma(q))^2} \int_0^\eta (1 - e^{-ks}) ds \\ = \|y\| \frac{\eta^{2q-2}}{(k\Gamma(q))^2} (k\eta + e^{-k\eta} - 1).$$

Les preuves de (ii) et (iii) sont similaires. La preuve est terminée. ■

### 4.3 Résultats d'existence et d'unicité

Soit  $I = [0, 1]$  et  $C(I, X)$  l'espace de toutes les fonctions réelles continues définies sur  $I$ . Définir l'espace  $X = \{u : u \in C(I, \mathbb{R}) \text{ et } {}^c D^{\beta_i} u \in C(I, \mathbb{R}), (0 < \beta_i < 1),$

pour  $i = 1, \dots, n$  muni de la norme :  $\|u\|_X = \|u\| + \sum_{i=1}^n \|{}^c D^{\beta_i} u\| = \max_{t \in I} |u(t)| + \sum_{i=1}^n \max_{t \in I} |{}^c D^{\beta_i} u(t)|$ .

Nous savons que :  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach.

Dans cette section, nous avons donnée quelques résultats d'existence pour le problème (4.1).

D'après le lemme 4.1, nous définissons un opérateur  $F : X \rightarrow X$

$$\begin{aligned}
 Fu(t) = & \frac{(e^{-kt} - 1)}{\Delta} \left( \beta \int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \left( \int_0^s e^{-k(s-x)} \left( \int_0^x \frac{(x-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \right. \right. \\
 & \times f(\tau, u(\tau), (\phi u)(\tau), (\psi u)(\tau), {}^c D^{\beta_1} u(\tau), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(\tau)) d\tau \Big) dx \Big) ds \\
 & - \sum_{i=1}^{m-1} a_i \int_0^{\xi_i} e^{-k(\xi_i-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \\
 & \times f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)) dx \Big) ds \\
 & + \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \\
 & \times f(x, u(x), (\phi u)(w), (\psi u)(w), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)) dx \Big) ds.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Observez que le problème (4.1) a des solutions si l'opérateur défini par 4.11 a un point fixe. Pour faciliter le calcul, nous définissons :

$$P = \sup_{t \in [0,1]} \frac{|e^{-kt} - 1|}{|\Delta|} = \frac{|e^{-k} - 1|}{|\Delta|}, \tag{4.12}$$

$$\tilde{P} = \sup_{t \in [0,1]} \frac{|ke^{-kt}|}{|\Delta|} = \frac{ke^{-k}}{|\Delta|}.$$

$$\Lambda_1 = P\Delta_1 + \frac{(1 - e^{-k})}{k\Gamma(q)}, \quad \Lambda_2 = \tilde{P}\Delta_1 + \frac{(2 - e^{-k})}{\Gamma(q)}. \tag{4.13}$$

$$\omega = \zeta(1 + \lambda_0 + \gamma_0). \tag{4.14}$$

$$\gamma_0 = \sup_{t \in I} \left| \int_0^t \gamma(t, s) ds \right|, \quad \lambda_0 = \sup_{t \in I} \left| \int_0^t \lambda(t, s) ds \right|. \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 = & |\beta| \frac{\eta^{2q-2}}{(k\Gamma(q))^2} (k\eta + e^{-k\eta} - 1) \\
 & + \sum_{i=1}^m |a_i| \xi_i^{q-1} (1 - e^{-k\xi_i}) \frac{1}{k\Gamma(q)}.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Dans cette section, nos premiers résultats sont basés sur le théorème du point fixe de Banach (voir [119]).

**Théorème 4.1.** *Supposons que :  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}$  soit une fonction continue satisfaisant l'hypothèse :*

$$(H_1) \quad |f(t, x, y, w, u_1, u_2, \dots, u_n) - f(t, x', y', w', v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq L_1|x - x'| + L_2|y - y'| + L_3|w - w'| + d_1|u_1 - v_1| + d_2|u_2 - v_2| + \dots + d_n|u_n - v_n|,$$

*pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $x, y, w, x', y', w', u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ .*

*où  $L_i, d_j > 0, \forall i = 1, 2, 3, \forall j = 1, 2, \dots, n$  sont des constantes de Lipschitz.*

*Alors le problème ((4.1)) admet une solution unique si  $\left( \Lambda_1 + \Lambda_2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)} \right) \omega < 1$ , où*

*$\Lambda_1, \Lambda_2$ , et  $\omega$  soient donnés par ((4.13)), ((4.14)),  $\zeta_1 = \sup\{L_1, d_1, d_2, \dots, d_n\}, \zeta_2 = \sup\{L_2, L_3\}, \zeta = \sup\{\zeta_1, \zeta_2\}$ .*

*Démonstration.* Notons

$$r \geq \frac{\Lambda_1 M + \Lambda_2 M \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)}}{1 - \Lambda_1 \omega - \Lambda_2 \omega \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)}},$$

où  $\Lambda_1, \Lambda_2, \omega$  sont donnés par (4.13), (4.14) respectivement et  $M = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t, 0, \dots, 0)|$ .

Dans un premier temps, nous montrons que  $FB_r \subset B_r$  où  $B_r = \{u \in X : \|u\|_X \leq r\}$ .

Pour  $u \in B_r$ , en utilisant  $(H_1)$  nous avons :

$$\begin{aligned}
 |Fu(t)| &\leq \sup_{t \in [0,1]} \frac{|e^{-kt} - 1|}{|\Delta|} \left( |\beta| \int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \left( \int_0^s e^{-k(s-x)} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \right. \\
 &\quad \times (|f(\tau, u(\tau), (\phi u)(\tau), (\psi u)(\tau), {}^c D^{\beta_1} u(\tau), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(\tau)) \\
 &\quad \left. \left. - f(\tau, 0, \dots, 0) \right| + M) d\tau \right) dx \Big) ds + \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| \int_0^{\xi_i} e^{-k(\xi_i - s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \\
 &\quad \times (|f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)) - f(x, 0, \dots, 0)| \\
 &\quad \left. + M) dx ds \right) \\
 &\quad + \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \times (|f(x, u(x), (\phi u)(w), (\psi u)(w), \right. \\
 &\quad \left. {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x) - f(x, 0, \dots, 0)| + M) dx \right) ds \\
 &\leq P \left( |\beta| \frac{\eta^{2q-2}}{(k\Gamma(q))^2} (k\eta + e^{-k\eta} - 1) + \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| \xi_i^{q-1} (1 - e^{-k\xi_i}) \frac{1}{k\Gamma(q)} \right) \\
 &\quad \times (\sup\{L_1, d_1, \dots, d_n\} (|u| + |{}^c D^{\beta_1} u| + \dots + |{}^c D^{\beta_n} u|) \\
 &\quad + \sup\{L_2, L_3\} (\gamma_0 + \lambda_0) |u| + M) + \frac{(1 - e^{-k})}{k\Gamma(q)} (L_1 |u(x)| \\
 &\quad + L_2 \gamma_0 |u(x)| + L_3 \lambda_0 |u(x)| + d_1 |{}^c D^{\beta_1} u(x)| + \dots + d_n |{}^c D^{\beta_n} u(x)| + M) \\
 &\leq P \Delta_1 (\zeta_1 r + \zeta_2 (\gamma_0 + \lambda_0) r + M) + \frac{(1 - e^{-k})}{k\Gamma(q)} (\zeta_1 r + \zeta_2 (\gamma_0 + \lambda_0) r + M) \\
 &\leq (P \Delta_1 + \frac{(1 - e^{-k})}{k\Gamma(q)}) \zeta (1 + \gamma_0 + \lambda_0) r + (P \Delta_1 + \frac{(1 - e^{-k})}{k\Gamma(q)}) M \\
 &\leq \Lambda_1 \omega r + \Lambda_1 M.
 \end{aligned}$$

Aussi, nous avons :

$$\begin{aligned}
 |(Fu)'(t)| &\leq \sup_{t \in [0,1]} \frac{|-ke^{-kt}|}{|\Delta|} \left( |\beta| \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \left( \int_0^s e^{-k(s-x)} \left( \int_0^x \frac{(x-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \right. \right. \\
 &\quad \times |f(\tau, u(\tau), (\phi u)(\tau), (\psi u)(\tau), {}^c D^{\beta_1} u(\tau), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(\tau)) \\
 &\quad \left. \left. \left. - f(\tau, 0, \dots, 0) \right| + M \right) d\tau \right) dx \Big) ds \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| \int_0^{\xi_i} e^{-k(\xi_i-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \\
 &\quad \times (|f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)) \\
 &\quad \left. - f(x, 0, \dots, 0) \right| + M) dx \Big) ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \\
 &\quad \times (|f(s, u(s), (\phi u)(s), (\psi u)(s), {}^c D^{\beta_1} u(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(s)) \\
 &\quad \left. - f(s, 0, \dots, 0) \right| + M) ds + k \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \\
 &\quad \times (|f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)) \\
 &\quad \left. - f(x, 0, \dots, 0) \right| + M) dx \Big) ds \\
 &\leq \tilde{P}\Delta_1(\zeta_1 r + \zeta_2(\gamma_0 + \lambda_0)r + M) \\
 &\quad + \frac{(2-e^{-k})}{\Gamma(q)}(\zeta_1 r + \zeta_2(\gamma_0 + \lambda_0)r + M) \\
 &\leq \Lambda_2 \omega r + \Lambda_2 M.
 \end{aligned}$$

Par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo avec  $0 < \beta_i < 1$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \left( |{}^c D^{\beta_i}(Fu)(t)| \right) &= \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} (Fu)'(s) ds \right| \\
 &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} (\Lambda_2 \omega r + \Lambda_2 M) ds \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\beta_i)} (\Lambda_2 \omega r + \Lambda_2 M).
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \|F(u)\| &= \|F(u)\| + \sum_{i=1}^n \|{}^c D^{\beta_i} F(u)\| \\
 &\leq \Lambda_1 \omega r + \Lambda_1 M \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)} (\Lambda_2 \omega r + \Lambda_2 M) \\
 &\leq r.
 \end{aligned}$$

Donc  $FB_r \subset B_r$ . maintenant pour tout  $u, v \in X$ , et pour chacun  $t \in [0, 1]$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 |(Fu)(t) - (Fv)(t)| &\leq \sup_{t \in [0,1]} \frac{|e^{-kt} - 1|}{|\Delta|} \left( |\beta| \int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right. \\
 &\quad \left( \int_0^s e^{-k(s-\tau)} \left( \int_0^\tau \frac{(\tau - w)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \times |f(w, u(w), (\phi u)(w), (\psi u)(w), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. {}^c D^{\beta_1} u(w), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(w)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - f(w, v(w), (\phi v)(w), (\psi v)(w), {}^c D^{\beta_1} v(w), \dots, {}^c D^{\beta_n} v(w)) |dw \right) d\tau \right) ds \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| \int_0^{\xi_i} e^{-k(\xi_i - s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \times |f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), \right. \\
 &\quad \left. {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)) - f(x, v(x), (\phi v)(x), (\psi v)(x), \right. \\
 &\quad \left. {}^c D^{\beta_1} v(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} v(x)) |dx \right) + k \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \\
 &\quad \left. \times |f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)) \right. \\
 &\quad \left. - f(x, v(x), (\phi v)(x), (\psi v)(x), {}^c D^{\beta_1} v(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} v(x)) |dx \right) ds \\
 &\leq (P\Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)} (1 - e^{-k})) (L_1 \|u - v\| + L_2 \|\phi u - \phi v\| + L_3 \|\psi u - \psi v\| \\
 &\quad + d_1 \|{}^c D^{\beta_1} u - {}^c D^{\beta_1} v\| + \dots + d_n \|{}^c D^{\beta_n} u - {}^c D^{\beta_n} v\|) \\
 &\leq (P\Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)} (1 - e^{-k})) (\sup\{L_1, d_1, \dots, d_n\} \|u - v\| \\
 &\quad + \sup\{L_2, L_3\} (\gamma_0 + \lambda_0) \|u - v\|) \\
 &\leq (P\Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)} (1 - e^{-k})) \sup\{\zeta_1, \zeta_2\} (1 + \gamma_0 + \lambda_0) \|u - v\| \\
 &\leq (P\Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)} (1 - e^{-k})) \zeta (1 + \gamma_0 + \lambda_0) \|u - v\| \\
 &\leq \Lambda_1 \omega \|u - v\|.
 \end{aligned}$$

Aussi, nous avons :

$$|(Fu)'(t) - (Fv)'(t)| \leq \Lambda_2 \omega \|u - v\|,$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} |{}^c D^{\beta_i}(Fu)(t) - {}^c D^{\beta_i}(Fv)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} |(Fu)'(s) - (Fv)'(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\beta_i)} \Lambda_2 \omega \|u - v\|. \end{aligned}$$

À partir des inégalités ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\| &= \|F(u) - F(v)\| + \sum_{i=1}^n \|{}^c D^{\beta_i} F(u) - {}^c D^{\beta_i} F(v)\| \\ &\leq \Lambda_1 \omega \|u - v\| + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2-\beta_i)} \Lambda_2 \omega \|u - v\|. \\ &\leq \left( \Lambda_1 + \Lambda_2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2-\beta_i)} \right) \omega \|u - v\|. \end{aligned}$$

Comme :  $\left( \Lambda_1 + \Lambda_2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2-\beta_i)} \right) \omega < 1$ ,  $F$  est une contraction. Ainsi, la conclusion du théorème suit le principe de la contraction. Ceci complète la preuve. ■

Maintenant, nous prouvons l'existence de solutions de (4.1) en appliquant le théorème du point fixe de Krasnoselskii [1].

**Théorème 4.2.** Soit  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue satisfaisant les hypothèses  $(H_1)$  et

$(H_2) |f(t, x, y, w, u_1, \dots, u_n)| \leq \mu(t), \quad \forall (t, x, y, w, u_1, \dots, u_n) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+3},$  où  $\mu \in C([0, 1], \mathbb{R}^+)$ .

Alors le problème de la valeur limite ((4.1)) admet au moins une solution sur  $[0, 1]$ .

Si  $\left( P + \tilde{P} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2-\beta_i)} \right) \Delta_1 \omega < 1$ .

*Démonstration.* Soit  $\|\mu\| = \sup_{t \in [0, 1]} |\mu(t)|$ , et considérons  $B_R = \{u \in X : \|u\| \leq R\}$ , nous fixons

$R \geq \left( \Lambda_1 + \Lambda_2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2-\beta_i)} \right) \|\mu\|$ . Nous définissons les opérateurs  $F_1$  et  $F_2$  sur  $B_R$  comme suit :

$$(F_1 u)(t) = \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)) dx \right) ds,$$

$$\begin{aligned} (F_2 u)(t) = & \frac{(e^{-kt} - 1)}{\Delta} \left( \beta \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \left( \int_0^s e^{-k(s-x)} \left( \int_0^x \frac{(x-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \right. \right. \\ & \times f(\tau, u(\tau), (\phi u)(\tau), (\psi u)(\tau), {}^c D^{\beta_1} u(\tau), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(\tau)) d\tau \Big) dx \Big) ds \\ & - \sum_{i=1}^{m-1} a_i \int_0^{\xi_i} e^{-k(\xi_i-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \times f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), \right. \\ & \left. \left. {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)) dx \right) ds \Big). \end{aligned}$$

Pour  $u, v \in B_R$ , en utilisant la notation ((4.13)), nous obtenons :

$$\begin{aligned} |(F_1 u)(t) + (F_2 v)(t)| & \leq (P\Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)}(1 - e^{-k})) \|\mu\| \\ & \leq \Lambda_1 \|\mu\|. \end{aligned}$$

Aussi :

$$\begin{aligned} |(F_1 u)'(t) + (F_2 v)'(t)| & \leq (\tilde{P}\Delta_1 + \frac{1}{\Gamma(q)}(2 - e^{-k})) \|\mu\| \\ & \leq \Lambda_2 \|\mu\|, \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} |{}^c D^{\beta_i}(F_1 u + F_2 v)| & \leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} |F_1' u + F_2' v| ds \\ & \leq \frac{\Lambda_2}{\Gamma(2-\beta_i)} \|\mu\|. \end{aligned}$$

À partir des inégalités ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \|F_1 u + F_2 v\| &= \|F_1 u + F_2 v\| + \sum_{i=1}^n \|{}^c D^{\beta_i} F_1 u + {}^c D^{\beta_i} F_2 v\| \\
 &\leq \Lambda_1 \|\mu\| + \Lambda_2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)} \|\mu\| \\
 &\leq \left( \Lambda_1 + \Lambda_2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)} \right) \|\mu\| \leq R.
 \end{aligned}$$

Donc  $F_1 u + F_2 v \in B_R$ , maintenant nous prouvons que  $F_2$  est contraction.

