Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abbas LAGHROUR Khenchela

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques

et Informatiques

N° : ....

Mémoire de Fin d'Études

Pour l'obtention du diplôme de Master (LMD)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Intitulé :

Méthode de Décomposition d'Adomian (ADM)

Dirigé par : S. Brahimi

Soutenue publiquement le: 30 /Mai / 2018

Réalisé par : -Laiche Zineb.

-Baadache Imane.

Devant le jury composé de :

-Président :	Mr. SAOUDI Khaled	M.C. /A	Université de khenchela
-Directeur :	Mr. BRAHIMI Saadoune	M.A. /A	Université de khenchela
-Examinateur :	Mme. DARDOUKH Asma	M.A. /A	Université de khenchela

Année Universitaire : 2017/2018

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents, Qui m'ont appris la tolérance, l'esprit d'ouverture, et la soif des connaissances.

À ma chère mère.

À mon cher père.

À mon cher mari T.M, qui m'a soutenu et encouragé tout le long de ce travail.

À mes sœurs Hiba, Rim, Feryal et Hana.

À mes chers frères Wail et Hachem.

À mon collègue Imane.

À toutes mes amies qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Zineb

Dédicaces

Je dédie ce modeste mémoire :

À mes très chers parents qui m'ont toujours soutenu et qui ont sacrifié leur vie ours afin de faire de moi ce que je suis. Que dieu les protège.

À ma chère tante Saliha.

À mes chères frères Oussama et Yahia.

À mes chères sœurs Oumnia et Aridj.

À mon ami Zineb.

À toutes mes amies et surtout Chahinez ,Aicha et Afaf.

À tous ceux qui m'aiment et ceux que j'aime.

Imane

Remerciements

Avant toute considération, je dois remercier le grand Dieu ALLAH le tout puissant qui m'a donné la force pour mener à terme ce long et dur travail.

En premier lieu je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse Monsieur BRAHIMI SAADOUNE enseignant à l'université de Khenchela pour : sa disponibilité,
ses précieux conseils mais aussi ses encouragements.
Il m'a fait profiter de son expérience et de sa rigueur, ce fut un grand plaisir de travailler avec lui.
Merci encore Monsieur BRAHIMI.

Je tiens aussi à remercier Monsieur KHALED SAOUDI enseignant à l'université de Khenchela pour m'avoir fait un grand honneur et plaisir en acceptant de présider le jury.

Je remercie également Madame DARDOUKH ASMA enseignante à l'université de Khenchela, membre de jury comme examinateur pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

Je ne saurais oublier toutes les autres personnes qui, plus ou moins directement, ont contribué aussi bien à la réussite de ce travail.

Mille mercis,

Résumé

La Méthode de Décomposition d'Adomian (ADM) a été largement appliquée dans la résolution des équations différentielles partielles qui représentent divers phénomènes en ingénierie et en physique.

Cette méthode est facile à utiliser et elle peut fournir des solutions analytiques aux problèmes, en utilisant simplement les conditions initiales.

Après avoir exposé les grands principes de la méthode, on montre ici comment on peut l'appliquer pour résoudre des problèmes pour l'EDP non linéaire et on illustre par des exemples numériques l'efficacité de cette puissante technique qui donne une méthode pour le calcul des polynômes d'Adomian.

Mots clés : Méthode de décomposition d'Adomian; polynômes d'Adomian; EDP ; terme non linéaire; MATLAB.

Abstract

The Adomian Decomposition Method (ADM) has been widely applied in solving partial differential equations which represent various phenomena in engineering and physics.

This method is easy to use and can provide analytical solutions to the problems by just utilizing the initial conditions.

After presenting the main principles of the method, we show here how it can be applied to solve problems for non-linear PDE and we illustrate by numerical examples the efficiency of this powerful technique which gives a method for calculation Adomian polynomials.

Keywords: Adomian Decomposition Method; Adomian polynomials; EDP; nonlinear terms; MATLAB.

الملخص

تم تطبيق طريقة التحليل آدميان على نطاق واسع في حل المعادلات التفاضلية الجزئية التي تمثل مختلف الظواهر في الهندسة والفيزياء.

هذه الطريقة سهلة الاستعمال ويمكنها توفير حلول تحليلية للمسائل ، ببساطة عن طريق استخدام الشروط الأولية.

بعد عرض المبادئ الرئيسية للطريقة، نوضح هنا كيف يمكن تطبيق هذه الطريقة في حل مشكلات المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، ونوضح من خلال الأمثلة العددية كفاءة هذه التقنية التي تعطي طريقة بسيطة لحساب متعدد الحدود آدميان.

كلمات مفتاحيه : طريقة آدميان التحليلية؛ كثير الحدود آدميان؛ MATLAB؛ جزء غير خطي؛ EDP.

Table des matières

Notations

Classifications

H	Espace de Hilbert.
L_t	Opérateur linéaire différentiel d'order 1 facilement inversible.
R	Reste de l'opérateur linéaire.
N	Opérateur non-linéaire.
g	Terme source (fonction connue).
L_t^{-1}	L'inverse de l'opérateur linéaire L_t.
A_n	Polynômes d'Adomian.
$u_0, u_1, ..., u_n$	Composantes de la solution.

Abréviations

ADM	Méthode de décomposition d'Adomian.
EDP	Equations différentielles partielles.
EDO	Equations différentielles ordinaire.

Rappelle

Espace de Hilbert

- Un espace de Hilbert (réel, complexe) H est un espace vectoriel (réel, complexe) muni d'un produit scalaire (produit scalaire hermitien) , et complet pour la norme $||.|| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$
- Un espace préhilbertien (réel, complexe) qui est complet pour la norme associée à $\langle .,. \rangle$ est appelé espace de Hilbert

Exemples :

- $l^2(\mathbb{N})$:est un espace vectoriel constitué des élément $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que :

$$||(x_i)_{i\in I}||_2 = \left(\sum_{i\in I} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

- $L^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions définies presque partout et telles que :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Opérateur contractant

Généralement, on dit qu'une application N d'un espace vectoriel normé E dans lui même est un opérateur contractant si il existe une constante $C < 1$ telle que :4

$$\forall x \in E \qquad ||N|| \leq C.$$

Espace de Banach

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la métrique définie à partir de sa norme.

Équation intégro-différentielles de Volterra

L'équation intégro-différentielle de Volterra apparaît dans la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

Où $u^{(n)}$ indique la dérivée n-iéme de u.

$K(x,t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale et $f(x)$ est une fonction donnée, et λ est un paramètre.

Liste des tableaux

Introduction

Beaucoup de problèmes modélisant des phénomènes naturels ou industriels dans plusieurs domaines, tels que dynamique de population, dynamique des fluides, la propagation de la chaleur dans un domaine, etc.. . . ; sont des modèles pour équations aux dérivées partielles EDP avec des conditions initiales et conditions aux limites.

Résoudre un problème pour EDP c'est trouver la solution exacte qui vérifie ce problème avec ses conditions.

Dans la réalité c'est très difficile et rare de trouver la solution explicite du problème, et a cause de ça on cherche une solution approchée du problème, avec des méthodes numériques.

Dans le travail que nous représentons ici, nous abordons une méthode numérique crée par GEORGE ADOMIAN dans les années 1980. La méthode et très efficace de point de vue qu'elle fournira la solution exacte dans plusieurs exemples, cette méthode est dite ADM ou méthode de décomposition d'Adomian ou méthode décompositionelle.

Le mémoire comprend une introduction générale et quatre chapitres. Le premier est consacré à la définition, l'étude de la méthode avec quelques exemples d'applications.

Le deuxième chapitre et consacre à la définition et à la recherche des polynômes d'Adomian avec applications sur des exemples et la convergence de la méthode, le troisième chapitre et fait l'objet de l'application de la méthode ADM sur quelque problème pour EDP.

Quant au quatrième chapitre, il est l'objet de mise en œuvre informatique ou on a utilisé un programme MATLAB pour évaluer la solution approchée et la comparée avec la solution exacte.

Chapitre 1

Introduction à la méthode décompositionnelle d'Adomian (ADM)

Résumé

Dans ce chapitre, nous donnons une présentation sur la méthode décompositionnelle d'Adomian. Nous expliquons également le principe de cette méthode, des applications à différents types d'équations fonctionnelles sont données par Adomian. En particulier on peut utiliser cette méthode pour résolution numérique d'équations algébriques non linéaire et des équations différentielles ordinaires.

1.1 Aperçu sur la méthode

La méthode de décomposition est une méthode mathématique ,cette méthode est d'abord proposée par le mathématicien américain, **GEORGE ADOMIAN** au début des années 1980 ([8], [9], [20], [10]) pour résoudre des équations fonctionnelles linéaires et non linéaires ([21]) de différents types (algébriques, différentielles, aux dérivées partielles ($E.D.P$), ordinaire($E.D.O$), intégrales, intégro-différentielles, ... etc. ([11], [12], [13], [14], [18], [1], [17]) et aussi les systèmes de ces types d'équations.

La méthode de décomposition d'Adomian ($A.D.M$) a été appliquée à des classes très larges de problèmes dans de nombreux domaines, comme les mathématiques, la physique, biomathématiques, la biologie et la chimie parmi d'autres domaines [10].

Cette méthode consiste à décomposé l'opérateur non-linéaire en série dans lequel les termes sont calculés de façon récursive. La série obtenue peut donner la solution exact, si une telle existe est convergente. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre par un schéma direct quelques problèmes.

1.2 Principe de la méthode d'Adomian (ADM)

La méthode décompositionnelle d'Adomian ([6]) permet de résoudre des problèmes fonctionnels de différents types : équations algébriques, différentielles, intégrales, intégro différentielles, aux dérivées partielles ($E.D.P$).

Pour mieux illustrer le principe de la méthode décompositionnelle, considérons l'équation suivante :

$$F(u) = f \tag{1.1}$$

Où f est une fonction donnée.

