الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عباس لغرور خنشلة
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR- KHENCHELA

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Mathématiques & Informatique

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques Appliquées

La stabilité exponentielle des systèmes différentiels linéaires à retard variant dans le temps

Réalisé par : **Boufrioua Hadia**

Dirigé par : **Mme.Derdoukh Asma**

Membres de jury :

Président : Ms.Ghammaz Abd El-Rahim

Examinateur : Ms.Sahraoui Alaeddine

Présenté le 03/09/2020

DEDICACES

JE DEDIE CE TRAVAIL A …

Mon père, *l'école de mon enfance, la source de mes efforts, mon exemple éternel, mon soutien moral et matériel, il représente pour moi le symbole de la bonté par excellence.*

Ma mère, *pour la quelle qui me porter neuf mois, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, ce travail est le fruit de ces sacrifices qu'elle a consentis pour mon éducation et ma formation.*

Ma deuieme mère, *ma tante* « **Fatiha** », *la flamme de mon cœur, le symbole de tendresse, la source de mes efforts, qui reste toujours dans mon cœur.*

A *mon seul frère* « **Mohamed Zaki** », *mon bonheur, mon âme que j'aime, que dieu le protège.*

A *ma chère* **grand-mère** *et tous* **mes oncles** *et* **tantes.**

A l'innocence « **Adam, Lujain, Sidra Al-Muntaha, Mohamed et Abd al- Moumin** ».

A *toute ma grande famille.*

A *mes chères copines « Ahlem, Aicha, Houda » et ma chère sœur «* **Khadidja** *». A tous mes amis et collègues de promotion.*

A *tous ceux ou celles qui me sont chers et qui j'ai omis involontairement de citer. A tous qui aime* HADIA *et tous que* HADIA *aime.*

Remerciements

Je remercie Dieu tout-puissant qui m'a donné la patience et la force pour terminer ce travail.

*Je tiens à remercier **Mme.Derdoukh Asma** pour sa supervision et ses encouragements envers moi, et grâce à sa grande présence et ses conseils, elle a pu mettre en œuvre ce travail.*

Alors, je l'envoie encore mes remerciements.

*Un grand merci à **Ms.Ghammaz Abd El-Rahim** d'avoir accepté de présider le jury.*

*De même, j'exprime ma gratitude à **Ms.Sahraoui Alaeddine** pour l'honneur qu'il m'accordé en acceptant de faire partie du jury et de revoir ce travail.*

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui ont facilité ma mission et toutes les personnes que j'ai connues au département de mathématiques.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ :

Ce memoire est consacré à l'étude des nouveaux critéres de la stabilité exponentielle des systèmes differentiels linèaires à retard variant dans le temps.

D'abord, nous avons présenté une étude détaillée sur l'existence, l'unicité, la continuation et la differentiabilité de la solution de ces systèmes. En suite, nous avons étudié la stabilité exponentielle de ces systèmes en presentant plusieure critères explicites.

Puis nous avons étudie la robustesse en stabilité de ces systèmes sous des perturbations spécifiées dans certaines conditions, en outre une borne de stabilité robuste pour les systèmes soumis à des perturbations variant dans le temps est donné, où nous réduisons également le problème de la stabilité des systèmes à retard variant dans le temps à des retards constants. Enfin : on présente quelques exemples illustratifs.

Abstract :

This thesis is devoted to the study of the new criteria of the exponential stability of linear differential systems with time varying delay.

First, we presented a detailed study on the existence, uniqueness, continuation and differentiability of the solution of these systems. Next, we have studied the exponential stability of these systems by presenting several explicit criteria. Then we study the robustness in stability of these systems under specified disturbances under certain conditions, further a robust stability bound for systems subjected to time varying disturbances is given, where we also reduce the stability problem systems with time varying delays to constant delays. Finally : we present some

illustrative examples.

Notations

Notations relatives aux ensembles :

1. $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
2. $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.
3. $\mathbb{R}^+$: ensemble des nombres réels ou nuls.
4. $\mathbb{R}^n$: espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
5. $\mathbb{R}^n_+$: espace de dimension n de vecteur réelle, où le vecteur positif non négatif.
6. $\mathbb{R}^{n\times m}$: ensemble de toutes les matrices réelles de A de dimension $n \times m$.
7. $\mathbb{R}^{n\times m}_+$: ensemble de toutes les matrices réelles non négatives de A de dimension $n \times m$.
8. $[a, b]$: intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
9. $]a, b[$: intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
10. $[a, b[$: intervalle semi-fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
11. $C = C\left([-\tau, 0]\,; \mathbb{R}^n\right)$ ensemble des fonctions continues de $[-\tau, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$.
12. $x_t \in C$ est définie par $x_t\left(\theta\right) = x\left(t - \theta\right), \forall\theta \in [-\tau, 0]$.
13. $|.|$: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
14. $\parallel . \parallel$: une norme sur $\mathbb{R}^n$.
15. $t \in \mathbb{R}$: variable temporelle.

Notations relatives aux vecteurs :

1. x^T : transposé du vecteur x.
2. $\parallel x \parallel$: norme euclidienne de x.
3. $x^{(i)}$: $i^{éme}$ dérivée de x par rapport au temps.
4. $x = [x_1, ..., x_n] \in \mathbb{R}^n$: vecteur d'état instantané.
5. $\dot{x}\left(t\right) = \frac{dx}{dt}$: dérivée temporelle de l'état x.

Notations relatives aux matrices

1. M : matrice de Metzler.
2. $\mu(M)$: l'abscisse spectrale M.
3. $[a_{ij}]$: matrice dont le coefficient de la $i^{éme}$ ligne et $j^{éme}$ colonne est a_{ij}.
4. A^T : transposé de la matrice A.
5. $A \geq 0\,(\leq 0)$ les entrées de la matrice A sont non négatifs (Non positifs).
6. $A > 0\,(< 0)$ toutes les entrées de la matrice A sont positives (négatives).
7. $A < B$ (resp. $A > B$) : signifie que $A - B$ est une matrice définie négative (resp. définie positive).
8. $\| A \|$: norme euclidienne de la matrice A.
9. I_n : matrice identité de $\mathbb{R}^{n\times n}$.
10. $\tau_{\max}$: le retard maximal du système.
11. $\tau_{\min}$: le retard minimal du systéme.

Mots clés

Systèmes différentiels linéaires variant dans le temps, systèmes différentiels à retard, stabilité exponentielle, Robustesse en stabilité.

INTRODUCTION

Les équations différentielles à retard sont étudiées depuis longtemps, elles constituent une classe large et importante de systèmes dynamiques. Les retards sont des composants naturels des processus dynamiques de la biologie, écologie, physiologie, économie, épidémiologie et mécanique et donc un modèle réaliste de ces processus doit inclure des retards.

Les équations différentielles à retard surviennent dans des situations où certains héréditaires de la fonction apparaît dans l'équation différentielle ordinaire.

Des études détaillées du monde réel nous obligent à prendre en compte le fait que le taux de changement des systèmes physiques ne dépend pas seulement de leur état actuel, mais aussi sur leur histoire passée (Bellman et Cooke, 1963).

Dans de nombreux phénomènes du monde réel, les conditions initiales ou la limite des conditions ne sont pas suffisantes pour prédire le comportement futur de la fonction. Par conséquent pour faire face à de telles complexités, il est nécessaire d'avoir une certaine connaissance du comportement de la fonction.

Le développement historique des DDE remonte aux années 1920, lorsque Volterra (1926) a étudié le modèle prédateur-proie dans une population de parasites avec délai (temps nécessaire pour que l'infection se manifeste dans l'hôte). Malheureusement, l'élan sur l'étude des DDE ne s'est accéléré qu'un demi-siècle plus tard. Le nouveau livre classique de Bellman et Cooke (1963) est maintenant crédité comme la première étude formelle des DDE. Par la suite, Hale (1977) a poussé l'étude des DDE au niveau actuel de profondeur, mais ce n'est qu'en 1993 que Verduyn

Lunel en collaboration avec Hale a écrit le texte d'introduction actuel sur les DDE.

Une équation différentielle à retard typique est de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1(t, y(t))), y(t - \tau_2(t, y(t))), ...).$$

Les retards $\tau_i, i = 1, 2, ...$ sont des grandeurs physiques mesurables et peuvent être constantes, une fonction de t, ou une fonction de t et y elle-même. La fonction de décalage $\tau_i(t, y(t)) \geq 0$ dépend de l'état s'il dépend des valeurs de la solution $y(t)$.

Les DDE peuvent être divisés en différentes catégories. Par exemple, certains les problèmes nécessitent un historique complet de la solution tandis que d'autres ne nécessitent qu'un l'histoire. On peut également distinguer entre constant, monotone, dépendant de l'état, état retards indépendants et en voie de disparition. Des tentatives ont également été faites pour faire la distinction entre DDE « rigides » et « non rigides ».

Les équations différentielles ordinaires sont des cas particuliers de DDE, cependant, dans certains cas simples, les DDE peuvent être liés à un système infini d'EDO. Il existe de nombreuses similitudes entre la théorie des ODE et celle des DDE et les méthodes analytiques pour les ODE ont été étendus aux DDE lorsque cela était possible. Cependant, leurs différences ont nécessité de nouvelles approches.

Des changements dans le comportement qualitatif de la solution peuvent être observés en conséquence d'un terme de retard. Dans les modèles biologiques, la présence de retards est « une source puissante de phénomènes non stationnaires tels que les oscillations périodiques et les instabilités ». Le délai peut agir comme un stabilisateur ou un déstabilisateur des modèles ODE.

Les équations différentielles à retard peuvent être classées comme suit :

- linéaire ou non linéaire,
- autonome (invariant sous le changement $t \to t + T$ pour tout $T \in \mathbb{R}$) ou non autonome,
- périodique de période $T, T > 0$, si invariant sous l'application $t \to t + T$,

Les équations différentielles à retard apparaissent dans de nombreux domaines d'application mathématiques. Les équations différentielles à retard (DDE) sont utilisées pour décrire des systèmes avec temporisation. De tels processus surviennent dans de nombreux domaines de la science en biologie (temps de maturité et temps d'incubation), des systèmes contrôlés (rétroaction retardée) et des aspects économiques (temps transport, délai pour obtenir des informations).

En général, on pense que le retard a un impact négatif sur la stabilité de systèmes. La compréhension du cas linéaire joue un rôle crucial dans l'analyse de telles équations, en particulier lorsque le comportement asymptotique est concerné. La recherche dans la stabilité des équations différentielles de retard a été lancé par les travaux de Nyquist(1932), Chebotarev (1949) et Pontryagin (1955) et plus récemment par Hale (1971).

L'étude systématique de ces équations a commencé au début du $20^{ième}$ siècle avec l'œuvre de Volterra (1928). Cependant, le comportement asymptotique des solutions n'étaient pas bien comprises à l'époque car l'approche habituelle était basée sur des arguments du théorème du point fixe. C'est Hale (1971) qui a montré que ces solutions monter à un semi-groupe d'opérateur sur un espace de fonctions approprié appelé espace des phases.

Plus tard, Webb (1974) a développé cette procédure en construisant d'abord un semigroupe et puis montrant que ce semi-groupe a donné les solutions de l'équation de retard. Un des problèmes le plus important et intéressant dans l'analyse du différentiel fonctionnel l'équation est l'étude de la stabilité des solutions. Cette théorie a été largement développée au cours des années précédentes pour les deux équations différentielles ordinaires (ODE) à retard et équations différentielles partielles (PDE) à retard.