Soient  $u, v \in B_R$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 |F_2 u(t) - F_2 v(t)| &\leq \sup_{t \in [0,1]} \frac{|e^{-kt} - 1|}{|\Delta|} \left( |\beta| \int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \left( \int_0^s e^{-k(s-x)} \left( \int_0^x \frac{(x-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \right. \right. \\
 &\quad \times |f(\tau, u(\tau), (\phi u)(\tau), (\psi u)(\tau), ({}^c D^{\beta_1} u)(\tau), \dots, ({}^c D^{\beta_n} u)(\tau) \\
 &\quad \left. \left. \left. - f(\tau, v(\tau), (\phi v)(\tau), (\psi v)(\tau), ({}^c D^{\beta_1} v)(\tau), \dots, ({}^c D^{\beta_n} v)(\tau) d\tau \right) dx \right) ds \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| \int_0^{\xi_i} e^{-k(\xi_i - s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \right. \\
 &\quad \times (|f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), ({}^c D^{\beta_1} u)(x), \dots, ({}^c D^{\beta_n} u)(x)) \\
 &\quad \left. \left. - f(x, v(x), (\phi v)(x), (\psi v)(x), ({}^c D^{\beta_1} v)(x), \dots, ({}^c D^{\beta_n} v)(x))| dx \right) ds \right) \\
 &\leq P \Delta_1 \zeta (1 + \gamma_0 + \lambda_0) \|u - v\| \\
 &\leq P \Delta_1 \omega \|u - v\|.
 \end{aligned}$$

Aussi :

$$\begin{aligned}
 |F_2' u(t) - F_2' v(t)| &\leq \tilde{P} \Delta_1 \zeta (1 + \gamma_0 + \lambda_0) \|u - v\| \\
 &\leq \tilde{P} \Delta_1 \omega \|u - v\|,
 \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
 |{}^c D^{\beta_i} F_2 u(t) - {}^c D^{\beta_i} F_2 v(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1 - \beta_i)} \tilde{P} \Delta_1 \omega \|u - v\| ds \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)} \tilde{P} \Delta_1 \omega \|u - v\|.
 \end{aligned}$$

À partir des inégalités ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \|F_2 u - F_2 v\| &= \|F_2 u - F_2 v\| \\
 &+ \sum_{i=1}^n \|{}^c D^{\beta_i} F_2 u - {}^c D^{\beta_i} F_2 v\| \\
 &\leq P \Delta_1 \omega \|u - v\| \\
 &+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)} \tilde{P} \Delta_1 \omega \|u - v\| \\
 &\leq (P + \tilde{P} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)}) \Delta_1 \omega \|u - v\|.
 \end{aligned}$$

Comme :  $(P + \tilde{P} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)}) \Delta_1 \omega < 1$ ,  $F_2$  est contraction.

Nous prouvons la continuité de  $F_1$ . Soit  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \subset M$  et  $u \in M$  tel que  $u_n \rightarrow u$  comme  $n \rightarrow \infty$ , donc la continuité de  $f$  implique que

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t, u_n(t), (\phi u_n)(t), (\psi u_n)(t), {}^c D^{\beta_1} u_n(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u_n(t)) = \\
 f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\beta_1} u(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(t)).
 \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
 |F_1 u_n(t) - F_1 u(t)| &= \left| \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \times (f(t, u_n(t), (\phi u_n)(t), (\psi u_n)(t), \right. \right. \\
 &{}^c D^{\beta_1} u_n(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u_n(t)) - f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), \\
 &{}^c D^{\beta_1} u(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(t)) dx \Big) ds \Big| \\
 &\leq \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \times |f(t, u_n(t), (\phi u_n)(t), (\psi u_n)(t), \right. \\
 &{}^c D^{\beta_1} u_n(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u_n(t)) - f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), \\
 &{}^c D^{\beta_1} u(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(t))| dx \Big) ds \\
 &\leq \frac{1}{k\Gamma(q)} (1 - e^{-k}) \times \left| f(t, u_n(t), (\phi u_n)(t), (\psi u_n)(t), \right. \\
 &{}^c D^{\beta_1} u_n(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u_n(t)) - f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), \\
 &{}^c D^{\beta_1} u(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(t)) \Big|.
 \end{aligned}$$

Aussi nous avons :

$$\begin{aligned}
 \left| F_1' u_n(t) - F_1' u(t) \right| &= \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \times (f(s, u_n(s), (\phi u_n)(s), (\psi u_n)(s), \right. \\
 &\quad \left. {}^c D^{\beta_1} u_n(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u_n(s)) - f(s, u(s), (\phi u)(s), (\psi u)(s), \right. \\
 &\quad \left. {}^c D^{\beta_1} u(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(s)) ds \right| \\
 &\quad - k \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \times (f(s, u_n(s), (\phi u_n)(s), (\psi u_n)(s), \right. \\
 &\quad \left. {}^c D^{\beta_1} u_n(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u_n(s)) - f(s, u(s), (\phi u)(s), (\psi u)(s), \right. \\
 &\quad \left. {}^c D^{\beta_1} u(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(s)) dx \right) ds \Big| \\
 &\leq \frac{(2-e^{-k})}{\Gamma(q)} \left| f(s, u_n(s), (\phi u_n)(s), (\psi u_n)(s), {}^c D^{\beta_1} u_n(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u_n(s)) \right. \\
 &\quad \left. - f(s, u(s), (\phi u)(s), (\psi u)(s), {}^c D^{\beta_1} u(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(s)) \right|.
 \end{aligned}$$

Par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo avec  $0 < \beta_i < 1$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \left| {}^c D^{\beta_i} F_1 u_n(t) - {}^c D^{\beta_i} F_1 u(t) \right| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} \frac{(2-e^{-k})}{\Gamma(q)} \times \left| f(s, u_n(s), (\phi u_n)(s), (\psi u_n)(s), \right. \\
 &\quad \left. {}^c D^{\beta_1} u_n(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u_n(s)) - f(s, u(s), (\phi u)(s), (\psi u)(s), \right. \\
 &\quad \left. {}^c D^{\beta_1} u(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(s)) \right| ds \\
 &\leq \frac{(2-e^{-k})}{\Gamma(q)\Gamma(2-\beta_i)} \times \left| f(s, u_n(s), (\phi u_n)(s), (\psi u_n)(s), \right. \\
 &\quad \left. {}^c D^{\beta_1} u_n(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u_n(s)) - f(s, u(s), (\phi u)(s), (\psi u)(s), \right. \\
 &\quad \left. {}^c D^{\beta_1} u(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(s)) \right|.
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \|F_1 u_n(t) - F_1 u(t)\| &= \|F_1 u_n(t) - F_1 u(t)\| + \sum_{i=1}^n \|{}^c D^{\beta_i} F_1 u_n(t) - {}^c D^{\beta_i} F_1 u(t)\| \\
 &\leq \frac{1}{k\Gamma(q)} (1 - e^{-k}) |f(s, u_n(s), (\phi u_n)(s), (\psi u_n)(s), \\
 &\quad {}^c D^{\beta_1} u_n(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u_n(s)) \\
 &\quad - f(s, u(s), (\phi u)(s), (\psi u)(s), {}^c D^{\beta_1} u(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(s))| \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{(2 - e^{-k})}{\Gamma(q)\Gamma(2 - \beta_i)} \\
 &\quad \times |f(s, u_n(s), (\phi u_n)(s), (\psi u_n)(s), {}^c D^{\beta_1} u_n(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u_n(s)) \\
 &\quad - f(s, u(s), (\phi u)(s), (\psi u)(s), {}^c D^{\beta_1} u(s), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(s))| \longrightarrow 0,
 \end{aligned}$$

il s'ensuit que  $\|F_1 u_n(t) - F_1 u(t)\| \longrightarrow 0$  quand  $n \longrightarrow \infty$ , ce qui implique la continuité de  $F_1$ . De plus,  $F_1$  est uniformément borné sur  $B_R$  comme

$$\begin{aligned}
 \|F_1 u\| &\leq \frac{(1 - e^{-k})}{k\Gamma(q)} \|\mu\|, \\
 \|F_1' u\| &\leq \frac{(2 - e^{-k})}{\Gamma(q)} \|\mu\|, \\
 \|{}^c D^{\beta_i} F_1 u\| &\leq \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)} \frac{(2 - e^{-k})}{\Gamma(q)} \|\mu\|,
 \end{aligned}$$

et

$$\|F_1 u\| \leq \frac{(1 - e^{-k})}{k\Gamma(q)} \|\mu\| + \frac{(2 - e^{-k})}{\Gamma(q)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)} \|\mu\|.$$

Nous prouvons maintenant la compacité de l'opérateur  $F_1$ , nous définissons

$$C_0 = \sup_{(t, u, \psi u, \phi u, {}^c D^{\beta_1}, \dots, {}^c D^{\beta_n}) \in [0, 1] \times B_r} |f(t, u, (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\beta_1} u(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(t))|.$$

Pour  $0 < t_1 < t_2 < 1$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
 |(F_1 u)(t_2) - (F_1 u)(t_1)| &= \left| \int_0^{t_2} e^{-k(t_2-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \times f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x) dx \right) ds - \int_0^{t_1} e^{-k(t_1-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x) dx \right) ds \right| \\
 &\leq \int_0^{t_1} |e^{-k(t_2-s)} - e^{-k(t_1-s)}| \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \times |f(x, u(x), (\phi u)(x), \\
 &\quad (\psi u)(x), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x))| dx ds \\
 &\quad + \int_{t_1}^{t_2} e^{-k(t_2-s)} \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \times |f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), \\
 &\quad {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x))| dx ds \\
 &\leq \frac{C_0}{k\Gamma(q)} \left( |t_2^q - t_1^q| + |t_2^q e^{-kt_2} - t_1^q e^{-kt_1}| \right)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 |{}^c D^{\beta_i} F_1 u(t_2) - {}^c D^{\beta_i} F_1 u(t_1)| &\leq \int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{-\beta_i} - (t_1-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} |(F_1 u)'(s)| ds \\
 &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} |(F_1 u)'(s)| ds \\
 &\leq \frac{C_0}{\Gamma(1-\beta_i)} \frac{(2-e^{-k})}{\Gamma(q)} \left\{ \int_0^{t_1} \frac{|(t_1-s)^{\beta_i} - (t_2-s)^{\beta_i}|}{(t_1-s)^{\beta_i} (t_2-s)^{\beta_i}} ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-\beta_i} ds \right\}.
 \end{aligned}$$

Clairement  $|F_1 u(t_2) - F_1 u(t_1)| \rightarrow 0$  et  $|{}^c D^{\beta_i} F_1 u(t_2) - {}^c D^{\beta_i} F_1 u(t_1)| \rightarrow 0$  indépendant de  $u$  quand  $t_2 \rightarrow t_1$ . Donc  $F_1$  est relativement compact sur  $B_R$ . Par conséquent, par le théorème d'Arzela-Ascoli,  $F_1$  est compact sur  $B_R$ . Ainsi toutes les hypothèses du théorème 1.4 sont satisfaites et la conclusion du théorème (1.4) implique que le problème des valeurs aux limites ((4.1)) admet au moins une solution sur  $[0, 1]$ . Ceci complète la preuve. ■

Nos prochains résultats d'existence sont basés sur le théorème du point fixe suivant [1].

**Théorème 4.3.** *Soit  $E$  un espace de Banach. Supposons que  $F : E \rightarrow E$  est un opérateur complètement continu et que l'ensemble  $\Omega = \{u \in E : u = \mu Fu, \quad 0 < \mu < 1\}$  est borné. Alors  $F$  admet au moins un point fixe dans  $E$ .*

**Théorème 4.4.** *Supposons qu'il existe  $C > 0$  tel que*

$$|f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\beta_1} u(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(t))| \leq C,$$

$$\forall t \in [0, 1], (u, \phi u, \psi u, {}^c D^{\beta_1} u, \dots, {}^c D^{\beta_n} u) \in \mathbb{R}^{n+3}.$$

*Alors le problème (4.1) admet au moins une solution sur  $[0, 1]$ .*

*Démonstration.* Nous montrons que l'opérateur  $F$  est complètement continu. Soit  $B$  un ensemble borné dans  $X$ . Alors il existe  $C > 0$  tel que :

$$|f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\beta_1} u(t), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(t))| \leq C, \forall t \in [0, 1], u \in B, \text{ nous avons :}$$

$$\begin{aligned} |(Fu)(t)| &\leq (P\Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)}(1 - e^{-k}))C \\ &\leq \Lambda_1 C. \end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned} |(Fu)'(t)| &\leq (\tilde{P}\Delta_1 + \frac{1}{\Gamma(q)}(2 - e^{-k}))C \\ &\leq \Lambda_2 C, \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} |{}^c D^{\beta_i}(Fu)(t)| &= \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} (Fu)'(s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\beta_i)} \Lambda_2 C. \end{aligned}$$

À partir des inégalités ci-dessus, nous obtenons :

$$\|Fu\|_X \leq \Lambda_1 C + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2-\beta_i)} \Lambda_2 C < \infty,$$

ce qui implique que :  $\|Fu\| \leq \infty$ . Par conséquent  $F(B)$  est uniformément borné.

Il est facile de vérifier que l'opérateur  $F$  est continu puisque  $f$  est continu. Ensuite, nous montrons que  $F$  est équicontinu sur des sous-ensembles bornés de  $X$ .

Maintenant  $t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 < t_2; u \in B$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
 |Fu(t_2) - Fu(t_1)| &\leq \frac{|e^{-kt_2} - e^{-kt_1}|}{|\Delta|} \left( |\beta| \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \left( \int_0^s e^{-k(s-x)} \left( \int_0^x \frac{(x-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \right. \right. \\
 &\times |f(\tau, u(\tau), (\phi u)(\tau), (\psi u)(\tau), \\
 &{}^c D^{\beta_1} u(\tau), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(\tau)| d\tau) dx) ds \\
 &+ \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| \int_0^{\xi_i} e^{-k(\xi_i-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \\
 &\times |f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)| dx) ds \\
 &+ \int_0^{t_1} |e^{-k(t_2-s)} - e^{-k(t_1-s)}| \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \\
 &\times |f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)| dx) ds) \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} e^{-k(t_2-s)} \left( \int_0^s \frac{(s-x)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right. \\
 &\times |f(x, u(x), (\phi u)(x), (\psi u)(x), {}^c D^{\beta_1} u(x), \dots, {}^c D^{\beta_n} u(x)| dx) ds \\
 &\leq \frac{|e^{-kt_2} - e^{-kt_1}|}{|\Delta|} \left\{ |\beta| \frac{\eta^{2q-2}}{(k\Gamma(q))^2} (k\eta + e^{-k\eta} - 1) \right. \\
 &+ \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| \xi_i^{q-1} (1 - e^{-k\xi_i}) \frac{1}{k\Gamma(q)} \left. \right\} C \\
 &+ \frac{C}{k\Gamma(q)} (|t_2^q - t_1^q| + |t_2^q e^{-kt_2} - t_1^q e^{-kt_1}|) \\
 &\leq \left( \frac{|e^{-kt_2} - e^{-kt_1}|}{|\Delta|} \Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)} (|t_2^q - t_1^q| + \right. \\
 &\left. |t_2^q e^{-kt_2} - t_1^q e^{-kt_1}|) \right) C.
 \end{aligned}$$

Aussi nous avons :

$$\begin{aligned}
 |{}^c D^{\beta_i}(Fu)(t_2) - {}^c D^{\beta_i}(Fu)(t_1)| &= \left| \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} (Fu)'(s) ds \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} (Fu)'(s) ds \right| \\
 &\leq \int_0^{t_1} \frac{|(t_2-s)^{-\beta_i} - (t_1-s)^{-\beta_i}|}{\Gamma(1-\beta_i)} |(Fu)'(s)| ds \\
 &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} |(Fu)'(s)| ds \\
 &\leq \frac{C\Lambda_2}{\Gamma(1-\beta_i)} \left\{ \int_0^{t_1} \frac{|(t_1-s)^{\beta_i} - (t_2-s)^{\beta_i}|}{(t_1-s)^{\beta_i} (t_2-s)^{\beta_i}} \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} |(t_2-s)^{-\beta_i}| ds \right\}.
 \end{aligned}$$

À partir des inégalités ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \|Fu\| &\leq \left( \frac{|e^{-kt_2} - e^{-kt_1}|}{|\Delta|} \Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)} (|t_2^q - t_1^q| + |t_2^q e^{-kt_2} - t_1^q e^{-kt_1}|) \right) C \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \left( \frac{C\Lambda_2}{\Gamma(1-\beta_i)} \left\{ \int_0^{t_1} \frac{|(t_1-s)^{\beta_i} - (t_2-s)^{\beta_i}|}{(t_1-s)^{\beta_i} (t_2-s)^{\beta_i}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{t_1}^{t_2} |(t_2-s)^{-\beta_i}| ds \right\} \right) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad t_2 \rightarrow t_1.
 \end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur  $F$  est équicontinu. D'où le théorème d'Arzela-Ascoli,  $F : X \rightarrow X$  est complètement continu.

