



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ « Abbès LAGHROUR » DE KHENCHELA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE



Département de Génie Mécanique

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Spécialité : Génie Mécanique
Option : Construction Mécanique
Thème

*Analyse statique de flexion des poutres FGM
avec la méthode semi-analytique*

Réalisé par :

- OUNISSI Hamza
- ZEROUAL Ghania

Dirigé par : Mr. MESSAOUDI Aissam M.A.A

Membres de jury :

<i>Mr. KHADHRAOUI Faycel</i>	<i>M.A.A</i>	<i>Université de Khenchela</i>	<i>Président</i>
<i>Mr. HIMEUR Nabil</i>	<i>M.A.A</i>	<i>Université de Khenchela</i>	<i>Examineur</i>

Présenté le/06/2022

Année universitaire : 2021/2022

Remerciement

Nous commençons par remercier le dieu qui nous a donné la volonté, la santé, le courage et surtout la patience pour pouvoir produire ce modeste travail et faire face à toutes les contraintes qui se sont posées au cours de son élaboration.

Nous remercions chaleureusement notre encadreur Monsieur MASSAOUDI ISSAM pour ses valeureux conseils, pour son précieux temps qui a été consacré pour nous, par son encouragement durant l'élaboration de ce mémoire.

Un grand merci à Mr Khadhraoui Faycel pour l'honneur qu'il nous fais en acceptant de présider ce jury.

Nous profonds remerciements vont aussi à Mr HIMEUR Nabil pour avoir accepté d'examiner ce travail

Nous remercions également tous les enseignants d'université Khenchela qui ont participé au cursus de notre formation

Nous adressons aussi un grand merci à tous les personnels de département de sciences et techniques

Enfin nous remercions tous ceux qui en contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

*Je dédie ce travail à mes parents pour leurs prières,
patience, amour, et leurs encouragements tout au long de
mes études*

*À mes chers frères et sœurs: YASSER, AMIRA, CHAIMA et
OUSSAMA*

À mon beau frère docteur BOUDJAMA KHIR ADIN

À mon Binôme Zeroual GHANIA

À mon encadreur MASSAOUDI ISSAM

À tous mes professeurs

*À mes amis RIM ABD ERRAHIM ET HAMDANI NOUR
ADDINE*

*À tous ma famille, mes enseignants et mes collègues de ma
promotion*

HAMZA

Dédicace

Je dédie Ce modeste travail:

*A ma chère mère qui m'a toujours encouragé par ses prières
et son soutien, A l'âme de mon cher père.*

A mes frères et mes sœurs et toute ma famille.

*Une spéciale dédicace à mon encadrent, Dr MASOUDI
Issam professeur au département de Génie Mécanique,*

A tous les professeurs de génie mécanique,

*A Mon confrère et binôme OUNISSI Hamza et sa famille
pour lequel je souhaite une vie pleine de joie et de réussite.*

A tous mes amis,

A toute la promo 2022, et à tous mes amis sans exception.

Ghania

Sommaire

Liste des figures.....	i
Liste des tableaux.....	ii
Nomenclature.....	iii
Introduction générale.....	01

Chapitre I Généralités sur les FGM

I.1	Introduction.....	03
I.2	Définition des FGM	04
I.3	Structures FGM dans la nature	05
I.4	Concept des matériaux FGM.....	06
I.5.	Types de matériaux fonctionnellement gradués.....	09
I.5.1	Gradient de composition chimique des Matériaux FGM.....	09
I.5.2	Gradient de porosité des Matériaux FGM.....	10
I.5.3	Gradient de la microstructure des Matériaux FGM.....	11
I.6	Propriétés effectives des matériaux a gradient fonctionnel.....	11
I.7	La différence entre les matériaux composites classiques et les FGM	13
I.8	Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM).....	15
I.8.1	La métallurgie des poudres (Powder metallurgy).....	15
I.8.2	La compaction sèche des poudres	16
I.8.3	Le coulage centrifuge (Centrifugal casting).....	16
I.8.4	Le coulage par barbotine (Slip casting).....	17
I.8.5	Le coulage en bande (Tape Casting).....	18
I.8.6	Le frittage (Sintering).....	19
I.8.7	La projection plasma (Plasma projection).....	19
I.9	Domaines d'application des FGM.....	20
I.9.1	Aérospatiale	21
I.9.2	Médecine.....	22
I.9.3	Défense	22
I.9.4	Énergie nucléaire	23
I.9.5	Marine	23
I.10	Avantages et inconvénients des FGM.....	23
I.10.1	Avantages de la FGM	23
I.10.2	Inconvénients de la FGM	24

Chapitre II Revue générale sur les théories des poutres

II.1	Introduction.....	26
II.2.	Historique.....	26
II.3.	Définition d'une poutre.....	27
II.4.	Types des poutres	28
II.4.1	Poutre simple.....	28
II.4.2	Poutre console.....	28
II.4.3	Poutre avec porte-à-faux.....	28
II.4.4	Poutre encastree et supportée.....	29

II.4.5 Poutre continue.....	29
II.4.6 Poutre à double encastrement.....	30
II.4.7 Poutre supportée à double encastrement.....	30
II.5 Propriétés matérielles des poutres FGM:.....	30
II.5.1 Les propriétés matérielles de la poutre P-FGM.....	31
II.5.2 Les propriétés matérielles de la poutre S-FGM.....	32
II.5.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	33
II.6. Les théories des poutres.....	34
II.6.1. Theorie d'Euler Bernoulli (CLASSICAL BEAM THEORY- CBT).....	34
II.6.2 Théorie de Timoshenko(FSDBT).....	35
II.6.3 Théorie d'ordre élevé	36

Chapitre III Modélisation mathématique de problème de flexion des poutres

III .1 Introduction	39
III.2. Cinématiques et déformations.....	39
III.3. Les équations du mouvement.....	40
III.4. Les équations constitutives.....	41
III.5. Conclusion.....	43

Chapitre IV Simulation, résultats et discussions

IV.1 Introduction.....	45
IV.2 Résultats et discussions.....	45
IV.3 Les résultats des graphes.....	47
IV.4 Conclusion.....	50
Conclusion générale.....	52

Listes des figures

Chapitre I Généralités sur les FGM

Figure I.01 Variation graduelle dans l'os humain	06
Figure I.02 Variation continue des propriétés d'un matériau FGM.	07
Figure I.03 Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et les FGM	08
Figure I.04 Différence de la distribution [Yoshihisa,2004].	09
Figure I.05 Matériaux FGM poreaux.....	11
Figure I.06 Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient Fonctionnel.	12
Figure I.07 Géométrie d'une plaque FGM.	12
Figure I.08 La variation des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée.	13
Figure I.09 Une vue microscopique d'un FGM.....	14
Figure I.10 La micro structure d'un FGM [Hashmi.2014].	14
Figure I.11 Micro photographie d'un FGM Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique.	15
Figure I.12 Le coulage centrifuge des poudres mixtes	17
Figure I.13 Principe du coulage par barbotine	18
Figure I.14 Principe du coulage en bande	19
Figure I.15 Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma	20
Figure I.16 Les différents domaines d'application des FGM.....	21
Figure I.17 Pièces FGM dans le domaine aérospatial	22
Figure I.18 Pièces FGM dans le domaine médecine.....	22

Chapitre II Revue générale sur les théories des poutres

Figure II.1 Schéma d'un élément de poutre.....	27
Figure II.2 Poutre simple.	28
Figure II.3 Poutre console.	28
Figure II.4 Poutre avec porte-à-faux.	29
Figure II.5 Poutre encastree et supportee.....	29
Figure II.6 Poutre continue.	29
Figure II.8 Poutre supportee à double encastrement.....	30
Figure II.9 Les coordonnées et la géométrie de la poutre à gradient de propriété.....	30
Figure II.10 La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.	31
Figure II.11 La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.....	32
Figure II.12 La variation du module de Young dans une poutre E-FGM.....	33
Figure II.13 Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli.....	33
Figure II.14 Cinématique de la poutre de Timoshenko.....	34
Figure II.15 Cinématique de la théorie d'ordre élevé d'une poutre.....	35

Chapitre III Modélisation mathématique de problème de flexion des poutres

Figure III .1 Géométrie et coordonnées de poutre FGM.	40
---	----

Chapitre IV Simulation, résultats et discussions

Figure IV.1 Variation de déplacement sans dimension $\bar{u}(\mathbf{0}, \mathbf{z})$ à travers l'épaisseur de la poutre PFGM.....	47
Figure IV.2 Variation des contraintes normales à travers l'épaisseur de la poutre PFGM.....	48
Figure IV.3 Variation des contraintes tangentielle à travers l'épaisseur de la poutre PFGM.....	49

Listes des tableaux

Chapitre II Revue générale sur les théories des poutres

Tableau II.1 Différentes fonctions de gauchissement utilisées dans les théories des poutres isotropes et FGM.....37

Chapitre IV Simulation, résultats et discussions

Tableau IV.1 présente les résultats numériques des déplacements axiaux et les contraintes normales et tangentielles de la poutre FGM sous la charge uniforme.46

Nomenclature

E : Module de Young.

μ : Coefficient de Poisson.

$V_{(z)}$: Fraction volumique.

h : Epaisseur de la poutre.

p : Paramètre du matériau.

q : Moment de torsion.