Les PDE à retard sont naturellement plus difficiles que les ODE à retard, car ils sont de dimension infinie à la fois dans le temps et variable d'espace. Le développement a été lancé pour les équations à retard fini de Travis et Webb (1974, 1978) et plus tard par de nombreux auteurs.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la stabilité exponentielle des systèmes différentiels linéaires variant dans le temps à retard variant dans le temps de la forme :

$$\dot{x}(t) = A_0(t)\,x(t) +_{k=1}^{m} A_k(t)\,x(t-h_k(t)) +_{-h(t)}^{0} B(t,s)\,x(t,s)\,ds; t \geq \sigma$$

et aussi la robustesse en stabilité de ces systèmes sous des perturbations structurées a temps varie. L'approche utilisée est base sur la théorème de Perron-Frobinuis et le principe de comparaison.

Le mémoire est organisé comme suit :

★ Le premiér chapitre est consacré à des définitions et des résultats préliminaires et quelques théorèmes nécessaires.

★Le deuxième chapitre est consacré à présenter les systèmes à retard ainsi la théorie qui les concerne (l'existance, l'unicité, la continuation et la differentiabilité des solutions) .

★Le troisième chapitre présente des critères de stabilité des systèmes différentiels linèaires à retrad variant dans le temps et l'étude de la robustesse en stabilité des systemes perturbés.

★ Dans le quatrième chapitre nous considérons deux exemples illustratifs on discutons leurs stabilité.

Chapitre 1

Sommaire

- *Définitions et résultats préliminaires :*
  - *Les inégalités entre matrices*
  - *Matrice de Metzler*
  - *Normes des matrices*
  - *Propriétés des matrices de Metzler*

Ce chapitre est consacré à des définitions et des résultats préliminaires et quelques théorèmes nécessaires.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Notons $\mathbb{N}$, l'ensemble de tous les nombres naturels. Pour $m \in \mathbb{N}$ donné, soit $m :=$ $\{1, 2, ..., m\}$et $m_0 := \{0, 1, 2, ..., m\}$. Soit $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ désignent le ensemble de tous les nombres complexes et de tous les nombres réels, respectivement. Pour un entier $l, q \geq 1, \mathbb{k}^l$ désigne l'espace vectoriel à **1** dimensions sur $\mathbb{k}$ et $\mathbb{k}^{l\times q}$ représente l'ensemble de toutes les $l \times q$-matrices avec des entrées en $\mathbb{k}$.

1.1 Les inégalités entre matrices

Les inégalités entre matrices ou vecteurs réels seront comprises par composante.

Pour deux matrices réelles $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathbb{R}^{l\times q}$, on écrit

$$A \geq B \quad \text{ssi} \quad a_{ij} \geq b_{ij} \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., l, \text{ et } j = 1, ..., q$$

En particulier,

$$\text{Si } a_{ij} > b_{ij} \quad \text{pour } i = 1, ..., l, \text{et} \quad j = 1, ..., q. \quad \text{Alors on écrit} \quad A \gg B$$

Une matrice $A = (a_{ij})$ dans $\mathbb{R}^{l\times q}$ est appellée matrice positive si ses entrées a_{ij} sont non negatives c'est à dire : $a_{ij} \geq 0$, $i = 1, ..., l$, $j = 1, ..., q$, et elle est designée par $A \geq 0$. On note par $\mathbb{R}_+^{l\times q}$ l'ensemble de toutes les matrices positives $A \geq 0$.

1) Une matrice positive est appellée matrice non négative.

2) Une matrice A est appellée une matrice strictement positive et on écrit $A > 0$ si tous ses entrées a_{ij} sont strictement positive

Considérons les deux matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A est une matrice positive (non négative).

B est une matrice strictement positive.

Des notations similaires sont adoptées pour les vecteurs.

1.2 Matrice de Metzler

On appelle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice de Metzler si tous ses éléments non diagonaux sont non négatifs ; c'est-à- dire : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice de Metzeler si :

$$a_{ij} \geq 0, \ \forall i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}$$

On dit que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice Metzler stricte si :

$$a_{ij} \geq 0, \ \forall i, j = \overline{1, n} \ \text{ et } \ i \neq j$$

et

$$a_{ij} < 0 \text{ si } i = j$$

Considérons les deux matrices : $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telles que :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

A est une matrice de Metzler.

B est une matrice de Metzler stricte.

1.3 Normes des matrices

Pour $x \in \Bbbk^n$ et $P \in \Bbbk^{l\times q}$ on définit $|x| = (|x_i|)$ et $|P| = (|p_{ij}|)$. Puis on a

$$|PQ| \leq |P||Q|, \qquad \forall P \in \mathbb{R}^{l\times q}, \forall Q \in \mathbb{R}^{q\times r}.$$

Une norme $\|.\|$ sur $\Bbbk^n$ est dite monotone si $\|x\| \leq \|y\|$ lorsque $x, y \in k^n$, tel que $|x| \leq |y|$. Toute $p-$norme sur $\Bbbk^n$ definie par

$$\| x \|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \; 1 \leq p < \infty \quad \text{et } \| x \|_\infty = \max_{i=1,2,...,n} |x_i|$$

est monotone.

Proposition 1.1

La norme d'une matrice $P \in \Bbbk^{l\times q}$ est comprise comme sa norme d'opérateur associée à une paire de normes vectorielles monotones sur $\Bbbk^l$ et $\Bbbk^p$ donnée,

soit

$$\| P \| = \max \{\| P_y \| : \| y \| = 1\}.$$

Notez que

$$P \in \Bbbk^{l\times q}, \; Q \in \mathbb{R}_+^{l\times q}, \; |P| \leq Q \Rightarrow \| P \| \leq |||P||| \leq \| Q \|$$

En particulier, si $\mathbb{R}^n$ est doté de $\| \,.\, \|_1$ ou $\| \,.\, \|_\infty$ alors $\| A \| = |||A|||$ pour tout $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Plus précisément, on a

$$\| A \|_1 = |||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} {}^{n}_{i=1}|a_{ij}|; \qquad \| A \|_\infty = |||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} {}^{n}_{j=1}|a_{ij}|.$$

Définition 1.1

Pour toute matrice $M \in \Bbbk^{n\times n}$ l'abscisse spectrale de M notée $\mu(M)$ est definie par

$$\mu(M) = \max\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(M)\}$$

où

$$\sigma(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I_n - M) = 0\}$$

est le spectre de M.

Une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite Hurwitz stable si $\mu(M) < 0$. Autrement dit si toutes les valeurs propres de M ont une partie réelle stricetement négative c'est à dire $Re\lambda_i < 0$ pour tout valeur propre λ_i.

1.4 Propriétés des matrices de Metzler

Nous résumons maintenant quelques propriétés des matrices de Metzler qui être utilisé dans ce qui suit.

Supposons que $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice de Metzler. Alors

(i) **(Perron-Frobenius)** $\mu(M)$ est une valeur propre de M et il existe un vecteur propre non négative $x \neq 0$ tel que $Mx = \mu(M)x$.

(ii) Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un vecteur non nul $x \geq 0$ tel que $Mx \geq \alpha x$ si et seulement si $\mu(M) \geq \alpha$.

(iii) $(tI_n - M)^{-1}$ existe et est non négatif si et seulement si $t > \mu(M)$.

(iv) Étant donné $B \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Alors

$$|C| \leq B \Rightarrow \mu(M + C) \leq \mu(M + B)$$

Ce qui suit est immédiat du théorème precedent

Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice de Metzler. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mu(M) < 0$;

(ii) $M_P \ll 0$ pour certains $p \in \mathbb{R}^n_+$, $p \gg 0$;

(iii) M est inversible et $M^{-1} \leq 0$;

(iv) Pour $b \in \mathbb{R}^n$ donnée ,$b \gg 0$ il existe $x \in \mathbb{R}^n_+$, tel que $Mx + b = 0$;

(v) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, le vecteur ligne $x^T M$ a au moins une entrée négative.

Lemme 1.1 ***Lemme de Gronwall***

Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) +_a^t \psi(s) + y(s)\, ds$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) +_a^t \varphi(s)\, \psi(s) \exp\left({}_s^t \psi(u)\, du\right) ds$$

Chapitre 2

Sommaire

- Les systèmes différentiels linéaires à retards :
  - Exemple illustratif
  - Un problème général de valeur initiale
    - ✓ L'existence
    - ✓ L'unicité
    - ✓ La continuité des solutions
    - ✓ La différentiabilité des solutions
  - Les types de retard
    - ✓ Retards inconnus
    - ✓ Retards majorés
    - ✓ Retards bornés

Ce chapitre est consacré à présenter les systèmes différentiels linéaires à retard variant dans le temps par deux exemples et tous la théorie qui concerne.

CHAPITRE 2

LES SYSTÈMES À RETARD

Dans les applications, le comportement futur de nombreux phénomènes est supposé à décrire par les solutions d'une équation différentielle ordinaire cette hypothèse implique implicitement que le comportement futur est uniquement déterminé par le présent et indépendant du passé.

En différentiel des équations aux différences, ou plus généralement des équations différentielles fonctionnelles, le passé exerce une influence significative sur l'avenir. De nombreux modèles sont mieux représentés par des équations différentielles fonctionnelles, que par des équations différentielles ordinaires.

2.1 Exemples

Exemple 2.1

Considérons une population composée d'individus adultes et juvéniles.

Soit $N(t)$ dénote la densité des adultes au temps t.

Supposons que la longueur du la période juvénile est exactement h unités de temps pour chaque individu.

Présumer que les adultes produisent une progéniture à un taux par habitant α et que leur probabilité par unité de temps de mort est μ.

Supposons qu'un nouveau-né survit à la période juvénile avec probabilité ρ et mis $t = \alpha\rho$.

Ensuite, la dynamique de N peut être décrit par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\mu N(t) + rN(t-h) \tag{2.1}$$

qui implique un terme non local, $rN(t-h)$ signifiant que les nouveau-nés deviennent adultes avec un certain retard.

Ainsi, la variation temporelle de la densité de population N implique les valeurs actuelles et les valeurs passées de N.

De telles équations sont appelés équations différentielles fonctionnelles retardées (RFDE) ou alternativement, Équations à retard.

L'équation **(2.1)** décrit les changements de N. Pour déterminer une solution a un temps passé $t = 0$, nous devons prescrire la valeur de N à l'instant $-h$ et nous pouvons voir qu'il ne suffit pas de donner la valeur au point $-h$, car l'exemple suivant convient que cette condition n'est pas suffisante pour déterminer complètement la solution.

Exemple 2.2

Les solutions $t \to \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]$ et $t \to \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]$ de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\pi}{2}x(t-1) \tag{2.2}$$

coïncident à $t = 0$.

En fait, sur tout l'intervalle $[0, h]$ nous avons le même problème : pour intégrer l'équation après un certain temps $t \in [0, h]$, nous devons prescrire la valeur $N(t-h)$. Nous devons donc prescrire une fonction sur un intervalle de longueur h.