F : représente un opérateur différentiel ordinaire ou partiel non-linéaire d'un espace de Hilbert H dans H, comprenant des termes linéaire et non-linéaire. Le terme linéaire est généralement décomposé en deux termes, donc on peut écrire :

$$F = L + R + N$$

Où L est l'opérateur différentiel linéaire de F facilement inversible, R représente le reste de l'opérateur linéaire et N le terme non-linéaire de F.

Donc l'équation (1.1) peut s'écrire de la forme suivante :

$$L(u) + R(u) + N(u) = f$$

Alors

$$L(u) = f - R(u) - N(u) \tag{1.2}$$

Appliquant l'opérateur inverse L^{-1} sur l'équation (1.2) on obtient :

$$L^{-1}L(u) = L^{-1}(f) - L^{-1}R(u) - L^{-1}N(u) \tag{1.3}$$

L^{-1} : constitue une intégrale d'ordre n (double ou triple...).

L'équation (1.3) se transforme en :

$$u(t) = g(t) - L^{-1}R(u) - L^{-1}N(u) \tag{1.4}$$

Avec $g(t)$ représente la fonction définie par l'intégration de f avec la constante de l'intégration $L^{-1}L(u)$.

La méthode d'Adomian consiste à chercher la solution u sous la forme d'une série, c'est-à-dire :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$$

Et le terme non linéaire N à décomposer sous forme d'une série :

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

En substituant dans (1.4), on trouve :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = g(t) - L^{-1}R(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) - L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n) \tag{1.5}$$

où les A_n sont des polynômes qui dépendent de $u_0, ..., u_n$, appelés les polynômes d'Adomian et sont obtenus grâce à la relation suivante ([16], [7]) :

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k u_k\right)\Bigg|_{\lambda=0} \tag{1.6}$$

où λ est un paramètre réel.

De la relation (1.5) on trouve :

$$\begin{cases} u_0 = g \\ u_1 = L^{-1}R(u_0) + L^{-1}A_0(u_0) \\ u_2 = L^{-1}R(u_1) + L^{-1}A_1(u_0, u_1) \\ \vdots \\ u_{n+1} = L^{-1}R(u_n) + L^{-1}A_n(u_0, u_1, ..., u_n) \end{cases}$$

Remarque 1.2.1 *1. Si L est un opérateur différentiel d'ordre 1 comme suit*

$$L_t(.) = \frac{\partial}{\partial t}(.) \quad , L_t^{-1}(.) = \int_{t_0}^{t} (.)dt$$

On a

$$L_t^{-1}L_t(u) = u(t) - u(t_0)$$

De l'équation (1.3) nous obtenons :

$$u - u(t_0) = L_t^{-1}(f) - L_t^{-1}R(u) - L_t^{-1}N(u)$$

On a par définition $u(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(t)$, *alors :*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(t_0) + L_t^{-1}(f) - L_t^{-1}R(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) - L_t^{-1}N(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(t_0) + L_t^{-1}(f) - L_t^{-1}R(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) - L_t^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n)$$

alors

$$\begin{cases} u_0 = u(t_0) + L_t^{-1}f \\ u_{n+1} = -L_t^{-1}R(u_n) - L_t^{-1}(A_n) \end{cases} \tag{1.7}$$

2. *Si L est un opérateur différentiel d'ordre* 2 *c'est-à-dire :*

$$L_{tt}(.) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(.) \quad , L_{tt}^{-1}(.) = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} (.)dt \right) dt$$

On a

$$L_{tt}^{-1}L_{tt}(u) = u(t) - u(t_0) - u'(t_0)t$$

De l'équation (1.3), *on obtient :*

$$\begin{aligned} u - u(t_0) - u'(t_0)t &= L_{tt}^{-1}(f) - L_{tt}^{-1}R(u) - L_{tt}^{-1}N(u) \\ u &= u(t_0) + u'(t_0)t + L_{tt}^{-1}(f) - L_{tt}^{-1}R(u) - L_{tt}^{-1}N(u) \end{aligned}$$

la solution s'écrie sous forme d'une série $u(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(t)$, *alors :*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(t_0) + u'(t_0)t + L_{tt}^{-1}(f) - L_{tt}^{-1}R(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) - L_{tt}^{-1}N(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$$

donc

$$\begin{cases} u_0 = u(t_0) + u'(t_0)t + L_{tt}^{-1}(f) \\ u_{n+1} = -L_{tt}^{-1}R(u_n) - L_{tt}^{-1}N(u_n) \end{cases} \tag{1.8}$$

3. *Si L est un opérateur différentiel d'ordre le plus grand facilement inversible. En utilise la formule suivante :*

$$L^{-1}L(u) = u - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} u^{(k)}(t_0) \tag{1.9}$$

Où $u(t_0)$,$u'(t_0)$ *et* $u''(t_0), ..., u^{(n-1)}(t_0)$ *sont données.*
Substituant dans (1.4),*on trouve*

$$u - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t)^k}{k!} u^{(k)}(t_0) = L^{-1}(f) - L^{-1}R(u) - L^{-1}N(u)$$

On a : $u(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(t)$, $N(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t)^k}{k!} u^{(k)}(t_0) + L^{-1}(f) - L^{-1}R(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) - L^{-1}N(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$$

D'où l'on tire :

$$\begin{cases} u_0 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} u^{(k)}(t_0) + L^{-1}(f) \\ u_1 = -L^{-1}R(u_0) - L^{-1}(A_0) \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}R(u_n) - L^{-1}(A_n) \end{cases} \tag{1.10}$$

4. *En pratique, on ne peut pas calculer tous les termes de la série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ *mais on peut approcher la solution par la série tronquée :*

$$u_M(t) = \sum_{n=0}^{M} u_n(t) \tag{1.11}$$

avec

$$\lim_{M \to \infty} u_M(t) = u(t)$$

Le problème qui se pose est comment déterminer les $(A_n)_{n \geq 0}$.

Exemple 1.2.1 *Considérons l'équation non linéaire suivante :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^2 \tag{1.12}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 1$$

La solution exacte de l'équation (1.12) *est :*

$$u(t) = \frac{1}{1-t}, \ t \neq 1 \tag{1.13}$$

On peut définir l'opérateur différentielle linéaire par :

$$L_t(.) = \frac{\partial}{\partial t}(.)$$

L'inverse de l'opérateur L_t *est :*

$$L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt$$

L'équation différentielle (1.12) *s'écrit sous la forme de l'opérateur c.-à-d. :*

$$L_t(u) = N(u) \tag{1.14}$$

avec N *opérateur non linéaire telle que :*

$$N(u) = u^2$$

Appliquant L_t^{-1} *sur l'équation* (1.14) *on obtient*

$$L_t^{-1}L_t(u) = L_t^{-1}N(u) \tag{1.15}$$

$$L_t^{-1}L_t(u) = u(t) - u(0) \tag{1.16}$$

On a $u(0) = 1$ *donc :*

$$L_t^{-1}L_t(u) = u(t) - 1 \tag{1.17}$$

L'équation (1.15) *est équivalent à :*

$$u(t) - 1 = L_t^{-1}N(u)$$

donc

$$u(t) = 1 + L_t^{-1}N(u) \tag{1.18}$$

Cherchons polynôme d'Adomian, on définit $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$, $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$. *On substitue en* (1.18), *on obtient :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = 1 + L_t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{1.19}$$

On a par définition $u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n$, $Nu(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n$

$$\begin{aligned}
Nu(\lambda) &= [u(\lambda)]^2 \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n\right)^2 \\
&= (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + ... + \lambda^n u_n + ...)(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + ... + \lambda^n u_n + ...) \\
&= {u_0}^2 + \lambda^2 u_1^2 + \lambda^4 u_2^2 + \lambda^6 u_3^2 + 2\lambda^2 u_0 u_2 + 2\lambda^3 u_0 u_3 + 2\lambda^3 u_1 u_2 + 2\lambda^4 u_1 u_3 \\
&\quad +2\lambda^5 u_2 u_3 + 2\lambda u_0 u_1 + 2\lambda^4 u_0 u_4 + ... \\
&= u_0^2 + \lambda(2u_0 u_1) + \lambda^2(u_1^2 + 2u_0 u_2) + \lambda^3(2u_0 u_3 + 2u_1 u_2) + \lambda^4(2u_0 u_4 + 2u_1 u_3 + u_2^2) + ...
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2 \\ A_1 &= 2u_0u_1 \\ A_2 &= u_1^2 + 2u_0u_2 \\ A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2 \\ A_4 &= 2u_0u_4 + 2u_1u_3 + u_2^2 \\ &\vdots \\ A_n &= u_0u_n + u_1u_{n-1} + ... + u_nu_0 + u_{n-1}u_1 \end{aligned} \quad (1.20) \; (1.21)$$

D'après (1.19), *on a :*

$$\begin{cases} u_0(t) = 1 \\ u_{n+1} = L_t^{-1}A_n = \int_0^t A_n dt \end{cases} \quad (1.22)$$

alors :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \int_0^t A_0 dt = \int_0^t u_0^2 dt = \int_0^t dt = t \\ u_2 = \int_0^t A_1 dt = \int_0^t 2u_0u_1 dt = \int_0^t 2t dt = t^2 \\ u_3 = \int_0^t A_2 dt = \int_0^t u_1^2 + 2u_0u_2 dt = \int_0^t 3t^2 dt = t^3 \\ u_4 = \int_0^t A_3 dt = \int_0^t 2u_0u_3 + 2u_1u_2 dt = \int_0^t 4t^3 dt = t^4 \\ \vdots \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + ... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \end{aligned}$$

Série de Taylor converge vers la solution exacte ($|t| < 1$)

$$u(t) = \frac{1}{1-t} \quad (1.23)$$

Exemple 1.2.2 *Considérons l'équation non linéaire suivante :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^4 \quad (1.24)$$

avec :

$$u(0) = 1$$

On a l'opérateur linéaire est $L_t(.) = \frac{\partial(.)}{\partial t}$ *avec* $L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt$, *l'opérateur non linéaire est* $N(u) = u^4$

donc :

$$L_t(u) = N(u) \tag{1.25}$$

Appliquant L^{-1} *sur* (1.25) *on obtient :*

$$\begin{aligned} L_t^{-1}L_t(u) &= L_t^{-1}N(u) \\ &= u(t) - u(0) \end{aligned}$$

alors :

$$u(t) = 1 + L_t^{-1}N(u) \tag{1.26}$$

On a $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$, *donc :*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) &= 1 + L_t^{-1}N\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right), \quad N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) &= 1 + L_t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \end{aligned}$$

La relation de récurrence est alors :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = L_t^{-1}(A_n) \end{cases} \tag{1.27}$$

Calcul les polynômes d'Adomian.