$\delta V, \delta u$: Des variations des énergies.

k : Rotation courbure.

E_1, E_2 : les modules de Young de la surface inférieure et de la surface supérieure de la poutre FGM.

u, u_0 : Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre .

w, w_0 : Les déplacements dans les directions x, z .

∂ : Dérivée partielle.

γ_{xz} : La distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

$\Phi_0(x, t)$: La rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

a : Longueur de la poutre.

b : Largeur de la poutre.

h : Épaisseur de la poutre.

ε_x : Déformation dans la direction x .

σ_x : Contraintes normales.

τ_{xz} : Contraintes de cisaillement.

$\delta\gamma_{xz}$: Champ de déformation transversal virtuel.

$\delta\varepsilon_x$: Champ de déformation longitudinal virtuel.

δU : Variation de l'énergie de déformation.

\bar{w} : La flèche maximale adimensionnelle.

\bar{u} : Déplacements adimensionnelle.

$\bar{\sigma}_x$: Contrainte axiale adimensionnelle.

$\bar{\sigma}_{xz}$: Contraintes tangentielle adimensionnelle.

q_0 : La charge thermomécanique.

E_m : Module de Young du métal.

E_c : Module de Young de céramique.

Abréviations :

FGM : Matériaux fonctionnellement gradués (functionally graded materials).

HBT: La théorie des poutre (High beam theory).

CBT: La théorie des poutre classique (classical beam theory).

FSDBT: La théorie de déformation de cisaillement du premier (first shear déformation theory).

Introduction générale

Introduction générale

Le développement industriel et technologie moderne exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures. Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes. En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité.

Une classe de nouveaux matériaux composites avancés comprend des matériaux fonctionnels (FGM) avec des propriétés de matériaux variant en continu. Ces matériaux ont reçu une attention considérable dans de nombreuses applications d'ingénierie depuis leur apparition en 1984 au Japon. Ce type des matériaux (FGM) offrent de nombreuses propriétés meilleures que celles des matériaux composites classiques, comme les grandes charges et la rigidité spécifique élevée, légèreté et la résistance aux hautes températures ou effets de barrières thermiques. Dans ce sens, nous avons proposé ce travail qui présente l'analyse statique de flexion des poutres en matériaux à gradient de propriété de type P-FGM, en utilisant une théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé à trois variables. Les équations d'équilibres sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels. Les équations obtenues sont ainsi résolues par l'utilisation de la solution de Navier pour le cas d'une poutre simplement appuyée. Deux études sont présentées, comparative et paramétrique dont l'objectif de la première est de montrer la précision et l'efficacité de la théorie utilisée et la deuxième d'analyser le comportement mécanique de cette poutre sous l'effet des différents paramètres à savoir l'indice matériel (k), le rapport d'épaisseur (a/h) et le type de poutre.

Le but de ce travail est d'analyser la flexion des poutres FGM en utilisant une nouvelle théorie hyperbolique à trois variables seulement. Ce travail sera divisé en quatre chapitres : Dans le premier chapitre, on commencera par présenter quelques généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués. Une revue sur les Théories des poutres sera exposée dans le deuxième chapitre. Le chapitre trois sera consacré à la modélisation mathématique de problèmes de flexion des poutres FGM. L'étude statique des plaques FGM et les Résultats et Discussions sera détaillé au dernier chapitre.

Nous clôturerons ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre I

Généralités sur les FGM

I.1. Introduction

Généralement dans les domaines aéronautiques et spatial, des matériaux homogènes typiques à savoir les alliages d'aluminium et de titane [01] sont utilisés. Ils présentent un rapport résistance/poids élevé et d'excellentes propriétés mécaniques. Avec le développement technologique, l'utilisation des matériaux composites est de plus en plus fréquente, où deux ou plusieurs matériaux sont combinés à une échelle macroscopique afin d'obtenir de meilleures propriétés d'ingénierie que les matériaux classiques. D'autres structures multicouches sont employées dans ces domaines à savoir les structures en sandwich. Ils sont utilisés pour fournir une structure plus forte et plus raide pour le même poids, ou inversement, une structure plus légère peut supporter la même charge qu'un élément homogène ou stratifié compact. Ces structures sont constituées de deux faces rigides et un noyau souple. Ils sont largement utilisés pour construire des avions, des engins spatiaux, des navires et des véhicules automobiles. La plupart des applications récentes ont utilisé des peaux constituées de structures stratifiées en matériaux composite anisotrope. Dans le cas de structures intelligentes, certaines couches sont en matériaux piézoélectriques, ils utilisent l'effet dit « piézo-électrique » qui relie l'électricité et la mécanique des champs. En outre, les nanotubes de carbone (CNT) présentent des propriétés mécaniques supérieures et sont extrêmement prometteurs en raison de leurs caractéristiques de solidité, de légèreté et de ténacité. Notamment, ils peuvent être utilisés comme de très bon fibres pour les matériaux nano composites.

Enfin, cette discontinuité des propriétés matérielles à travers l'interface des constituants de ces matériaux composites, provoque des concentrations de contraintes sous des chargements mécaniques ou dans un milieu thermique ultra-chaud, la différence relative du coefficient d'expansion thermique provoque des contraintes résiduelles importantes. A cet effet, le concept du matériau fonctionnellement gradués (Functionally Graded Materials «FGM») est introduit pour satisfaire la demande dans un environnement ultra chaud et aussi pour éliminer les contraintes singulières.

I.2 Définition des FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel, appelés aussi FGM par référence à leur nomination anglaise (Functional Gradient Materials), représentent un nouveau concept de fabrication de pièces avec des propriétés et/ou fonctions qui ne peuvent pas être remplies par les matériaux classiques homogènes. Leur simple structure consiste en une évolution graduelle d'une surface à l'autre par un changement continu de la composition. Leur profil de transition doit être prédéfini et introduit afin d'obtenir la fonction désirée. Dans ce sens, les matériaux à gradients peuvent sans aucun doute être classés dans une catégorie distincte de celle des composites classiques.

Les FGM ont attiré une grande attention des chercheurs au cours de la dernière décennie en raison de leurs propriétés graduées en chaque point dans diverses dimensions. Les FGM sont des composites possédant une variation continue et cohérente de composition, de microstructure [02]. Un FGM est un type de matériaux composites classé par leur microstructure variable dans l'espace ; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes [03]. Les distributions de propriété sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules ; qui doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture ; mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure, lorsque la distribution est continue. Par contre, les matériaux composites présentent des interfaces entre la matrice et le composite inséré (céramique). Cette interface peut initier des fissures qui conduiront à terme à la rupture de la structure [04]. Dans les FGM, l'absence d'interface entre les deux matériaux améliore les performances fonctionnelles des structures. De plus, on peut tirer parti du meilleur de chaque matériau pour la tenue mécanique, la tenue en température ou la résistance à la corrosion.

Dans ce cas, la composition et la microstructure de FGM changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la pièce. Des gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, etc... [05].

En science des matériaux, les matériaux à classification fonctionnelle (FGM) peuvent être caractérisés par la variation graduelle de la composition et de la structure en fonction du volume, entraînant des changements correspondants dans les propriétés du matériau. Les matériaux peuvent être conçus pour une fonction et des applications spécifiques. Diverses

approches basées sur le volume (traitement des particules), le traitement des préformes, le traitement des couches et le traitement à l'état fondu sont utilisées pour fabriquer les matériaux fonctionnellement classés.

Les FGM se distinguent des assemblages classiques par la variation intentionnelle de la composition chimique, ce qui entraîne une évolution des propriétés microstructurales, chimiques, mécaniques et thermiques. De plus, l'absence de discontinuités à travers le FGM permet de lisser la distribution des contraintes thermiques et diminuer l'usure excessive et la corrosion tout en conservant leurs propriétés structurelles ainsi que l'usinabilité [06-07]. Les FGM permettent donc de créer de nouveaux matériaux qui répondent à des exigences industrielles spécifiques.

I.3 Structures FGM dans la nature

Les chercheurs sont toujours inspirés par la nature lorsqu'ils sont confrontés par des problèmes d'ingénierie tel que les neurones dans le cerveau humain. Les chercheurs ont copié ce concept pour résoudre plusieurs problèmes à travers l'utilisation des réseaux de neurones artificiels, les matériaux à gradient fonctionnel ne sont pas une exception, les plantes, les os et les dents sont parmi plusieurs exemples des FGM naturels [08,09,10].

Le bambou est un autre exemple d'un FGM naturel qui possède des propriétés à graduation continue distinguée par une variation micro structurelle produite par les distributions non-uniformes des ingrédients constituants. Les avantages de la variation continuent dans les propriétés de ce matériau inclus la réduction de la concentration des contraintes ainsi qu'à augmenter la force de collage [11,12].

La majorité des tissus et des organes humains sont constitués de FGM naturels. Nous citons :

- La peau humaine qui a un système structurel complexe de multicouches (épiderme, le derme et l'hypoderme). Chaque couche possède différentes propriétés ainsi que différentes fonctions.
- Les articulations humaines sont constituées de tissus à gradient fonctionnel, tel que le tendon-à-os et le cartilage-à-os qui contient des ligaments permettant de connecter ces tissus.
- Le disque inter-vertèbre humain qui contient l'anneau fibreux, le noyau gélatineux et le cartilage end plates [13].
- Le tissu des os contient une variation graduelle de la densité et la distribution des porosités.