Le plus pratique pour ce faire est de prescrire N sur l'intervalle $[-h, 0]$ puis utiliser **(2.1)** pour $t \geq 0$. On complète donc **(2.1)** par

$$N(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } -h \leq \varphi \leq 0$$

où φ est une fonction donnée.

Explicitement, on a alors pour $t \in [0, h]$

$$N(t) = \varphi(0)\exp(-\mu t) + r_0^t \exp(-\mu(t-\tau))\varphi(\tau-h)\,d\tau.$$

En utilisant cette expression, nous pouvons donner une expression pour N sur l'intervalle $[h, 2h]$ ..., etc.

Donc la méthode des étapes et la théorie élémentaire des équations différentielles ordinaires nous fournissent une preuve trés simple de l'existence et de l'unicité de solutions très simples preuve dans cet exemple.

Remarque 2.1

- Pour toute fonction continue φ définie sur $[-h, 0]$, il y a est une solution unique x de **(2.2)** sur $[-h, \infty]$, notée $x(\varphi)$.
- La solution $x(\varphi)$ a une dérivée temporelle continue pour $t > 0$, mais pas à $t = 0$ sauf si $\varphi(\theta)$ a une dérivée gauche à $\theta = 0$ et $\frac{d\varphi}{dt}(0) = -\mu\varphi(0) + r\varphi(-h)$; La solution $x(\varphi)$ est plus fluide que la donnée initiale.
- Pour un φ donné sur $[-h, 0]$, la solution $x(\varphi)(t)$ de **(2.2)** n'a pas besoin d'être défini pour $t \leq -h$. En fait, si $x(\varphi)(t)$ est défini pour $t \leq -h$, disons $x(\varphi)(t)$ est défini pour $t \geq -h-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, alors $\varphi(\theta)$ doit avoir une première dérivée continue pour $\theta \in]-\varepsilon, 0[$.
- Une forme plus générale d'une équation différentielle à retard est la suivante :

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t), x(t-r)).$$

Body Math

2.2 Un problème général de valeur initiale

Étant donné $r > 0$, notons $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, l'espace de Banach des fonctions continues mappant l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie convergence uniforme. Si $[a, b] = [-r, 0]$, nous laissons $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ et désignons la norme d'un élément φ dans C, par

$$|\varphi| = \sup_{-\mathbf{r} \leq \theta \leq \mathbf{0}} |\varphi(\theta)|$$

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $A > 0$ et $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\mathbf{t} \in [\sigma, \sigma + A]$, on pose $x_{\mathbf{t}} \in C$, défini par

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \ \text{, pour} - r \leq \theta \leq 0$$

Soit $f : \mathbb{R} \times \ C \to \mathbb{R}^n$ une fonction donnée. Une équation différentielle fonctionnelle est donné par la relation suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x_t) \quad \text{pour } t \geq \sigma \\ x_\sigma = \varphi \end{cases} \tag{2.3}$$

Définition 2.1

x est dite solution de **(2.3)** s'il existent $\sigma \in \mathbb{R}$, $A > 0$ tel que $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$ et x satisfait **(2.3)** pour $t \in [\sigma, \sigma + A]$.

Dans un tel cas, nous disons que x est une solution de **(2.3)** sur $[\sigma - r, \sigma + A]$

pour un $\sigma \in \mathbb{R}$ donné et un $\phi \in C$ donné on dit que $x = x(\sigma, \phi)$ est une solution de **(2.3)** de valeur initiale à σ ou simplement une solution de **(2.3)** à travers (σ, ϕ) s'il existe un $A > 0$ tel que $x(\sigma, \phi)$ est une solution de **(2.3)** sur $[\sigma - r, \sigma + A]$ et $x_\sigma(\sigma, \varphi) = \varphi$.

L'équation **(2.3)** est un type d'équation très général et comprend des équations aux différences du type :

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t), x(t, r(t))) \quad \text{pour} \ \ 0 \leq r(t) \leq r$$

aussi bien que

$$\frac{dx}{dt}(t) =_{-r}^{0} \ g(t, \theta, x(t+\theta))\, d\theta$$

Si

$$f(t, \varphi) = L(t, \varphi) + h(t),$$

où L est linéaire en φ et $(t, \varphi) \to L(t, \varphi)$, on dit que l'équation est une équation différentielle a retard linéaire, elle est dite homogène si $h = 0$.

Si $f\ (t, \varphi) = g(\varphi)$, l'équation **(2.3)** est autonome.

Lemme 2.1

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in C$ donnés et f continue sur le produit $\mathbb{R}\times C$. Alors, trouver une solution de l'équation (**2.3**) à travers (σ, φ) équivaut à résoudre :

$$x(t) = \varphi(0) +_{\sigma}^{t} \ f(s, x_s)\, ds \qquad t \geq \sigma \ \text{ et } \ x_\sigma = \varphi$$

2.3 Existence

Lemme 2.2

Si $x \in C([\sigma - r, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$, alors x_t est une fonction continue en t pour $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$.

Preuve Puisque x est continu sur $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$, elle est uniformément continue et donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tels que $\mid x(t) - x(s) \mid < \varepsilon$ si $|t - s| < \delta$, Par conséquent pour t, s dans $[\sigma, \sigma + \alpha]$, $|t - s| < \delta$, on a $|x(t + \theta) - x(s + \theta)| < \varepsilon$, $\forall \theta \in [-r, 0]$. ■

Soit D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}\times C$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit continue.

Pour tout $(\sigma, \varphi) \in D$, il existe une solution de l'équation (**2.3**) à travers (σ, φ).

Si f est au plus affine c'est-à-dire $|f\ (t, \phi)| \leq a\ |\phi| + b$ avec $a, b > 0$,

alors il existe une solution globale i.e. $\forall \varphi$, la solution $x(\sigma, \varphi)$ est définie sur $[\alpha, \infty[$.

Preuve

Soit $\varphi \in C$, et supposons que la solution n'est définie que sur $[\alpha, \beta[$.

En intégrant l'équation **(2.3)**, on obtient

$$x(t) = \varphi(0) +_{0}^{t} \ f(s, x_s)\, ds$$

ce qui donne

$$|x(t, \varphi)| = |\varphi| +_{\sigma}^{t} (a, |\mathbf{x}_s| + b)\, ds \ \text{ et } \ |x_t(., \varphi)| = |\varphi| + a_{\sigma}^{t} |x_s| ds + b\beta.$$

Par le lemme de Gronwall $|x_t(., \varphi)| = (|\varphi| \ + \ b\beta) \exp a\beta < \infty$.

D'autre par

$$\sup_{t\in[0,\beta]} |\frac{dx}{dt}(t)| < \infty,$$

et on a la solution est uniformément continue sur $[0, \beta[$ et ce qui implique que $\overline{\lim}_{t\to\beta}|x_t(.,\varphi)|$ existe et finie, notez-la x_β.

Considérons l'équation différentielle à retard suivante

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y_t), \text{ pour } t \geq \beta \\ y_\beta = x_\beta \in C \end{cases}$$

cette dernière équation a au moins une solution sur $[\beta, \beta+\varepsilon]$ pour certains $\varepsilon > 0$, et l'équation **(2.3)** a au moins une solution définie sur $[0, \beta+\varepsilon]$, ce qui contredit la maximalité de la solution. ■

2.4 Unicité

Soit D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et supposons que $f : D \to \mathbb{R}^n$ est continue et $f(t, \varphi)$ est lipchitzienne par rapport à φ dans chaque sous-ensemble compact de D. Si $(\sigma, \varphi) \in D_3$, alors l'équation (2.3) a un solution unique passant à travers (σ, φ) .

Preuve Considérons $I\alpha$, B_β comme défini dans la preuve du théorème, et supposons que x et y soient deux solutions de (2.3) sur $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ avec $x_\sigma = \varphi = y_\sigma$.alors

$$\begin{cases} x(t) - y(t) =_\sigma^t (f(s, x_s) - f(s, y_s))\, ds, \quad t \geq \sigma \\ x_\sigma - y_\sigma = 0 \end{cases}$$

Soit k la constante de Lipschitz de $f\ (t, \varphi)$ dans un sous-ensemble compact contenant les trajectoires (t, x_t) et (t, y_t), $t \in I_\alpha$. Choisissez $\overline{\alpha}$ tel que $k\overline{\alpha} < 1$. Alors, pour $t \in I_{\overline{\alpha}}$ on a :

$$|x(t) - y(t)| \leq_\sigma^t k|x_s - y_s|ds \leq\ k\overline{\alpha} \sup_{\sigma \leq s \leq t} |x_s - y_s|.$$

Et cela implique que $x(t) = y(t)$ pour $t \in I_{\overline{\alpha}}$. ■

L'unicité peut ne pas tenir si la fonction n'est pas localement lipchitzienne. Pour cela, considérons les contre-exemples suivants :

1) Il peut y avoir deux solutions distinctes de (**2.3**) définies sur $(-\infty, \infty)$ et ils coïncident sur $(0, \infty)$. L'exemple suivant a été donné par A Hausrath.

Soit $r = 1$, et

$$\begin{cases} f(s) = 0, & \text{pour} \quad 0 \leq s \leq 1 \\ f(s) = -3\left(\sqrt[3]{s} - 1\right)^2, & \text{pour} \quad s > 1, \end{cases}$$

et considérons l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(|x_t|) \end{cases}$$

La fonction $x = 0$ est une solution de cette équation sur $(-\infty, \infty)$. Également la fonction

$$\begin{cases} x(t) = -t^3, & \text{pour} \quad t < 0 \\ x(t) = 0, & \text{pour} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\frac{dx}{dt}(t) = -3t^2.$$

En réalité, puisque $x \leq 1$ pour $t \geq -1$, x satisfait l'équation pour $t \geq 0$, et puisque x est décroissante pour $t \leq 0$, $|x_t| = x(t-1) = -(t-1)^3$, et $\frac{ds}{dt}(t) = -3t^2$ on trouve que que

$$f\left((t-1)^3\right) = -3t^2 \qquad \text{pour} \qquad t < 0.$$

2) On considère l'equation

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t - \sigma(x(t))) \tag{2.4}$$

où $\sigma : \mathbb{R} \to [0,1]$, $\sigma'(0) \neq 0$ et $\sigma(0) = 1$.

Notez que le côté droit de (**2.4**) peut s'écrire $G(\varphi) = \varphi(-\sigma(\varphi(0)))$ pour $\varphi \in C([-1,0], \mathbb{R})$, et G n'est pas localement lipschitz dans un voisinage de zéro. Supposons en fait qu'il existe des constantes positives k et ρ tels que

$$|G(\varphi_1) - G(\varphi_2)| \leq k|\varphi_1 - \varphi_2| \text{ pour } |\varphi_1|, |\varphi_2| < \rho$$

Soit $\varphi(\theta) = \varepsilon\left(-1+\sqrt{1+\theta}\right)$, pour $\theta \in [-1,0]$, où ε est une constante positive tel que $|\varphi| < \rho$. Soit $x \in [-1,0]$ tel que $|\varphi| + |x| < \rho$, alors

$$|G(\varphi + x) - G(\varphi)| \leq k|x|$$

ce qui implique

$$|\varepsilon\sqrt{1-\sigma(x)} + x| \leq k|x| \text{ et } |\frac{\varepsilon(\sigma(x)-1)}{x\sqrt{1-\sigma(x)}}| \leq (1+k).$$

En laissant x se rapprocher de zéro, on obtient une contradiction. Par conséquent, le côté droit de l'équation (**2.4**) n'est pas localement le lipschitz proche de zéro.