Considérons maintenant l'ensemble  $\Omega = \{u \in X : u = \mu Fu, \quad 0 < \mu < 1\}$ . Afin de montrer que  $\Omega$  est borné, soit  $u \in \Omega$ , alors  $u = \mu Fu, 0 < \mu < 1$ , pour  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned}
 |u(t)| &= |\mu(Fu)(t)| \\
 &\leq \mu |(Fu)(t)| \\
 &\leq \left( \Lambda_1 + \Lambda_2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(2-\beta_i)} \right) C < \infty.
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'ensemble  $\Omega$  est borné indépendamment de  $\mu$ . D'après le théorème 4.4, l'opérateur  $F$  admet au moins un point fixe, ce qui implique que le problème ((4.1)) admet au moins une solution sur  $[0, 1]$ . ■

**Exemple 4.1.** *Considérez le problème aux limites en quatre points suivant :*

$$\begin{cases} ({}^c D^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{4} {}^c D^{\frac{3}{4}})u(t) = f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{3}} u(t), {}^c D^{\frac{2}{3}} u(t)), & t \in [0, 1] \\ u(0) = 0, \\ \frac{1}{6} u\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{3} u\left(\frac{2}{10}\right) + \frac{1}{5} u\left(\frac{3}{10}\right) = \int_0^{\frac{1}{20}} \frac{(\frac{1}{20} - s)^{\frac{3}{4}}}{\Gamma(\frac{7}{4})} u(s) ds. \end{cases} \quad (4.17)$$

Où  $q = \frac{7}{4}, k = \frac{1}{4}, \beta_1 = \frac{1}{3}, \beta_2 = \frac{2}{3}, a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{5}, \xi_i = \frac{i}{10}, i = 1, 2, 3, \beta = 1, \eta = \frac{1}{20},$   
 $(\phi u)(t) = \int_0^t \frac{e^{-2(s-t)}}{2} u(s) ds$  et  $(\psi u)(t) = \int_0^t \frac{e^{-3(s-t)}}{2} u(s) ds$  avec  $\gamma_0 = \frac{e^2 - 1}{4}$  et  $\lambda_0 = \frac{e^3 - 1}{6},$   
 avec la valeur donnée de  $f$  a au moins une solution sur  $[0, 1],$  on choisit

$$\begin{aligned} f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{3}} u(t), {}^c D^{\frac{2}{3}} u(t)) &= \frac{|u(t)|}{36(1 + |u(t)|)} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}t} \sin(\frac{\pi}{2}t)}{64(1 + t^3)} \left( (\phi u)(t) \right. \\ &+ \left. \frac{|{}^c D^{\frac{1}{3}} u(t)|}{1 + |{}^c D^{\frac{1}{3}} u(t)|} \right) + \frac{\cos t + e^t}{81(1 + t^2)} \left( (\psi u)(t) \right. \\ &+ \left. \frac{|{}^c D^{\frac{2}{3}} u(t)|}{1 + |{}^c D^{\frac{2}{3}} u(t)|} \right), \end{aligned}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} &|f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{3}} u(t), {}^c D^{\frac{2}{3}} u(t)) - f(t, v(t), (\phi v)(t), (\psi v)(t), {}^c D^{\frac{1}{3}} v(t), {}^c D^{\frac{2}{3}} v(t))| \\ &\leq \frac{1}{36} |u(t) - v(t)| + \frac{1}{64} |\phi u(t) - \phi v(t)| + \frac{1}{81} |\psi u(t) - \psi v(t)| \\ &+ \frac{1}{64} |{}^c D^{\frac{1}{3}} u(t) - {}^c D^{\frac{1}{3}} v(t)| + \frac{1}{81} |{}^c D^{\frac{2}{3}} u(t) - {}^c D^{\frac{2}{3}} v(t)|, \end{aligned}$$

avec les valeurs données, on constate que :

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1}{36}, \zeta_2 = \frac{1}{64}, \zeta = \frac{1}{36}, \Delta \approx -3.4808 \times 10^{-2} \neq 0, \Delta_1 \approx 2.5495 \times 10^{-2}, \Lambda_1 \approx 1.1247, \\ \Lambda_2 &\approx 1.4714, \omega \approx 0.16051, \end{aligned}$$

enfin nous avons que :  $\left( \Lambda_1 + \Lambda_2 \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)} \right) \omega = 0.70663 < 1$ . Ainsi toutes les conditions du théorème 4.1, nous concluons qu'il existe une solution unique pour le problème (4.17) sur  $[0, 1]$ .

**Exemple 4.2.** On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} ({}^c D^{\frac{9}{5}} + \frac{1}{11} {}^c D^{\frac{4}{5}})u(t) = f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}u(t), {}^c D^{\frac{3}{4}}u(t)), & t \in [0, 1] \\ u(0) = 0, \\ \frac{1}{6}u(\frac{1}{4}) + \frac{1}{3}u(\frac{1}{3}) + \frac{1}{5}u(\frac{1}{5}) = \int_0^{\frac{1}{30}} \frac{(\frac{1}{30} - s)^{\frac{4}{5}}}{\Gamma(\frac{9}{5})} u(s) ds, \end{cases} \quad (4.18)$$

où  $q = \frac{9}{5}, k = \frac{1}{11}, a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{5}, \xi_1 = \frac{1}{4}, \xi_2 = \frac{1}{3}, \xi_3 = \frac{1}{2}, \eta = \frac{1}{30}, \beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{3}{4}, \beta = 1, (\phi u)(t) = \int_0^t \frac{e^{-2(s-t)}}{2} u(s) ds$  et  $(\psi u)(t) = \int_0^t \frac{e^{-3(s-t)}}{2} u(s) ds$  avec  $\gamma_0 = \frac{e^2 - 1}{4}$  et  $\lambda_0 = \frac{e^3 - 1}{6}$ .

Nous illustrons maintenant les résultats obtenus en choisissant différentes valeurs de  $f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}u(t), {}^c D^{\frac{3}{4}}u(t))$ . Considérons d'abord :

$$\begin{aligned} f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}u(t), {}^c D^{\frac{3}{4}}u(t)) &= \frac{e^{-\pi t}(1 + \sin^2(\pi t))|u(t)|}{6(t+6)^3(1 + |u(t)|)} \\ &+ \frac{e^{-\pi t} \sin(\pi t)}{7(1+t^2)} \left( (\phi u)(t) + \frac{|{}^c D^{\frac{1}{2}}u(t)|}{1 + |{}^c D^{\frac{1}{2}}u(t)|} \right) \\ &+ \frac{1 + \sin^2(\pi t)}{8(1+t^2)} \left( (\psi u)(t) + \frac{|{}^c D^{\frac{3}{4}}u(t)|}{1 + |{}^c D^{\frac{3}{4}}u(t)|} \right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &|f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}u(t), {}^c D^{\frac{3}{4}}u(t)) - f(t, v(t), (\phi v)(t), (\psi v)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}v(t), {}^c D^{\frac{3}{4}}v(t))| \\ &\leq \frac{1}{6}|u(t) - v(t)| + \frac{1}{7}|\phi u(t) - \phi v(t)| + \frac{1}{8}|\psi u(t) - \psi v(t)| + \frac{1}{7}|{}^c D^{\frac{1}{2}}u(t) - {}^c D^{\frac{1}{2}}v(t)| \\ &+ \frac{1}{8}|{}^c D^{\frac{3}{4}}u(t) - {}^c D^{\frac{3}{4}}v(t)|. \end{aligned}$$

Enfin nous avons  $\zeta = \frac{1}{6}, \Delta \approx -2.2581 \times 10^{-2}, \Delta_1 \approx 6.0286 \times 10^{-2}, P \approx 3.8483, \tilde{P} \approx 3.6761, \omega \approx 0.96303$ .

Donc  $\left(P + \tilde{P} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_i)}\right) \Delta_1 \omega = 0.69970 < 1$ . Par conséquent, d'après le théorème 4.3 le problème ((4.18)) a au moins une solution sur  $[0, 1]$ .

Ensuite, nous montrons l'applicabilité du théorème 4.4 avec la fonction non linéaire  $f$  donnée par :

$$f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}} u(t), {}^c D^{\frac{3}{4}} u(t)) = \frac{e^{-\pi t}(2 + |u(t)|)}{t + 2 + 2|u(t)|} e^{3t} \quad (4.19)$$

$$+ \frac{e^{-t} \sin(\pi t)}{1 + t^2} \left( \frac{|(\phi u)(t)|}{1 + |(\phi u)(t)|} + \frac{|{}^c D^{\frac{1}{2}} u(t)|}{1 + |{}^c D^{\frac{1}{2}} u(t)|} \right) e^{3t}$$

$$+ \frac{1 + \sin^2 t}{1 + t^2} \left( \frac{|(\psi u)(t)|}{1 + |(\psi u)(t)|} + \frac{|{}^c D^{\frac{3}{4}} u(t)|}{1 + |{}^c D^{\frac{3}{4}} u(t)|} \right) e^{3t}.$$

C'est facile de voir  $|f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}} u(t), {}^c D^{\frac{3}{4}} u(t))| \leq 7e^{3t} = \mu(t)$ . Ensuite, par la condition  $(H_2)$  avec  $\mu(t) = 7e^{3t}$ . En conséquence, la conclusion du théorème 4.3 implique que le problème ((4.18)) admet au moins une solution sur  $[0, 1]$ .

**Exemple 4.3.** Considérons le problème aux limite fractionnaire à quatre points suivant :

$$\begin{cases} ({}^c D^{\frac{9}{5}} + \frac{1}{11} {}^c D^{\frac{4}{5}}) u(t) = f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}} u(t), {}^c D^{\frac{3}{4}} u(t)), & t \in [0, 1] \\ u(0) = 0, \\ \frac{1}{6} u\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} u\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} u\left(\frac{1}{5}\right) = \int_0^{\frac{1}{30}} \frac{(\frac{1}{30} - s)^{\frac{4}{5}}}{\Gamma(\frac{9}{5})} u(s) ds, \end{cases} \quad (4.20)$$

où  $q = \frac{9}{5}, k = \frac{1}{11}, a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{5}, \xi_1 = \frac{1}{4}, \xi_2 = \frac{1}{3}, \xi_3 = \frac{1}{2}, \eta = \frac{1}{30}, \beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{3}{4}, \beta = 1$ , avec Il s'ensuit que :

$$f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}} u(t), {}^c D^{\frac{3}{4}} u(t)) = \frac{e^{-\cos^2 u(t)}}{3 + \cos u(t)} + \frac{e^{-\pi t} \sin(\pi t)}{2 + \cos(\pi t)} \left( \frac{|(\phi u)(t)|}{1 + |(\phi u)(t)|} + \frac{|{}^c D^{\frac{1}{2}} u(t)|}{1 + |{}^c D^{\frac{1}{2}} u(t)|} \right)$$

$$+ \frac{1}{2 + \sin(\pi t)} \left( \frac{|(\psi u)(t)|}{1 + |(\psi u)(t)|} + \frac{|{}^c D^{\frac{3}{4}} u(t)|}{1 + |{}^c D^{\frac{3}{4}} u(t)|} \right),$$

nous avons  $|f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}} u(t), {}^c D^{\frac{3}{4}} u(t))| \leq \frac{9}{2}$ . Donc, d'après le théorème 4.4, le problème ((4.20)) admet au moins une solution sur  $[0, 1]$ .

## Existence et Unicité des Solutions pour les équations aux Dérivées Partielles Fractionnaires d'ordre Supérieur avec des Conditions Purement Intégrales

---

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie un problème avec condition purement intégrales pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires d'ordre supérieur.

On démontre l'existence et l'unicité de la solution. La démonstration est basée sur une estimation a priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

### 5.2 Position du problème

Dans le domaine rectangulaire

$$Q = (0, 1) \times (0, T), \quad 0 \leq T < \infty,$$

nous considérons l'équation aux dérivées partielles différentielles fractionnaires :

$$Lu = {}^c \partial_t^{\alpha+1} u + (-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} + (-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} = f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T) \quad (5.1)$$

À l'équation (5.1) on associe les conditions initiales,

$$\ell_1 u = u(x, 0) = \varphi(x), \quad \ell_2 u = u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (5.2)$$

et les conditions intégrales,

$$\int_0^1 x^i u(x, t) dx = 0, \quad i = \overline{0, 2m-1}, \quad t \in (0, T). \quad (5.3)$$

où  $\varphi, \psi$  et  $f$  sont des fonctions connues.

où les fonctions  $a(t), b(t)$  et ses dérivées sont bornées sur l'intervalle  $[0, T]$  : satisfait aux conditions

$$c_2 \leq a(t) \leq c_1, \quad c_4 \leq b(t) \leq c_3, \quad c_6 \leq b'(t) \leq c_5, \quad c_8 \leq a'(t) \leq c_7, \quad c_{10} \leq a''(t) \leq c_9, \quad (5.4)$$

où  $c_i, (i = 1, \dots, 10)$  sont des constantes positives.

Du problème (5.1) – (5.3) on associe l'opérateur  $\Xi = (L, \ell_1, \ell_2)$ , défini de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$ , où  $\mathbb{E}$  est un espace de Banach constitué des fonctions  $u \in L_2(Q)$ , vérifiant les conditions (5.2) et (5.3), et muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{E}}^2 = \sup_{0 \leq t \leq T} (D^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_x^m u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \|u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^1 u^2 dx) \quad (5.5)$$

et  $\mathbb{F}$  est l'espace de Hilbert constitué des fonctions vectorielles  $\omega = (f, \varphi, \psi)$ , et muni de la norme

$$\|\omega\|_{\mathbb{F}}^2 = \|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|f\|_{L^2(Q)}^2, \quad (5.6)$$

ce qui est fini.

Le domaine  $D(\Xi)$  de l'opérateur  $\Xi$  est l'ensemble de toutes les fonctions  $u$  telles que  $\left\{ \partial_t^{\alpha+1} u, \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t}, \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} \right\} \in L^2(Q)$  et satisfait (5.3). On montre l'existence et l'unicité de la solution forte du problème (5.2) – (5.3), la démonstration est basée sur une estimation a priori et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème considéré.

Pour  $0 < \alpha < 1$ , la dérivée de **Caputo** est définie comme suit

Dérivée au sens de **Caputo à gauche**

$${}^c \partial_t^{\alpha+1} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_{\tau\tau}(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad t > 0$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction de Gamma.