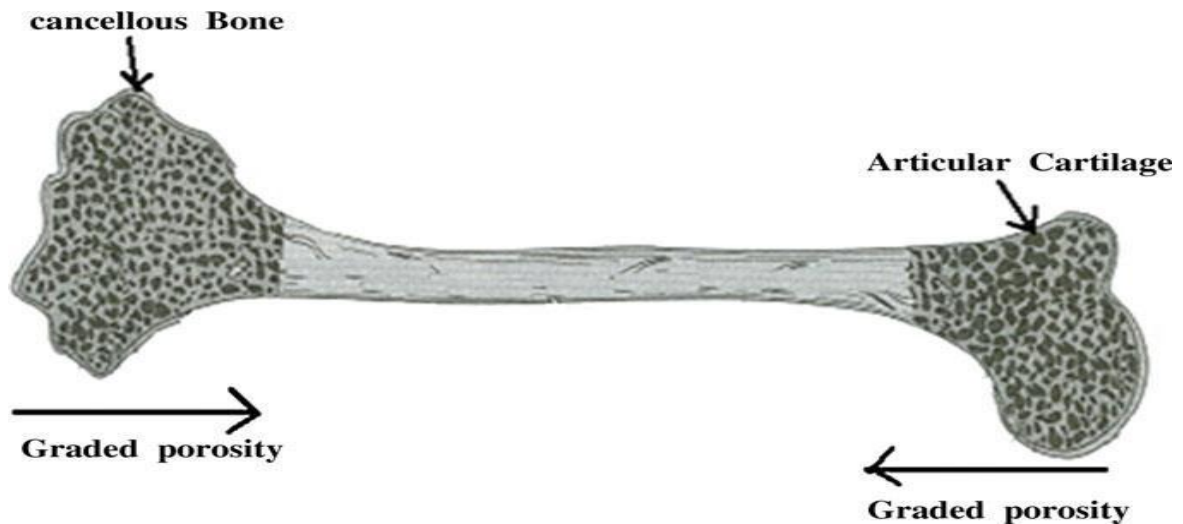


Figure I.1 Variation graduelle dans l'os humain [14].

La surface de dents humaines est faite de matériel dur et résistant à l'usure, tandis que la partie interne est faite d'un matériau souple et doux qui aide à absorber le choc et aide à prolonger la vie de la partie extérieure dure. La transition de l'émail à dentine est fournie par des couches FGM intermédiaires, où la composition change progressivement d'un matériau à l'autre. Ceci est la raison pour laquelle il y a un si haut intérêt de recherche dans la fabrication de plus d'implants médicaux ainsi que des matériaux fonctionnellement gradués, parce qu'il a été découvert que les meilleures greffes sont souvent ceux qui se rapprochent le plus possible des tissus naturels [15].

I.4 Concept des matériaux FGM

Les matériaux à gradient fonctionnels se distinguent des matériaux composites traditionnels grâce à leurs variations graduelles et continues de leurs propriétés mécaniques et thermiques selon une loi de fonction à travers l'épaisseur (figure I.2). Cette dernière permet d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (Provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux.

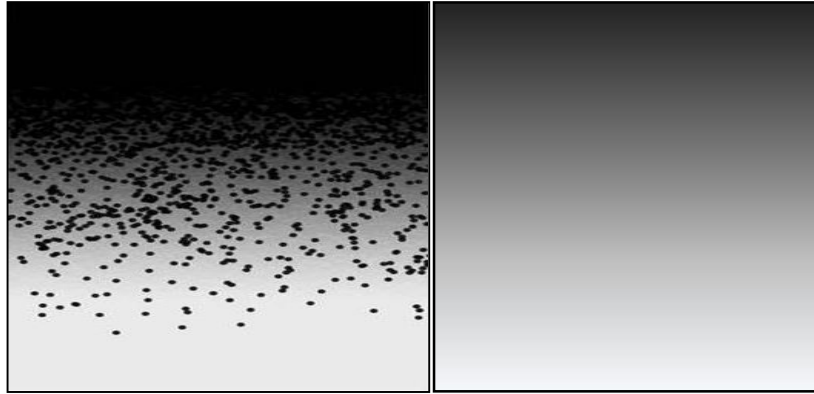


Figure I.2 Variation continue des propriétés d'un matériau FGM.

Ces matériaux sont très souvent composés de céramique et métal permettant ainsi de bénéficier d'une combinaison de leurs avantages respectifs. Nous mentionnons comme exemple le cas pour lequel ces matériaux ont été conçus, où le but était d'utiliser un matériau composite apte à résister une température de 2000 K sur un côté sans que cette dernière se transmette à l'autre côté [14]. Dans ce cas, un matériau FGM dont la face supérieure est complètement céramique qui varie graduellement à travers l'épaisseur jusqu'à la face inférieure 100% métal répondra aux exigences des chercheurs. Le choix des deux matériaux est principalement dû à leurs caractéristiques complémentaires :

Céramique :

- Résistance thermique ;
- Résistance à l'oxydation ;
- Faible conductivité thermique ;
- Faible coefficient de dilatation thermique.

Métal :

- Résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée ;
- Très bonne ténacité.

Chapitre I Généralité sur les FGM

La transition graduelle entre les deux matériaux permettra d'éliminer les problèmes de l'interface ainsi que de relaxer les contraintes thermiques. En modifiant la microstructure de transition, il est possible d'optimiser la distribution de la déformation, la température et des contraintes, ce qui est demandé lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé afin d'améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu [16,17].

Comparés aux matériaux composites traditionnels, les matériaux FGM se distinguent par leurs caractéristiques macroscopiquement inhomogènes étant donné qu'ils se constituent de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. [18] a résumé cette différence dans la figure I.3 ci-dessous, tandis que [19] a établi un modèle simple montrant les différences entre les matériaux FGM et les matériaux composites conventionnels illustré dans la figure I.4.

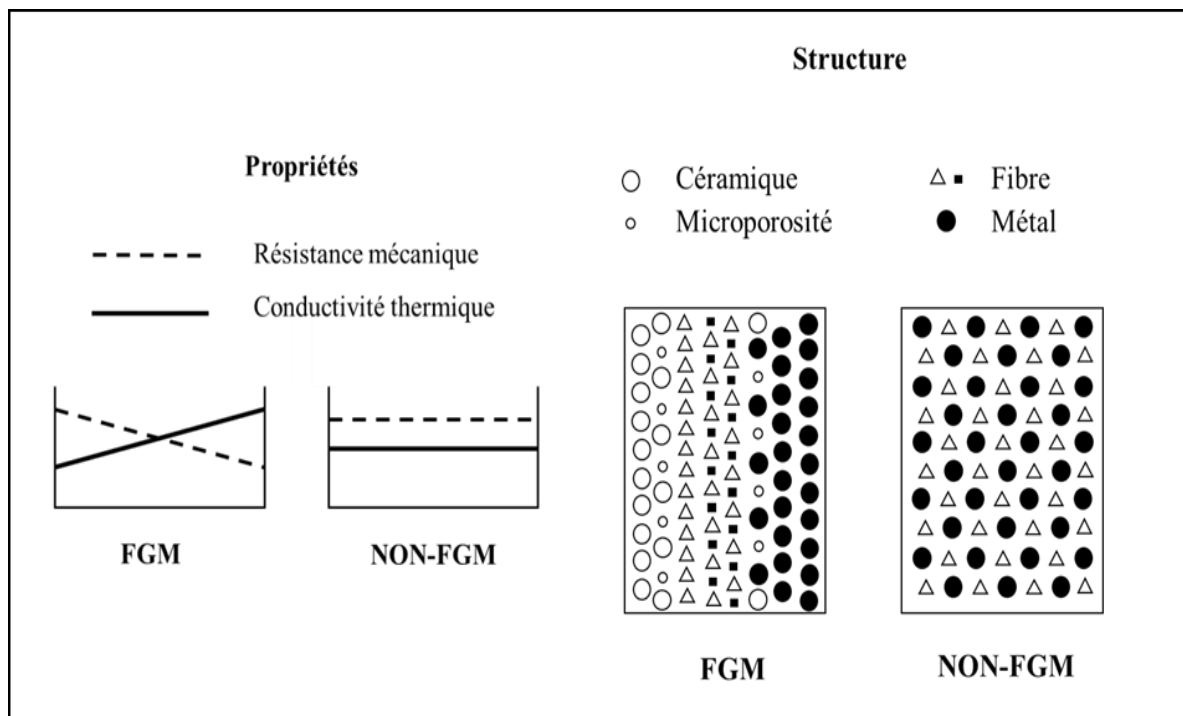


Figure I.3 Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et les FGM [18].

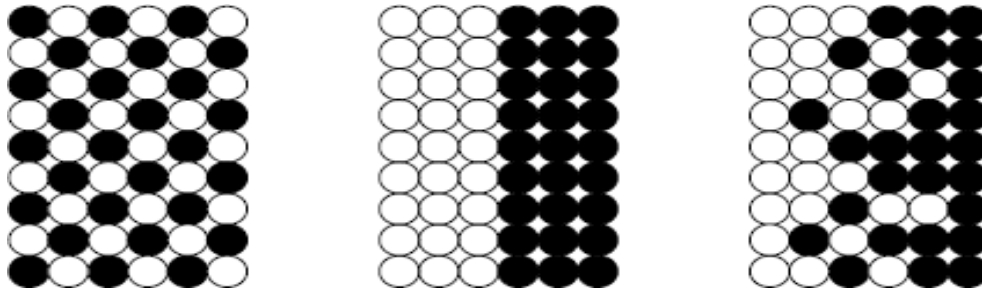


Figure I.4 Différence de la distribution [19].