L'unicité a été prouvée pour les données initiales lipschitziennes φ, voir [26] Cependant,l'argument standard pour l'unicité ne peut pas être appliqué dans ce exemple.

L'équation

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t - x(t))$$

apparaît dans les modèles de croissance cristalline, et en fait l'équation

$$\frac{dx}{dt}(t) = -ax(t - \sigma(x(t)))$$

a été étudié théoriquement par Cooke.

$$\frac{dx}{dt}(t) = -a(t)x(t) - \lambda b(t) f(x(t - \sigma(x(t))))$$

où λ est un paramètre positif a été proposé comme modèle pour une variété de processus physiologiques et conditions telles que la production de cellules sanguines, la respiration et arythmies.

3)Le contre-exemple suivant explique plus en détail la situation

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = x \\ x(\theta) = \sqrt{|\theta|} + 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

Alors l'équation **(2.5)** a deux solutions :

$$x_1(t) = t + \frac{t^2}{4} \quad \text{et} \quad x_2(t) = t, \text{ pour } t \in [0,1].$$

En fait on a $t - x_1(t) = -\frac{t^2}{4}$ et $t - x_2(t) = 0$, il s'ensuit que

$x_1'(t) = 1 + \frac{t}{2} = \varphi(t - x_1(t))$ et $x_2'(t) = 1 = \varphi(t - x_2(t))$ pour $t \in [0,1]$.

2.5 Continuité des solutions

Définition 2.2

Supposons que f dans l'équation (**2.3**) soit continue. Si x est une solution de l'équation (**2.3**) sur un intervalle $[\sigma, a]$, $a >\sigma$, on dit que $\hat{x}$ est une continuation de x s'il existe un $b > a$, tel que $\hat{x}$ soit défini sur $[\sigma - r, b]$, coïncide avec x sur $[\sigma - r, a]$, et satisfait l'équation (**2.3**) sur $[\sigma, b]$.

La solution x est non continuable si une telle continuation n'existe pas ; C'est a dire, l'interval $[\sigma, a]$ est l'intervalle maximal d'existence de la solution x.

Plus que les hypothèses du théorème précédent,

Si f est une fonction bornée, alors l'équation (**2.3**) a une solution maximale défini sur $[-r, \beta[$ avec

Preuve

$$\text{Si } \beta < \infty \Rightarrow \overline{\lim}_{t\to\beta} |x_t\left(.,\varphi\right)| = \infty.$$

Par étapes, on peut intégrer l'équation (**2.3**), soit $[-r, \beta[$ est l'intervalle maximal sur lequel $x\left(.,\varphi\right)$ est définie.

Supposons que $\overline{\lim}_{t\to\beta} |x_t\left(.,\varphi\right)| < \infty$ alors il existe N tel que $|x_t\left(.,\varphi\right)| \leq N$, $\forall t \in [0, \beta[$, avec $\frac{dx}{dt} = f\left(t, x_t\right)$ et de la condition f est une fonction bornnée, on a $\sup_{t\in[0,\beta[} |\frac{dx}{dt}\left(t\right)| < \infty$, alors f est uniformément continu sur $[0, \beta[$. Alors, $\lim_{t\to\beta} |x_t\left(.,\varphi\right)|$ existe, qui on la note x_β.

Soit $\psi \in C\left([-r, \beta[\, , \mathbb{R}^n\right)$ défini par $\psi = x_\beta$, d'aprés le Théorème d'existence, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'équation

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}\left(t\right) = f\left(t, y_t\right) \text{ pour } t \geq \beta \\ \qquad y_\beta = x_\beta \in C \end{cases}$$

a au moins une solution sur $[\beta, \beta + \varepsilon]$, le rappel de x et y donne une solution définie sur $[\alpha, \beta + \varepsilon]$, qui contredit la maximalité de x. $\blacksquare$

Supposons que Ω soit un ensemble ouvert dans $\mathbb{R} \times C$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ soit globalement lipschitzienne et complètement continue : c'est-à-dire que f est continue et prend des ensembles bornés fermés de Ω en ensembles bornés de $\mathbb{R}^n$, et x est une solution non continuable de l'équation (**2.3**) sur $[\sigma - r, b]$

alors, pour tout fermé et borné U dans $\mathbb{R} \times C$, U dans Ω, il existe un t_U tel que $(t, x_t) \notin U$ pour $t_U \leq t < b$.

Nous considérons maintenant l'existence de solutions de (**2.3**) pour tout $t \geq -r$.

2.6 Dépendance aux valeurs et paramètres initiaux

Soit D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et supposons que $f \ : D \to \mathbb{R}^n$

soit continue et $f \ (t, \varphi)$ soit lipchitzienne par rapport à φ dans tout sous-ensemble compact de D. Si $(\sigma, \varphi) \in D$, alors l'application $\varphi \to x_t\,(.,\varphi)$ est Lipschitzienne continue.

Preuve

Du corollaire **2** et le fait que f est lipchitzienne par rapport à la deuxième variable et $|f\,(t, \varphi)\,| \leq k\ |\varphi| + |\ f\,(t, 0)\,|$

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in C$, et $x\,(., \varphi_1)\,, x\,(., \varphi_2)$ les solutions associées, on a

$$x\,(t, \varphi_1) - x\,(t, \varphi_2) = \varphi_1\,(0) - \varphi_2\,(0) +_0^t \left(f(s, x\,(s, \varphi_1)) - f(s, x(s, \varphi_2))\right)ds$$

$$|x\,(t, \varphi_1) - x\,(t, \varphi_2)\,| \leq |\varphi_1 - \varphi_2| + k_0^t |x\,(s, \varphi_1) - x\,(s, \varphi_2)\,|ds.$$

d'aprés le lemme de Gronwall, on obtient

$$|x\,(t, \varphi_1) - x\,(t, \varphi_2)\,| \leq |\varphi_1 - \varphi_2| \exp\,(kt)\,.$$

■

Le lemme suivant est nécessaire avant de procéder dans cette direction, qui sera utilisé par la suite.

Lemme 2.3

Soit $f \in C\left(J \times C_\rho, \mathbb{R}^n\right)$. Pour $t \in J$ et $\varphi \in J$ et $\phi \in C_\rho$, on pose

$$G\left(t, r\right) = \max_{\|\phi\| \leq r} \|f\left(t, \phi\right)\|.$$

Supposons que $r^*\left(t, t_0, 0\right)$ est la solution maximale de

$$\frac{du}{dt} = G\left(t, u\left(t\right)\right)$$

a travers $\left(t_0, 0\right)$.alors, si $x\left(t, t_0, \phi_0\right)$ est une solution de

$$\frac{dx}{dt}\left(t\right) = f\left(t, x_t\right)$$

avec ϕ_0 comme valeur initiale à $t = t_0$. Alors nous avons :

$$\|x_t\left(t_0, \phi_0\right) - \phi_0\| \leq r^*\left(t, t_0, 0\right)$$

sur l'intervalle commun d'existence de $x\left(t, t_0, \phi_0\right)$ et $r^*\left(t, t_0, 0\right)$.

Soit $f \in C\left(J \times C_\rho, \mathbb{R}^n\right)$ et pour $t \in J$, $\varphi, \phi \in C_1$

$$\| f \ \left(t, \varphi\right) - f\left(t, \phi\right) \| \leq g\left(t, \|\varphi - \phi\|\right).$$

où $g \in C\left(J \times \left[0, 2\rho\right], \mathbb{R}^+\right)$. Supposons que $u\left(t\right) = 0$ est la seule solution de l'équation scalaire

$$\frac{du}{dt} = g\left(t, u\left(t\right)\right)$$

a travers $\left(t_0, 0\right)$. Supposons enfin que les solutions $u\left(t, t_0, u_0\right)$ a travers tous les points $\left(t_0, u_0\right)$ existent pour $t \geq t_0$ et sont continues par rapport à les valeurs initiales $\left(t_0, u_0\right)$. Alors, les solutions $x\left(t_0, \phi_0\right)$ de l'équation (**2.3**) sont uniques et continues par rapport aux valeurs initiales $\left(t_0, \phi_0\right)$.

En utilisant les arguments des théorèmes précédents, nous pouvons prouver le Théorème suivant sur la dépendance aux paramètres. Nous déclarons simplement.

Soit $f \in C(J \times C_\rho \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et pour $\mu = \mu_0$ soit $x_0(t) = x_0(t_0, \phi_0, \mu_0)(t)$ soit une solution de l'equation

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x_t, \mu_0)$$

avec une fonction initiale ϕ_0 à t_0 existante pour $t \geq t_0$.

Supposons que $\lim_{\mu \to \mu_0} f(t, \phi, \mu) = f(t, \phi, \mu)$ uniformément dans (t, ϕ), et pour $t \in J$, $\varphi, \phi \in C$, $\mu \in \mathbb{R}^m$

$$\|f(t, \varphi, \mu) - f(t, \phi, \mu)\| \leq k\|\varphi - \phi\|$$

Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour tout μ satisfaisant $|\mu - \mu_0| < \delta(\varepsilon)$, l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x_t, \mu)$$

admet une solution unique $x(t) = x(t_0, \phi_0, \mu)(t)$ définie sur un intervalle $[t_0, t_0 + a]$ tel que $\|x(t) - x_0(t)\| < \varepsilon$ pour $t \in [t_0, t_0 + a]$.

2.7 Différentiabilité des solutions

Dans la section précédente, des conditions suffisantes étaient données pour garantir que la solution $x(\sigma, \varphi, f)$ sur a (**2.3**) dépend continuellement de (σ, φ, f).

Dans Cette section sont donnée quelques résultats sur la différentiabilité par rapport à (σ, φ, f).

Si Ω est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R} \times C$, soit $C^P(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $p \geq 0$ désigne l'espace de fonctions prenant Ω dans $\mathbb{R}^n$ qui ont des dérivées continues bornées jusqu'à l'ordre p par rapport à φ dans Ω.

Si $f \in C^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, alors la solution $x(\sigma, \varphi, f)$ de

l'equation (**2.3**) a travers (σ, φ) est unique et continuellement différentiable par rapport à (φ, f) pour t dans tout ensemble compact dans le domaine de définition de $x(\sigma, \varphi, f)$. De plus, pour chaque $t \geq \sigma$, la dérivée de x par rapport à φ, $D_\varphi x(\sigma, \varphi, f)(t)$ est un opérateur linéaire de

C vers $\mathbb{R}^n$, $D_\varphi x(\sigma,\varphi,f)(\sigma)=I$, l'identité, et $D_\varphi x(\sigma,\varphi,f)\psi(t)$ pour chaque ψ dans C satisfait l'équation linéaire variationnelle

$$y'(t)=D_\varphi f\ \ (t,x_t(\sigma,\varphi,f))\,y_t. \tag{2.6}$$

Aussi, pour chaque $t\geq\sigma$, $D_f\ x(\sigma,\varphi,f)$ est un opérateur linéaire de $C_p(\Omega,\mathbb{R}^n)$ en $\mathbb{R}^n$, D_f $x(\sigma,\varphi,f)(\sigma)=0$, et $D_f\ x(\sigma,\varphi,f)\,g(t)$ pour chaque g de $C^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$ satisfait l'équation de variation non homogène

Body Math

$$z'(t)=D_\varphi(f(t,x_t(\sigma,\varphi,f))\,z_t+\ g(t,x_t(\sigma,\varphi,f))). \tag{2.7}$$

Les types de retard

Lors de la phase de modélisation, il est essentiel de déterminer le type de retard qui affecte le système.