On a :

$$\begin{aligned}
N(u) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_n\right)^4 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_n\right)\ \left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_n\right)\\
&= (u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2+...+\lambda^n u_n+...)(u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2+...+\lambda^n u_n+...)\\
&\quad (u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2+\lambda^3u_3+...+\lambda^n u_n+...)(u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2+\lambda^3u_3+...+\lambda^n u_n+...)\\
&= u_0^4+\lambda u_0^3u_1+\lambda^2u_2u_0^3+\lambda^3u_0^3u_3+\lambda^4u_0^3u_4+\lambda u_0^3u_1+3\lambda^2u_0^2u_1^2+3\lambda^3u_1u_0^2u_2\\
&\quad +3\lambda^4u_1u_0^2u_3+3\lambda^2u_0^2u_1^2+3\lambda^3u_1^2u_0+3\lambda^4u_1^2u_0u_2+3\lambda^2u_0^3u_2+3\lambda^3u_1u_0^2u_2\\
&\quad +3\lambda^4u_0^2u_2^2+\lambda^3u_1^3u_0+\lambda^4u_1^4+6\lambda^3u_1u_0^2u_2+6\lambda^4u_0u_1^2u_2+3\lambda^3u_0^3u_3\\
&\quad +3\lambda^4u_1u_0^2u_3+3\lambda^4u_0u_1^2u_2+3\lambda^4u_0^2u_2^2+...\\
&= u_0^4+\lambda(u_0^3u_1)+\lambda^2(4u_0^3u_2+6u_0^2u_1^2)+\lambda^3(4u_0^3u_3+12u_0^2u_1u_2+4u_1^3u_0)\\
&\quad +\lambda^4(u_0^3u_4+12u_0u_1^2u_2+4u_1^4+6u_0^2u_2^2+6u_0^2u_1u_3)+...
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0^4\\
A_1 &= u_0^3u_1\\
A_2 &= 4u_0^3u_2+6u_0^2u_1^2\\
A_3 &= 4u_0^3u_3+12u_0^2u_1u_2+4u_1^3u_0\\
A_4 &= u_0^3u_4+12u_0u_1^2u_2+4u_1^4+6u_0^2u_2^2+6u_0^2u_1u_3\\
&\ \vdots
\end{aligned}\tag{1.28}$$

alors les termes u_i sont

$$\begin{cases}
u_0=1\\
u_1=\int\limits_0^t A_0dt=\int\limits_0^t u_0^4dt=\int\limits_0^t dt=t\\
u_2=\int\limits_0^t A_1dt=\int\limits_0^t u_0^3u_1dt=\int\limits_0^t tdt=\frac{1}{2}t^2\\
u_3=\int\limits_0^t A_2dt=\int\limits_0^t 4u_0^3u_2+6u_0^2u_1^2dt=\int\limits_0^t 8t^2dt=\frac{8}{3}t^3\\
u_4=\int\limits_0^t A_3dt=\int\limits_0^t 4u_0^3u_3+12u_0^2u_1u_2+4u_1^3u_0dt=\int\limits_0^t \frac{62}{3}t^3dt=\frac{31}{6}t^4\\
\vdots
\end{cases}$$

On a $u(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(t)$

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0+u_1+u_2+u_3+... \\ u(t) &= 1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{8}{3}t^3+... \end{aligned}$$

Application 01(Résolution d'équation algébrique[5])

Soit l'équation algébrique :

$$t^2-4t+1=0 \tag{1.29}$$

La solution de l'équation (1.29) est

$$t=\frac{4-\sqrt{12}}{2}\approx 0.267 \tag{1.30}$$

On a

$$t=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4} \tag{1.31}$$

donc

$$N(t)=t^2\ ,\ N(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$$

où $N(t)$ est un l'opérateur non linéaire, L est la multiplication par 4 et L^{-1} la division par 4.

Les polynômes A_n doivent être évalués à partir de $N(t)$.

La solution t s'écrie sous forme d'une série

$$t=\sum_{n=0}^{\infty}t_n$$

donc

$$\begin{aligned} t &= \sum_{n=0}^{\infty}t_n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}A_n+\frac{1}{4} \\ t &= 0.25\sum_{n=0}^{\infty}A_n+0.25 \end{aligned} \tag{1.32}$$

alors d'aprés (1.32) on a

$$\begin{cases} t_0=0.25 \\ t_1=0.25A_0 \\ t_2=0.25A_1 \\ \vdots \\ t_{n+1}=0.25A_n \end{cases}$$

En prenant la formule (1.20) en considération, on trouve :

$$\begin{cases} t_0 = 0.25 \\ t_1 = 0.25A_0 = 0.25{t_0}^2 = 0.015625 \\ t_2 = 0.25A_1 = 0.252t_0t_1 = 0.0009765 \\ t_3 = 0.25A_2 = 0.25({t_1}^2 + 2t_0t_2) = 0.0001831 \\ \vdots \end{cases}$$

Remarquant que :

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 \approx 0.266 \tag{1.33}$$

En comparant la solution obtenue (1.33) par la méthode de décomposition avec la solution exacte (1.30), on voit que les deux résultats sont très proches.

Application 02 :

Soit l'équation algébrique

$$t^4 - 4t + 1 = 0 \tag{1.34}$$

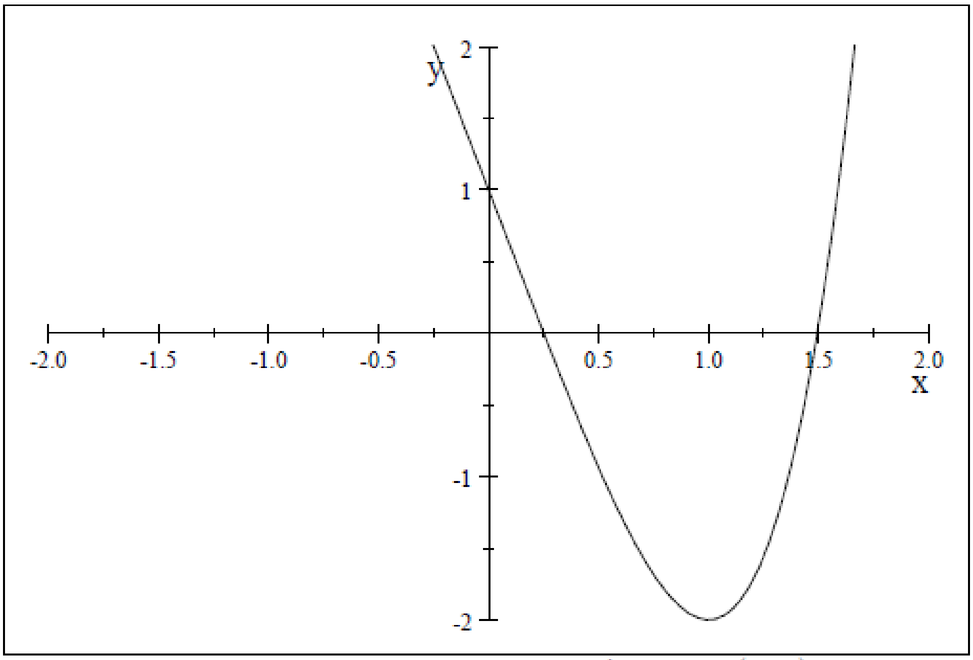

Figure 1 : La solution exacte de l'équation (1.34).

Les solutions exactes de (1.34) sont t_1 et t_2 :

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.250\,99 \\ t_2 &= 1.493\,4 \end{aligned} \tag{1.35}$$

D'après (1.34) on obtient :

$$t = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{4}$$

On a :

$$N(u) = t^4 \ , \ N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$t = 0.25 + 0.25 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{1.36}$$

donc :

$$\begin{cases} t_0 = 0.25 \\ t_{n+1} = 0.25 A_n \end{cases} \tag{1.37}$$

On utilise la formule (1.28) pour calcul les termes t_i, nous obtenons :

$$\begin{cases} t_0 = 0.25 \\ t_1 = 0.25 A_0 = 0.25 t_0^4 = 0.0009765625 \\ t_2 = 0.25 A_1 = 0.25({t_0}^3 t_1) = 0.0000152587 \\ t_3 = 0.25 A_2 = 0.25(4{t_0}^3 t_2 + 6{t_0}^2 {t_1}^2) = 0.0000013112966 \\ t_4 = 0.25 A_3 = 0.25(4t_0^3 t_3 + 12{t_0}^2 t_1 t_2 + 4{t_1}^3 t_0) = 0.0000000940631 \\ \vdots \end{cases}$$

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + ... \approx 0.250\,99 \tag{1.38}$$

La valeur t (1.38) est une valeur approchée de la solution exacte de (1.34) ($fig(1)$).