### 5.3 Estimation a priori

**Théorème 5.1.** *Pour toute fonction  $u \in D(\Xi)$ , on a l'estimation a priori*

$$\|u\|_{\Xi} \leq \kappa \|\Xi u\|_{\mathbb{F}}, \quad (5.7)$$

où  $\kappa$  est une constante indépendante de  $u$ , i.e.  $\kappa = \kappa(\eta, \delta, \rho)$

*Démonstration.* Multiplions l'équation (5.1) par  $Mu = (-1)^m \mathfrak{S}_x^{2m} u_t$ , on obtient

$$\begin{aligned} (-1)^m ({}^c \partial_t^{\alpha+1} u, \mathfrak{S}_x^{2m} u_t)_{L^2(0,1)} + (a(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t}, \mathfrak{S}_x^{2m} u_t)_{L^2(0,1)} \\ + (b(t) \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, \mathfrak{S}_x^{2m} u_t)_{L^2(0,1)} = (-1)^m (f, \mathfrak{S}_x^{2m} u_t)_{L^2(0,1)}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

L'intégration par parties de chaque terme du côté gauche de l'équation (5.8) et les conditions (5.3), donne

$$\begin{aligned} (-1)^m ({}^c \partial_t^{\alpha+1} u, \mathfrak{S}_x^{2m} u_t)_{L^2(0,1)} &= (-1)^m ({}^c \partial_t^{\alpha} u_t, \mathfrak{S}_x^{2m} u_t)_{L^2(0,1)} \\ &= ({}^c \partial_t^{\alpha} \mathfrak{S}_x^m u_t, \mathfrak{S}_x^m u_t)_{L^2(0,1)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} (a(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t}, \mathfrak{S}_x^{2m} u_t)_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 a(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} \mathfrak{S}_x^{2m} u_t dx \\ &= \int_0^1 a(t) \frac{\partial^{2m} u_t}{\partial x^{2m}} \mathfrak{S}_x^{2m} u_t dx \\ &= a(t) \|u_t\|_{L^2(0,1)}^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} (b(t) \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, \mathfrak{S}_x^{2m} u_t)_{L^2(0,1)} &= b(t) \int_0^1 \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} \mathfrak{S}_x^{2m} u_t dx \\ &= b(t) \int_0^1 u u_t dx. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Substitutions (5.9), (5.10) et (5.11) dans (5.8), donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 ({}^c \partial_t^\alpha \mathfrak{S}_x^m u_t)(\mathfrak{S}_x^m u_t) dx + a(t) \|u_t\|_{L^2(0,1)}^2 + b(t) \int_0^1 uu_t dx \\ = (-1)^m \int_0^1 f(x, t) \mathfrak{S}_x^{2m} u_t dx. \end{aligned} \quad (5.12)$$

En utilisant les lemmes 1.2 et 1.3 et l'inégalité de Cauchy avec  $\epsilon$  l'identité (5.12) se réduit à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 ({}^c \partial_t^\alpha \mathfrak{S}_x^m u_t)^2 dx + a(t) \|u_t\|_{L^2(0,1)}^2 + b(t) \int_0^1 uu_t dx \\ \leq \frac{1}{2\epsilon} \int_0^1 f^2 dx + \frac{\epsilon}{2^{m+1}} \int_0^1 (\mathfrak{S}_x^m u_t)^2 dx. \end{aligned} \quad (5.13)$$

En remplaçant  $t$  par  $\tau$ , intégrant par rapport à  $\tau$  de zéro à  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 ({}^c \partial_\tau^\alpha \mathfrak{S}_x^m u_\tau)^2 dx d\tau + \int_0^t a(\tau) \|u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^t \int_0^1 b(\tau) uu_\tau dx d\tau \\ \leq \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \int_0^1 f^2 dx d\tau + \frac{\epsilon}{2^{m+1}} \int_0^t \int_0^1 (\mathfrak{S}_x^m u_\tau)^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Le troisième terme de côté gauche peut être évalué comme :

$$\int_0^1 \int_0^t b(\tau) uu_\tau dx d\tau = \frac{1}{2} \int_0^1 b(\tau) u^2 dx - \frac{1}{2} b(0) \int_0^1 \varphi^2(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^t b' u^2 dx d\tau. \quad (5.15)$$

D'après, l'inégalité (5.14) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 ({}^c \partial_\tau^\alpha \mathfrak{S}_x^m u_\tau)^2 dx d\tau + \int_0^t a(\tau) \|u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^1 b(\tau) u^2 dx \\ \leq \frac{1}{2} b(0) \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 b' u^2 dx d\tau + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \int_0^1 f^2 dx d\tau + \frac{\epsilon}{2^{m+1}} \int_0^t \int_0^1 (\mathfrak{S}_x^m u_\tau)^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (5.16)$$

De même, on a :

$$\int_0^t \int_0^1 ({}^c \partial_\tau^\alpha \mathfrak{S}_x^m u_\tau)^2 dx d\tau = D^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_x^m u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 - \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|\mathfrak{S}_x^m \psi\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (5.17)$$

En substitution l'identité (5.17) et les conditions (5.4) dans l'in'egalité (5.16), on obtient

$$\begin{aligned} & D^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_x^m u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \|u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^1 u^2 dx \\ & \leq \eta \left( \int_0^1 \varphi^2 dx + \int_0^1 \int_0^t u^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 f^2 dx d\tau + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \int_0^1 (\mathfrak{S}_x^m u_\tau)^2 dx d\tau \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

où

$$\eta = \frac{\max\left(\frac{1}{2e}, \frac{\epsilon}{2^{m+1}}, \frac{c_3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{T^{1-\alpha} 2^{-m}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\right)}{\min\left(\frac{1}{2}, c_2, c_4\right)}$$

(5.19)

D'après le lemme 1.4, on pose

$$\varphi(t) = \int_0^1 \int_0^t u^2 dx d\tau, \quad \varphi'(t) = \int_0^1 u^2 dx = \|u\|_{L^2(0,1)}^2, \quad \varphi(0) = 0, \quad (5.20)$$

alors ça donne :

$$\int_0^1 \int_0^t u^2 dx d\tau \leq e^{\eta T} T \eta \left( \int_0^1 \varphi^2(x) dx + \int_0^1 \int_0^t f^2 dx d\tau + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \int_0^t (\mathfrak{S}_x^m u_\tau)^2 dx d\tau \right). \quad (5.21)$$

Par conséquent, l'in'egalité (5.18) se transforme à :

$$\begin{aligned} & D^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_x^m u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \|u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^1 u^2 dx \\ & \leq \delta \left( \int_0^1 \varphi^2 dx + \int_0^1 \int_0^t f^2 dx d\tau + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \int_0^t (\mathfrak{S}_x^m u_\tau)^2 dx d\tau \right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

où

$$\delta = \max(\eta, \eta^2 T e^{\eta T}). \quad (5.23)$$

Maintenant, soit

$$Z(t) = \int_Q (\mathfrak{S}_x^m u_\tau)^2 dx d\tau = \int_0^t \|\mathfrak{S}_x^m u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau, \quad \partial^\alpha Z(t) = D^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_x^m u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2.$$

D'après le lemme 1.5, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{Q^T} (\mathfrak{S}_x^m u_\tau)^2 dx d\tau \tag{5.24} \\
 & \leq \delta \Gamma(\alpha) E_{\alpha, \alpha}(\delta t^\alpha) \left( \frac{T}{\alpha \Gamma(\alpha)} \|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{T}{\alpha \Gamma(\alpha)} \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 \right. \\
 & \quad \left. + D^{-\alpha-1} \|f\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \\
 & \leq \delta \Gamma(\alpha) E_{\alpha, \alpha}(\delta t^\alpha) \max \left\{ 1, \frac{T}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right\} \left( D^{-\alpha-1} \|f\|_{L^2(0,1)}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

En substitution l'inégalité (5.24) dans (5.22), on obtient

$$\begin{aligned}
 & D^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_x^m u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \|u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^1 u^2 dx \tag{5.25} \\
 & \leq \rho \left( \int_0^1 \varphi^2 dx + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \int_0^t f^2 dx d\tau + D_\tau^{-\alpha-1} \|f\|_{L^2(0,1)}^2 \right),
 \end{aligned}$$

où

$$\rho = \delta \max \left( \delta, \delta^2 \Gamma(\alpha), E_{\alpha, \alpha}(\delta t^\alpha) \max \left\{ 1, \frac{T}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right\} \right). \tag{5.26}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 D_t^{-\alpha-1} \|f\|_{L^2(0,1)}^2 & \leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \|f\|^2 d\tau \tag{5.27} \\
 & \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^T \|f\|^2 d\tau.
 \end{aligned}$$

Ensuite, l'inégalité (5.25), devient

$$\begin{aligned}
 & D^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_x^m u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \|u_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^1 u^2 dx \tag{5.28} \\
 & \leq \kappa \left( \int_0^1 \varphi^2 dx + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \int_0^t f^2 dx d\tau \right).
 \end{aligned}$$

Comme le côté droit de (5.28) est indépendant de  $\tau$ , on passe au supremum du côté gauche par rapport à  $\tau$  sur l'intervalle  $[0, T]$ , on obtient l'inégalité désirée, où

$$\kappa = \sigma \left( 1 + \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right).$$

Ceci complète la preuve. ■

**Proposition 5.1.** *L'opérateur  $\Xi$  de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$  est fermable.*

Soit  $\overline{\Xi}$  la fermeture de  $\Xi$ , et  $D(\overline{\Xi})$  le domaine de définition de  $\overline{\Xi}$

**Définition 5.1.** *La solution de l'équation*

$$\overline{\Xi}u = F$$

*est dite solution forte du problème (5.1)-(5.3)*

Le théorème 5.1 est valide pour une solution forte, c'est à dire on a l'inégalité

$$\|u\|_{\mathbb{E}} \leq \|\overline{\Xi}u\|_{\mathbb{F}} \quad (5.29)$$

Par conséquent, cette inégalité entraîne les corollaires suivants :

**Corollaire 5.1.** *L'ensemble des valeurs  $R(\overline{\Xi})$  de l'opérateur  $\overline{\Xi}$  est égale à la fermeture  $\overline{R(\Xi)}$  de  $R(\Xi)$ .*

**Corollaire 5.2.** *Si le problème (5.1)-(5.3) a une solution, alors cette solution est unique et dépend continûment de  $(f, \varphi, \psi) \in \mathbb{F}$ .*

## 5.4 Résolvabilité du problème

Pour montrer l'existence de solutions, on doit prouver que  $R(\Xi)$  soit dense dans  $\mathbb{F}$  pour tout  $u \in \mathbb{E}$  et pour tout arbitraire  $F = (f, \varphi, \psi) \in \mathbb{F}$  :

**Théorème 5.2.** *Si les conditions du théorème 5.1 sont satisfaites. Alors, pour chaque  $\omega = (f, \varphi, \psi) \in \mathbb{F}$ , le problème (5.1)-(5.3) admettra une solution forte unique  $u = \overline{\Xi}^{-1}\omega = \Xi^{-1}\omega$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, nous montrons la densité de l'ensemble  $R(\Xi)$  dans l'espace  $\mathbb{F}$  pour le cas particulier où  $D(\Xi) \equiv \mathbb{E}$  est réduite à  $D_0(\Xi)$ , où

$D_0(\Xi) = \{u, u \in D(\Xi), \ell_1 u = \ell_2 u = 0\}$ . Dans ce but, on démontre la proposition suivante.

■

**Proposition 5.2.** *Soit les conditions du théorème 5.2 remplies. Si, pour  $\omega \in L^2(Q)$  et pour tout  $u \in D_0(\Xi)$ , on a*

$$(Lu, \omega)_{L^2(Q)} = 0, \quad (5.30)$$

*alors  $\omega$  s'annule presque partout dans  $Q$ .*

*Démonstration.* Identité (5.30) est équivalent à

$$\left( {}^c \partial_t^{\alpha+1} u + (-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} + (-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, \varpi \right)_{L^2(Q)} = 0. \quad (5.31)$$

Puisque (5.31) est valable pour toutes les fonctions  $u \in D_0(\Xi)$ , il peut être exprimé sous la forme :

$$u(x, t) = \mathfrak{I}_t^2 z = \int_0^t \int_0^s z(x, z) dz ds.$$

où  $z(x, t)$  Vérifie les conditions aux limites et des conditions initiales dans (5.1) et de telle sorte que  $z, z_x, \mathfrak{I}_t z, \mathfrak{I}_t \mathfrak{I}_x^{2m} z, \mathfrak{I}_t^2 z$  et  $\partial_t^{\alpha+1} z \in L^2(Q)$ , donc l'équation (5.31) devient,

$$\int_0^T \left( {}^c \partial_t^{\alpha+1} \mathfrak{I}_t^2 z + (-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} \mathfrak{I}_t^2 z}{\partial x^{2m} \partial t} + (-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} \mathfrak{I}_t^2 z}{\partial x^{2m}}, \varpi \right)_{L^2(0,1)} = 0. \quad (5.32)$$

Maintenant, nous exprimons  $\varpi$  en termes de  $z$  comme suit

$$\varpi(x, t) = \mathfrak{I}_t z + (-1)^m \mathfrak{I}_x^{2m} \mathfrak{I}_t z. \quad (5.33)$$

En remplaçant  $\varpi$  dans l'équation (5.32) et en appliquant l'intégration par parties, chaque terme peut être estimé comme

$$\left( {}^c \partial_t^{\alpha+1} \mathfrak{I}_t^2 z, \mathfrak{I}_t z \right)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 {}^c \partial_t^\alpha \mathfrak{I}_t z \mathfrak{I}_t z dx \geq \frac{1}{2} {}^c \partial_t^\alpha \|\mathfrak{I}_t z\|_{L^2(0,1)}^2, \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \left( {}^c \partial_t^{\alpha+1} \mathfrak{I}_t^2 z, (-1)^m \mathfrak{I}_x^{2m} \mathfrak{I}_t z \right)_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 {}^c \partial_t^\alpha \mathfrak{I}_x^m (\mathfrak{I}_t z) \mathfrak{I}_x^m (\mathfrak{I}_t z) dx \\ &\geq \frac{1}{2} {}^c \partial_t^\alpha \|\mathfrak{I}_x^m \mathfrak{I}_t z\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\left( (-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} (\mathfrak{I}_t^2 z)}{\partial x^{2m} \partial t}, \mathfrak{I}_t z \right)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 a(t) \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathfrak{I}_t z) \right)^2 dx, \quad (5.36)$$

$$\left( (-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} (\mathfrak{I}_t^2 z)}{\partial x^{2m} \partial t}, (-1)^m \mathfrak{I}_x^{2m} \mathfrak{I}_t z \right)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 a(t) (\mathfrak{I}_t z)^2 dx, \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} ((-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} (\mathfrak{S}_t^2 z)}{\partial x^{2m}}, \mathfrak{S}_t z)_{L^2(0,1)} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 b(t) \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathfrak{S}_t^2 z) \right)^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 b'(t) \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathfrak{S}_t^2 z) \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} ((-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} (\mathfrak{S}_t^2 z)}{\partial x^{2m}}, (-1)^m \mathfrak{S}_x^{2m} \mathfrak{S}_t z)_{L^2(0,1)} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 b(t) (\mathfrak{S}_t^2 z)^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 b'(t) (\mathfrak{S}_t^2 z)^2 dx. \end{aligned} \quad (5.39)$$

En substitution (5.34)-(5.39) dans (5.32), on remplace  $t$  par  $\tau$ , intégrant par rapport à  $\tau$  de zéro à  $t$  et en utilisant les conditions (5.4).

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_t z\|_{L^2(0,1)}^2 + D_t^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_x^m \mathfrak{S}_t z\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \int_0^1 \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} \mathfrak{S}_\tau z \right)^2 dx d\tau \\ + \int_0^t \int_0^1 (\mathfrak{S}_\tau z)^2 dx d\tau + \int_0^1 \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathfrak{S}_\tau^2 z) \right)^2 dx + \int_0^1 (\mathfrak{S}_\tau^2 z)^2 dx \\ \leq \eta_1 \left( \int_0^1 \int_0^t \left( \frac{\partial^m (\mathfrak{S}_\tau^2 z)}{\partial x^m} \right)^2 dx d\tau + \int_0^1 \int_0^t (\mathfrak{S}_\tau^2 z)^2 dx d\tau \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

où

$$\eta_1 = \frac{c_5}{\min(1, 2c_2, c_4)}. \quad (5.41)$$

D'après le lemme 1.3, on obtient

$$\varphi_1(t) = \int_0^t \int_0^1 \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathfrak{S}_\tau^2 z) \right)^2 dx d\tau, \quad \varphi_1'(t) = \int_0^1 \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathfrak{S}_\tau^2 z) \right)^2 dx, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad (5.42)$$

donc

$$\varphi_1(t) = \int_0^t \int_0^1 \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathfrak{S}_\tau^2 z) \right)^2 dx d\tau \leq \eta_1 T e^{T\eta_1} \int_0^t \int_0^1 (\mathfrak{S}_\tau^2 z)^2 dx d\tau, \quad (5.43)$$

d'où (5.40), nous avons

$$D_t^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_t z\|_{L^2(0,1)}^2 + D_t^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_x^m \mathfrak{S}_t z\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \int_0^1 \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} \mathfrak{S}_\tau z \right)^2 dx d\tau \quad (5.44)$$

$$+ \int_0^t \int_0^1 (\mathfrak{S}_\tau z)^2 dx d\tau + \int_0^1 \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathfrak{S}_\tau^2 z) \right)^2 dx + \int_0^1 (\mathfrak{S}_\tau^2 z)^2 dx \leq \eta_2 \int_0^1 \int_0^t (\mathfrak{S}_\tau^2 z)^2 dx d\tau,$$

où

$$\eta_2 = \max(\eta_1^2 T e^{T\eta_1}, \eta_1). \quad (5.45)$$

D'après le lemme 1.3, on obtient

$$\varphi_2(t) = \int_0^1 \int_0^t (\mathfrak{S}_\tau^2 z)^2 dx d\tau, \quad \varphi_2'(t) = \int_0^1 (\mathfrak{S}_\tau^2 z)^2 dx, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad (5.46)$$

donc

$$\varphi_2(t) = \int_0^1 \int_0^t (\mathfrak{S}_\tau^2 z)^2 dx d\tau \leq 0. \quad (5.47)$$

Par conséquent (5.44) se transforme à

$$D_t^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_t z\|_{L^2(0,1)}^2 + D_t^{\alpha-1} \|\mathfrak{S}_x^m \mathfrak{S}_t z\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \int_0^1 \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} \mathfrak{S}_\tau z \right)^2 dx d\tau \quad (5.48)$$

$$+ \int_0^t \int_0^1 (\mathfrak{S}_\tau z)^2 dx d\tau + \int_0^1 \left( \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathfrak{S}_\tau^2 z) \right)^2 dx + \int_0^1 (\mathfrak{S}_\tau^2 z)^2 dx \leq 0,$$

Nous mettons  $z = 0$  dans (5.33) qui donne  $\bar{\omega} = 0$  dans  $L^2(Q)$ . Cela fait la preuve de la proposition 5.2.