Plus précisément, un retard constant ou variant dans le temps est souvent restreint à un certain domaine de définition. Le caséchéant, les propriétés intrinséques au système physique

peuvent apporter des informations sur les valeurs admissible du retard. Nous avons dégagé trois catégories principales de retard :

(a)Retards inconnus :

Dans ce premier cas, aucune hypothèse sur le retard est considérée.

Qu'il soit constant ou variant dans le temps, il peut prendre toutes les valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(b)Retards majorés :

Cette seconde classe suppose la connaissance d'une valeur maximale sur le retard

$$0\leq\tau(t)\leq\tau_{\max}$$

Si $\tau(t)=\tau$ est constant, il reste en pratique incertain et la contrainte ci - dessus assure un intervalle borné. Ce cas de figure a été trés largement considéré dans la littérature.

(c)Retards borné :

Moins abordée que le cas précédent, cette derni‘ere catégorie suppose que le retard vérifie la contrainte

$$\tau_{\min} \leq \tau\left(t\right) \leq \tau_{\max}$$

Dans le cas des retards variant dans le temps, une contrainte supplémentaire relativéa sa drivée peut tre ajoutée

$$|\dot{\tau}\left(t\right)| \leq \tau_{\max}$$

indiquant alors une limitation sur la vitesse de variation du retard $\tau\left(t\right)$. En pratique la contrainte $d \leq 1$ est souvent utilisé afin d'assurer que le retard ne varie pas plus rapidement que le temps et que les informations retardées arrivent dans l'ordre chronologique. Par ailleurs, indépendamment du procédé physique et du type de retard associé, certains auteurs se sont intéressés à la robustesse de la stabilité d'un système vis-à-vis du retard.

Il s'agit dans ce cas d'estimer les intervalles sur le retard tel que le système reste stable. Un cas particulier considère un système à retards stable lorsque celui-ci est nul et le but est de trouver la valeur maximale du retard telle que la stabilité du système soit préservée.

Chapitre 3

Sommaire

- ***Des critères de stabilité*** **:**
    - ***Stabilité exponentielle des systèmes différentiels linéaires à retard variant dans le temps.***
    - ***Critères explicites de la stabilité exponentielle.***
    - ***Stabilité des systèmes perturbés.***

Dans ce chapitre on présenter le critère de la stabilité des systèmes différentiels linéaires à retard variant dans le temps par la preuve de deux théorèmes .

CHAPITRE 3

CRITÈRES DE STABILITÉ

Dans ce chapitre, nous étudions d'abord la stabilité exponentielle des systèmes différentiels linéaires variant dans le temps à retard de la forme

$$\dot{x}(t) = A_0(t)\,x(t) +_{k=1}^{m} A_k(t)\,x(t - h_k(t)) +_{-h(t)}^{0} B(t,s)\,x(t+s)\,ds, \qquad t \geq \sigma. \tag{3.1}$$

on presentons des critères explicites pour la stabilité exponentielle de ces systèmes. Ensuite, nous traitons le problème de la stabilité robuste du système **(3.1)** sous des perturbations variantes dans le temps. L'approche utilisée est basée sur le célèbre théorème de Perron-Frobenius et le principe de comparaison.

3.1 Stabilité exponentielle des systèmes differentiels linéaires à retard variant dans le temps.

Soit $\mathbb{k}^{m\times n}$ doté de la norme $\|\ .\ \|$ et soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Notons par $C(J, \mathbb{k}^{m\times n})$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues sur J avec des valeurs en $\mathbb{k}^{m\times n}$. En particulier, $C([\alpha,\beta], \mathbb{k}^{m\times n})$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\| \varphi \| = \max_{\theta\in[\alpha,\beta]} \| \varphi(\theta) \| .$$

Dans ce qui suit, nous écrivons C au lieu de $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ et notons $C_r = \{\varphi \in C : \| \varphi \| \leq r\}$, pour $r > 0$. Pour une fonction matricielle $\varphi(.) : J \to \mathbb{R}^{m\times n}$, on dit que $\varphi(.)$ non négative et on le note $\varphi \geq 0$ si $\varphi(\theta) \geq 0$ pour tout $\theta \in J$.

3.1.1 Critères explicites de stabilité exponentielle

Considérons un système différentiel linéaire variant dans le temps à retard de la forme (**3.1**), où

(i) $h(.), h_k(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,(k \in m)$ reçoivent des fonctions continues telles que $0 < h(t) \leq h;\ 0 < h_k(t) \leq h_k$, $\forall t \in \mathbb{R}$, pour certains nombres positifs $h, h_k\,(k \in \underline{m})$ et $h \geq \max\limits_{k\in\underline{m}} \{h_k\}$;

(ii) $A_k(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \underline{m_0}$ et $B(.;.) : \mathbb{R} \times [-h,0] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ sont des fonctions matricielles continues données.

Pour $\sigma \in \mathbb{R}$ fixe et donné $\varphi \in C$, le système (**3.1**) admet une solution unique satisfaisant la condition initiale

$$x(s+\sigma) = \varphi(s),\ \ s \in [-h,0] \tag{3.2}$$

Cette solution est notée par $x(.;\sigma,\varphi)$.

Définition 3.1

Le système **(3.1)** est dit exponentiellement stable s'ils existent deux nombres positifs K, β tels que

$$\| x(t;\sigma,\varphi) \| \leq K e^{-\beta(t-\sigma)} \| \varphi \|,\ \forall t \geq \sigma,$$

pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ et tout $\varphi \in C$.

Définition 3.2

Pour une matrice donnée $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on associe la matrice de Metzler $M(A) = (\widehat{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, où

$$\widehat{a}_{ij} = |a_{ij}|, i \neq j,\ \ i,j \in \underline{n};\ \widehat{a}_{ii} = a_{ii}\ \ \ i \in \underline{n}.$$

on present un theorème principale.

Soit $A_0(t) = \left(a_{ij}^{(0)}(t)\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$.le système (**1**) est exponentiellement stable à condition que l'une des conditions suivantes soit remplie :

(i) il existe $\beta_1 > 0$ et $p \in \mathbb{R}_+^n$, $p \gg 0$ tel que

$$\left(M(A_0(t)) +_{k=1}^{m} |A_k(t)|e^{\beta_1 h_k(t)} +_{-h(t)}^{0} |B(t,s)|e^{-\beta_1 s}ds\right) p \ll -\beta_1 p,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

(ii) il existe $\beta_2 > 0$ et une matrice de Hurwitz stable $B_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que

$$M(A_0(t)) +_{k=1}^{m} |A_k(t)|e^{\beta_2 h_k(t)} +_{-h(t)}^{0} |B(t,s)|e^{-\beta_2 s}ds \leq B_0,\ \forall t \in \mathbb{R}; \tag{3.4}$$

(iii) il existe $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B_0 \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ tel que

$$M(A_0(t)) \leq A_0,\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

$$_{k=1}^{m}|A_k(t)| +_{-h(t)}^{0} |B(t,s)|ds \leq B_0, \forall t \in \mathbb{R},\ \text{et } A_0 + B_0 \text{ est Hurwitz stable.} \tag{3.6}$$

Preuve (i) Soit $p = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$, $\alpha_i > 0, \forall i \in n$ et soit $\varphi \in C_1$. Choisissons un nombre positif $K > 0$ tel que $|\varphi(t)| \ll K\ e^{-\beta_1 t}p$ pour tout $t \in [-h, 0]$ et pour tout $\varphi \in C_1$ définissez

$$u(t) = Ke^{-\beta_1(t-\sigma)}p,\ t \in [\sigma - h, +\infty)$$

Posons $x(t) = x(t;\sigma;\varphi)$, $t \geq \sigma$.

On a : $x(s+\sigma) = \varphi(s)$, $\forall s \in [-h, 0]$, on pose : $t = s + \sigma$ donc : $s = t - \sigma$. Alors : $x(t) = \varphi(s) = \varphi(t - \varphi)$, donc : $|x(t)| = \varphi(t-\sigma) \ll ke^{-\beta(t-\sigma)}$, et pour$-h \leq s \leq 0$, donc : $\sigma - h \leq s + h \leq \sigma$. Alors : $\sigma - h \leq t \leq \sigma$, donc : $|x(t)| \ll u(t)$, $\forall t \in [\sigma - h, \sigma]$ $|x(t)| \ll u(t)$, $\forall t \in [\sigma - h, \sigma]$. Il nous reste a demontrer que $|x(t)| \leq u(t)$, $\forall t \in [\sigma, +\infty)$.

Supposons au contraire qu'il existe $t_0 > \sigma$ tel que $|x(t_0)| \nleq u(t_0)$. On pose

$$t_1 = \inf\{t \in (\sigma, +\infty) : |x(t)| \ \nleq u(t)\}.$$

Par continuité, $t_1 > \sigma$ et il existe $i_0 \in \underline{n}$ tel que

$$|x(t)| \ \leq u(t), t \in [\sigma, t_1); |x_{i_0}(t_1)| = u_{i_0}(t_1), |x_{i_0}(t)| > u_{i_0}(t), \forall t \in (t_1, t_1 + \varepsilon) \tag{3.7}$$

pour certains $\varepsilon > 0$.

Soit $A_k(t) = \left(a_{ij}^{(k)}(t)\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \underline{m}$ et soit $B(t,s) = (b_{ij}(t,s)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in [-h, 0]$. Pour chaque $i \in \underline{n}$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|x_i(t)| &= sgn(x_i(t))\,\dot{x}_i(t) \le a_{ii}^{(0)}(t)\,|x_i(t)| + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}^{(0)}(t)||x_j(t)| + \\ &\quad \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}^{(k)}(t)||x_j(t-h_k(t))| + \sum_{j=1}^{n}\int_{-h(t)}^{0}|b_{ij}(t,s)||x_j(t+s)|ds,\end{aligned}$$

pour presque tout $t \in [\sigma, +\infty)$. Il s'ensuit que pour tout $t \in [\sigma, +\infty)$

$$\begin{aligned}D^+|x_i(t)| &= \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{|x_i(t+\epsilon)| - |x_i(t)|}{\varepsilon} \\ &= \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} \frac{d}{ds}|x_i(s)|ds \le a_{ii}^{(0)}(t)\,|x_i(t)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}^{(0)}(t)||x_j(t)| + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}^{(k)}(t)||x_j(t-h_k(t))| \\ &+\sum_{j=1}^{n}\int_{-h(t)}^{0}|b_{ij}(t,s)||x_j(t+s)|ds,\end{aligned}$$

où D^+ désigne la dérivé supérieure à droite de Dini. En particulier, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}D^+|x_{i_0}(t_1)| &\le {}^{(3.7)} a_{i_0i_0}^{(0)}(t_1)\,Ke^{-\beta_1(t_1-\sigma)}\alpha_{i_0} + \sum_{j=1,j\neq i_0}^{n} |a_{i_0j}^{(0)}(t_1)|Ke^{-\beta_1(t_1-\sigma)}\alpha_j \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0j}^{(k)}(t_1)|Ke^{-\beta_1(t_1-\sigma)}e^{\beta_1 h_k(t_1)}\alpha_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\quad+\sum_{j=1}^{n}\int_{-h(t_1)}^{0}|b_{i_0j}(t_1,s)|Ke^{-\beta_1(t_1-\sigma)}e^{-\beta_1 s}ds \\ &= Ke^{-\beta_1(t_1-\sigma)}(a_{i_0i_0}^{(0)}(t_1)\,\alpha_{i_0} + \sum_{j=1,j\neq i_0}^{n} |a_{i_0j}^{(0)}(t_1)|\alpha_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0j}^{(k)}(t_1)|e^{\beta_1 h_k(t_1)}\alpha_j \\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}\int_{-h(t_1)}^{0}|b_{i_0j}(t_1,s)|e^{-\beta_1 s}\alpha_j ds) \\ &< {}^{(3.3)} -\beta_1 Ke^{-\beta_1(t_1-\sigma)}\alpha_{i_0} = D^+u_{i_0}(t_1)\end{aligned}$$

.