Application 03

Soit l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\frac{du}{dt} + u^2 = 0 \tag{1.39}$$

avec

$$u(0) = 1$$

la solution analytique de (1.39) est :

$$u'(t) = -u(t)^2$$

$$-\frac{u'(t)}{u(t)^2} = 1$$

$$\left.\frac{1}{u(t)}\right|_0^t = t|_0^t$$

$$\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{u(0)} = t$$

On a $u(0) = 1$ donc

$$\frac{1}{u(t)} = t + 1$$

alors la solution exact est :

$$u(t) = \frac{1}{t+1} \tag{1.40}$$

On applique la méthode d'Adomian

On a : $L(u) = \frac{du}{dt}$, $\qquad N(u) = u(t)^2$

$$L^{-1}L(u) = L^{-1}(u^2)$$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(0) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \\ u &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -L^{-1}A_n \end{cases} \tag{1.41}$$

d'après (1.20), on trouve

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ A_0 &= u_0^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}A_0 = -t \\ A_1 &= 2u_0u_1 = -2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= -L^{-1}A_1 = t^2 \\ A_2 &= u_1^2 + 2u_0u_2 = 3t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= -L^{-1}A_2 = -t^3 \\ A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2 = -4t^3 \end{aligned}$$

Alors la solution est donnée par :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{t+1} \tag{1.42}$$

Chapitre 2

Polynômes d'Adomian

Résumé

L'objet de ce chapitre consiste à donner quelques méthodes pour calculer les polynômes d'Adomian, nous donnons aussi des exemples pour résoudre équation de Bernoulli et de Volterra, on se propose aussi de donner des conditions assez générales permettant de démontrer la convergence de la méthode d'Adomian.

Définition 2.0.1 ***George Adomian*** *à proposer une série de polynômes spéciaux, appelés polynômes d'Adomian définis par la formule [9] :*

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} N\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^k u_k\right)\Big|_{\lambda=0} \end{cases} \tag{2.1}$$

Où λ est un paramètre réel. Cette formule est valable pour tous les types de non linéarité.

Démonstration. Sachant que :

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Par utilisation du développement de Taylor, on aura :

$$N(u) = f(u(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(u(\lambda))}{n!}(\lambda - 0)^n \Big|_{\lambda=0}$$

Si on pose :

$$f(u(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n \tag{2.2}$$

Il vient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(u(\lambda))}{n!}(\lambda - 0)^n \Big|_{\lambda=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n$$

donc

$$A_n = \frac{f^{(n)}(u(\lambda))}{n!}\Big|_{\lambda=0}$$

Ou les polynômes d'Adomian A_n sont donnés par :

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(u(\lambda))}{\partial\lambda^n}\Big|_{\lambda=0} \tag{2.3}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \lambda}$$

Puisque

$$f = f(u), \qquad u = u(\lambda)$$

■

2.1 Calcul de Polynômes d'Adomian

Une étape importante dans la méthode de décomposition est le calcul des polynômes d'Adomian, on propose quelques méthodes pour la détermination de ces polynômes avec des exemples.

Méthode 01 :

On a :

$$N(u(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^k A_k$$

D'autre part :

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} N(u(\lambda))\Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} N(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k u_k)\Bigg|_{\lambda=0}$$

pour obtenir les A_n on dérive à l'ordre n les deux membres de la première égalité on obtient

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} N(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k u_k) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} (\sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k) \tag{2.4}$$

Si $n = 0$ on détermine A_0
Si $n = 1$ on détermine A_1...*etc.*

Exemple 2.1.1

$$\begin{aligned} N(u) &= uv \\ u(\lambda) &= u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + ... \\ \sum_{0}^{n} \lambda^k A_k &= (u_0 + \lambda u_1 + ...)(v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + ...) \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$:

$$A_0 = u_0 v_0$$

La dérivée première :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda}(A_0 + \lambda A_1)\Big|_{\lambda=0} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(u_0 + \lambda u_1)(v_0 + v_1)\Big|_{\lambda=0} \\ A_1 &= u_1 v_0 + u_0 v_1 \end{aligned}$$

La dérivée seconde :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)\Big|_{\lambda=0} &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)(v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2)\Big|_{\lambda=0} \\ 2A_2 &= 2(u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) \end{aligned}$$

$$A_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0$$

Méthode 02 :

Pour calculer les polynômes d'Adomian, on utilise les formules :

$$u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n \ , \qquad N_\lambda(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n$$

On développe $N_\lambda(u)$ sous forme de puissances de λ ,par comparaison, A_n est donné par le coefficient de λ^n.

Exemple 2.1.2

$$N(u) = uv$$

on pose : $\quad u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n, \quad u_{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{nt} \lambda^n$

Après substitution dans $N(u)$ on trouve :

$$N_\lambda(u) = (u_0 + \lambda u_1 + ...)(v_0 + \lambda v_1 + ...)$$

On rassemble tous les termes du même degré de λ on obtient :

$$N_\lambda(u) = u_0 v_0 + (u_1 v_0 + u_0 v_1)\lambda + (u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2)\lambda^2 + ...$$

et

$$\begin{aligned} N_\lambda(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \\ &= A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + ... \end{aligned}$$

Les polynômes d'Adomian sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0 v_0 \\ A_1 &= u_1 v_0 + u_0 v_1 \\ A_2 &= u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2 \end{aligned}$$

Les autres A_n se calculent de la même façon.

Remarque 2.1.1 *Pour calculer les polynômes d'Adomian, on utilise [7]*

$$\begin{cases} A_0 = N(u_0) \\ A_1 = u_1 N^{(1)}(u_0) \\ A_2 = u_2 N^{(1)}(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 N^{(2)}(u_0) \\ A_3 = u_3 N^{(1)}(u_0) + u_1 u_2 N^{(2)}(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 N^{(3)}(u_0) \\ A_4 = u_4 N^{(1)}(u_0) + (\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3) N^{(2)}(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 N^{(3)}(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 N^{(4)}(u_0) \\ \vdots \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2 La convergence de la méthode d'Adomian

Une observation importante est que la solution obtenue par ADM généralement converge à la solution exacte, si une telle existe.

Soit l'équation fonctionnelle :

$$u = f + N(u) \tag{2.6}$$

f est une fonction connue.

L'équation (2.6) s'appelle la forme canonique

Pour toute série convergente $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ on définit l'opérateur non linéaire $N(u)$ par

$$N(u) = \sum_{i=0}^{n} A_i(u_0, ..., u_n)$$

Nous savons que la méthode décompositionnelle consiste à chercher la solution u sous la forme :

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$$

Alors on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = f + \sum_{i=0}^{n} A_i, \text{ Alors on trouve } \begin{cases} u_0 = f \\ u_1 = A_0 \\ u_2 = A_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} = A_n \end{cases}$$

On déduit de cette formule que $\sum_{i=0}^{\infty} u_i = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$

Les premières preuves de convergence sont basées sur la méthode du point fixe.

Si $\sum_{i=0}^{\infty} A_i < +\infty$ et réciproquement la méthode d'Adomian se ramène a la recherche d'une suite $(S_n)_n$

Tel que $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

Avec

$$\begin{cases} S_0 = 0 \quad , \quad u_0 = f \\ \text{et} \\ S_{n+1} = N(u_0 + S_n) \qquad\qquad n = 0, 1, 2... \end{cases} \tag{2.7}$$

En effet

$$u_1 = S_1 = N(u_0) = A_0$$

Puis

$$S_2 = u_1 + u_2 = N(u_0 + u_1) = A_0 + A_1$$

Mais

$$u_1 = A_0$$

D'où il résulte

$$u_2 = A_1, \text{ etc.}$$

On dispose de résultats correspondant au théorème du point fixe.

Théorème 2.2.1 *Si l'opérateur N est une application contractante (vérifie $||N|| \leq \delta < 1$) alors la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge vers S ([19], [15], [4], [3]).*
où S est la solution unique de l'équation $S_{n+1} = N(u_0 + S_n)$ avec $S_0 = 0$.
De plus les $u_n = S_n - S_{n-1}$ tendent vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} ||S_{n+1} - S|| &\leq ||N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S)|| \\ &\leq ||N||||S_n - S|| \\ &< \delta||S_n - S|| \\ &\leq \delta^n||S_1 - S|| \end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite $(S_n)_n$ vers S. ■

Remarque 2.2.1 *Revenons sur la convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n = N\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n\right)$ lorsque $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n$ converge. Si $N(u)$ peut être approché par un polynôme en u alors $N(u) = N\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n\right)$ peut être développé en série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n$ faisant intervenir les dérivées $n-$ième de N.*

2.2.1 Ordre de convergence

On suppose que la suite (S_n) converge vers S
S'il existe deux constantes réelles positives k et c telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{S_{n+1} - S}{(S_n - S)^k} \right| = c \tag{2.8}$$

Alors l'ordre de convergence de (S_n) est égale à k .

2.3 Applications (problèmes) :

Dans cette section, nous présentons une solution analytique et numérique pour l'équation de Bernoulli et de Volterra.

2.3.1 Equation de Bernoulli :

On considère le problème suivant (équation de Bernoulli) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(t)u = b(t)u^m \\ u(0) = u_0 \end{cases} /m \in \mathbb{N}^* \tag{2.9}$$

On a l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a(t)u + b(t)u^m/m \in \mathbb{N}^* \tag{2.10}$$

La solution donnée par :

$$u(t) = \sum_{n\geq 0} u_n t^n \tag{2.11}$$

On applique la méthode d'Adomian avec $F = L + R + N$ tel que :

$$\begin{cases} L(.) = \frac{\partial}{\partial t}, \quad L^{-1}(.) = \int\limits_0^t (.)dt \\ Ru = -a(t)u \\ \\ Nu = b(t)u^m \end{cases} \tag{2.12}$$

donc

$$Lu = Ru + Nu \tag{2.13}$$

On applique l'opérateur L^{-1} dans l'équation (2.13) on obtient :

$$L^{-1}Lu = L^{-1}Ru + L^{-1}Nu$$

Alors

$$u - u(0) = L^{-1}\left(-a(t)u\right) + L^{-1}(b(t)u^m)$$

On utilise (2.11) on obtient :

$$\sum_{n\geq 0} u_n t^n = u(0) - L^{-1}\left(a(t)\sum_{n\geq 0} u_n t^n\right) + L^{-1}\left(b(t)\sum_{n\geq 0} A_n t^n\right)$$

On utilise le développement limité au voisinage de 0 des fonctions a et b :

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{n\geq 0} a_n t^n \\ b(t) &= \sum_{n\geq 0} b_n t^n \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} u_n t^n &= u(0) - L^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n \sum_{n\geq 0} u_n t^n\right) + L^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} b_n t^n \sum_{n\geq 0} A_n t^n\right) \\ &= u(0) - L^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} t^n.\left(\sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k}\right)\right) + L^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} t^n.\left(\sum_{k=0}^{n} b_k A_{n-k}\right)\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} u_0 = u(0) \\ u_{n+1} = -L^{-1}\left(\sum\limits_{n\geq 0} t^n.\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k u_{n-k}\right)\right) + L^{-1}\left(\sum\limits_{n\geq 0} t^n.\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k A_{n-k}\right)\right) \end{cases} ,\forall n \geq 1 \qquad (2.14)$$

A_i sont des polynômes d'Adomian de la fonction non-linéaire u^m .