Maintenant, passant à la démonstration du théorème 5.2. A cette fin, il suffit de prouver que  $R(\Xi)$  est dense dans  $\mathbb{F}$ . On suppose que, pour certain  $(F_1, \varphi_1, \varphi_2) \in R(\Xi)^\perp$ , on obtient

$$\int_0^T (Lu, F_1)_{L^2(0,1)} ds + (\ell_1 u, \varphi_1)_{L^2(0,1)} + (\ell_2 u, \varphi_2)_{L^2(0,1)} = 0, \quad (5.49)$$

Puis, on doit prouver que  $F_1 = 0, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ . On suppose  $u \in D_0(\Xi)$  dans (5.49), on obtient

$$\int_0^T (Lu, F_1)_{L^2(0,1)} ds = 0, \quad \forall u \in D_0(\Xi). \quad (5.50)$$

De la proposition 2.1, on déduit que  $F_1 = 0$  a.e in  $Q$ . Ainsi, (5.49) prend la forme

$$(\ell_1 u, \varphi_1)_{L^2(0,1)} + (\ell_2 u, \varphi_2)_{L^2(0,1)} = 0, \quad \forall u \in D(\Xi). \quad (5.51)$$

Puisque les ensembles des valeurs des opérateurs  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont indépendants et les ensembles des valeurs  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont partout denses dans  $L^2(0,1)$ , alors on trouve que  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ . Donc  $F_1 = 0, \varphi_1 = 0$ , et  $\varphi_2 = 0$  ce qui implique que  $\overline{R(\Xi)} = \mathbb{F}$ . Ce qui achève la démonstration du théorème 5.2. ■

## 5.5 Méthode de perturbation de l'homotopie avec transformation de Laplace (LT-HPM)

En appliquant la transformation de Laplace aux deux cotés de l'équation (5.1), pour  $1 < \alpha < 2$ , sous la forme suivant :

$$L\{u(x, t)\} = -s^{-\alpha-1} L\left\{(-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} + (-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} - f(x, t)\right\} + s^{-1} \varphi(x) + s^{-2} \psi(x). \quad (5.52)$$

En prenant la transformation de Laplace inverse  $L^{-1}$  de l'équation (5.52), on trouve

$$u(x, t) = -L^{-1}\left\{s^{-\alpha-1} L\left\{(-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} + (-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} - f(x, t)\right\}\right\} + \varphi(x) + t\psi(x). \quad (5.53)$$

D'après la technique HPM, pour déterminer la solution approchée de l'équation (5.53) nous construisons une homotopie proposée par Madani et al [166], sous la forme suivant :

$$u(x, t) - \varphi(x) - t\psi(x) = -P\left[L^{-1}\left\{s^{-\alpha-1} L\left\{(-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m} \partial t} + (-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} - f(x, t)\right\}\right\}\right]. \quad (5.54)$$

La solution de l'équation (5.54) s'écrit sous la forme d'une série comme suit :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} P^i u_i(x, t), \quad (5.55)$$

où  $u_i(x, t); i = 0, 1, 2, \dots$  sont des fonctions qui devraient être déterminées. En substituant (5.55) dans (5.54), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} P^j u_j(x, t) - \varphi(x) - t\psi(x) &= -P\left[L^{-1}\left\{s^{-\alpha-1} L\left\{(-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} P^j u_j(x, t)\right)}{\partial x^{2m} \partial t} \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. (-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} \left(\sum_{j=0}^{\infty} P^j u_j(x, t)\right)}{\partial x^{2m}} - f(x, t)\right\}\right\}\right]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de  $P$  dans (5.56), on trouve :

$$P^0 : u_0(x, t) = \varphi(x) + t\psi(x),$$

$$P^1 : u_1(x, t) = -L^{-1}\left\{s^{-\alpha-1} L\left\{(-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} u_0}{\partial x^{2m} \partial t} + (-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} u_0}{\partial x^{2m}} - f(x, t)\right\}\right\},$$

$$P^2 : u_2(x, t) = -L^{-1} \left\{ s^{-\alpha-1} L \left\{ (-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} u_1}{\partial x^{2m} \partial t} + (-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} u_1}{\partial x^{2m}} \right\} \right\},$$

.....

$$P^{n+1} : u_{n+1}(x, t) = -L^{-1} \left\{ s^{-\alpha-1} L \left\{ (-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m+1} u_n}{\partial x^{2m} \partial t} + (-1)^m b(t) \frac{\partial^{2m} u_n}{\partial x^{2m}} \right\} \right\}, \quad n \geq 1.$$

lorsque  $P \rightarrow 1$ , (5.55) devient la solution approximative de l'équation (5.1), c-à-d

$$u(x, t) \cong H_n(x, t) = \sum_{j=0}^n u_j(x, t), \tag{5.57}$$

**Exemple 5.1.**

$$f(x, t) = \left( 2t^{\frac{3}{2}} - \frac{3\sqrt{\pi}}{16} t^4 \right) e^x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad m = 0,$$

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$a(t) = -t, \quad b(t) = 1,$$

la solution exacte est :  $u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{16} t^4 e^x$ , on obtient :

$$u_0(x, t) = 0,$$

$$u_1(x, t) = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{16} t^4 - \frac{64}{15015} t^{\frac{13}{2}} \right) e^x,$$

$$u_2(x, t) = \left( \frac{64}{15015} t^{\frac{13}{2}} - \frac{11\sqrt{\pi}}{161280} t^9 \right) e^x,$$

$$u_3(x, t) = \left( \frac{11\sqrt{\pi}}{161280} t^9 - \frac{8192}{3194284275} t^{\frac{23}{2}} \right) e^x,$$

$$u_4(x, t) = \left( \frac{8192}{3194284275} t^{\frac{23}{2}} - \frac{\sqrt{\pi}}{41932800} t^{14} \right) e^x,$$

$$u_5(x, t) = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{41932800} t^{14} - \frac{131072}{234308649526875} t^{\frac{33}{2}} \right) e^x,$$

$$u_6(x, t) = \left( \frac{131072}{234308649526875} t^{\frac{33}{2}} - \frac{31\sqrt{\pi}}{9001746432000} t^{19} \right) e^x,$$

$$u_7(x, t) = \left( \frac{31\sqrt{\pi}}{9001746432000} t^{19} - \frac{31}{93768192000} t^{\frac{5}{2}} \right) e^x,$$

pour  $n = 7$

$$u(x, t) \cong H_7(x, t) = \sum_{i=0}^7 u_i(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{16} t^4 e^x - \frac{31}{93768192000} t^{\frac{5}{2}} e^x.$$

Pour  $t \in [0.2, 2]$ , nous concluons  $u_{exa}$ ,  $u_{hpm}$  et Erreur relative =  $\frac{u_{exa} - u_{hpm}}{u_{exa}}$ .

$t$	$u_{exa}$	$u_{hpm}$	Erreur relative
0.2	$0.0001772453 e^x$	$(0.0001\sqrt{\pi} - 5.9140 \times 10^{-12})e^x$	$3.3366 \times 10^{-8}$
0.4	$0.0016\sqrt{\pi} e^x$	$(0.00016\sqrt{\pi} - 3.3455 \times 10^{-11})e^x$	$1.179664 \times 10^{-8}$
0.6	$0.0081\sqrt{\pi} e^x$	$0.0081\sqrt{\pi} - 9.219 \times 10^{-11}$	$0.6413529 \times 10^{-8}$
0.8	$0.0256\sqrt{\pi} e^x$	$(0.0256\sqrt{\pi} - 1.8925 \times 10^{-10})e^x$	$0.4170829 \times 10^{-8}$
1	$0.1107783657 e^x$	$0.1107783654 e^x$	$0.270811 \times 10^{-8}$
1.2	$0.2297100191 e^x$	$(0.1296\sqrt{\pi} - 5.2151 \times 10^{-8})e^x$	$0.227029714 \times 10^{-8}$
1.4	$0.42556616 e^x$	$(0.2401\sqrt{\pi} - 7.667 \times 10^{-10})e^x$	$0.180160001 \times 10^{-8}$
1.6	$0.7259970973 e^x$	$(0.4096\sqrt{\pi} - 1.705 \times 10^{-9})e^x$	$0.14745 \times 10^{-8}$
1.8	$1.1629069716 e^x$	$(0.6561\sqrt{\pi} - 1.4371 \times 10^{-9})e^x$	$0.1235782 \times 10^{-8}$
2	$1.7724538504 e^x$	$0.19 \times 10^{-8} e^x$	$0.10719602 \times 10^{-8}$

**Exemple 5.2.**

$$f(x, t) = \left( \frac{3\sqrt{\pi}}{4} - \frac{3\sqrt{t}}{2} - t^{\frac{3}{2}} \right) e^x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad m = 1,$$

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$a(t) = 1, \quad b(t) = 1,$$

la solution exacte est :  $u(x, t) = t^{\frac{3}{2}} e^x$ , on obtient  
 $u_0(x, t) = 0$ ,

$$u_1(x, t) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} e^x \left( -\frac{t^3}{6} + \frac{8}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{24} t^4 \right),$$

$$u_2(x, t) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} e^x \left( \frac{-128}{135135\sqrt{\pi}} t^{\frac{13}{2}} + \frac{32}{945\sqrt{\pi}} t^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{24} t^4 + \frac{1}{120} t^5 \right),$$

$$u_3(x, t) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} e^x \left( \frac{256}{2027025\sqrt{\pi}} t^{\frac{15}{2}} - \frac{64}{10395\sqrt{\pi}} t^{\frac{11}{2}} + \frac{1}{720} t^6 + \frac{1}{5040} t^7 - \frac{1}{40320} t^8 - \frac{1}{362880} t^9 \right),$$

pour  $n = 3$

$$u(x, t) \cong H_3(x, t) = \sum_{i=0}^3 u_i(x, t) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} e^x \left( -\frac{t^3}{6} + \frac{8}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{24} t^4 + \frac{-128}{135135\sqrt{\pi}} t^{\frac{13}{2}} \right. \\ \left. + \frac{32}{945\sqrt{\pi}} t^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{24} t^4 + \frac{1}{120} t^5 + \frac{256}{2027025\sqrt{\pi}} t^{\frac{15}{2}} \right. \\ \left. - \frac{64}{10395\sqrt{\pi}} t^{\frac{11}{2}} + \frac{1}{720} t^6 + \frac{1}{5040} t^7 - \frac{1}{40320} t^8 - \frac{1}{362880} t^9 \right).$$

Pour  $t \in [0.2, 2]$ , nous concluons  $u_{exa}$ ,  $u_{hpm}$  et Erreur relative =  $\frac{u_{exa} - u_{hpm}}{u_{exa}}$ .

$t$	$u_{exa}$	$u_{hpm}$	Erreur relative
0.2	$0.0894427 e^x$	$0.0052269664 e^x$	0.9415607
0.4	$0.25298 e^x$	$0.02396229 e^x$	0.9052818
0.6	$0.464758 e^x$	$0.052531985 e^x$	0.8869691
0.8	$0.71554175 e^x$	$0.08211954 e^x$	0.885234454
1	$e^x$	$0.100979351 e^x$	0.89902064
1.2	$1.31453413 e^x$	$0.095421 e^x$	0.9274108
1.4	$1.6565023 e^x$	$0.050709 e^x$	0.9693879
1.6	$2.0238577 e^x$	$-0.048235 e^x$	1.0238331
1.8	$2.4149534 e^x$	$-0.21628 e^x$	1.0896
2	$2.8284271 e^x$	$-0.46752 e^x$	1.1653

# Conclusion Générale

À la fin de cette thèse, les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires, nous avons appliqué quelques théorèmes du point fixe pour établir l'existence et l'unicité des solutions dans un autre côté on montre l'existence et l'unicité par une estimation a priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

## Théorèmes du point fixe

---

### A.1 Théorème du point fixe

Le but de cette partie est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Schauder. Enfin nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii. .

### A.2 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit aussi le théorème de l'application contractante, c'est la base de la théorie du point fixe. Ce théorème garantit l'existence d'un point fixe unique pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui même.

**Définition A.1.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $T$  une application de  $X$  dans  $X$ . On dit que  $T$  est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive  $k$  telle que l'on ait :

$$\forall x, y \in X, d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

- Si  $k < 1$ , est appelée contraction.

**Théorème A.1.** Soit  $T$  une application continue sur un espace de Banach  $X$ . Alors les assertions suivantes sont vraies :

- 1) S'il existe  $x, y \in X$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x) = y,$$

alors,  $y$  est un point fixe de  $T$ , i.e.  $T(y) = y$ .

- 2) Si  $T(X)$  est un ensemble compact dans  $X$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $x_\varepsilon \in X$  tel que

$$\|T(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| < \varepsilon,$$

alors  $T$  admet un point fixe.

*Démonstration.* 1) Soit  $y_n = T^n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  si  $T$  est une application continue, alors  $T(y) = T(\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{n+1} = y$ ,

ce qui prouve la première assertion.

2) Supposons que les hypothèses de 2) sont remplies. Alors pour  $n = 1, 2, \dots$  on a  $x_n \in X$  tel que :

$$\|T(x_n) - x_n\| < \frac{1}{n}. \quad (\text{A.1})$$

$T(X)$  est un ensemble compact implique qu'il existe une sous suite convergente  $(T(x_{n_k}))_{n=1}^{+\infty}$  de  $(T(x_n))_{n=1}^{+\infty}$  de limite  $x$ . Alors en exploitant (A.1) et le fait que  $T$  est continue, on déduit que  $x$  est un point fixe de  $T$ . ■

**Théorème A.2. (Théorème du point fixe de Banach)[133]** Soient  $X$  un espace de Banach et  $T : X \rightarrow X$  une application contractante. Alors  $T$  admet un point fixe unique, autrement dit :

$$\exists ! x \in X : Tx = x.$$

*Démonstration. Existence*

Considérons la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{cases} x_n = T(x_n), & n \geq 1 \\ x \in X. \end{cases}$$

On démontre que  $(x_n)$  est une suite de Cauchy dans  $X$ .

Pour  $m < n$ , on a :

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_{m+1} - x_m\| + \|x_{m+2} - x_{m+1}\| + \dots + \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Puisque  $T$  est une contraction, alors :

$$\|x_{p+1} - x_p\| = \|Tx_p - Tx_{p-1}\| \leq k \|x_p - x_{p-1}\|, \quad \text{pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1}) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq k^m (1 + k + \dots + k^{n-m-1}) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{k^m}{1 - k} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

On déduit que la suite  $(x_n)_n$  est de Cauchy dans  $X$  qui est complet, donc  $(x_n)_n$  converge vers  $x$  dans  $X$ .

Puisque  $T$  est continue, alors :

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1}) = Tx.$$

Donc,  $x$  est un point fixe de  $T$ .

### Unicité

Supposons que  $Tx = x$  et  $Ty = y$ . Alors :

$$\|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|,$$

puisque  $k < 1$ , on déduit que  $\|x - y\| = 0$  c'est-à-dire  $x = y$ , d'où l'unicité du point fixe de  $T$ .

Le théorème du point fixe de Banach se généralise de la manière suivante : ■

**Théorème A.3.** *Soit  $T$  une application sur un espace de Banach  $X$  telle que  $T^N$  soit une contraction sur  $X$  pour un entier positif  $N$ . Alors  $T$  admet un point fixe unique.*

*Démonstration.* Le théorème du point fixe de Banach implique qu'il existe un point fixe pour  $T^N$ . Appelons  $x_0$  ce point fixe. Maintenant, il suffit de noter que :

$$\|T(x_0) - x_0\| = \|T^N(T(x_0)) - T^N(x_0)\| \leq k\|T(x_0) - x_0\|,$$

ceci implique que  $T(x_0) = x_0$  car  $0 < k < 1$ .

L'unicité est claire puisque un point fixe de  $T$  est également un point fixe pour  $T^N$ . ■

## A.3 Théorème du point fixe de Brouwer

Soient  $N \geq 1, R > 0$  et  $f \in C(B_R, B_R)$  avec  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq R\}$ . (on muni  $\mathbb{R}^N$  d'une norme notée  $\|\cdot\|$ .) Alors  $f$  admet un point fixe, c'est-à-dire il existe  $x \in B_R$  tel que :  $f(x) = x$ .