I.5 Types de matériaux fonctionnellement gradués

Au début du développement des matériaux FGM, le concept était d'éliminer l'interface nette qui existait dans le matériau composite traditionnel et de la remplacer par une interface progressivement variable, qui s'expliquait par la composition chimique changeante de ce composite dans cette région d'interface.

L'intérêt progressif pour ce type de matériaux a conduit à la mise au point de différents types de FGM. Le type d'application étudiée détermine en général le type de FGM à utiliser. Les différents types des matériaux FGM en cours de production comprennent à présent le gradient de composition chimique, le gradient de porosité et le gradient de la microstructure. Chacun de ces types des matériaux FGM est décrit avec précision dans les sections suivantes [20].

I.5.1 Gradient de composition chimique des Matériaux FGM

Il s'agit d'un type des matériaux FGM, dans lesquels la composition chimique varie progressivement en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multiphasé. Une structure FGM monophasée est produite quand le composite est fabriqué à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement lors du processus de frittage. Le changement graduel de la répartition des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation du matériau fonctionnellement gradué. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajoutée serait soluble dans ce matériau sur une gamme de composition et des conditions de mélange. Ce matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau monophasé mais de composition chimique variable en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins habituel.

Chapitre I Généralité sur les FGM

Les matériaux FGM les plus couramment conçus et les plus habituellement utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multiphase. Les phases et la composition chimique ont fait varier à travers le volume apparent du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui permettraient de réaliser l'application souhaitée, pour laquelle la FGM a été conçue. Les différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique appliqué à ce matériau. Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM est en plaçant couche par couche la composition de poudre requise, et cela est suivi par le compactage et le frittage de la poudre par la suite. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques vont réagir pour former différents composés et phases chimiques. Celles-ci varieraient en fonction de la position spatiale dans le matériau fonctionnellement gradué.

I.5.2 Gradient de porosité des Matériaux FGM

Le gradient de porosité des matériaux fonctionnellement gradués est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec le changement de la position spatiale dans le matériau composite. Le diagramme schématisé du gradient de porosité typique d'un matériau fonctionnellement gradué est représenté sur la figure I.5. Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'elles entendent remplacer consiste en une porosité à gradation fonctionnelle, laquelle faciliterait également l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés.

La porosité graduée contribue également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-implant. Cela est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain. Les matériaux à gradient de porosité sont produits par dépôt de poudre avec un mélange varié de formes et de tailles de particules différentes, ce qui aiderait à produire la porosité variable nécessaire en fonction de la forme et de la taille des pores. Les matériaux à gradient de porosité peuvent être un gradient de densité de porosité

ou un gradient de taille de pores. La densité de porosité est produite lorsque la densité de porosité change en fonction de la position spatiale à travers le volume du matériau.

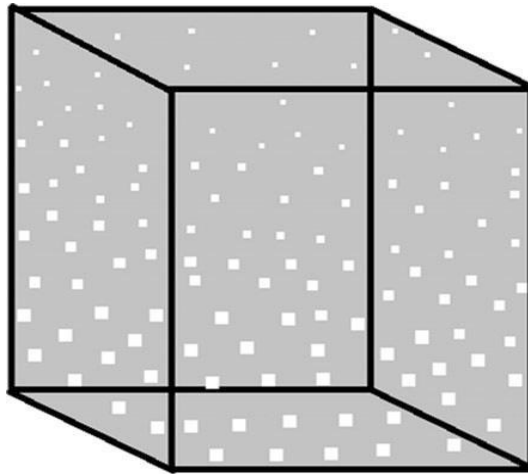


Figure I.5 Matériaux FGM poreaux.

1.5. 3 Gradient de la microstructure des Matériaux FGM

Un matériau fonctionnellement gradué de gradient microstructural est un autre type de FGM, dans lequel la microstructure est conçue de manière à produire différentes microstructures dans le matériau, qui sont amenées à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue pendant le processus de solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. Le noyau du même matériau est laissé refroidir lentement, ce qui aiderait à produire des microstructures différentes de celles situées à la surface du matériau et à la partie la plus interne. De plus, la gradation microstructurale peut être obtenue par un processus de traitement thermique contrôlé.

I.6 Propriétés effectives des matériaux a gradient fonctionnel

Généralement les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différentes propriétés classées par leur microstructure variable dans l'espace, conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

Chapitre I Généralité sur les FGM

- Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c.-à-d. couche quasi-homogène de céramique-métal (figure I -6- a) ;
- Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure I-6 – b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées (z) suivant l'épaisseur [21].

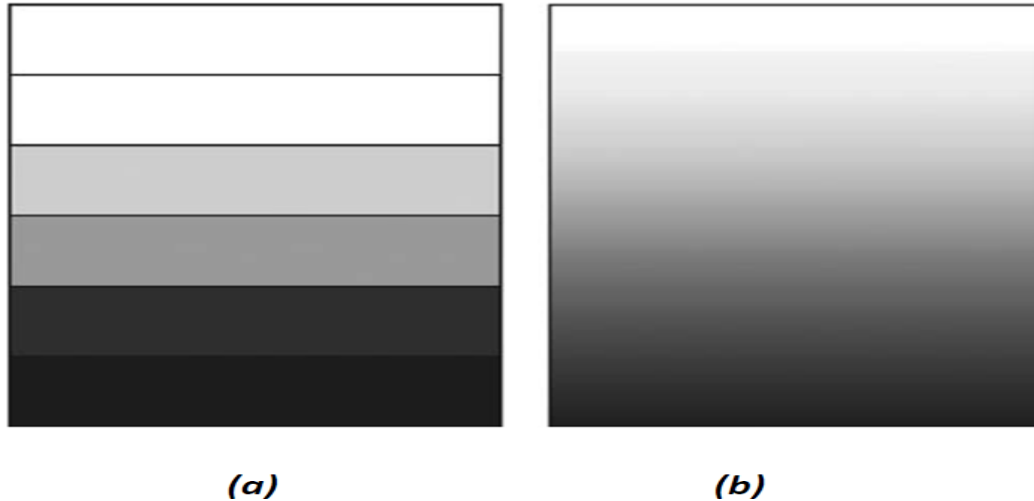


Figure I. 6 Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.

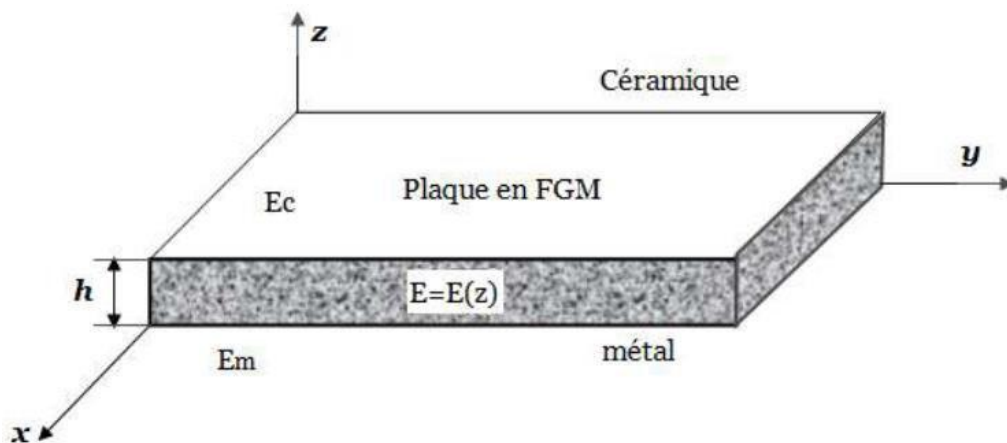


Figure I.7 Géométrie d'une plaque FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est Perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$ et $V = V(z)$.

Jin et Batra [21] indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.7 La différence entre les matériaux composites classiques et les FGM

Les propriétés supérieures de matériaux composites avancés, telles que la résistance spécifique et la rigidité élevée, ont conduit à leur utilisation généralisée dans les avions à haute performance, astronefs, des pièces automobiles et des structures spatiales. Dans les structures classiques de composites stratifiés, lames élastiques homogènes sont liés ensemble pour obtenir des propriétés mécaniques et matérielles améliorées. Les matériaux composites sont fabriqués par l'homme et, par conséquent, les constituants des matériaux composites peuvent être sélectionnés et combinés de manière à produire un matériau utile qui a les propriétés souhaitées, tels que la haute résistance, une rigidité élevée, une plus grande résistance à la corrosion, une plus grande résistance à la fatigue, un faible poids et ainsi de suite. La constitution d'anisotropie des structures composites stratifiées souvent se traduit par une concentration de contraintes dans les matériaux et des discontinuités géométriques, figure I-8 qui peut conduire à des dommages sous la forme de délaminage, la fissure de la matrice et la séparation des assemblages [22].