2.3.2 Equation intégro-différentielle de Volterra

On peut supposer une équation intégro-différentielle de Volterra du première type donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(t) + \int\limits_0^t k(t,x)u(x)dt \\ u(0) = a_0 \end{cases} \qquad (2.15)$$

Intégration des deux côtés de 0 à t une fois conduit à :

$$u(t) = a_0 + L^{-1}(f(t)) + L^{-1}\left(\int\limits_0^t k(t,x)u(t)dt\right)$$

Où la condition initiale $u(0)$ est utilisé, et L^{-1} est un opérateur intégral.
Nous utilisons en suite la série de décomposition :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \qquad (2.16)$$

Donc on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = a_0 + L^{-1}(f(t)) + L^{-1}\left(\int\limits_0^t k(t,x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt\right)$$

Pour déterminer les composants de la solution $u(t)$, Nous avons mis la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0(t) = a_0 + L^{-1}(f(t) \\ u_{n+1}(t) = L^{-1}\left(\int\limits_0^t k(t,x)u_n(t)dt\right) \end{cases} , n \geq 0 \qquad (2.17)$$

La solution $u(t)$ est alors obtenu sous forme de série converge vers la solution exacte, si une telle solution existe.

2.4 Applications numériques :

2.4.1 Equation de Bernoulli :

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + tu = t^3u^3 \\ u(0) = 1 \end{cases} \tag{2.18}$$

La solution exacte :
On pose :

$$z = \frac{1}{u^2} \Rightarrow z' = \frac{-2u'}{u^3}$$

On obtient en substitution dans l'équation (2.18) :

$$z' - 2tz = -2t^3$$

C'est une équation linéaire et la solution générale donnée par :

$$z(t) = t^2 + 1 + ce^{t^2}$$

Et la solution de (2.18) :

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 + ce^{t^2}}} \text{ , } u(0) = 1$$

Et on utilise le développement limité on trouve :$(c = 0)$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 - \frac{5}{16}t^6 + ... \tag{2.19}$$

Méthode d'Adomian :
On applique la relation (2.14) sur l'équation (2.18) on trouve :
Par suite :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n\geq 0} u_n t^n = u(0) - L^{-1}\left(t.\sum_{n\geq 0} u_n t^n\right) + L^{-1}\left(t^3.\sum_{n\geq 0} A_n t^n\right) \\ &= u(0) - L^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} u_n t^{n+1}\right) + L^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} A_n t^{n+3}\right) \\ &= u(0) - \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+2} u_n t^{n+2}\right) + \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+4} A_n t^{n+4}\right) \\ &= u(0) - \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} u_{n-2} t^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} A_{n-4} t^n\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = -\frac{u_0}{2} = -\frac{1}{2} \\ u_3 = -\frac{u_1}{3} = 0 \\ u_4 = \frac{1}{4}(-u_2 + A_0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \\ u_5 = \frac{1}{5}(-u_3 + A_1) \ = 0 \\ u_6 = \frac{1}{6}(-u_4 + A_2) = \frac{1}{6}(-\frac{3}{8} - \frac{3}{2}) = -\frac{5}{16} \\ \vdots \\ u_n = \frac{1}{n}(-u_{n-2} + A_{n-4}) \ , \ n \geq 4 \end{cases}$$

La solution donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + u_1 t^1 + u_2 t^2 + u_3 t^3 + u_4 t^4 + u_5 t^5 + u_6 t^6 + ... \\ u(t) &= 1 + 0.t + (-\frac{1}{2})t^2 + 0.t^3 + \frac{3}{8}t^4 + 0.t^5 + (-\frac{5}{16})t^6 + ... \end{aligned}$$

alors

$$u(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 - \frac{5}{16}t^6 + ... \tag{2.20}$$

2.4.2 Equation intégro-différentielle de Volterra :

On utilise la méthode d'Adomian pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 1 - \int\limits_0^t u(x)dx \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

Application de l'opérateur intégral L^{-1} sur les deux côtés de (2.21), C'est à dire intégrant les deux côtés de (2.21) une fois de 0 à t et en utilisant la condition initiale donnée, nous obtenons :

$$L^{-1}(\frac{\partial u}{\partial t}) = t - L^{-1}\left(\int\limits_0^t u(x)dx\right)$$

$$\begin{aligned} \int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial t}dt &= \int\limits_0^t 1dt - \int\limits_0^t\int\limits_0^t u(x)dxdt \\ u(t) - u(0) &= t - \int\limits_0^t\int\limits_0^t u(x)dxdt \ , \ L^1(.) = \int\limits_0^t .dt \ , \ \ u(0) = 0 \end{aligned}$$

donc :

$$u(t) = t - L^{-1}\left(\int_0^t u(x)dx\right)$$

Utilisation de la série de décomposition $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$

Donc la relation de récurrence est (d'après (2.17)) :

$$\begin{cases} u_0(t) = t \\ u_{n+1}(t) = -L^1\left(\int_0^t u_n(x)dx\right) \end{cases} \tag{2.22}$$

alors :

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= t \\
u_1(t) &= -L^1\left(\int_0^t u_0(x)dx\right) = -L^1\left(\int_0^t xdx\right) = -\int_0^t\int_0^t xdxdt = -\frac{1}{3!}t^3 \\
u_2(t) &= -L^1\left(\int_0^t u_1(x)dx\right) = -\int_0^t\int_0^t -\frac{1}{3!}x^3dxdt = -\int_0^t -\frac{1}{4!}t^4dt = \frac{1}{5!}t^5 \\
u_3(t) &= -L^1\left(\int_0^t u_2(x)dx\right) = -\int_0^t\int_0^t \frac{1}{5!}x^5dxdt = -\int_0^t -\frac{1}{6!}t^6dt = -\frac{1}{7!}t^7 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Et ainsi de suite. Cela donne la solution sous forme de série :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + ...$$

Et par conséquent la solution exacte est donnée par :

$$u(t) = \sin(t) \tag{2.23}$$

Chapitre 3

Application des quelques problèmes pour l'EDP

Résumé

L'objet de ce chapitre consiste à appliquer ADM pour la résolution des problèmes pour l'EDP comme équation de transport et de la chaleur

Dans ce chapitre, nous avons examiné l'application de la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre quelques problèmes de l'EDP.

3.1 Problèmes paraboliques

On va appliquer la méthode de décomposition à la résolution d'une équation parabolique non linéaire avec condition initiale.

Problème d'application :

Concéderons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N(u) + f(x,t) & t \in]0,T[\quad , \quad x \in]0,1[\\ u(x,0) = g(x) & x \in]0,1[\\ u(0,t) = g1(t) & t \in]0,T[\\ u(1,t) = g2(t) & t \in]0,T[\end{cases} \tag{3.1}$$

La méthode de décomposition consiste à écrire la solution sous forme de séries infinies :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{3.2}$$

N décomposer sous la forme

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, ..., u_n) \tag{3.3}$$

Où les A_n sont les polynômes d'Adomian donnés par :

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} N u(\lambda) \bigg|_{\lambda=0} \tag{3.4}$$

On pose que

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}, \ \ L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt \tag{3.5}$$

$$L_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \ \ L_{xx}^{-1}(.) = \int_0^t \left(\int_0^t (.)dx \right) dx \tag{3.6}$$

L'équation (3.1) s'écrire :

$$L_t = L_{xx} + N(u) + f(x,t) \tag{3.7}$$

Appliquant l'inverse de l'opérateur L_t :

$$\begin{aligned} L_t^{-1} L_t(u) &= L_t^{-1} L_{xx}(u) + L_t^{-1} N(u) + L_t^{-1} f(x,t) \\ u(x,t) &= u(x,0) + L_t^{-1} f(x,t) + L_t^{-1} L_{xx}(u) + L_t^{-1} N(u) \end{aligned}$$

En utilisant les équations (3.2) et (3.3) on aura :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) &= u(x,0) + L_t^{-1} f(x,t) + L_t^{-1}\left(L_{xx}\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) + L_t^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)\\ &= u(x,0) + L_t^{-1} f(x,t) + L_t^{-1}\left(u_{nxx} + A_n\right)\end{aligned}$$

On détermine les u_n par suite :

$$\begin{cases} u_0(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} f(x,t) \\ \\ u_{n+1}(x,t) = L_t^{-1}\left(u_{nxx} + A_n\right) \end{cases} \tag{3.8}$$

Application 01

Considérons le problème suivant où le terme source est non linéaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-u} + e^{-2u} & (x,t) \in]0,1[\times]0,1[\\ \\ u(x,0) = \ln(x+2) & x \in t \in]0,1[\end{cases} \tag{3.9}$$

$f(x,t) = 0$, $g(x) = \ln(x+2)$, $N(u) = e^{-u} + e^{-2u}$
Les polynômes d'Adomian sont donnés par :
Si $\lambda = 0$:

$$A_0 = e^{-u_0} + e^{-2u_0}$$

La dérivée première :

$$\left.\frac{\partial}{\partial \lambda}(A_0 + \lambda A_1)\right|_{\lambda=0} = \left.\frac{\partial}{\partial \lambda}(-e^{-u_0-\lambda u_1} - e^{-2u_0-2\lambda u_1})\right|_{\lambda=0}$$

alors :

$$\begin{aligned} A_1 &= -u_1 e^{-u_0} - 2u_1 e^{-2u_0} \\ &= u_1(-e^{-u_0} - 2e^{-2u_0}) \end{aligned}$$

La dérivée seconde :

$$\left.\frac{\partial}{\partial \lambda}(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)\right|_{\lambda=0} = \left.\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}(-e^{-u_0-\lambda u_1-\lambda^2 u_2} - e^{-2u_0-2\lambda u_1-2\lambda^2 u_2})\right|_{\lambda=0}$$

Donc :

$$A_2 = -u_2(e^{-u_0} + \frac{1}{2}{u_1}^2) + (-2u_2 + 2{u_1}^2)e^{-2u_0}$$

Les autres polynômes se calculent de la même façon.