**Définition A.2.** *On dit qu'un espace topologique  $X$  a la propriété du point fixe si toute application continue  $T : X \rightarrow X$  possède un point fixe.*

**Théorème A.4. (Théorème du point fixe de Brouwer)**[76] *Soit  $B_n$ , la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^N$ . La boule  $B_n$  a la propriété du point fixe pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .*

## A.4 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour la démonstration de l'existence d'un point fixe d'une application continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

**Théorème A.5. (Théorème du point fixe de Schauder)**[76] *Soient  $K$  un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach  $X$  et  $T : K \rightarrow K$  une application continue. Alors  $T$  admet un point fixe.*

*Démonstration.* Soit  $T : K \rightarrow K$  une application continue. Comme  $K$  est compact, alors  $T$  est uniformément continue. Donc pour  $\varepsilon$  fixé, il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x, y \in K$ , on a :

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon,$$

de plus, il existe un ensemble fini de points  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset K$  tel que les boules ouvertes de rayon  $\delta$  centrées aux points  $x_i$  recouvrent  $K$ ; c'est-à-dire,  $K \subset \cup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$ .

Si on pose  $L = \text{vect}(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ , alors  $L$  est de dimension finie et  $K^* = K \cap L$  est compact convexe de dimension finie.

Pour  $1 \leq j \leq p$ , on définit la fonction continue  $\psi_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta, \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que  $\psi_j$  est strictement positive sur  $B(x_j, \delta)$  et nulle en dehors. On a donc, pour tout  $x \in K$ ,  $\sum_{j=1}^p \psi_j(x) > 0$ , et par la suite on peut définir sur  $K$  les fonctions continues positives  $\varphi_j$  par

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^p \psi_k(x)},$$

pour les quelles on a  $\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) = 1$ , pour tout  $x \in K$ .

Posons maintenant, pour  $x \in K$ ,

$$g(x) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(x) T(x_j).$$

La fonction  $g$  est continue (somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans  $K^*$  (car  $g$  est un barycentre des  $T(x_j)$ ).

Si on prend la restriction  $g/K^* : K^* \rightarrow K^*$ , (d'après le théorème de Brouwer)  $g$  possède un point fixe  $y \in K^*$ .

De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) (T(y) - T(x_j)). \end{aligned}$$

Or si  $\varphi_j(y) \neq 0$  alors  $\|y - x_j\| < \delta$ , et par suite  $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$ . Donc, on a pour tout  $j$

$$\begin{aligned} \|T(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) \|T(y) - T(x_j)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^p \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier  $m$  on peut trouver un point  $y_m \in K$  tel que  $\|T(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}$ . Et puisque  $K$  est compact, alors de la suite  $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  on peut extraire une sous suite  $(y_{m_k})$  qui converge vers un point  $y^* \in K$ . Alors  $T$  étant continue, la suite  $(T(y_{m_k}))$  converge vers  $T(y^*)$  et on conclut que  $T(y^*) = y^*$ , c'est-à-dire  $y^*$  est un point fixe de  $T$  sur  $K$ . ■

Pour les applications, la généralisation suivante s'avère utile.

**Théorème A.6. (Théorème du point fixe de Schauder généralisé)**[76] Soit  $F$  un ensemble fermé convexe sur un espace de Banach  $X$  et soit  $T : F \rightarrow F$  une application continue telle que  $T(F)$  est un sous-ensemble relativement compact de  $F$ . Alors  $T$  admet un point fixe.

**Théorème A.7.** Supposons que  $T$  est une application continue entre deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$ . Si  $K$  est un ensemble compact dans  $X$  alors,  $T(K)$  est un ensemble compact dans  $Y$ .

*Démonstration.* Soit  $T : X \rightarrow Y$  une application continue et soit  $K$  un ensemble compact dans  $X$ . Supposons une suite arbitraire  $(y_n) \subset T(K)$ . Alors il existe une suite  $(x_n) \subset K$  telle que  $T(x_n) = y_n$  pour tout  $n$ . Puisque  $K$  est compact, alors il existe une sous-suite  $(x_{n_k})$  convergente de  $(x_n)$  dans  $K$ , i.e. il existe un élément  $x \in K$  tel que  $x_{n_k} \rightarrow x$ . De plus, puisque  $T$  est continue, nous avons

$$x_{n_k} \rightarrow x \Rightarrow y_{n_k} = T(x_{n_k}) \rightarrow T(x) \in T(K).$$

Ceci termine la preuve. ■

Soit  $T : X \rightarrow Y$  une application entre deux espaces de Banach. Les différentes notions de continuités dans ce chapitre sont :  $T$  est dite

► **Continue** : si pour tout  $x \in X$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(x, \varepsilon)$  tel que quelque soit  $y \in X$  :

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T(y) - T(x)\|_Y < \varepsilon.$$

► **Uniformément continue sur**  $A : (A \in X)$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon)$  tel que quels que soient  $x, y \in A$  nous avons :

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T(y) - T(x)\|_Y < \varepsilon.$$

Si  $T_\lambda : X \rightarrow Y$ , ( $\lambda \in \Lambda$ ), un ensemble d'applications entre deux espaces de Banach.  $T_\lambda$  est dite

► **Equicontinue sur**  $A : (A \in X)$ , si pour tout  $\varepsilon$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon)$  tel que quels que soient  $x, y \in A$  et quelque soit  $\lambda \in \Lambda$  nous avons :

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T_\lambda(y) - T_\lambda(x)\|_Y < \varepsilon.$$

**Théorème A.8. (Théorème d'Ascoli-Arzelà)**[198] Soit  $A \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ , ( $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ).  $A$  est relativement compact (i.e,  $\overline{A}$  est compact) si et seulement si :

- 1)  $A$  est uniformément borné.
- 2)  $A$  est équicontinu.

• On rappelle qu'une fonction  $f$  est uniformément bornée dans  $A$  si existe une constante  $M > 0$  telle que :

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| \leq M, \quad \forall f \in A.$$

## A.5 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

On a vu précédemment deux théorèmes principaux de la théorie du point fixe à savoir le thème de Schauder et le théorème de l'application contractante de Banach. Krasnoselskii a combiné ces deux théorèmes.

**Théorème A.9. (Théorème du point fixe de Krasnoselskii)**[198] Soit  $F$  un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach  $X$ .  $T_1$  et  $T_2$  sont deux applications de  $F$  dans  $X$  telles que :

- 1-  $T_1(x) + T_2(y) \in F, \quad \forall x, y \in F$ ,
- 2-  $T_1$  est une contraction,
- 3-  $T_2$  est compacte et continue.

Alors  $T_1 + T_2$  admet un point fixe dans  $F$ , autrement dit, il existe  $x \in F$  tel que  $T_1(x) + T_2(x) = x$ .

*Démonstration.* Supposons que les applications  $T_1$  et  $T_2$  satisfont les hypothèses du théorème. En particulier, il existe  $k \in (0, 1)$  tel que :

$$\|T_1(x) - T_1(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad x, y \in F.$$

Ceci donne :

$$\|(I - T_1)(x) - (I - T_1)(y)\| \geq \|x - y\| - \|T_1(x) - T_1(y)\| \geq (1 - k)\|x - y\|$$

et

$$\|(I - T_1)(x) - (I - T_1)(y)\| \leq \|x - y\| - \|T_1(x) - T_1(y)\| \leq (1 + k)\|x - y\|.$$

Par conséquent,  $I - T_1 : F \rightarrow (I - T_1)(F)$  est un homéomorphisme et  $(I - T_1)^{-1}$  existe, puisque  $(I - T_1)(F)$  est continue. De plus on remarque que pour tout  $y \in F$ , l'équation

$$x = T_1(x) + T_2(y)$$

a une solution unique  $x \in F$  selon le théorème du point fixe de Banach. De cette dernière équation nous concluons que  $T_2(y) \in (I - T_1)(F)$  pour tout  $y \in F$  et que  $(I - T_1)^{-1}T_2 : F \rightarrow F$  est bien définie comme étant une application continue. Puisque  $T_2$  est une application compacte, il s'ensuit que  $(I - T_1)^{-1}T_2 : F \rightarrow F$  est aussi une application compacte. Finalement, le théorème du point fixe de Schauder généralisé nous garantit la conclusion du théorème. ■



Pour plus de détails, nous recommandons toute personne intéressée par les théorèmes du point fixe de parcourir le livre [70] par [Smart](#) où des résultats supplémentaires et beaucoup plus de références peuvent être trouvées.

## Fiches B

---

Dans ce qui suit, nous avons essayé de donner un compte rendu historique de certaines des personnalités mentionnées dans notre mémoire, ce qui a eu un impact important sur le travail et les recherches qu'ils ont présentés au monde.



FIG. B.1 : Georg Friedrich Bernhard Riemann

**Georg Friedrich Bernhard Riemann**, Né le 17 septembre 1826 à Breselenz, État de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle.

En 1840, Bernhard s'établit à Hanovre pour vivre chez sa grand-mère et aller au collège. Après le décès de sa grand-mère en 1842, il va à Lunebourg pour continuer ses études secondaires. Au lycée, Riemann étudie la Bible intensivement, mais il est distrait par les mathématiques ; il essaye même de prouver, mathématiquement, l'exactitude de la Genèse. Ses professeurs sont surpris par ses capacités à résoudre des problèmes complexes en mathématique.

En 1846, âgé de 19 ans, grâce à l'argent de sa famille, il commence à étudier la philosophie et la théologie pour devenir pasteur afin de financer sa famille.

En 1847, son père l'autorise à étudier les mathématiques. Il étudie d'abord à l'université de Göttingen où il rencontre Carl Friedrich Gauss, puis à l'université de Berlin, où il a

entre autres comme professeurs Jacobi, Steiner et Dirichlet. Il effectue sa thèse à Göttingen sous la direction de Gauss.

Dans sa thèse, présentée en 1851, Riemann met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe, introduisant notamment le concept des surfaces qui portent son nom.

On lui doit également d'importants travaux sur les intégrales, poursuivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann. Intéressé par la dynamique des gaz, il jette les bases de l'analyse des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et résout un cas particulier de ce qu'on appelle maintenant le problème de Riemann.



FIG. B.2 : Joseph Liouville

**Joseph Liouville**, Né le 24 mars 1809, Joseph est le fils d'un militaire qui survit aux campagnes napoléoniennes et qui, en 1814, établit sa famille à Toul.

Joseph Liouville est diplômé de l'école polytechnique en 1827. Deux ans plus tard, il intègre l'école des ponts et chaussées, dont il n'obtient pas le diplôme en raison de problèmes de santé et, surtout, de sa volonté de suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur.

Il obtient le doctorat ès sciences mathématiques en 1836 devant la faculté sous la direction de Simeon Denis Poisson et Louis Jacques Thenard. Après quelques années dans diverses institutions comme assistant et comme professeur à l'école centrale (1833, où il était répétiteur depuis 1831), il est nommé professeur à l'école polytechnique en 1838. Il obtient une chaire en mathématique au Collège de France en 1850 et une chaire en mécanique à la Faculté des sciences de Paris en 1857. Il est élu membre de l'Académie des sciences le 3 juin 1839 (il en sera président pendant l'année 1870).

À côté de ses réussites académiques, il était un remarquable organisateur. Liouville fonda en 1836 le Journal de mathématiques pures et appliquées appelé parfois journal de Liouville, qui garde sa haute réputation de nos jours (il est édité depuis 1997 par l'éditeur anglo-néerlandais Elsevier Science). Il a beaucoup publié dans ce journal, en son nom ou en utilisant le pseudo nyme Besge.

Il fut le premier à lire les travaux inédits d'Évariste Galois, en reconnut l'importance et les publia dans son journal en 1846. Le mathématicien Olry Terquem fut l'un des célèbres auteurs de son journal. Liouville s'impliqua aussi en politique et fut membre de l'assemblée constituante en 1848. Cependant, après sa défaite aux élections à la députation en 1849, il quitta la politique. D'un point de vue familial, on sait que Liouville a eu deux filles, Céline et Marie.



**FIG. B.3 :** Michele Caputo

### **Michele Caputo**

Anniversaire : le 5 mai 1927.

Lieu de naissance : Ferrara, Italie.

#### **Degrés :**

- 1950 Mathématiques (laurea) Université de Ferrare.
- 1955 Physique (laurea) Université de Bologne.
- 1959 Géodésie (libera docenza) Ministère de la éducation d'Italie.

# Bibliographie

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, In : North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam : Elsevier Science, 2006.
- [2] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory, New York : Springer, 2003.
- [3] A. R. El-Nabulsi, The fractional white dwarf hydrodynamical nonlinear differential equation and emergence of quark stars. Appl. Math. Comput., 218(6) :2837-2849, 2011.
- [4] A. Kadem et D. Baleanu. Analytical method based on walsh function combined with orthogonal polynomial for fractional transport equation. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 15(3) :491-501, 2010.
- [5] A. Kadem et D. Baleanu. Homotopy perturbation method for the coupled fractional lotka-volterra equations. Rom. J. Phys., 56(3) :332-338, 2011a.
- [6] A. Kadem et D. Baleanu. On fractional coupled whitham-broer-kaup equations. Rom. J. Phys., 56(5) :629-635, 2011b.
- [7] A. Khalouta et A. Kadem. A new numerical technique for solving caputo time-fractional biological population equation. AIMS Mathematics, 4(5) : 1307-1319, 2019f.
- [8] A.A. Dezin, General questions in theory of boundary value problems, Moscow. Nauka, English trans, Springer Verlag, (1980)
- [9] A. Bouziani, Solution forte d'un problème mixte avec condition intégral pour une classe d'équations paraboliques. Maghreb Mathematical Review, Vol. 6, No. 1, p. 1-17, 1997.
- [10] A. Bouziani. Mixed problem with integral conditions for certain parabolic equations. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Vol. 9, No. 3, p. 323-330, 1996.
- [11] A. Bouziani, N.E. Benouar. Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques. Compte Rendus de l'Académie des Sciences. Paris, T. 321, Série .1, p. 1177-1182, 1995.
- [12] A. Bouziani, N.E. Benouar, Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations hyperboliques. Bulletin de la Société Mathématiques de Belgique, Vol. 31, p. 125-133, 1996.

- [13] A. Bouziani, A Merad. The Laplace transforms method for one dimensional hyperbolic equation with purely integral conditions, *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science* 3 (2); 191-204, 2013.
- [14] A. Merad, A Bouziani, S Araci. Existence and uniqueness for a solution of pseudo-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition *appl. Math. Inf. Sci* 9, No 4, 1855-1861, 2015.
- [15] A. Merad, A Bouziani, O Cenap, A Kilicman. On solvability of the integrodifferential hyperbolic equation with purely nonlocal conditions. *Acta mathematica Scientia* 35 (3); 601-609. 2015.
- [16] A. Merad, J. Martin-Vaquero. A Galerkin method for two-dimensional hyperbolic integral conditions, *Applied Mathematics and Computation* 291, 386-394, 2016.
- [17] A. Merad, A Bouziani, C Ozel. Inversion Laplace transform for integrodifferential parabolic equation with purely nonlocal conditions, *Hacetatepe journal of mathematics and statistics* 44 (5), 1087-1097, Volume 45 Issue 2, 2016.
- [18] A. Bouziani; On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition, *IJMMS journal*, Volume 31 (2002), Issue 4, Pages 201-213.
- [19] A. Bouziani; Solution of a transmission problem for semilinear parabolic-hyperbolic equations by the time-discretization method, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, V 2006 (2006), Article ID 61439, 23 pages.
- [20] A. Bouziani; On a class of nonlinear reaction-diffusion systems with nonlocal boundary conditions, *Abstract and Applied Analysis*, V 2004 (2004), Issue 9, Pages 793-813.
- [21] A. Necib, A. Merad. Laplace transform and Homotopy perturbation methods for solving the pseudo-hyperbolic integro-differential problems with purely integral conditions, *Kragujevac Journal of Mathematics*, accepted. 2018.
- [22] A. Samarskii. Some problems in differential equations theory, *different-sial'nye Uraveniya*, No. 11, 1980, 1221-1228.
- [23] A. Anguraj, P. Karthikeyan, Existence of solutions for fractional semilinear evolution boundary value problem, *Commun. Appl. Anal.*, V 14 (2010), 505-514.
- [24] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [25] Alikhanov, A.A. A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations. arXiv 2010, arXiv :1105.4592v1
- [26] Anastassiou, G.; Argyros, I. *Intelligent Numerical Methods : Applications to Fractional Calculus*, Studies in Computational Intelligence; Springer : Heidelberg, Germany, 2016.
- [27] Amanov, D. Solvability of boundary value problems for higher order differential equation with fractional derivative. *Probl. Comput. Appl. Math. Tashkent Uzbekistan* 2009, 121, 55-62.
- [28] Amanov, D.; Ashyraliev, A. Initial-Boundary Value Problem for Fractional Partial Differential Equations of Higher Order. *Abstr. Appl. Anal.* 2012, 2012, 973102. [CrossRef]
- [29] Ab. Benrabah. étude d'un problème d'évolution non locale et régularisation d'un problème elliptique mal posé, thèse de Doctorat, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Université Badji-Mokhtar Annaba, Algeria, 2011.