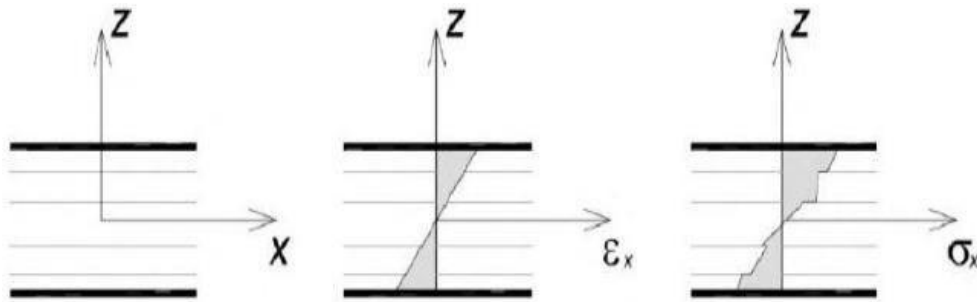


Figure I.8 La variation des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée.

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et alléger ainsi les concentrations de contraintes trouvées dans les composites stratifiés. La gradation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte. La variation progressive dans un matériau est très efficace elle est adaptée pour répondre aux besoins de la structure. Les FGM sont généralement

Chapitre I Généralité sur les FGM

fabriqués à partir de composants d'isotropie tels que des métaux et des céramiques, puisqu'ils sont utilisés aussi comme structures de barrière thermique dans des environnements avec des gradients thermiques sévères (par exemple des dispositifs thermoélectriques pour la conversion de l'énergie, l'industrie des semi-conducteurs). Dans de telles applications, la céramique présente une résistance à la chaleur et à la corrosion, parallèlement le métal fournit la force et la ténacité.

Les FGM sont donc des matériaux composites à caractère non homogène macroscopiquement. Les changements continus dans leur microstructure distinguent les FGM par rapport aux matériaux composites classiques, voir figure, I.9, I.10 et I.11.

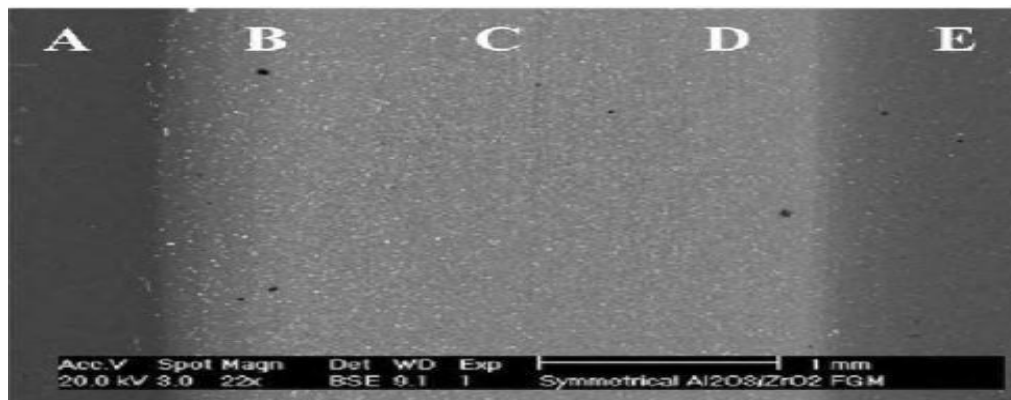


Figure I.9 Une vue microscopique d'un FGM [23].

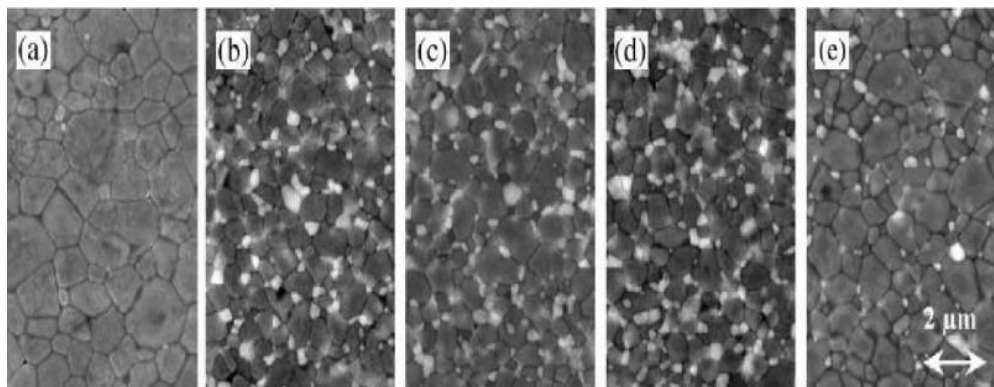


Figure I.10 La micro structure d'un FGM [23].

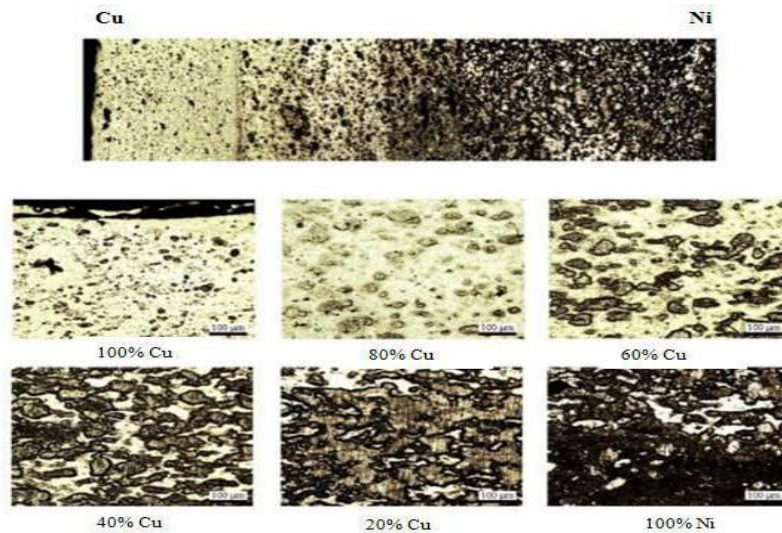


Figure I.11 Micro photographie d'un FGM Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique [23].

I.8 Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Le processus de fabrication est l'un des domaines les plus importants de la recherche sur les FGM. Une grande partie des travaux a été consacrée au développement des méthodes de production et traitement des FGM. La plupart des procédés de production de FGM sont basés sur une variante de procédés de traitement classiques déjà bien établis. Les procédés qui sont capables de recevoir une étape de gradation comprennent la métallurgie des poudres [24] et les procédés de compaction sèche des poudres. En général, les procédés d'élaboration les plus utilisés incluent le coulage centrifuge [25], le coulage par barbotine, le coulage en bande [26], le frittage et la projection plasma. Le choix de la méthode de production la plus appropriée dépend principalement de la combinaison de matière, du type de la loi de mélange requise et de la géométrie de la composante souhaitée.

I.8.1 La métallurgie des poudres (Powder Metallurgy)

Cette méthode est l'une des techniques les plus couramment employées en raison de son large contrôle sur la composition et la microstructure et la capacité de formation de forme. La métallurgie des poudres offre plus d'avantages grâce à des coûts moindres, une disponibilité accrue des matières premières, un équipement de traitement plus simple, une consommation d'énergie plus faible et des temps de traitement plus courts. Dans le traitement de la poudre, le gradient est généralement produit en mélangeant différentes poudres en rapports variables et en empilant les mélanges de poudre dans des couches séparées avec des épaisseurs comprises entre 0,2 mm et 1 mm. Plusieurs techniques ont été introduites pour la préparation de poudre, par exemple par réaction chimique, dépôt électrolytique ou broyage. Ces techniques permettent des

taux de production en masse de matériaux en poudre et une gamme de tailles contrôlables de la quantité finale de grains. Pour le traitement de la poudre, la considération principale est centrée sur la précision dans les quantités de pesée et la dispersion des poudres mélangées. Ces éléments influenceront les propriétés de la structure et devraient être manipulés de manière très prudente. Dans les procédés ultérieurs, les opérations de formation sont effectuées à température ambiante tandis que le frittage est effectué à la pression atmosphérique car une température élevée peut provoquer une autre réaction qui peut affecter les matériaux. Des études en biomécanique ont constaté que les FGM utilisées dans les prothèses articulaires avec des épaisseurs de couche inférieure à 1,0 mm présentaient une faible résistance à l'usure [27]. Néanmoins des FGM ayant une épaisseur de couche supérieure à 2 mm produits par projection plasma et par frittage et infiltration ont des propriétés mécaniques et tribologiques meilleurs et conviennent mieux pour l'utilisation dans des prothèses articulaires car ils présentaient un faible niveau de porosité et par conséquent des échantillons entièrement denses [28].

I.8.2 La compaction sèche des poudres

Ce procédé est plus utilisé pour la fabrication de pièces de formes complexes car il se base sur le versement successif des poudres dans des moules en acier après chaque fois qu'une poudre soit versée, une faible compression sera exercée, ensuite, on effectue un compactage de l'ensemble des couches, il sera suivi généralement, par une pression isostatique et un déplantage des couches suivant. Finalement on effectue une densification [29].