D'après la relation (3.8) on a :

$$\begin{cases} u_0 = \ln(x+2) \\ u_1 = \frac{t}{x+2} \\ u_2 = -\frac{t^2}{2(x+2)^2} \\ u_3 = \frac{t^3}{3(x+2)^3} \\ \vdots \\ u_n = \frac{(-1)^{n+1}t^n}{n(x+2)^n} \end{cases} \tag{3.10}$$

de l'équation de (3.2) on déduit :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \ln(x+2) + \frac{t}{x+2} + \frac{-t^2}{2(x+2)^2} + \frac{t^3}{3(x+2)^3} + ... + \frac{(-1)^{n+1}t^n}{n(x+2)^n} \\ u(x,t) &= \ln(x+2) + \ln(\frac{t}{x+2} + 1) \end{aligned}$$

alors

$$u(x,t) = \ln(x+t+2) \tag{3.11}$$

Donc $u(x,t)$ est la solution exacte de (3.9).

Application 02

Soit le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f + N & (x,t) \in]0,1[\times]0,1[\\ u(x,0) = g(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} & x \in]0,1[\\ u(0,t) = g1(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} & t \in]0,1[\\ u(1,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{1}{4(t+1)}} & t \in \times]0,1[\end{cases} \tag{3.12}$$

La solution exact de (3.12) est :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{x^2}{4(t+1)}}. \tag{3.13}$$

$g(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$, $f(x,t) = 0$, $N(u) = 0$

On cherche la solution sous la forme $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$

de la relation (3.8) on trouve :

$$\begin{cases} u_0(x,t) = u(x,0) \\ \\ u_{n+1}(x,t) = L_t^{-1}\left(u_{nxx}\right) \end{cases} \tag{3.14}$$

donc

$$\begin{cases} u_0(x,t) = e^{-\frac{x^2}{4}} \\ \\ u_1(x,t) = L_t^{-1}\left(u_{0xx}\right) = \int\limits_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\frac{x^2}{4}}\right) dt = \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} (\frac{1}{2}x^2 - 1\right) dt = \frac{1}{2} t e^{-\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) \\ \\ u_2(x,t) = L_t^{-1}\left(u_{1xx}\right) = \int\limits_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{2} t e^{-\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)\right] dt \\ \\ = \frac{1}{8} t^2 e^{-\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 3\right) \\ \\ u_3(x,t) = L_t^{-1}\left(u_{2xx}\right) = \int\limits_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{8} t^2 e^{-\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 3\right)\right] dt \\ \\ = \frac{1}{16} t^3 e^{-\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{24}x^6 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{15}{2}x^2 - 5\right) \\ \vdots \end{cases}$$

La solution est représentée comme série infinie $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$

donc

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0 + u_1 + u_2 + ... \\ &= \frac{1}{2} t e^{-\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) + \frac{1}{8} t^2 e^{-\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x - 3\right) \\ &\quad + \frac{1}{24} t^3 e^{-\frac{x^2}{4}} \left(-\frac{1}{8}x^5 + \frac{7}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right) + ... \end{aligned}$$

alors

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{3.15}$$

Ainsi les calculs sont longs et complexes, nous suggérons que l'algorithme en MATLAB permette une simplification des calculs de u_i.

3.2 Problème elliptique

Application 03

Soit l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(xtu) = 0, & \forall t > 0, x > 0 \\ u(x,0) = x, & x > 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

La solution exacte de (3.16) est

$$u(x,t) = xe^{-t^2} \tag{3.17}$$

On cherche la solution sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$\begin{aligned} L_t &= \frac{\partial}{\partial t}, \ L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt \\ L_x &= \frac{\partial}{\partial x}, \ L_x^{-1}(.) = \int_0^x (.)dx \end{aligned}$$

L'équation (3.16) devient

$$L_t(u) = -L_x(xtu)$$

On applique l'opérateur inverse L_t^{-1}, on trouve

$$L_t^{-1}L_t(u) = -L_t^{-1}L_x(xtu)$$

donc

$$u(x,t) = u(x,0) - L_t^{-1}L_x(xtu)$$

On a $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$,alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(x,0) - L_t^{-1}L_x(xt\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$$

d'où

$$\begin{cases} u_0 = u(x,0) \\ u_{n+1} = -L_t^{-1}L_x(xtu_n) \end{cases} \tag{3.18}$$

donc

$$\begin{cases} u_0 = u(x,0) = x \\ u_1 = -L_t^{-1} L_x(xtu_0) = -\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 t\right) dt = -xt^2 \\ u_2 = -L_t^{-1} L_x(xtu_1) = -\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2 t^3\right) dt = \frac{1}{2} xt^4 \\ u_3 = -L_t^{-1} L_x(xtu_2) = -\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} x^2 t^5\right) dt = -\frac{1}{6} xt^6 \\ \vdots \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + ... \\ u(x,t) &= x + -xt^2 + \frac{1}{2} xt^4 - \frac{1}{6} xt^6 + ... \\ u(x,t) &= x\left(1 + (-t^2) + \frac{1}{2!}(-t^2)^2 + \frac{1}{3!}(-t^2)^3 + ...\right) \end{aligned}$$

d'où

$$u(x,t) = xe^{-t^2} \tag{3.19}$$

3.3 Problème hyperbolique

Application 04

Soit le problème hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in]0,1[\ \times]0,1[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \in]0,1[\\ u(x,0) = \sin(\pi x) & x \in]0,1[\\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 & x \in]0,1[\end{cases} \tag{3.20}$$

la solution exacte de (3.20) est

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(3\pi t) \tag{3.21}$$

On cherche la solution sous la forme $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$

On a

$$\begin{aligned} L_{tt} &= \frac{\partial^2(.)}{\partial t^2}, \quad L_{tt}^{-1} = \int_0^t\int_0^t (.)dtdt \\ L_{xx} &= \frac{\partial^2(.)}{\partial x^2}, \quad L_{xx}^{-1} = \int_0^x\int_0^x (.)dxdx \end{aligned}$$

Alors l'équation (3.20) s'écrire sous la forme de l'opérateur

$$L_{tt} = 9L_{xx}$$

Appliquant L_{tt}^{-1}

$$L_{tt}^{-1}L_{tt} = 9L_{tt}^{-1}L_{xx}$$

On a L_{tt} est un opérateur différentiel d'ordre 2 c'est-à-dire $L_{tt}^{-1}L_{tt}(u) = u(t) - u(0) - u'(0)t$ donc

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(x,0) - u'(x,0)t &= 9L_{tt}^{-1}L_{xx}u(x,t) \\ u(x,t) &= u(x,0) + u'(x,0)t + 9L_{tt}^{-1}L_{xx}u(x,t) \end{aligned}$$

On a $u'(x,0) = 0$ alors

$$u(x,t) = u(x,0) + 9L_{tt}^{-1}L_{xx}u(x,t)$$

On a $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u(x,0) + 9L_{tt}^{-1}L_{xx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)$$

D'où

$$\begin{cases} u_0 = u(x,0) \\ u_{n+1} = 9L_{tt}^{-1}L_{xx}u_n \end{cases} \tag{3.22}$$

Alors

$$\begin{cases} u_0(x,t) = u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u_1(x,t) = 9L_{tt}^{-1}L_{xx}u_0 = 9\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2(u_0)}{\partial x^2}dtdt = 3^2\int_0^t\int_0^t -\pi^2\sin(\pi x)dtdt = -\frac{3^2}{2}t^2\pi^2\sin(\pi x) \\ u_2(x,t) = 9L_{tt}^{-1}L_{xx}u_1 = 9\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2(u_1)}{\partial x^2}dtdt = 3^2\int_0^t\int_0^t \frac{3^2}{2}t^2\pi^4\sin(\pi x)dtdt = \frac{3^4}{2.3.4}t^4\pi^4\sin(\pi x) \\ u_3(x,t) = 9L_{tt}^{-1}L_{xx}u_2 = 9\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2(u_2)}{\partial x^2}dtdt = 3^2\int_0^t\int_0^t -\frac{3^4}{2.3.4}t^4\pi^6\sin(\pi x)dtdt = -\frac{3^6}{2.3.4.5.6}t^6\pi^6\sin(\pi x) \\ \vdots \end{cases}$$

La solution $u(x)$ est alors obtenue sous forme de série

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... \\
u(x,t) &= \sin(\pi x) - \frac{3^2}{2!} t^2 \pi^2 \sin(\pi x) + \frac{3^4}{4!} t^4 \pi^4 \sin(\pi x) - \frac{3^6}{6!} t^6 \pi^6 \sin(\pi x) + ... \\
u(x,t) &= \sin(\pi x) \left(1 - \frac{1}{2!}(3\pi t)^2 + \frac{1}{4!}(3\pi t)^4 - \frac{1}{6!}(3\pi t)^6 + ... \right)
\end{aligned}
$$

alors

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(3\pi t) \tag{3.23}$$

En comparant la solution obtenue par l'ADM avec la solution exacte (3.21), on voit que les deux résultats sont très proches.

Chapitre 4

Programmation de la méthode d'Adomian

Résumé

Enfin de rendre possible la programmation de la méthode d'Adomian comme toute méthodes classique, nous proposons dans ce chapitre un programme informatique qui nous retourne les polynômes d'Adomian. Ce programme s'adapte au cas d'équation et quel que soit le terme non linéaire, liste les polynômes d'Adomian comme le ferait un code en MATALAB.