- [30] A. Khalouta. Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques. Extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire, thèse de Doctorat, Université Ferhat ABBAS SETIF 1, Algeria, 2019.
- [31] A. Bouzaroura. Étude d'une équation différentielle fractionnaire impulsive dans un espace de Banach, thèse de Doctorat, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Université Badji-Mokhtar Annaba, Algeria, 2014.
- [32] A. Hamiou, Etude d'une classe de problèmes d'évolutions avec conditions non locales, thèse de Master, Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi, Algeria, 2018
- [33] Ayatia, Z., Biazar, J. On the convergence of Homotopy perturbation method, J. Fgyption. Math. Soci., 23,(2015), 424-428.
- [34] Arshed, S, Biswas, A, Abdel-Aty, M, Moshokoa, SP, Belic, M Chinese Journal of Physics 56(6), pp. 2879-2886 (2018).
- [35] Abdalla, MS, Abdel-Aty, M, Obada, A-S.F, Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics 4(6), pp. 396-401 (2002).
- [36] Zhang, J-S, Chen, A-X, Abdel-Aty, M, Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics 43(2), 025501(2010).
- [37] Abdel-Aty, M, Abdalla, MS, Obada, A-SF, Journal of Optics B, Quantum and Semi-classical Optics 4, S133-S141 (2002).
- [38] Amanov, D. Solvability of boundary value problems for higher order differential equation with fractional derivative. Probl. Comput. Appl. Math. Tashkent Uzbekistan 2009, 121, 55â62.
- [39] Amanov, D.; Ashyraliev, A. Initial-Boundary Value Problem for Fractional Partial Differential Equations of Higher Order. Abstr. Appl. Anal. 2012, 2012, 973102. [CrossRef]
- [40] A.Anguraj, P.Karthikeyan, Existence of solutions for fractional semilinear evolution boundary value problem, Commun. Appl. Anal., 14 :505-514, 2010.
- [41] B. Ahmad, J. J. Nieto, Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher order nonlinear fractional differential equations, Abstr. Appl. Anal., 2009(2009), ID : 494720.
- [42] B. Ahmad, A. Alsaedi, B. Alghamdi, Analytic approximation of solutions of the forced Duffing equation with integral boundary conditions, Nonlinear Anal Real World Appl., 2008(2008), 9 :1727-1740.
- [43] B. Ahmad, J. J. Nieto, A. Alsaedi, Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations with non-separated type integral boundary conditions, Acta Math. Sci., 31(2011), 2122-2130.
- [44] B. Ahmad, S. K. Ntouyas, Fractional differential inclusions with fractional separated boundary conditions, Fract. Calc. Appl. Anal., 15(2012), 362-382.
- [45] B. Zheng. (G0/G)-expansion method for solving fractional partial differential equations in the theory of mathematical physics. Commun. Theor. Phys., 58 :623-630, 2012.
- [46] B. Ahmad, J.J. Nieto, Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions, Comput. Math. Appl. 58 (2009), 1838-1843.

- [47] B. Ahmad, J. J. Nieto, Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2009, Article ID 494720, doi :10.1155/2009/494720.
- [48] B. Carbonaro, R. Rosso. Energy inequality and the domain of influence theorem in classical elastodynamics. *J. Elasticity*, Vol. 14, p. 163-174, 1984
- [49] B. Ahmad, J.J. Nieto, Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions, *Comput. Math. Appl.* 58 (2009), 1838-1843.
- [50] B. Ahmad, J. J. Nieto, Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2009, Article ID 494720, doi :10.1155/2009/494720.
- [51] B. Ahmad, J. Nieto, Existence results for nonlinear boundary value problems of fractional integro differential equations with integral boundary conditions, *Boundary Value Problems.*, V 2009 (2009), Article ID 708576, 11 pages.
- [52] B. Ahmad, S. K. Ntouyas, Fractional differential inclusions with fractional separated boundary conditions, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 15 (2012), 362-382
- [53] B. Ahmad, J. J. Nieto, A. Alsaedi, Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations with non-separated type integral boundary conditions, *Acta Math. Sci.*, 31(2011), 2122-2130.
- [54] B. Ahmad, J. Nieto, Existence results for nonlinear boundary value problems of fractional integro differential equations with integral boundary conditions, *Boundary Value Problems.*, V 2009 (2009), Article ID 708576, 11 pages.
- [55] B. Ahmad, J. J. Nieto, Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher order nonlinear fractional differential equations, *Abstr. Appl. Anal.*, 2009 (2009), ID : 494720.
- [56] Ahmad, B, *Appl. Math. Lett.* 23, 390-394 (2010).
- [57] Ahmad, B, *Sivasundaram, S Appl Math Comput.* 217,480-487 (2010).
- [58] Ahmad, B, Nieto, *JJ Bound Value Problem.* 2011, 36 (2011).
- [59] Ahmad, B, Ntouyas, SK, Alsaedi, A *Probl. Eng* 2013, Article ID 320415 (2013).
- [60] Ahmad, B, *Sivasundaram, S Appl Math Comput.* 217,480-487 (2010).
- [61] B. Tellab. Résolution des équations différentielles fractionnaires, thèse Doctorat Science, Université des Frères Mentouri Constantine-1, Algeria, 2018.
- [62] Biazar, J; Ghazvini, H. Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations, *Nonlinear Analysis : Real World Applications.*, 10, (2009), 2633-2640.
- [63] B. Abdrafik; Étude d'un problème d'évolution non locale et régularisation d'un problème elliptique mal posé, thèse de Doctorat, Université Badji-Mokhtar Annaba, 2011.
- [64] B. Kheireddine; Existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, Mémoire de Magister, Université Badji Moukhtar Annaba, 2013.
- [65] B. Asma, Étude d'une équation différentielles fractionnaire impulsive dans un espace de Banach, thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, 2014.
- [66] B. Nadjib, Problèmes aux limites non locale pour une équation aux dérivées partielles opérationnelle, mémoire de Magister, Université Badji Mokhtar Annaba, 1998.

- [67] B. Salima, Sur quelques problèmes aux limites fractionnaires, thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, 2016.
- [68] Carlson, G.E.; Halijak, C.A. Simulation of the fractional derivative operator  $vG$  and the fractional integral operator  $1/v/S$ . Kansas State Univ. Bull. 1961, 45, 21-22.
- [69] Dj. chergui, T. E. Oussaeif and A. Merad :Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations depending on lower-order derivative with non-separated type integral boundary conditions, DOI : 10.3934/Math.2019.1.112; AIMS Mathematics,4(1) :112-133.
- [70] D.R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press 1973
- [71] Daftardar-Gejji, V.; Jafari, H. Boundary value problems for fractional diffusion-wave equations. Aust. J. Math. Anal. Appl. 2006, 3, 1-18.
- [72] Dj.Guermit. Sur quelques opérateurs de dérivations fractionnaires, théorie et applications, thèse de Master, Université Kasdi Merbah, Ouargla, Algeria, 2016.
- [73] X. J. Li, C. J. Xu, Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation, "Communications in Computational Physics", V 8 (2010), N 5, pp.1016-1051
- [74] Daftardar-Gejji, V.; Jafari, H. Boundary value problems for fractional diffusion-wave equations. Aust. J. Math. Anal. Appl. 2006, 3, 1-18.
- [75] E. Artin, The Gamma Function, New York, Holt, Rinehart and Winston, (1964)
- [76] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Applications, Fixed Point Theorems SpringerVerlag, New York, 1986.
- [77] Engheta, N. On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism. IEEE Trans. Antennas Propag. 1996, 44, 554-566. [CrossRef]
- [78] Elzaki, T. M. The New Integral Transform "Elzaki Transform", Glo. J. Pure. App. Math., 7(1), 57-64, (2011).
- [79] El Qarnia, H. Application of homotopy perturbation method to non-homogeneous parabolic partial and non linear differential equations, W. J. Model. Sim., 5(3), (2009), 225-231.
- [80] F. Yan, M. Zuo, X. Hao, Positive solution for a fractional singular boundary value problem with p-Laplacian operator, Bound. Value Probl., 2018(2018), 1-10.
- [81] F. Lakhel. Sur une classe de problèmes aux limites avec conditions aux bords de type intégrales, thèse de Doctorat, Université Mentouri Constantine, 2011.
- [82] F. Zouai. Dérivation fractionnaire de Caputo, thèse de Master, Université Mohamed Khider, Biskra, Algeria, 2018.
- [83] G.M.Mittag-leffler. Higher transcendental functions. C.R.Academie des Sciences, (137) :554-558, 1955.
- [84] G. M. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène. Acta Math., 29 :101-182, 1905.
- [85] Ghorbani, A. Beyond Adomian's polynomials : He polynomials, chaos solitons Fract., 39(3), (2009), 1486-1492.
- [86] Gorenflo, R. Abel integral equations with special emphasis on applications. In Lectures in Mathematical Sciences; University of Tokyo : Tokyo, Japan, 1996; Volume 13.
- [87] V. Gafiyuk, B. Datsun, V. Meleshko, Mathematical modeling of time fractional reaction-diffusion systems. J. Comp. Appl. Math. 220 (2008), 215-225.

- [88] G. Djamila Nourelimen, Sur quelques opérateurs de dérivations fractionnaires, Théorie et application, Mémoire de Magister, Université Kasdi Merbah Ouargla, 2016.
- [89] H. Jafari, A. Kadem, et D. Baleanu, Variational Iteration Method for a Fractional-Order Brusselator System. *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 496323 :1-6, 2014.
- [90] H. Jafari, A. Kadem, D. Baleanu, et T. Yilmaz. Solutions of the fractional davey-stewartson equations with variational iteration method. *Rom. Rep. Phys.*, 64(2) :337-346, 2012.
- [91] Hillon. *Les Solutions mathématiques des populations*, presses universitaire de France, 1986.
- [92] H. Weimin k. Atkinson, *Theoretical numerical analysis a fonctionnal analysis framework*. Bysshaya Shkola, Moscow, 1993.
- [93] Hilfer, R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*; World Scientific : Singapore, 2000
- [94] H. BERRAH, I. LADGHAM, Étude de certains problèmes aux limites de type fractionnaire, thèse Master, Université Hamma Lakhdar El Oued, Algeria, 2018.
- [95] He, J. H, Acoupling method of homotopy technique and perturbation technique for non-linear problems, *Int. J. Non-Linear. Mech*; 35, (2000), 37-43.
- [96] He, J. H, A new perturbation technique which is also valid for large parameters, *J. Sound Vib*; 229, (2000), 1257-1263.
- [97] He, J. H, Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, *Chaos Solitons Fractals*; 26(3), (2005), 695-700.
- [98] He, J. H, Homotopy perturbation technique, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*; 178(3), (1999), 257-262.
- [99] He, J. H, Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *Int. J. Modern Phys. B*; 20(10), (2006), 1141-1199.
- [100] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, Singapore, World Scientific, 2000.
- [101] Ertik H, Demirhan D, Sirin H, BüükkilicÂ, F, *J. Math. Phys.* 51, 082102 (2010)
- [102] H. Aicha, *Systèmes d'évolution abstraits d'ordres fractionnaires et leurs applications*, thèse de Doctorat, Université 8 Mai 1945 Guelma, Algeria, 2018.
- [103] H. Anis; *Etude d'une classe du problèmes d'évolutions avec conditions non locales*, Mémoire de Master, Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi, Algeria, 2018.
- [104] H. Cherif. Montassir, *Résolution numérique des équations différentielles et aux dérivées partielles non linéaire et d'ordre fractionnaire par la méthode HPM*, thèse de Doctorat, Université d'oran1, Ahmed Ben Bella.
- [105] H. Tarek, *Analyse du Chaos dans un système d'équations différentielles fractionnaires*, thèse de Doctorat, Université Constantine 1, 2014.
- [106] I. Podlubny, *Fractional Differentrial Equations*, San Diego : Academic Press, 1999.
- [107] I. Podlubny. *Fractional-order system and fractional-order controllers*. UEF-03-94. Slovak Acad. Sci., Kosice, 1994.
- [108] Iomin A. *Chaos, Solutions and Fractals* : X1, 100001(2019) doi :10.1016/j.csfx.2018.100001.

- [109] I. Ghania, Développement de méthodes de résolution de problèmes de contrôle optimal des systèmes d'ordre fractionnaire, thèse de Doctorat, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, 2017.
- [110] J. Sabatier, O. P. Agrawal, J. A. T. Machado, *Advances in Fractional Calculus-Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Dordrecht : Springer, 2007.
- [111] J. T. Katsikadelis, Nonlinear Dynamic Analysis of Viscoelastic Membranes Described with Fractional Differential Models. *J. Theoretical Appl. Mech.*, 50(3) :743-753, 2012.
- [112] J. Singh, D. Kumar, et A. Kiliçman. Numerical Solutions of Nonlinear Fractional Partial Differential Equations Arising in Spatial Diffusion of Biological Populations. *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 535793 :1-12, 2014.
- [113] J. R. Wang et Y. Zhou. A class of fractional evolution equations and optimal controls. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 12 :262-272, 2011.
- [114] J. Leray, *Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients*, Priston, Just for Adv. Study., 1952.
- [115] J. Spanier, K.B. Oldham : *The Fractional Calculus*, Academic Press., New York, (1974).
- [116] J.R.Cannon. The solution of heat equation subject to the specification of energy, *Quart.Appl.Math*, 1963, 155-160.
- [117] J. Sabatier, O.P. Agrawal, and J.A. Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus*. Springer (2007).
- [118] J. Hale and S. Verduyn Lunel, *Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences*, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [119] Jaradat, O, Al-Omari,A,Momani,SM, *Nonlinear Anal.* 69,3153-3159 (2008)
- [120] K. B. Oldham et J. Spanier. *The fractional calculus*. Academic Press, New York, 1974.
- [121] K. B. Oldham, Fractional differential equations in electrochemistry. *Adv. Eng. Softw.*, 41 :9-12, 2010
- [122] K. Diethelm and A.D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in " *Scientific Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties*" (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer- Verlag, Heidelberg, 1999.
- [123] K. Balachandran, J.J. Trujillo, The nonlocal Cauchy problem for nonlinear fractional integro differential equations in Banach spaces, *Nonlinear Anal.* 72 (2010), 4587-4593..
- [124] K.B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, York and London (1974).
- [125] K.S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley, New York (1993). 4
- [126] K.B. Oldham and J. Spanier. The replacement of fick's laws by a formulation involving semidifferentiation. *J. Electroanal. Chem.* 26, 331-341 (1970).
- [127] k. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

- [128] K. Diethelm and A.D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in " Scientific Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer- Verlag, Heidelberg, 1999.
- [129] K. Balachandran, J.J. Trujillo, The nonlocal Cauchy problem for nonlinear fractional integro differential equations in Banach spaces, *Nonlinear Anal.* 72 (2010), 4587-4593..
- [130] Kaplan, T.; Gray, L.J.; Liu, S.H. Self-affine fractal model for a metal-electrolyte interface. *Phys. Rev. B* 1987, 35, 5379-5381. [CrossRef]
- [131] Kh. Belakroum. Existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, thèse de Doctorat, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Université Badji-Mokhtar Annaba, Algeria, 2013.
- [132] Kh. Belakroum, Existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, thèse de Magister, Département de Mathématiques, Université Badji-Mokhtar Annaba, Algeria, 2013.
- [133] K. Deng, H. A. Levine, The role of critical exponents in Blow-up theorems : the sequel, *J Math. Anal. Appl.* 243(2000), 85-126.
- [134] KH. Sabah, Etude de quelques problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionnaires, mémoire de Magister, Université Kasdi Merbah Ouargla, 2016.
- [135] K. Samiya, Problèmes aux limites pour équations différentielles d'ordre fractionnaire, Mémoire de Magister, Université Kasdi Merbah Ouargla, 2017.
- [136] KH. Ali, Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires moyennant des approches analytiques. Extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire, thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas Setif1, 2019.
- [137] K.M. Furati, N. Tatar, An existence result for a nonlocal fractional differential problem, *J. Fract. Calc.*, 26 :43-51, 2004
- [138] L. Garding, Cauchy's Problem for hyperbolic equations, University of Chicago, Lectures notes, (1957).
- [139] L.G. Petrovsky, Über das Cauchysche problem für system von linearen partialen differential geinungen in Gebit der nichtanalytischen funktionen, *Bull. Univ. dâetat, Moskow*, No. 7, (1938), 1-74.
- [140] L.I. Kamynin. Aboundary value problem in the theory of the heat conduction with nonclassical boundary condition, *Z. Vychisl. Mat.* 6, 1964.
- [141] L.S. Pulkina. Non Local Problem With a First Kin Integral Condition For Multidimensional Hyperbolic Equation, *D oklady Akademii*, 2007, 597-599.
- [142] L. Euler, De progressionibus transcentibus, sev quarum termini algebraice dari nequeunt. *Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae* 5, 36-57 (1738).
- [143] Ladyzhenskaya, O.A. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*; Springer : New York, NY, USA, 1985.
- [144] L. Fahim, Sur une classe de problèmes aux limites avec conditions aux bords de type intégrales, thèse de Doctorat, Université Mentouri Constantine, 2011.
- [145] M. Caputo, Linear Model Of Dissipation Whose Q is Almost Frequency Independent, Part II. *Geophysical Journal Of Royal Astronomical Society.*, 13, (1967), pp. 529-39