I.8.3 Le coulage centrifuge (Centrifugal Casting)

Le coulage centrifuge est l'une des méthodes les plus efficaces pour traiter les FGM en raison de son large contrôle de la composition et de la microstructure. La coulée centrifuge a été principalement utilisée pour obtenir des pièces cylindriques. Les deux types de base des machines de coulée centrifuge sont: les types horizontaux, qui tournent autour de l'axe horizontal, et le type vertical, qui tourne autour d'un axe vertical. Les machines de coulée centrifuge horizontale sont généralement utilisées pour fabriquer des tuyaux, des tubes, des douilles, des douilles cylindriques ou tubulaires de forme simple. La coulée centrifuge est un procédé dans lequel le métal fondu est canalisé dans un moule tournant (habituellement de 700 à 1300 tr/min). La rotation de la matrice crée une force centrifuge qui pousse le métal vers la paroi du moule. La distribution graduelle dans les FGM fabriquées par la méthode centrifuge est fortement influencée par de nombreux paramètres tel que la densité entre les particules et le métal fondu, la taille des particules, la viscosité du métal fondu, la fraction volumique moyenne

des particules, l'épaisseur du noyau et le temps de solidification [30]. La méthode centrifuge de poudres mixtes montrée dans la figure I.12 est une autre méthode introduite en tant que solution à la limitation de la méthode de coulée centrifuge dans la fabrication de FGM contenant des particules de taille nano [31].

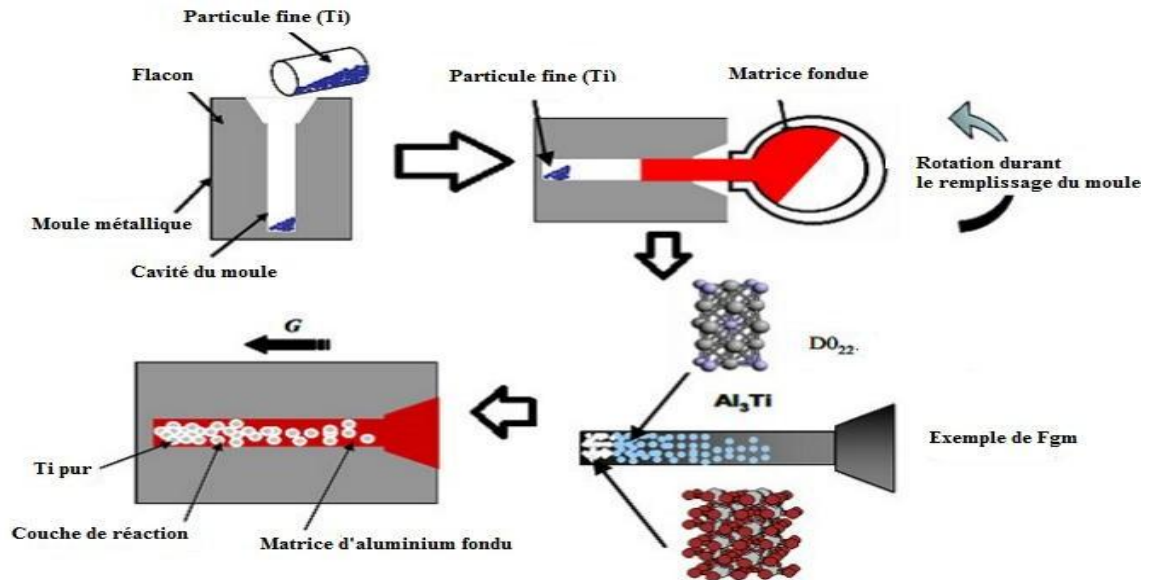


Figure I.12 Le coulage centrifuge des poudres mixtes [31].

I.8.4 Le coulage par barbotine (Slip casting)

Cette technique consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, elle se décompose en deux étapes essentielles à savoir la prise ou le tesson se forme et le raffermissement dans cette étape le tesson se consolide. La filtration peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine lors du coulage, cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet du pouvoir de succion du plâtre ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression). Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

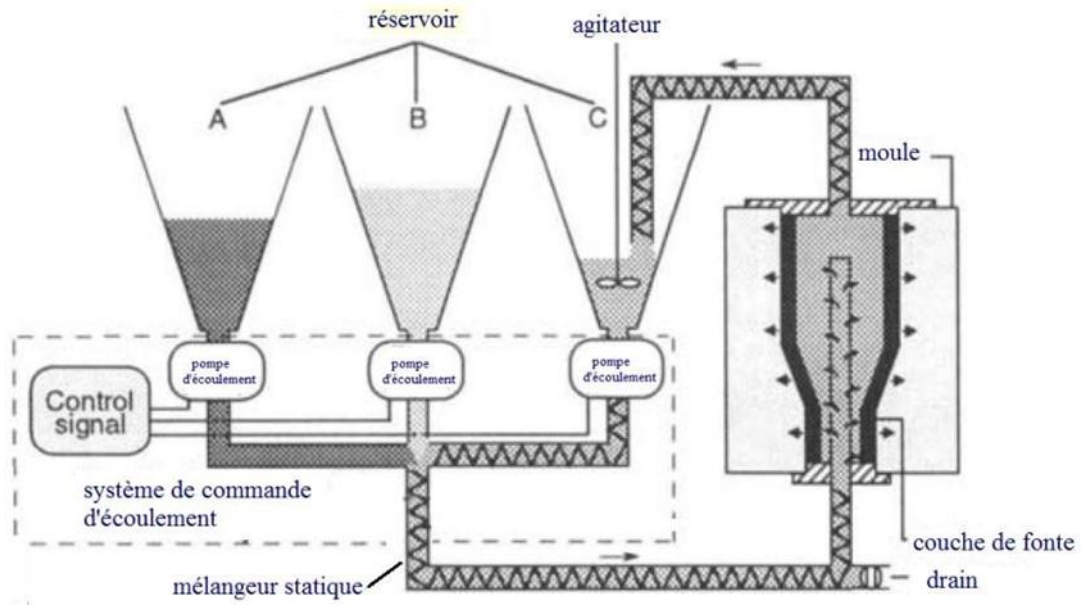


Figure I.13 Principe du coulage par barbotine [31].

I.8.5 Le coulage en bande (Tape Casting)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support figure I.14, ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [32]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

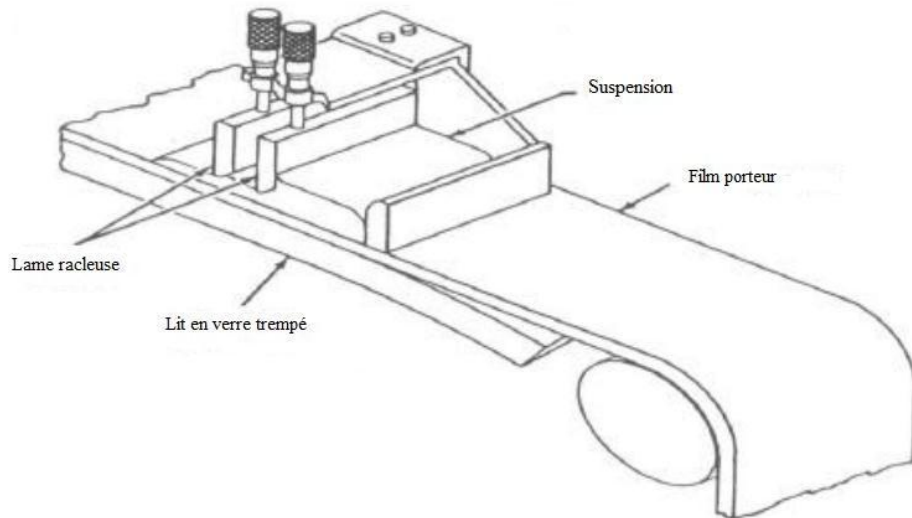


Figure I.14 Principe du coulage en bande [33].

I.8.6 Le frittage (Sintering)

Cette méthode est basée sur deux étapes, la première consiste à fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité, la seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [34]. Cette technique convient à la fabrication d'un composite fonctionnellement gradué composé de matériaux qui sont chimiquement inertes avec des températures de fusion très différentes.

I.8.7 La projection plasma (Plasma projection)

Cette méthode consiste à soumettre un gaz à une forte température ce qui le transforme en état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [35].

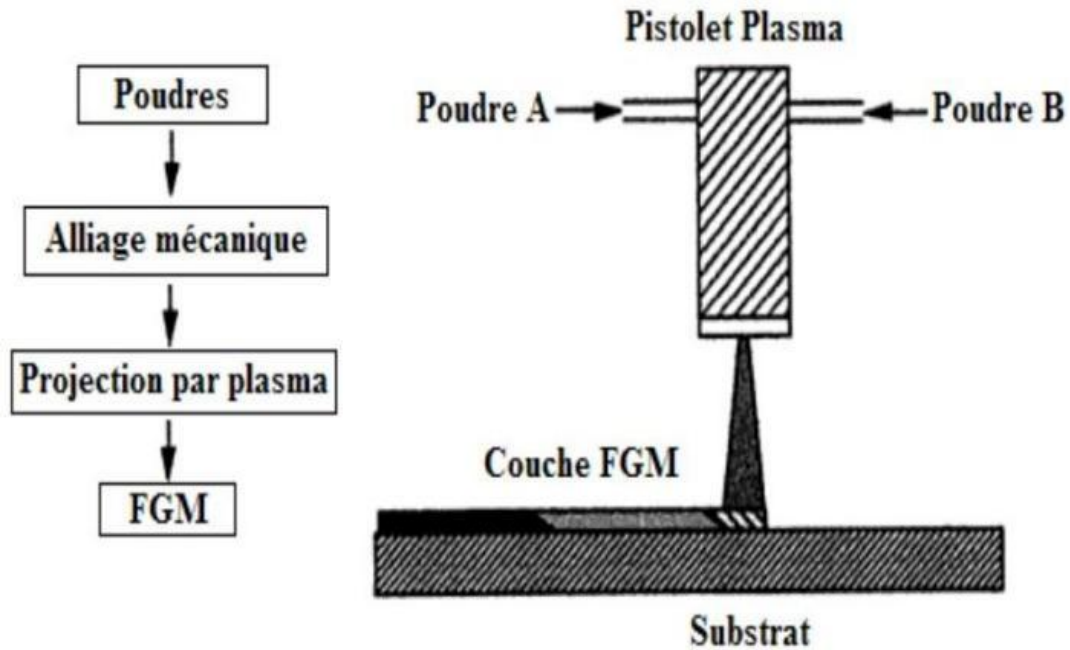


Figure I.15 Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma [35].