4.1 Programme informatique pour le calcul des polynômes d'Adomian

Propositions d'un programme informatique concis pour calculer rapidement les polynômes d'Adomian dans MATLAB, un langage de programmation intéressé spécifiquement par les ingénieurs, obtenir son concept de base à partir d'une technique bien établie développé par Wazwaz ([2]). Des exemples illustratifs sont fournis pour montrer la fiabilité du programme.

Le programme pou calcul se polynome d'Adomian est le suivant :

```
clc
clear
close all
syms N u
N = symfun(exp(-u)+exp(-2*u), u) ; % Non linear function.
% N = symfun(u^3, u) ;
% N = symfun(exp(u), u) ;
syms L num
num = 10 ; % Maximum number for A.
U = ['uo', sym('u',[1,num])] ;
AF = ['Ao', sym('A',[1,num])] ;
for i = 0 :num
temp = symfun(N(sum(L.^(0 :i).*U(1 :1+i))),L) ;
temp = diff(temp,i) ;
temp = (1/factorial(i)) * temp(0) ;
AF(i+1) = symfun(temp,U) ;
fprintf('A%d = ',i)
disp(temp)
end
```

Application 01

Calcule des polynômes d'Adomian pour l'opérateur non linéaire suivant

$$N(u) = e^{-u} + e^{-2u}$$

$A_0 = e^{(-u_0)} + e^{(-2u_0)}$
$A_1 = -u_1 e^{(-u_0)} - 2u_1 e^{(-2u_0)}$

$A_2 = (u_1^2 e^{(-u_0)})/2 - 2u_2 e^{(-2u_0)} - u_2 e^{(-u_0)} + 2u_1^2 e^{(-2u_0)}$

$A_3 = u_1 u_2 e^{(-u_0)} - 2u_3 e^{(-2u_0)} - (u_1^3 e^{(-u_0)})/6 - (4u_1^3 e^{(-2u_0)})/3 - u_3 e^{(-u_0)}$

$+4u_1 u_2 e^{(-2u_0)}$

$A_4 = (u_2^2 e^{(-u_0)})/2 - 2u_4 e^{(-2u_0)} - u_4 e^{(-u_0)} + 2u_2^2 e^{(-2u_0)} + (u_1^4 e^{(-u_0)})/24$

$+(2u_1^4 e^{(-2u_0)})/3 + u_1 u_3 e^{(-u_0)} + 4u_1 u_3 e^{(-2u_0)} - (u_1^2 u_2 e^{(-u_0)})/2 - 4u_1^2 u_2 e^{(-2u_0)}$

$A_5 = u_1 u^4 e^{(-u_0)} - 2u_5 e^{(-2u_0)} - (u_1^5 e^{(-u_0)})/120 - (4u_1^5 e^{(-2u_0)})/15 - u^5 e^{(-u_0)}$

$+u_2 u_3 e^{(-u_0)} + 4u_1 u_4 e^{(-2u_0)} + 4u_2 u2 e^{(-2u_0)} - 4u_1 u_2\hat{\ }2 e^{(-2u_0)} - 4u_1^2 u_3 e^{(-2u_0)}$

$+(8u_1^3 u_2 e^{(-2u_0)})/3 - (u_1\hat{\ }2 u_3 e^{(-u_0)})/2 + (u_1^3 u_2 e^{(-u_0)})/6$

$A_6 = (u_3^2 e^{(-u_0)})/2 - 2u_6 e^{(-2u_0)} - (u_2^3 e^{(-u_0)})/6 - u_6 e^{(-u_0)} - (4u_2^3 e^{(-2u_0)})/3$

$+2u_3^2 e^{(-2u_0)} + (u_1^6 e^{(-u_0)})/720 + (4u_1^6 e^{(-2u_0)})/45 + (u_1^2 u_2^2 e^{(-u_0)})/4 + 4u_1^2 u_2^2 e^{(-2u_0)}$

$+u_1 u_5 e^{(-u_0)} + u_2 u_4 e^{(-u_0)} + 4u_1 u_5 e^{(-2u_0)} + 4u_2 u_4 e^{(-2u_0)} - (u_1^2 u_4 e^{(-2u_0)})/2$

$+(u_1^3 u_3 e^{(-u_0)})/6 - (u_1^4 u_2 e^{(-u_0)})/24 - 4u_1^2 u_4 e^{(-2u_0)} + (8u_1^3 u_3 e^{(-2u_0)})/3$

$-(4u_1^4 u_2 e^{(-2u_0)})/3 - u_1 u_2 u_3 e^{(-u_0)} - 8u_1 u_2 u_3 e^{(-2u_0)}$

$\vdots$

◄ 4.1 Programme informatique pour le calcul des polynômes d'Adomian ►

Le programme suivant est pour calculer les termes u_n

```
clc
clear
close all
syms u x t f g N A U L
% ———————— Modifier ici ————————
f = symfun(0, [x,t]) ; % f(x,t)
g = symfun(exp(-x^2/4), x) ; % g(x)
N = symfun(0, u) ; % N(u)
num = 10 ; %
% ————————————————————————————-
A = cell(1,num) ;
U = ['uo', sym('u',[1,num])] ;
for i = 0 :num-1
temp = diff(symfun(N(sum(L.^(0 :i).*U(1 :1+i))),L),i) ;
temp = (1/factorial(i)) * temp(0) ;
A{i+1} = symfun(temp,U) ;
% fprintf('A%d = ',i) ;disp(temp)
end
for i = 0 :num-1
if(~i)
U(i+1) = g + int(f,t,0,t) ;
fprintf('u0 = ') ;disp(U(i+1))
end
temp = A{i+1} ;
str = sprintf('U(%d),',1 :num+1) ;
str(end) = ')' ;
eval(['temp = temp(',str,' ;'])
U(i+2) = int(diff(U(i+1),x,2) + temp,t,0,t) ;
fprintf('u%d = ',i+1) ;disp(U(i+2))
for i = 0 :num-1
end
```

On peut vérifier la précision de la méthode en calculant les M premiers termes de la solution et par comparaison avec la solution exacte on a raporté l'erreur absolue dans un tableau.

L'erreur absolue est donnée par :

$$E = |u(x, t_i) - u_M(x, t_i)|$$

Où u est la solution exacte et $u_M = \sum_{n=0}^{M} u_n(x, t)$

Application 02

On peut approcher la solution de (3.12) par la série tronquée :

$$u_M(x,t) = \sum_{n=0}^{M} u_n(x,t)$$

avec

$$\lim_{M\to\infty} u_M(x,t) = u(x,t)$$

$M = 5$

$$u_0 = e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$u_1 = te^{-\frac{x^2}{4}}\left(-\tfrac{1}{2} + x^2\tfrac{1}{4}\right)$$

$$u_2 = t^2e^{-\frac{x^2}{4}}\left(\tfrac{3}{8} - \tfrac{3}{8}x^2 + x^4\tfrac{1}{32}\right)$$

$$u_3 = t^3e^{-\frac{x^2}{4}}\left(-\tfrac{5}{16} + \tfrac{15}{32}x^2 - \tfrac{5}{64}x^4 + \tfrac{1}{384}x^6\right)$$

$$u_4 = t^4e^{-\frac{x^2}{4}}\left(\tfrac{35}{128} - \tfrac{35}{64}x^2 + \tfrac{35}{256}x^4 - \tfrac{7}{768}x^6 + \tfrac{1}{6144}x^8\right)$$

$$u_5 = t^5e^{-\frac{x^2}{4}}\left(-\tfrac{63}{256} + \tfrac{315}{512}x^2 - \tfrac{105}{512}x^4 + \tfrac{21}{1024}x^6 - \tfrac{3}{4096}x^8 + \tfrac{1}{122880}x^{10}\right)$$

$$u_6 = t^6e^{-\frac{x^2}{4}}\left(\begin{array}{c}\tfrac{231}{1024} - \tfrac{693}{1024}x^2 + \tfrac{1155}{4096}x^4 - \tfrac{77}{2048}x^6 + \tfrac{33}{16384}x^8 - \tfrac{11}{245760}x^{10} \\ +\tfrac{1}{2949120}x^{12}\end{array}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{5} u_n(x,t)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4}}\left(\begin{array}{c} t\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x^2\right) + t^2\left(\tfrac{3}{8} - \tfrac{3}{8}x^2 + x^4\tfrac{1}{32}\right) + t^3\left(-\tfrac{5}{16} + \tfrac{15}{32}x^2 - \tfrac{5}{64}x^4 + \tfrac{1}{384}x^6\right) \\ +t^4\left(\tfrac{35}{128} - \tfrac{35}{64}x^2 + \tfrac{35}{256}x^4 - \tfrac{7}{768}x^6 + \tfrac{1}{6144}x^8\right) \\ +t^5\left(-\tfrac{63}{256} + \tfrac{315}{512}x^2 - \tfrac{105}{512}x^4 + \tfrac{21}{1024}x^6 - \tfrac{3}{4096}x^8 + \tfrac{1}{122880}x^{10}\right) \\ +t^6\left(\tfrac{231}{1024} - \tfrac{693}{1024}x^2 + \tfrac{1155}{4096}x^4 - \tfrac{77}{2048}x^6 + \tfrac{33}{16384}x^8 - \tfrac{11}{245760}x^{10} + \tfrac{1}{2949120}x^{12}\right)\end{array}\right)$$

pour $x = \frac{1}{2}$

t	*La solution exacte*	*La solution approchée*	*L'ereure absolu* (E)
0.1	0.91058	0.90079	0.00979
0.2	0.87316	0.86653	0.00663
0.3	0.84356	0.83384	0.00972
0.4	0.81514	0.80803	0.00711
0.5	0.78940	0.78236	0.00704
0.6	0.76595	0.75799	0.00796
0.7	0.74446	0.73377	0.01069
0.8	0.72468	0.70820	0.01648
0.9	0.70640	0.67926	0.02714

Tableau 1 : Les résultats et les erreurs absolues correspondantes application 2 pour $M = 4,\ x = \frac{1}{2}$.

pour $x = \frac{1}{4}$

t	*La solution exacte*	*La solution approchée*	*L'ereure absolu* (E)
0.1	0.940 01	0.93569	0.00432
0.2	0.901 06	0.90635	0.00529
0.3	0.866 58	0.85762	0.00896
0.4	0.835 77	0.82479	0.01098
0.5	0.808 04	0.80532	0.00268
0.6	0.782 89	0.77304	0.00985
0.7	0.759 95	0.74658	0.01337
0.8	0.738 91	0.72548	0.013 43
0.9	0.719 53	0.70214	0.017 39

Tableau 2 : Les résultats et les erreurs absolues correspondantes application 2 pour $M = 4,\ x = \frac{1}{4}$.