- [146] M. Belmekki, J.J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation, *Bound. Value Probl.* 2009, 18 p. Article ID 324561.
- [147] M. Godefroy, *La fonction Gamma; Théorie, Histoire, Bibliographie*, Gauthier-Villars, Paris, (1901).
- [148] M. Benchohra and F. Ouair, Existence Results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, *Bullten Of Mathematical analysis and Applications*, Vol. 2 issue4, pp. 7-15, (2010).
- [149] M. Belmekki, J.J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation, *Bound. Value Probl.* 2009, 18 p. Article ID 324561.
- [150] M. Belmekki, M. Benchohra, Existence results for fractional order semilinear functional differential equations, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, V 146 (2008), 9-20.
- [151] M. Benchohra, J.R. Graef, S. Hamani, Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations, *Appl. Anal.*, V 87 (2008), 851-863.
- [152] M. Benchohra and S. Hamani, Nonlinear boundary value problems for differential inclusions with Caputo fractional derivative, *Topol. Meth. Nonlinear Anal.*, 32 (1) (2008), 115-130.
- [153] Mainardi, F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion wave phenomena. *Chaos Solitons Fractals* 1996, 7, 1461-1477. [CrossRef]
- [154] Mainardi, F.; Luchko, Y.; Pagnini, G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2001, 4, 153-192.
- [155] Mainardi, F.; Paradisi, P. Fractional diffusive waves. *J. Comput. Acoust.* 2001, 9, 1417-1436. [CrossRef]
- [156] Marin, M.; Ochsner, A. The effect of a dipolar structure on the Holder stability in Green Naghdithermoelasticity. *Contin. Mech. Thermodyn.* 2017, 29, 1365-1374. [CrossRef]
- [157] Mesloub, S.; Obaid, A. On a singular nonlocal time fractional order mixed problem with a memory term. *Math. Methods Appl. Sci.* 2018, 41, 4676-4690. [CrossRef]
- [158] Mesloub, S. A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order parabolic equation. *J. Math. Anal. Appl* 2006, 316, 189-209.
- [159] M. SLMANE, Équations différentielles d'ordre fractionnaires dans des espaces de Banach, thèse de Magister, Université Abou Bekr BelKaid Tlemcen, 2012.
- [160] M. Bekkari, A. Benamara, Quelques équations différentielles d'ordres fractionnaires, thèse de Master, Université Hamma Lakhdar El Oued, Algeria, 2019.
- [161] Khan M. I. and Khan M. A. R. : *J. Stat. Appl. Prob.* 8, 103(2019) doi :10.18576/jsap/080204
- [162] Kumar M., Maurya, S., Singh S., Singh U, Pathak A. : *J. Stat. Appl. Prob.* 8, 609 (2019) doi :10.18576/jsap/080204.
- [163] Enayat M. Abdelrazik, *J. Stat. Appl. Prob.* 9, 43 (2020) doi :10.18576/jsap/090105
- [164] Shehata A. M. : *Inf. Sci. Lett.* 8, 1 (2019) doi :10.18576/isl/080101
- [165] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Hand book of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.

- [166] M. Madani, M. Fathizadeh, Y. Khan, A. Yildirim. On coupling the homotopy perturbation method and Laplace transformation, *Mathematical and Computer Modelling*, 53, (2011), pp. 1937-1945, 1970.
- [167] Mainardi, F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion wave phenomena. *Chaos Solitons Fractals* 1996, 7, 1461-1477. [CrossRef]
- [168] Mainardi, F.; Luchko, Y.; Pagnini, G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2001, 4, 153-192.
- [169] Mainardi, F.; Paradisi, P. Fractional diffusive waves. *J. Comput. Acoust.* 2001, 9, 1417-1436. [CrossRef]
- [170] Mesloub, S and Obaid, A : On a singular nonlocal time fractional order mixed problem with a memory term. *Math. Methods Appl. Sci.* 2018, 41, 4676-4690. [CrossRef]
- [171] Mesloub, S and Aldosari, F : Even Higher order Fractional Initial Boundary value problem with non local constraints of purely Integral Type, *Symmetry* 2019, 11, 305; doi :10.3390/sym11030305.
- [172] M. Hamza, Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire impulsive de temps infini dans un espace de Banach, thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, 2015.
- [173] N.I. Yurchuk. Estimation a priori des solutions de problèmes aux limites pour certaines équations différentielles opérationnelles. *Difi. Urav. T. 12, No. 4, p. 729-739, 1976.*
- [174] N.I. Yurchuk. Problème aux limites pour des équations à coefficients opérationnels dépendant d'un paramètre. I. Estimation a priori. *Difi. Urav, T. 12, No. 9, p. 1645-1661, 1976.*
- [175] N.I. Yurchuk. Mixed problem with integral condition for certain parabolic equations. *Difi. Urav, Vol. 22, No. 19, p. 2117-2126, 1986.*
- [176] N.I. Yurchuk, N.I. Brish. Problème de Goursat pour une équation différentielle linéaire abstraite de second ordre. *Difi. Urav, T. 7, No. 6, 1971.*
- [177] N.I. Yurchuk, The Goursat problem for second order hyperbolic equations of special kind, *Diff. Uravn, 4 (1968), (a), 1333-1345 (Russian).* [English transl-Diff. Equat, 694-700].
- [178] N.I. Yurchuk, A partialy characteristic boundary value problem for a particular type of partial differential equation. I, *Diff. Uravn, 4, 2258-2267 (Russian).* [English. Transl-Diff. Equat, 1167-1172].
- [179] N.I. Yurchuk, A partialy characteristic mixed boundary value problem with Goursat initial conditions for linear equations with two-dimensional time, *Diff. Uravn, 5 (1969), (b), 898-910 (Russian).* [English Trans-Diff. Equat, 652-661].
- [180] N.I. Ionkin. solution of boundary value problem in heat conduction theory with non local boundary conditions. *Differential'nye. Urav, Vol. 13, No. 2, p. 294-304, 1977.*
- [181] N.J. Ford, J. Xiao and Y. Yan, A finite element method for time fractional partial differential equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis.*, V 14 (2011), N 3, 454-474. doi : 10.2478/s13540-011-0028-2.
- [182] Nigmatullin, R. Realization of the generalized transfer equation in a medium with fractional geometry. *Phys. Status B Basic Res.* 1986, 133, 425-430. [CrossRef]

- [183] N. Taleb, Etude de la Stabilité des équations différentielles d'ordre fractionnaire implicites, thèse de Doctorat, Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent, Algeria, 2019.
- [184] N. BOUSSETILA, Problème aux limites non locales pour une équation aux dérivées partielles opérationnelle, thèse de Magister, Département de Mathématiques, Université Badji-Mokhtar Annaba, Algeria, 1998.
- [185] Laskin N. *Fractional Dynamics*, 393-427 (2011) doi :10.1142/9789814340595\_0017
- [186] Bogolyubov N. N., Andrey Jr., Soldatov V. : *Appl. Math. Inf. Sci.* 13, 725 (2019) doi :10.18576/amis/130504
- [187] Zidan N., Abdel-Aty A.-H., Younes A., Zanaty E. A., Elkhayat I., Abdel-Aty M. : *Appl. Math. Inf. Sci.* 12, 265 (2018) doi :10.18576/amis/120127â.
- [188] N. Abdelhamid, Problèmes aux limites avec conditions nonlocales, thèse de Doctorat, Université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi, 2018.
- [189] O. Zigen, Existence and uniqueness of the solutions for a class of nonlinear fractional order partial differential equations with delay, *Computers and Mathematics with Applications*, Volume 61, Issue 4, February 2011, Pages 860-870.
- [190] O. Derrass. Étude analytique et numérique de quelques problèmes inverses, thèse de master, Université Mohamed Boudiaf de M'sila, Algeria, 2018.
- [191] P.A.Raviart, V.Giranly. Finite element approximation of the Navier-Stokes equation lectures notes mathematiques, E.D.A. Sold et Beckmann, Springer-verlag, Berlin, 1979.
- [192] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press & Beijing World Publishing Corporation, 2008.
- [193] R. Hilfer, *Applications Of Fractional Calculus In Physics*, World Scientific, River Edge., New Jersey, (2000).
- [194] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications*, Springer.
- [195] R.P. Agarwal, M. Mechan et D. O'regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge university press.
- [196] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publ.Co (2000). 4, 9
- [197] R. Hilfer, Threefold introduction to fractional derivatives. In G. Radons R. Klages and I. M. Sokolov, editors, *Anomalous Transport : Foundations and Applications*. Wiley-VCH (2008).
- [198] R.P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He, Existence of fractional neutral functional differential equations, *Comput. Math. Appl.* 59 (3) (2010), 1095-1100.
- [199] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications*, Springer.
- [200] R.P. Agarwal, M. Mechan et D. O'regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge university press.
- [201] R.P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions, *Acta Appl. Math.* DOI 10.1007/s10440-008-9356-6.

- [202] R.W. Ibrahim, S. Momani, On existence and uniqueness of solutions of a class of fractional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*, 3334 (2007), 1-1.
- [203] R.P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions, *Acta Appl. Math.* DOI 10.1007/s10440-008-9356-6.
- [204] Agarwal, RP, OâRegan, D, Stanek, S, *Nachr.* 285, 27-41(2012).
- [205] Agarwal, RP, Ahmad, B, *Comput. Math. Appl.* 62, 1200-1214(2011)
- [206] R.W. Ibrahim, S. Momani, On existence and uniqueness of solutions of a class of fractional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*, 3334 (2007), 1-1.
- [207] R. Ahlem, H. Ratiba, Command adaptive à modèle de référence d'ordre fractionnaire de systèmes linéaire, mémoire de Masster, Université de Bouira, 2016.
- [208] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*, USA : Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [209] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations, *Electron. J. Differ. Eq.*, 2006(2006), 1-12.
- [210] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev : *Fractional Integrals And Derivatives : Theory And Applications*, Gordon And Breach Science Publishers., Switzerland, (1993).
- [211] S.F. Lacroix, *Traité du Calcul Différentiel Et du Calcul Integral*, Paris : Mme. Ve-Courcier, (1819), Tome Troisième, Seconde Edition, pp. 409-410.
- [212] S.A. David, J.L. Linarese and E.M.J.A. Pallone : *Fractional Order Calculus : Historical Apologia, Basic Concepts and Some Applications*, *Revista Brasileira de Ensino de Fisica.*, Vol. 33, No. 4, 4302, (2011).
- [213] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations, *Electron. J. Diff. Equ.* 2006, No. 36, pp, 1-12.
- [214] S. Szufła, On the application of measure of noncompactness to existence theorems. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 75 (1986), 1-14.
- [215] Xinwei, S, Landong, L, *Appl.Math.J.Chin.Univ.*B22(3),291-298(2007)
- [216] Su, X, Zhang, S, *Electron. J. Differ. Equ.* 2009,26(2009).
- [217] S. KHoukhou, Étude de quelques problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionnaires, thèse de Master, Unversité Kasdi Merbah, Algeria, 2016. OUARGLA
- [218] S. Bensebaa, Sur quelques problèmes aux limites fractionnaires, thèse de Doctorat, Département de Mathématiques, Université Badji-Mokhtar Annaba, Algeria, 2016.
- [219] S. Momani, Z. odibat, Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order. Volume 365, Issues 5â6, Pages 345-350. 11 June 2007.
- [220] S. Mehdi, Équations différentielles d'ordre fractionnaires dans des espaces de Banach, Mémoire de Magister, Université Abou Bekr BelKaid Tlemcen Faculté des Sciences, 2012.
- [221] Tarasov, V. E. *Fractional dynamics : applications of fractional calculus to dynamics of particles, Fields and media.* Springer Science Business Media, 2011.

- [222] T. HOUMOR. Analyse du Chaos dans un Système d'équations Différentielles Fractionnaires, thèse de Doctorat, Université Constantine1, Algeria, 2014.
- [223] Said T. Chouikh A., Bennai M. : Appl. Math. Inf. Sci. 13, 839 (2019) doi :10.18576/amis/130518
- [224] T. Amele , Étude analytique des équations Fractionnaires et applications, thèse de Doctorat LMD, universite abdelhamid ben badis Modtaganem, Algeria, 2015-2016.
- [225] T. Nada, Etude de la Stabilité des équations différentielles d'ordre fractionnaire implicites, Mémoire de Master, Algeria, 2019.
- [226] T. Brahim, Résolution des équations différentielles fractionnaires, thèse de Doctorat, Université des Frères Mentouri Constantine 1, 2018.
- [227] V. Lakshmikantham, S. Leela, J. Vasundhara Devi, Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Scientific Publishers, 2009.
- [228] V.I. Korzyuk, The method of enegy inequalities and molifying operators, Vestnik Belgosuniversiteta. Ser. 1. Fizika, Matematika, Informatika, 3 (1996), 55-71 (Russian).
- [229] V.E. Tarasov , Fractional Dynamics, Applications Of Fractional Calculus To Dynamics of particles, Fields And Media, Springer, Heidelberg, (2010).
- [230] V. Gafiychuk, B. Datsun, V. Meleshko, Mathematical modeling of time fractional reactiondiffusion systems. J. Comp. Appl. Math. 220 (2008), 215-225.
- [231] W.A.Doy. Extensions of a property of the heat équation to linear thermoelasticity and other theories, Quart.Appl.Math, 1983, 319-330.
- [232] Watugula, G. K. Sumudu Transform : a new integral transform to Solve differential equations and control engineering problems, Int. J. Math. Educ. Sci. Tech., 24(1), (1993).
- [233] X. Hao, H. Wang, Positive solutions of semipositone singular fractional differential systems with a parameter and integral boundary conditions, Open Math., 16(2018), 581-596.
- [234] X. Hao, H. Sun, L. Liu, Existence results for fractional integral boundary value problem involving fractional derivatives on an infinite interval, Math. Meth. Appl. Sci., 41(2018), 6984-6996.
- [235] X. Liu, Z. Liu, Separated boundary value problem for fractional differential equations depending on lower-order derivative, Adv. Differ. Equations, 2013(2013), 1-11.
- [236] X. Y. Liu, Y. L. Liu, Fractional differential equations with fractional non-separated boundary conditions, Electron. J. Differ. Eq., 2013(2013), 1-13.
- [237] X. J. Li, C. J. Xu, Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation, "Communications in Computational Physics", V 8 (2010), N 5, pp.1016-1051.
- [238] Y. F. Sun, Z. Zeng, J. Song, Existence and uniqueness for the boundary value Problems of nonlinear fractional differential equations, Appl. Math., 8(2017), 312-323.
- [239] Z. Odibat et S. Momani, The variational iteration method : An efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics. Comput. Math. Appl., pages 2199-2208, 2009.

- [240] O. Zigen, Existence and uniqueness of the solutions for a class of nonlinear fractional order partial differential equations with delay, *Computers and Mathematics with Applications*, Volume 61, Issue 4, February 2011, Pages 860-870.
- [241] Z. Fairouz, Etude de certaines equations differentielles abstraites avec conditions aux limites non locales, thèse de Doctorat, 2007.
- [242] Z. Djelloul, Méthode combinée des perturbations HPM et VIM pour la résolution des équations différentielles ordinaires et EDP d'ordre fractionnaire, thèse de doctorat, université d'oran1 Ahmed Ben Bella, 2016.
- [243] Z. Bai, H. Lu, Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, *J. Math. Appl.*, 2005, 311(2) :495-505.
- [244] Z. Ouyang; Existence and uniqueness of the solutions for a class of nonlinear fractional order partial differential equations with delay, *Comput. Math. Appl.*, 2011, 61(4) :860-870.