I.9 Domaines d'application des FGM

Il existe une large gamme d'applications pour FGM et on s'attend à ce qu'elle augmente à mesure que le coût du traitement des matériaux et des processus de fabrication est réduit en améliorant ces processus [36]. Dans cette partie, diverses applications de FGM comme illustré dans figure I.16 ont été discutées qui pourraient être très utiles dans les développements. On trouve également des applications dans le domaine de l'électronique, les composants de moteur d'automobile, de la production d'outillage. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive et on imagine qu'au fur et à mesure des avancées scientifiques l'appropriation de ce type de structure par les concepteurs permettront encore de l'élargir. Dans ce cas, nous expliquerons certaines des applications, comme suit :

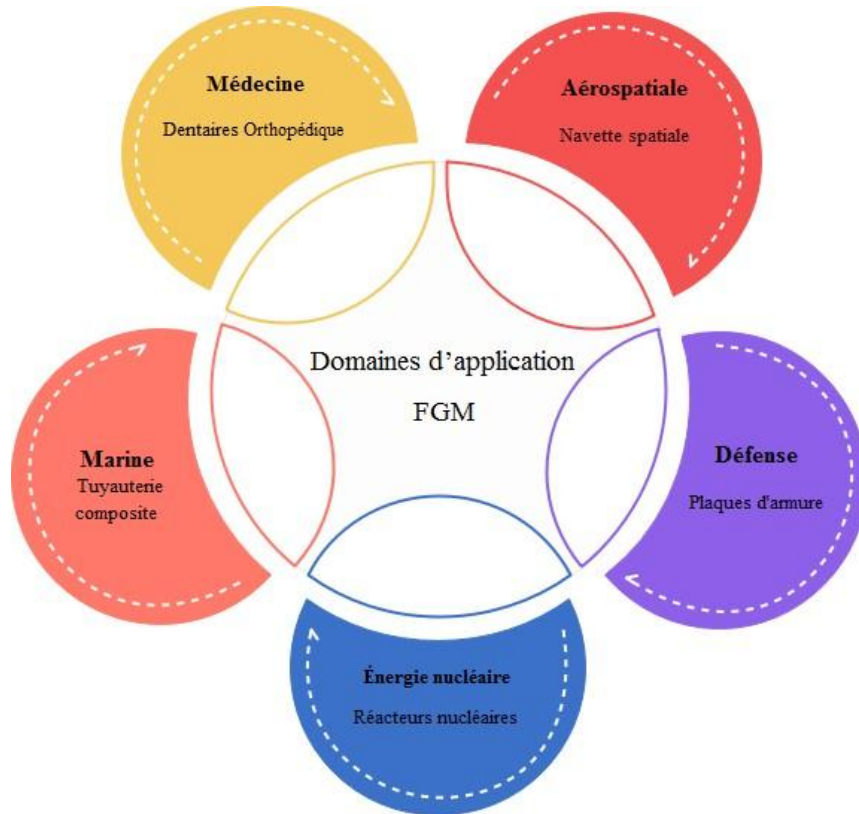


Figure I.16 Les différents domaines d'application des FGM.

I.9.1 Aérospatiale

Les FGM peuvent résister à un gradient thermique très élevé, ce qui le rend approprié pour une utilisation dans des structures et des corps d'avion spatial, des composants de moteur de fusée, etc. Si la technique de traitement est améliorée, les FGM sont prometteurs et peuvent être utilisés dans des domaines plus larges de l'aérospatiale. Par exemple le centre de recherche de la NASA propose de développer des pièces FGM pour des navettes spatiales [37] (figure I.17(a)). Des problématiques similaires existent sur d'autres pièces aérospatiales telles que les pales de turbines [38] (figure I.17(b)).

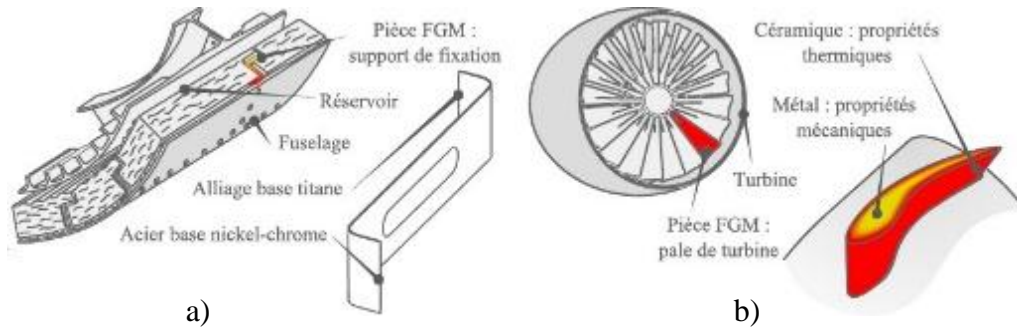


Figure I.17 Pièces FGM dans le domaine aérospatial [39] a) Pièce FGM pour navettes spatiales, b) Pale de turbine.

I.9.2 Médecine

Dans le domaine biomédical, les raisons pour utiliser un gradient sont plus variées. Il est possible, par exemple, d'utiliser un gradient de matériaux pour combiner les propriétés mécaniques et la résistance à l'usure sur une prothèse de hanche [40]. La FGM a trouvé une large gamme d'applications dans les applications dentaires et orthopédiques pour le remplacement des dents et des os (figure.I.18) [41].

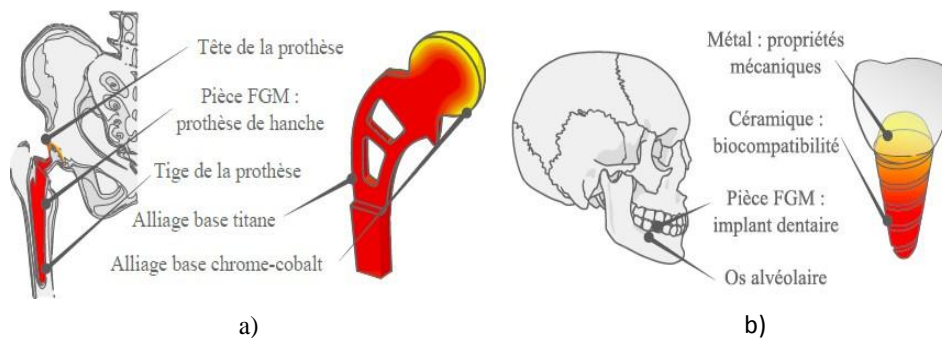


Figure I.18 Pièces FGM dans le domaine médecine, a) Prothèse de hanche b) Implant dentaire [41].

I.9.3 Défense

La capacité des FGM à offrir des propriétés de résistance à la pénétration en inhibant la propagation des fissures est une propriété attrayante qui fait que le matériau est favorisé dans l'industrie de la défense. Les FGM sont utilisés dans l'industrie de la défense dans des applications telles que les gilets pare-balles et les plaques d'armure.

Un autre domaine d'application clé des matériaux fonctionnels est celui des véhicules blindés.

I.9.4 Énergie nucléaire

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

I.9.5 Marine

Les matériaux à gradient fonctionnel trouvent également leur application dans l'industrie maritime. Les applications des matériaux fonctionnels dans l'industrie marine et sous-marine comprennent l'arbre d'hélice, les cylindres de plongée, les dômes sonar, le système de tuyauterie composite et la coque cylindrique sous pression.

I.10 Avantages et inconvénients des FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients:

I.10.1. Avantages des FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires des FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés ;
- Absence d'une interface nette de vrai conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes ;
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique ;
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique ;
- Suppression de délaminage ;
- Augmentation de la ténacité à la rupture ;
- Elimination des singularités des contraintes à diverse droits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

I.10.2 Inconvénients des FGM

Le principal obstacle à une application plus large des FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2).

Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide.

D'autre part, travailler autour (T_2) va absolument entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [42].

Chapitre II

Revue générale sur les théories des poutres

II.1 Introduction

Les poutres s'imposent fermement sur les parties importantes dans les infrastructures ou les structures aéronautiques ou navales et la flexion c'est un phénomène très important dans l'étude de comportement mécanique des structures. Pour cela nous avons proposé ce chapitre sur les théories des poutres.