Cependant, cela entre en conflit avec (**3.7**). Par conséquent

$$|x(t;\sigma,\varphi)| \le u(t) = Ke^{-\beta_1(t-\sigma)}p, \qquad \forall t \ge \sigma,\ \forall \varphi \in C_1.$$

Par la monotonie des normes vectorielles, cela donne

$$\| x(t;\sigma,\varphi) \| \leq \; K_1 e^{-\beta_1(t-\sigma)}, \quad \forall t \geq \sigma, \; \forall \varphi \in C_1,$$

pour certains $K_1 > 0$. Par la linéarité du système (**3**.**1**),

$$\frac{1}{\| \varphi \|} \| x(t;\sigma,\varphi) \| = \| x\left(t;\sigma,\frac{\varphi}{\| \varphi \|}\right) \| \leq K_1 e^{-\beta_1(t-\sigma)}, \; \forall t \geq \sigma, \; \forall \varphi \in C, \; \varphi \neq 0.$$

Par conséquent

$$\| x(t;\sigma,\varphi) \| \leq K_1 e^{-\beta_1(t-\sigma)} \| \varphi \|, \; \forall t \geq \sigma, \; \forall \varphi \in C.$$

Ainsi, le système (**1**) est exponentiellement stable.

(ii) Il reste à montrer que (ii) implique (i). Puisque B_0 est une matrice de Metzler Hurwitz stable, il existe $p \in \mathbb{R}^n_+$, $p \gg 0$ de sorte que $B_0 p \ll 0$, par le théorème **1.2.** Par continuité, cela implique

$$B_0 p \ll -\eta p, \tag{3.8}$$

pour certains $\eta > 0$ suffisamment petits .

Soit β comme dans (ii) et soit $\beta_0 = \min\{\beta,\eta\} > 0$. On aurra :

$$(M(A_0(t)) +_{k=1}^{m} |A_k(t)| e^{\beta_0 h_k(t)} +_{-h(t)}^{0} |B(t,s)| e^{-\beta_0 s} ds$$

$$\leq \left(M(A_0(t)) +_{k=1}^{m} |A_k(t)| e^{\beta h_k(t)} +_{-h(t)}^{0} |B(t,s)| e^{-\beta s} ds\right) \leq^{(4)} B_0, \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\left(M(A_0(t)) +_{k=1}^{m} |A_k(t)| e^{\beta_0 h_k(t)} +_{-h(t)}^{0} |B(t,s)| e^{-\beta_0 s} ds\right) \\ \leq \;\; & B_0 p \ll -\eta p \leq -\beta_0 p, \; \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, (i) est vrai.

(iii) Nous montrons que (i) est vrai. Puisque $A_0 + B_0$ est une matrice de Hurwitz Metzler stable, il existe $p \in \mathbb{R}_+^n$ de sorte que $(A_0 + B_0)\, p \ll 0$, par le Théorème **1.2** (ii). Par continuité, cela donne

$$\left(A_0 + e^{\beta h} B_0\right) p \ll -\beta p, \tag{3.9}$$

pour certains $\beta > 0$ suffisamment petits. Alors (**3.3**) découle de (**3.5) - (3.6**) et (**3.9**), ce qui complète la preuve. ■

Ce qui suit est immédiatement tiré du théorème **3.1**.

Corollaire 3.1

Supponsons qu'il existe $A_0 = \left(a_{ij}^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $A_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $k \in \underline{m}$ et une fonction matricielle continue $C\,(.) : [-h, 0] \to \mathbb{R}_+^{n \times n}$ pour que (**5**) tienne et

$$|A_k\,(t)\,| \leq A_k, \forall t \in \mathbb{R}, k \in \underline{m}; \quad |B\,(t,s)\,| \leq C\,(s)\,, \forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in [-h, 0]\,. \tag{3.10}$$

Si ${}_{k=0}^{m} A_k + {}_{-h}^{0}\, C\,(s)\, ds$, Hurwitz stable, alors le système (**3.1**) est exponentiellement stable.

Remark *(Une discussion des résultats obtenus).*

(i) Dans le livre bien connu [**7, page 145**], il a été montré l'équation scalaire différentielle à retard

$$\dot{x}\,(t) = -a\,(t)\, x\,(t) -_{k=1}^{m} b_k\,(t)\, x\,(t - h_k\,(t))\,,$$

est exponentiellement stable pour toutes les fonctions continues bornées $a\,(.)\,, b_k\,(.)\,, h_k\,(.) \in C\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,$k \in \underline{m}$, à condition que

$$a\,(t) \geq \delta > 0, \; {}_{k=1}^{m} |b_k\,(t)\,| \leq \theta\delta, \; 0 < \theta < 1, \; 0 \leq h_k\,(t) \leq h, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

La preuve donnée dans [**7**] repose entièrement sur un théorème de type Razumikhin.Cependant, cela est immédiat à partir du corollaire **3.1**.

Un résultat similaire a été trouvé dans [**11, Exemple 5.1, page 74**]. Plus précisément, l′équation différentielle

Body Math

$$\dot{x}\,(t) = -ax\,(t) + b\,(t)\, x\,(t - h)\,,$$

où $a, h > 0$ et $b(.) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $\sup_{t \geq t_0} |b(t)| < a$ est exponentiellement stable. Encore une fois, cette affirmation découle du corollaire **3.1**.

D'un autre côté, sur la base d'une inégalité Halanay généralisée, il a été montré en [**10**] que l'équation

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) - b(t)_{t-\tau}^{t} x(s)\,ds, \tag{3.11}$$

où $a(.), b(.) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est exponentiellement stable à condition qu'il existe des nombres positifs a, η tels que $0 < a(t) \leq a$, $t \in \mathbb{R}$ et

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \frac{a(t) - \tau|b(t)|}{1 + \frac{3}{2}\tau^2|b(t)|} \geq \eta > 0 \tag{3.12}$$

Nous montrons que cela découle du théorème **3.1**. Clairement, $e^t < 1 + \frac{3}{2}t, t \in (0, \beta)$, pour $\beta > 0$ suffisamment petit. Soit $0 < \beta < \min\left\{\frac{\beta}{\tau}, \eta\right\}$. Il résulte de (**3.12**) que

$$-a(t) +_{-\tau}^{0} |b(t)| \exp(-\beta_1 s) ds \leq -a(t) + \tau|b(t)| \exp(\beta_1 \tau)$$

$$< -a(t) + \tau|b(t)| \left(1 + \frac{3}{2}\beta_1 \tau\right) \leq^{(12)} -\beta_1, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, (i) du théorème **3.2** est valable et (**11**) est exponentiellement stable.

(ii) De manière générale, un système dynamique est dit positif si pour tout non négatif condition initiale, la solution correspondante du système est également non négative.

Les systèmes dynamiques positifs jouent un rôle important dans la modélisation des phénomènes dont les variables se limitent à être non négatives. Ils sont souvent rencontrés

dans des applications, par exemple, des réseaux de réservoirs, des procédés industriels impliquant réacteurs chimiques, échangeurs de chaleur, colonnes de distillation, systèmes de stockage, système hiérarchiques, systèmes compartimentés utilisés pour modéliser les phénomènes de transport et d'accumulation des substances.

Il est bien connu qu'un système différentiel linéaire invariant dans le temps de la forme

Body Math

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) +_{k=1}^{m} A_k x(t - h_k) +_{-h}^{0} C(s)\,x(t+s)\,ds, \tag{3.13}$$

est positif si et seulement si $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de Metzler et $A_K \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ pour tout $k \in \underline{m}$ et $C(s) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ pour tout $s \in [-h, 0]$.

Puis, grosso modo, Corollaire **3.3** signifie que les systèmes différentiels linéaires variant dans le temps avec retard (**1**) sont

«bornés ci-dessus »(dans un certain sens) par le système positif (**13**) et alors (**1**) est exponentiellement stable à condition que (**13**) soit exponentiellement stable.

3.1.2 Stabilité des systèmes perturbés

Dans cette sous-section, nous abordons le problème de la stabilité de (**1**) sous des perturbations structurées.

Supposons que toutes les hypothèses du corollaire **3.3** soient satisfaites et que (**1**) soit exponentiellement stable. Considérons un système perturbé de la forme

Body Math

$$\dot{x}\left(t\right)=\left(A_0\left(t\right)+D_0\left(t\right)\Delta_0\left(t\right)E_0\left(t\right)\right)x\left(t\right)\ +_{k=1}^{m}A_k\left(t\right)x\left(t-h_k\left(t\right)\right)+$$

Body Math

$$_{k=1}^{m}D_k\left(t\right)\Delta_k\left(t\right)E_k\left(t\right)x\left(t-\tau_k\left(t\right)\right)+_{-h(t)}^{0}\left(B\left(t,s\right)+D\left(t,s\right)\delta\left(t,s\right)E\left(t,s\right)\right)x\left(t+s\right)ds,\ t\geq\sigma \tag{3.14}$$

où

(i) $\tau_k\left(.\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue donnée pour chaque $k\in\underline{m}$ telle que $0<\tau_k\left(t\right)\leq\tau_k\leq h,\forall t\in\mathbb{R}$, pour certains $\tau_k\in\mathbb{R}_+$;

(ii) $D_k\left(.\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times l_k}$, $E_k\left(.\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{q_k\times n}$, $k\in\underline{m_0}$ et $D\left(.;.\right):\mathbb{R}\times\left[-h,0\right]\to\mathbb{R}^{n\times l}$, $E\left(.,.\right):\mathbb{R}\times\left[-h,0\right]\to\mathbb{R}^{q\times n}$ sont des fonctions matricielles continues ;

(iii) $\Delta_k\left(.\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{l_k\times q_k}, k\in\underline{m_0}$ et $\delta\left(.,.\right):\mathbb{R}\times\left[-h,0\right]\to\mathbb{R}^{l\times q}$ sont des fonctions matricielles continues inconnues.

On montre qu'il existe un nombre positif r tel qu'une perturbation arbitraire de l'équation de la forme (**3**.**14**) reste exponentiellement stable chaque fois que la taille des perturbations est inférieur à r.

Supposons que toutes les hypothèses du corollaire **3.3** soient satisfaites.