Pour $M = 10$ nous obtenons les résultats suivantes
pour $x = \frac{1}{2}$

t	*La solution exacte*	*La solution approchée*	*L'ereure absolu* (E)
0.1	0.91058	0.919 2	1.62×10^{-3}
0.2	0.87316	0.873 98	8.17×10^{-4}
0.3	0.84356	0.845 64	2.08×10^{-3}
0.4	0.81514	0.821 29	6.145×10^{-3}
0.5	0.78940	0.789 98	5.75×10^{-4}
0.6	0.76595	0.767 19	1.24×10^{-3}
0.7	0.74446	0.747 54	3.08×10^{-3}
0.8	0.72468	0.730 35	5.674×10^{-3}
0.9	0.70640	0.744 58	3.8181×10^{-2}

Tableau 3 : *Les résultats et les erreurs absolues correspondantes application* 2 *pour* $M = 10, \ x = \frac{1}{2}$.

pour $x = \frac{1}{4}$

t	*La solution exacte*	*La solution approchée*	*L'ereure absolu* (E)
0.1	0.940 01	0.941 15	1.137×10^{-3}
0.2	0.901 06	0.901 25	1.931×10^{-4}
0.3	0.866 58	0.868 08	1.495×10^{-3}
0.4	0.835 77	0.837 05	1.2764×10^{-3}
0.5	0.808 04	0.808 28	2.4×10^{-4}
0.6	0.782 89	0.786 24	3.349×10^{-3}
0.7	0.759 95	0.762 85	2.897×10^{-3}
0.8	0.738 91	0.740 52	1.61×10^{-3}
0.9	0.719 53	0.721 21	1.684×10^{-3}

Tableau 4 : *Les résultats et les erreurs absolues correspondantes application* 2 *pour* $M = 10$, $x = \frac{1}{4}$.

Remarquant que pour $M = 10$, On a obtenu une bonne approximation de la solution, alors si on veut augmenter la précision on calcule un plus grand nombre de termes.

Application 04

On peut approcher la solution de (3.20) par la série tronquée :

$$u_M(x,t) = \sum_{n=0}^{M} u_n(x,t)$$

avec

$$\lim_{M\to\infty} u_M(x,t) = u(x,t)$$

Pour $M = 10$

$u_0 = \sin(\pi x)$

$u_1 = -\frac{9}{2}\pi^2 t^2 \sin(\pi x)$

$u_2 = \frac{27}{8}\pi^4 t^4 \sin(\pi x)$

$u_3 = -\frac{81}{80}\pi^6 t^6 \sin(\pi x)$

$u_4 = \frac{729}{4480}\pi^8 t^8 \sin(\pi x)$

$u_5 = -\frac{729}{44800}\pi^{10} t^{10} \sin(\pi x)$

$u_6 = \frac{2187}{1971200}\pi^{12} t^{12} \sin(\pi x)$

$u_7 = -\frac{1963}{358758400}\pi^{14} t^{14} \sin(\pi x)$

$u_8 = \frac{59049}{28700672000}\pi^{16} t^{16} \sin(\pi x)$

$u_9 = -\frac{59049}{975822848000}\pi^{18} t^{18} \sin(\pi x)$

$u_{10} = \frac{531441}{370812682240000}\pi^{20} t^{20} \sin(\pi x)$

$u_{11} = -\frac{1594323}{57105153064960000}\pi^{22} t^{22} \sin(\pi x)$

Alors

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{10} u_n(x,t)$$

$$= \sin(\pi x)\left(\begin{array}{c} 1 + -\frac{9}{2}\pi^2 t^2 + \frac{27}{8}\pi^4 t^4 - \frac{81}{80}\pi^6 t^6 + \frac{729}{4480}\pi^8 t^8 - \frac{729}{44800}\pi^{10} t^{10} + \frac{2187}{1971200}\pi^{12} t^{12} \\ -\frac{1963}{358758400}\pi^{14} t^{14} + \frac{59049}{28700672000}\pi^{16} t^{16} - \frac{59049}{975822848000}\pi^{18} t^{18} + \frac{531441}{370812682240000}\pi^{20} t^{20} \\ -\frac{1594323}{57105153064960000}\pi^{22} t^{22} \end{array}\right)$$

Si $x = \frac{1}{2}$

t	*La solution exacte*	*La solution approchée*	*L/ereure absolu* (E)
0.1	0.58778	0.58779	0.00001
0.2	-0.30901	-0.30902	0.00001
0.3	-0.95105	-0.95103	0.00002
0.4	-0.80901	-0.80781	0.0012
0.5	0.0	0.02750	0.027 5
0.6	0.80901	0.88050	0.071 49
0.7	0.95105	0.98002	0.028 97
0.8	0.30901	0.35090	0.041 89
0.9	0.98906	0.99905	0.009 99

Tableau 5 : *Les résultats et les erreurs absolues correspondantes application* 4 *pour* $x = \frac{1}{2}$.

pour $x = \frac{1}{4}$

t	*La solution exacte*	*La solution approchée*	*L/ereure absolu* (E)
0.1	0.008056	0.008057	0.000001
0.2	-0.004235	-0.004235	0.000000
0.3	-0.013036	-0.013036	0.000000
0.4	-0.011089	-0.011072	0.000017
0.5	0.0	0.02750	0.027 50
0.6	0.011089	0.012069	0.00098
0.7	0.013036	0.013433	0.000397
0.8	0.004235	0.004809	0.000574
0.9	0.013557	0.013694	0.000137

Tableau 6 : *Les résultats et les erreurs absolues correspondantes application* 4 *pour* $x = \frac{1}{4}$.

On remarque que pour $M = 10$ on a obtenu une bonne approximation de la solution. Si on veut augmenter la précision on calcule un plus grand nombre de termes.

Conclusion et perspectives

La méthode d'Adomian a déjà fait ses preuves dans le cadre de la résolution d'équations fortement non linéaires.

L'ADM est considéré comme un outil facile,éfficace et pratique avec une large applicabilité. Elle peut donner des résultats exacts ou approximatives aux problèmes considérés.

Cependant, l'utilisation de cette méthode se faisait assez difficilement du fait de la difficulté de l'obtention des polynômes.

Perspectives

1. L'ADM a été aplliquée pour résoudre les équations fonctionnelles unidimensionnelles, alors est-il possible d'appliquer cette méthode pour résoudre les équations multidimensionnelles ?
2. Peut-on appliquer la méthode ADM pour résoudre des problèmes fractionnaire ?

Bibliographie

[1] A. Pourdarvish. *A reliable symbolic implementation of algorithm for calculating Adomian polynomials*. Applied Mathematics and Computation, 172 :545–550, 2006.

[2] A. Wazwaz, "*A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators*," Appl. Math. Comput., vol. 111, pp. 53-69, 2000.

[3] D. Lesnic. *Convergence of Adomian's decomposition method : periodic temperatures*, Computers and Mathematics with Applications, 44 :13–24, 2002.

[4] E. Babolian and J. Biazar, *On the order of convergence of Adomian method*, Applied Mathematics and Computation, 130 :383–387, 2002.

[5] E. Babolian and S. Javadi, *Restarted Adomian method for algebraic equations*, Applied Mathematics and Computation, 146 :533–541, 2003.

[6] G. Adomian, *Nonlinear Stochastic Operator Equations*, Academic Press, San Diego, (1986).

[7] G. ADOMIAN, (1994), *Solving Frontier Problem of Physics : The Decomposition Method*, Kluwer Academic Publishers.

[8] G. Adomian, *Stochastic systems*, Academic press, 1983.

[9] G. Adomian, *nonlineare Stochastic Operator Equations*, Academic press, 1986.

[10] G. Adomian, *Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics*, Kluwer, 1989.

[11] G. Adomian, *The Kadomtsev-Petviashvili Equation*, Applied Mathematics and Computation, 76 :95–97, 1996.

[12] G. Adomian, *Random Volterra integral equations*, Mathematical and Computer Modelling, 22(8) :101–102, 1995.

[13] G. Adomian, *Delayed nonlinear dynamical systems*, Mathematical and Computer Modelling, 22(3) :77–79, 1995.

[14] G. Adomian, *The Nikolaevskiy model for nonlinear seismic waves*, Mathematical and Computer Modelling, 22(3) :81–82, 1995.

[15] K. Abbaoui,Y. Cherruault, G. Adomian et R. Rach, *Further Remarks on Convergence of Decomposition Method*, Computing International Jornal of Bio-Medical. 38 (1995) 89-93.

[16] K. ABBAOUI, (1995), *Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian et application à la résolution de problèmes issus de la biologie et de la médecine*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie-ParisVI.

[17] L. Wang, *A new algorithm for solving classical Blasius equation*, Applied Mathematics and Computation, 157 :1–9, 2004.

[18] M.M. Hosseini, *Adomian decomposition method for solution of differential-algebraic equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 197(2) :495–501, 2006.

[19] M.M. Hosseini, H. Nasabzadeh, *On the convergence of Adomian decomposition method*, AppliedMathematics and Computation 182, pp. 536-543,2006.

[20] R. E. Bellman and G. Adomian, *Partial Differential Equations-New methods for their Treatment and Applications*, Riedel, 1986.

[21] Y. Cherruault, G. Adomian, K. Abbaoui, and R. Rach, *Further remarks on convergence of decomposition method*, International Journal of Bio-Medical Computing, 38 :89 93, 1995.