Supposons qu'il existe $D_k\in\mathbb{R}_+^{n\times l_k}$, $E_k\in\mathbb{R}_+^{q_k\times n}$, $\Delta_k\in\mathbb{R}^{l_k\times q_k}$ pour $k\in\underline{m_0}$ et $D_{m+1}\in\mathbb{R}_+^{n\times l}$,

$E_{m+1} \in \mathbb{R}_+^{q\times n}$, $\delta_{m+1}(.) \in C\left([-h,0], \mathbb{R}_+^{l\times q}\right)$ tel que

$$|D_k(t)| \leq D_k, \quad |E_k(t)| \leq E_k, \quad |\Delta_k(t)| \leq \Delta_k, \ \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \underline{m_0} \tag{3.15}$$

et

$$|D(t,s)| \leq D_{m+1}, \quad |E(t,s)| \leq E_{m+1}, \quad |\delta(t,s)| \leq \delta_{m+1}(s), \forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in [-h,0]. \tag{3.16}$$

Alors le système perturbée (**3.14**) reste exponentiellement stable à condition

$$\begin{aligned} &{}_{k=0}^{m} \ \| \ \Delta_k \| +_{-h}^{0} \| \delta_{m+1}(s) \| \, ds \\ &< \frac{1}{\max\limits_{i,j\in\{0,1,\ldots,m+1\}} \| E_i \left(A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k + \int_{-h}^{0} C(s)\, ds\right)^{-1} D_j \|} \end{aligned}$$

Remarque 3.1

Le problème de la stabilité robuste du système différentiel linéaire invariant dans le temps a retard discrets

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) +_{k=1}^{m} A_k x(t-h_k), \quad t \geq 0 \tag{3.18}$$

sous les perturbations structurées invariantes dans le temps

$$A_k \rightsquigarrow A_k + D_k \Delta_k E_k, \ k \in \underline{m_0} \tag{3.19}$$

Limites de stabilité pour (18) sous réserve de la variable temporelle des perturbations structurées (19) peuvent être trouvées dans les articles mentionnés. cependant,

le problème de la stabilité robuste de (18) soumis à des perturbations structurées variant dans le temps est toujours ouverte et un résultat comme le théorème **3**.**5** ne peut être trouvé dans la littérature.

Preuve Il résulte de (**3**.**15**) que

$$|D_k(t)\,\Delta_k(t)\,E_k(t)| \leq D_k \Delta_k E_k, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \underline{m_0}$$

De plus, (**3**.**10**) et (**3**.**16**) impliquent que

$$|B(t,s) + D(t,s)\,\delta(t,s)\,E(t,s)| \leq C(s) + D_{m+1}\delta_{m+1}(s)\,E_{m+1}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall s \in [-h,0].$$

soit $D_0\Delta_0E_0 = \left(m_{ij}^{(0)}\right)$ et soit $D_0(t)\,\Delta_0(t)\,E_0(t) = \left(m_{ij}^{(0)}(t)\right)$ et $A_0(t) = \left(a_{ij}^{(0)}(t)\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Donc, $A_0(t) + D_0(t)\,\Delta_0(t)\,E_0(t) = \left(a_{ij}^{(0)}(t) + m_{ij}^{(0)}(t)\right)$. Il résulte de (**3.5**) que

$$a_{ii}^{(0)}(t) + m_{ii}^{(0)}(t) \leq a_{ii}^{(0)} + m_{ii}^{(0)}, \quad \forall t \in \mathbb{R};\ \forall i \in \underline{n},$$

et

$$|a_{ij}^{(0)}(t) + m_{ij}^{(0)}(t)| \leq a_{ij}^{(0)} + m_{ij}^{(0)}, \qquad \forall t \in \mathbb{R};\ \forall i,j \in \underline{n},\ i \neq j.$$

D'après le corollaire **3.1**, le système (**3.14**) est exponentiellement stable si

$$M_* = A_0 + D_0\Delta_0E_0 +_{k=1}^{m}(A_k + D_k\Delta_kE_k) +_{-h}^{0}(C(s) + D_{m+1}\delta_{m+1}(s)\,E_{m+1})\,ds$$

est Hurwitz stable.

Supposons au contraire que $\mu_0 = \mu(M_*) \geq 0$. Par le théorème de Perron-Frobenius (Théorème **1.1** (i)), il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^n, x_0 \neq 0$ tel que

$$\left(A_0 + D_0\Delta_0E_0 +_{k=1}^{m}(A_k + D_k\Delta_kE_k) +_{-h}^{0}(C(s) + D_{m+1}\delta_{m+1}(s)\,E_{m+1})\,ds\right)x_0 = \mu_0x_0.$$

Par hypothèse, $\mu\left(_{k=0}^{m}A_k +_{-h}^{0}C(s)\,ds\right) < 0$. Donc $(\mu_0I_n -_{k=0}^{m}A_k -_{-h}^{0}C(s)\,ds)$ est inversible et cela implique

$$\left(\mu_0I_n -_{k=0}^{m}A_k -_{-h}^{0}C(s)\,ds\right)^{-1}\left(_{k=0}^{m}D_k\Delta_kE_kx_0 + D_{m+1}{}_{-h}^{0}\delta_{m+1}(s)\,dsE_{m+1}x_0\right) = x_0 \qquad (3.20)$$

Soit i_0 un indice tel que $\| E_ix_0 \| = \max_{i\in\{0,1,\ldots,m+1\}} \| E_ix_0 \|$.il découle de (3.**20**) que$\| E_ix_0 \| > 0$. Multipliez les deux côtés de (**3.20**) à partir de la gauche par E_{i_0} pour obtenir

$$E_{i_0}\left(\mu_0I_n -_{k=0}^{m}A_k -_{-h}^{0}C(s)\,ds\right)^{-1}\left(_{k=0}^{m}D_k\Delta_kE_kx_0 + D_{m+1}{}_{-h}^{0}\delta_{m+1}(s)\,dsE_{m+1}x_0\right) = E_{i_0}x_0.$$

Cela donne

$$_{k=0}^{m} \| E_{i_0}\left(\mu_0I_n -_{k=0}^{m}A_k -_{-h}^{0}C(s)\,ds\right)^{-1}D_k \|\| \Delta_k \|\| E_kx_0 \| +$$

$$\| E_{i_0}\left(\mu_0I_n -_{k=0}^{m}A_k -_{-h}^{0}C(s)\,ds\right)^{-1}D_{m+1} \|_{-h}^{0}\| \delta_{m+1}(s) \| \,ds \| E_{m+1}x_0 \| \geq \| E_{i_0}x_0 \|.$$

par conséquent,

$$\max_{i,j\in\{0,1,\ldots,m+1\}} \| E_i\left(\mu_0I_n -_{k=0}^{m}A_k -_{-h}^{0}C(s)\,ds\right)^{-1}D_j \| \left(_{k=0}^{m} \| \Delta_k \| +_{-h}^{0} \| \delta_{m+1}(s) \| \,ds\right)$$
$$. \| E_{i_0}x_0 \| \geq \| E_{i_0}x_0 \|,$$

équivalent à

$$\max_{i,j\in\{0,1,\ldots,m+1\}} \parallel E_i \left(\mu_0 I_n -_{k=0}^{m} A_k -_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} D_j \parallel .$$
$$\left(_{k=0}^{m} \parallel \Delta_k \parallel +_{-h}^{0} \parallel \delta_{m+1}(s) \parallel ds\right) \geq 1 \tag{3.21}$$

D'autre part, l'identité résolvante donne

$$\begin{aligned} & \left(0 I_n -_{k=0}^{m} A_k -_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} - \left(\mu_0 I_n -_{k=0}^{m} A_k -_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} \\ = \; & (\mu_0 - 0)\left(0 I_n -_{k=0}^{m} A_k -_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} \left(\mu_0 I_n -_{k=0}^{m} A_k -_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} \end{aligned}$$

.

Puisque $\mu_0 \geq 0$, le théorème **1.1** (iii) implique que

$$\left(-_{k=0}^{m} A_k -_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} \geq \left(\mu_0 I_n -_{k=0}^{m} A_k -_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} \geq 0$$

Cela donne,

$$E_i \left(-_{k=0}^{m} A_k -_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} D_j \geq E_i \left(\mu_0 I_n -_{k=0}^{m} A_k -_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} D_j \geq 0,$$

pour tout $i, j \in \underline{(m+1)_0}$. Par monotonie d'une norme d'opérateur associée à une donnée paire de normes vectorielles monotones, nous avons

$$\parallel E_i \left(-_{k=0}^{m} A_k -_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} D_j \parallel \geq \parallel E_i \left(\mu_0 I_n -_{k=0}^{m} A_k -_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} D_j \parallel \tag{3.22}$$

pour tout $i, j \in \underline{(m+1)_0}$. Enfin, (**3.21**) et (**3.22)** impliquent que

$$_{k=0}^{m} \parallel \Delta_k \parallel +_{-h}^{0} \parallel \delta_{m+1}(s) \parallel ds \geq \frac{1}{\max_{i,j\in\{0,1,\ldots,m+1\}} \parallel E_i \left(A_0 +_{k=1}^{m} A_k +_{-h}^{0} C(s)\,ds\right)^{-1} D_j \parallel}.$$

Cependant, cela entre en conflit avec (**3.17**). Ceci complète la preuve.

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donné. Considérons un système différentiel linéaire avec retard du formulaire

$$\dot{x}(t) = (A + A_0(t))x(t) +_{k=1}^{m} A_k(t)\,x(t - h_k(t)) +_{-h(t)}^{0} B(t,s)\,x(t+s)\,ds, \tag{3.23}$$

où $A_k(.) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})\left(k \in \underline{m_0}\right)$ et $h(.), h_k(.) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $0 < h(t), h_k(t) \leq h$, $\forall t \in \mathbb{R}\,(k \in \underline{m})$ et $B(.;.) : \mathbb{R} \times [-h, 0] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ est une fonction continue. ■

Corollaire 3.2

Supposons que $M(A)$ est stable à Hurwitz. Alors (**3.23**) est exponentiellement stable à condition qu'il existe $A_k \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $k \in \underline{m_0}$ et $C(.) \in C\left([-h,0], \mathbb{R}_+^{n\times n}\right)$ tel que

$|A_k(t)| \leq A_k, \forall t \in \mathbb{R}, k \in \underline{m_0}; \quad |B(t,s)| \leq C(s), \forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in [-h,0]$, et

Body Math

$$ {}_{k=0}^{m} \parallel A_k \parallel + {}_{-h}^{0} \parallel C(s) \parallel ds < \frac{1}{\parallel M(A)^{-1} \parallel}. $$

Body Math

Chapitre4

Sommaire

- ***Applications :***
  - *Exemple 1*
  - *Exemple 2*

Dans ce dernier chapitre nous considérons deux exemples ou nous discutons la stabilité des systèmes différentiels linéaires à retard.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS

Nous illustrons les résultats obtenus par quelques exemples.

4.1 Exemple 1

Considérez le système différentiel linéaire variant dans le temps à retard dans $\mathbb{R}$ donné par Body Math

$$\begin{aligned} \dot{x}\left(t\right) \quad = \quad & \left(\ln\left(1+\frac{10}{9}\sin^{2}t\right)-2\exp\left(t^{2}+2\right)\right)x(t) \quad +4.1 \\ & \left(\frac{9}{4}\exp\left(-2-t^{2}\right)\sin t-\exp\left(-t^{2}\right)\cos t\right)x\left(t+\cos t-1\right) \\ & -\frac{7^{0}}{2_{\sin t-1}}\exp\left(2s-t^{2}\right)\cos\left(s+t\right)x\left(t+s\right)ds \end{aligned} \tag{4.1}$$

Clairement, (**4.1**) est de la forme (**3.1**) avec

$$a_{0}\left(t\right)=\ln\left(1+\frac{10}{9}\sin^{2}t\right)-2\exp\left(t^{2}+2\right),t\in\mathbb{R}$$

et

$$a_{1}\left(t\right)=\frac{9}{4}\exp\left(-2-t^{2}\right)\sin t-\exp\left(-t^{2}\right)\cos t,t\in\mathbb{R}$$

et

$$b\left(t,s\right)=-\frac{7}{2}\exp\left(2s-t^{2}\right)\cos\left(s+t\right),t\in\mathbb{R},s\in\left[-2,0\right].$$

Soit $\beta = 1$, $p = 1$, on a

Body Math

$$a_0(t) + |a_1(t)| \exp(1 - \cos t) +_{\sin t - 1}^{0} |b(t,s)| \exp(-s)\, ds$$

$$= \ln\left(1 + \frac{10}{9}\sin^2 t\right) - 2\exp\left(t^2 + 2\right) + |\frac{9}{4}\exp\left(-2 - t^2\right)\sin t - \exp(1 - \cos t) + \frac{7}{2}{}^{0}_{\sin t - 1} | \exp\left(2s - t^2\right)\cos(s + t)| \exp^{-s} ds$$

Body Math

$$\leq \frac{10}{9} - 2\exp(2) + \frac{9}{4} + \exp(2) + \frac{7}{2}(1 - \exp(-2)) < 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, (**4.1**) est exponentiellement stable, d'après le théorème **3.1**.

4.2 Exemple2

Considérons un système différentiel linéaire variant dans le temps à retard dans $\mathbb{R}^2$ donné par

Body Math

$$\dot{x}(t) = A_0(t)\, x(t) + A_1(t)\, x(t - h_1(t)) +_{-h(t)}^{0} B(t,s)\, x(t+s)\, ds, t \geq \sigma \geq 0 \qquad (4.2)$$

où $h_1(.), h(.) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $0 < h_1(t), h(t) \leq h, \forall t \in \mathbb{R}$ et

Body Math

$$\begin{aligned} A_0(t) &= \begin{pmatrix} -6\left(1 + t^2\right) & \exp\left(-t^2\right)\sin t \\ \cos t & \frac{1-t^2}{1+t^2} - 7 \end{pmatrix}; \\ A_1(t) &= \left(0\exp\left(-\sin^2 t\right) \quad -\frac{2t}{1+t^2}0\right), t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

et

$$B(t,s) = \left(0 - \exp\left(\frac{s}{2}\right)\sin s t \exp\left(\frac{s}{2} + st^2\right)\cos st0\right), t \in \mathbb{R}, s \in [-h, 0].$$

Laissez-nous définir

$$A_0 = (-611-6); \quad A_1 = (0110); \quad C(s) = \left(0\exp\frac{s}{2}\exp\frac{s}{2}0\right), \ s \in [-h, 0]$$

Notez que $A_0(t)$ et A_0 satisfont (**3.5**) et

$$|A_1(t)| \le A_1,\ \forall t \in \mathbb{R};\ |B(t,s)| \le C(s),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall s \in [-h,0]$$

et on a aussi

$$M = A_0 + A_1 +_{-h}^{0} C(s)\,ds = \left(-62\left(2-\exp\left(-\frac{h}{2}\right)\right)2\left(2-\exp\left(-\frac{h}{2}\right)\right)-6\right)$$

et $\mu(M) < 0$. Ainsi (**4.2**) est exponentiellement stable, par Corollaire **3.1**.

Considérons le système perturbée

Body Math

$$\dot{x}(t) = (A_0(t) + D_0(t)\,\Delta_0(t)\,E_0(t))\,x(t) + A_1(t)\,x(t-h_1(t))$$

Body Math

$$+_{-h(t)}^{0}(B(t,s) + D(t,s)\,\delta(t,s)\,E(t,s))\,x(t+s)\,ds,\ t \ge \sigma \ge 0, \tag{4.3}$$

où

$$D_0(t) = (\sin t 0);\ E_0(t) = \left(-\ln\left(1+\cos^2 t\right)00\frac{(1-t)^2}{2(1+t^2)}\right),\ t \in \mathbb{R},$$

Body Math et

$$D(t,s) = (0\cos(s-t));\ E(t,s) = \left(-\exp st^2 00 - \frac{2st}{1+(st)^2}\right),\ t \in \mathbb{R},\ s \in [-h,0],$$

et

$$\Delta_0(t) = \left(a\cos t \quad b\exp -t^2\right),$$

Body Math

$$\delta(t,s) = \left(c\exp\left(st^2+s\right) - d(\exp(s))(1+\sin st)\right),\ t \in \mathbb{R},\ s \in [-h,0],$$

avec $a, b, c, d \ge 0$ sont des paramètres.

Notez que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s \in [-h,0]$, on a

Body Math

$$|D_0(t)| \le D_0 = (10);\quad |D(t,s)| \le D = (01);\ |E_0(t)| \le E_0 = (1001);$$

Body Math

$$|E(t,s)| \leq E = (1001)\,; \; |\Delta_0(t)| \leq \Delta_0 = (a \quad b)\,;$$

$$|\delta(t,s)| \leq \delta(s) = (c\exp s \quad 2d\exp s)\,,$$

et

$$E_0M^{-1}D = EM^{-1}D = \left(-\frac{3}{18-2\left(2-e^{-\frac{h}{2}}\right)^2} - \frac{2-e^{-\frac{h}{2}}}{18-2\left(2-e^{-\frac{h}{2}}\right)^2} \right);$$

$$E_0M^{-1}D = EM^{-1}D = \left(-\frac{2-e^{-\frac{h}{2}}}{18-2\left(2-e^{-\frac{h}{2}}\right)^2} - \frac{3}{18-2\left(2-e^{-\frac{h}{2}}\right)^2} \right)$$

.

Soit $\mathbb{R}^2$ doté de la norme **1**. D'après le théorème **3.2**, le système (**4.3**) est exponentiellement stable à condition que

Body Math

$$\max\{a,b\} + \left(1-e^{-h}\right)\max\{c,2d\} < 2\left(1+e^{-\frac{h}{2}}\right).$$

CONCLUSION

A la fin de ce mémoire, nous concluons que même si les matrices associes aux systèmes différentiels linéaires à retard ne sont pas constantes, c'est-à-dire qu'ils dépend de t, leur stabilité peut être obtenue par le théorème de (Perron-Frobenius) et le principe de comparaison qui réduisons également le problème de la stabilité des systèmes à retard qui variant dans le temps à des retards constants par une majoration des matrices associer aux ces systèmes par des matrices constantes, au lieu de la réaliser par la méthode de Lyapunov-Razumikhin qui recherche des fonctions qu'il doivent vérifiées des conditions pour l'atteindre. Ainsi que nous avons également précisé que pour assurer la stabilité de ces systèmes, il faut que la perturbation doivent soumis à des conditions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Dashkovskiy and L. Naujok, Lyapunov-Razumikhin and Lyapunov-Krasovskii theorems for interconnected ISS time-delay systems, Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), 5-9 July, 2010, Budapest, Hungary, pp. 1180-1184.

[2] J. Dieudonnoundations of Modern Analysis, Academic Press, 1988.

[3] R. D. Driver, Existence and stability of solutions of a delay differential system, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 10 (1962), 401-426.

[4] E. Fridman, New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems, Systems and Control Letters, 43 (2001), 309-319.

[5] E. Fridman, Stability of systems with uncertain delays : a new complete Lyapunov-Krasovskii functional, IEEE Transactions on Automatic Control, 51 (2006), 885-890.

[6] W. M. Haddad, V. Chellaboina and Q. Hui, Nonnegative and Compartmental Dynamical Systems, Princeton University Press, 2010.

[7] J. Hale and S. M. V. Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[8] G. Hu and E. J. Davison, Real stability radii of linear time-invariant time-delay systems, Systems and Control Letters, 50 (2003), 209-219.

[9] L. Idels and M. Kipnis, Stability criteria for a nonlinear nonautonomous system with delays, Applied Mathematical Modelling, 33 (2009), 2293-2297.

[10] M. Jiang, Y. Shen and X. Liao, On the global exponential stability for functional differential equations, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 10 (2005), 705-713. V. B. Kolmanovskii and V. R. Nosov, Stability of Functional Differential Equations, Academic Press, 1986.

[11] Y. Kuang, Delay differential equations with applications in population dynamics, in : Mathematics in Science and Engineering, Vol. 191, Academic Press, 1993.

[12] X. Liu, W. Yu and L. Wang, Stability analysis for continuous-time positive systems with time-varying delays, IEEE Transactions on Automatic Control, 55 (2010), 1024-1028.

[13] P. H. A. Ngoc, Strong stability radii of positive linear time-delay systems, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 15 (2005), 459-472.

[14] P. H. A. Ngoc, On positivity and stability of linear Volterra systems with delay, SIAM Journal on Control and Optimization, 48 (2009), 1939-1960.

[15] P. H. A. Ngoc, On exponential stability of nonlinear differential systems with timevarying delay, Applied Mathematics Letters, 25 (2012), 1208-1213.

[16] P. H. A. Ngoc, Stability of positive differential systems with delay, IEEE Transactions on Automatic Control, 58 (2013), 203-209.

[17] P. H. A. Ngoc, Novel criteria for exponential stability of functional differential equations, Proceedings of the American Mathematical Society, 141 (2013), 3083-3091.

[18] P. H. A. Ngoc and L. T. Hieu, New criteria for exponential stability of nonlinear difference systems with time-varying delay, International Journal of Control, 86 (2013), 1646-1651.

[19] H. Sadaka, B. Shafai, R. Sipahi and J. Chen, An alternative characterization of robust stability and stability radius for linear time delay systems, Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, 2007, pp. 2112-2116.

[20] Hal Smith, An introduction to delay differential equations with sciences applications to the life, in : Texts in Applied Mathematics, Vol. 57, Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2011.

[21] N. K. Son and D. Hinrichsen, Robust stability of positive continuous-time systems, Numer. Funct. Anal. Optim., 17 (1996), 649-659.

[22] N. K. Son and P. H. A. Ngoc, Robust stability of positive linear delay systems underaffine parameter perturbations, Acta Mathematica Vietnamica, 24 (1999), 353-372.

[23] S. Xueli and P. Jigen, A novel approach to exponential stability of nonlinear systems with time-varying delays, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (2011),1700-1705.

[24] F. Wang, Exponential asymptotic stability for nonlinear neutral systems with multiple delays, Nonlinear Analysis : Real World Applications, 8 (2007), 312-322.

[25] B. Zhang, J. Lam, S. Xu and Z. Shu, Absolute exponential stability criteria for a class of nonlinear time-delay systems, Nonlinear Analysis : Real World Applications, 11 (2010), 1963-1976.

[26] P. H. A. Ngoc, New criteria for exponential stability of linear time-varying differential systems with delay, Pham Huu Anh Ngoc and Cao Thanh Tinh.Taiwanese Journal Of Mathematics, Vol. 18, No. 6, pp. 1759-1774, Decembre 2014.