Les solides minces sont des solides tridimensionnels ayant des caractéristiques particulières au niveau géométrique, cinématique et mécanique. Un solide 3D est un objet massif dont les trois dimensions sont du même ordre de grandeur. Les structures minces ou corps orientés ont au moins une dimension, appelée épaisseur, petite par rapport aux autres dimensions. On distingue :

- Plaque: solide défini par une surface plane et une épaisseur h ;
- Coque: solide défini par une surface courbe et une épaisseur h faible devant la longueur, la largeur et le rayon de courbure ;
- Poutre droite: solide défini par une ligne droite et par une section.

L'analyse du comportement et la conception de ces structures sont des activités importantes sur les plans techniques et économiques. Suivant l'ordre de grandeur de l'épaisseur h par rapport aux autres dimensions, on introduit parfois l'adjectif mince ou épais. Cette qualification n'implique pas seulement une caractéristique géométrique mais sous-entend également un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal. La géométrie d'une structure mince favorise le choix d'une cinématique particulière par rapport à la cinématique générale d'un solide [43].

II.2 Historique

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Chapitre II Revue générale sur les théories des poutres

Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et l'on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

II.3 Définition d'une poutre

En termes non mathématiques, une poutre est un solide élancé dont une dimension, la longueur, est très supérieure aux deux autres. Cette particularité permet de simplifier l'étude mécanique d'une poutre par rapport à celle d'un corps solide quelconque. La section d'une poutre est définie par le plan perpendiculaire à la direction de l'élancement [20].

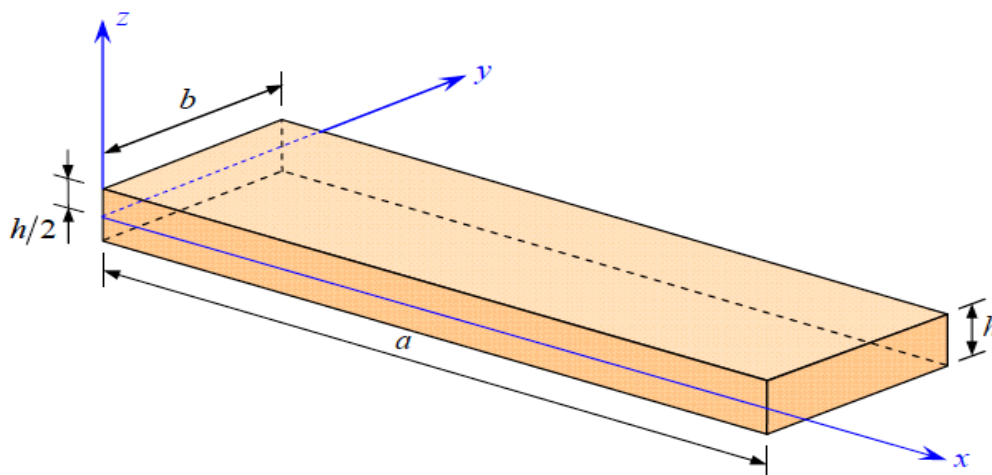


Figure II.1 Schéma d'un élément de poutre.

II.4 Types des poutres

II.4.1 Poutre simple

C'est une poutre reposant sur deux supports, l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion [45].

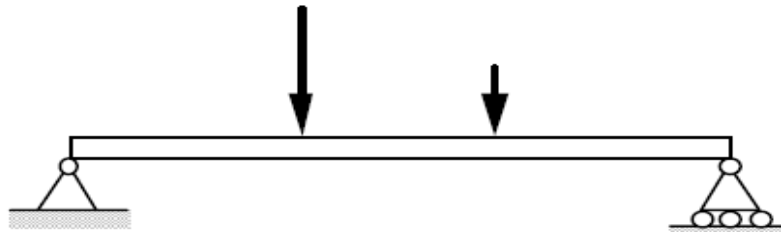


Figure II.2 Poutre simple.

II.4.2 Poutre console

C'est une poutre encastree dans un mur à une l'extrémité. L'extrémité encastree ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastree à une extrémité.

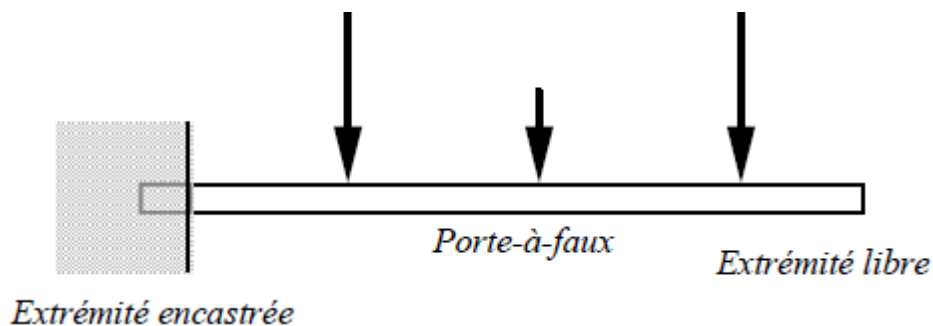


Figure II.3 Poutre console.

II.4.3 Poutre avec porte-à-faux

C'est une poutre qui repose sur deux appuis (un simple et l'autre double) et a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux d'extrémité (Overhanging).

Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Les trois types de poutres précédentes entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique). Car ces poutres possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même aux trois équations d'équilibre.

Chapitre II Revue générale sur les théories des poutres

– Équilibre de translation:

$$\Sigma f_x = 0 \quad \text{Translation horizontale} \quad (\text{II.1})$$

$$\Sigma f_y = 0 \quad \text{Translation verticale} \quad (\text{II.2})$$

– Équilibre de rotation:

$$\Sigma M_z = 0 \quad (\text{II.3})$$

Rotation par rapport à n'importe lequel axe perpendiculaire au plan des forces xy.

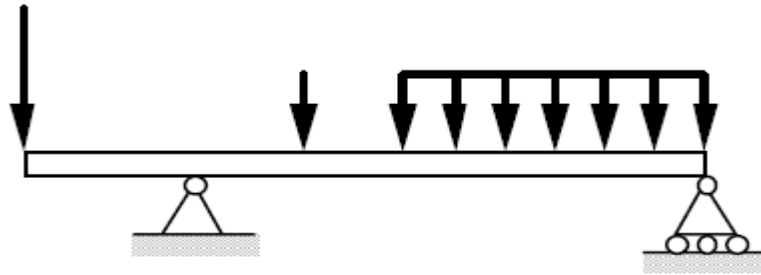


Figure II.4 Poutre avec porte-à-faux.

II.4.4 Poutre encastrée et supportée

C'est une combinaison des types A et B. On note que la poutre est liée quatre fois (4 inconnues), c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

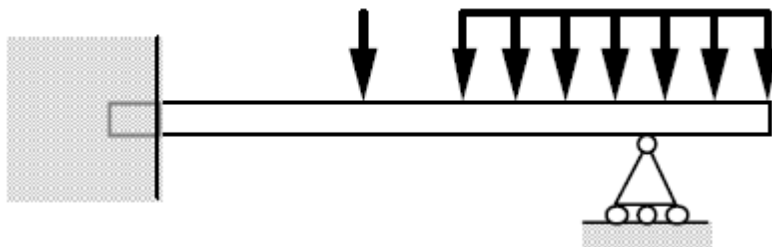


Figure II.5 Poutre encastrée et supportée.

II.4.5 Poutre continue

C'est une poutre supportée par plus de deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

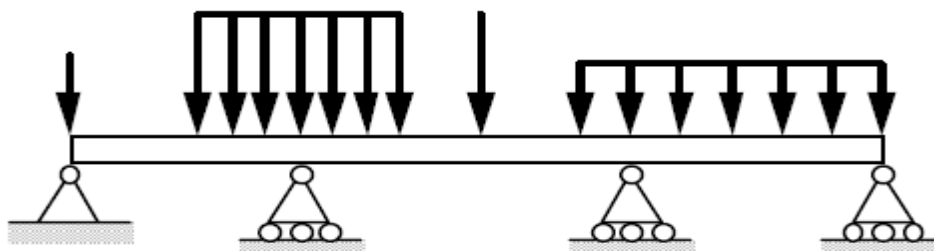


Figure II.6 Poutre continue.

II.4.6 Poutre à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastrement, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

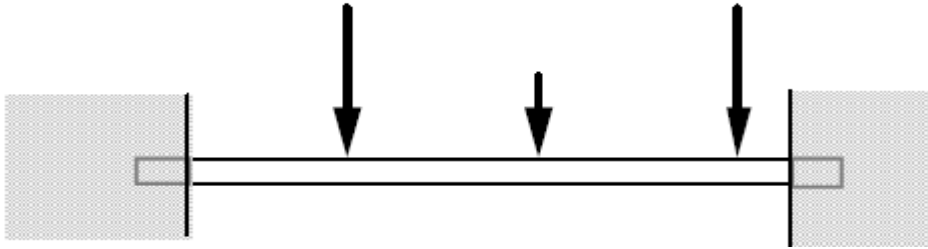


Figure II.7 Poutre à double encastrement.

II.4.7 Poutre supportée à double encastrement

C'est une poutre soutenue par deux encastrement et supportée par un ou plusieurs supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Les poutres D à G sont des poutres hyperstatiques. Elles ont plus de fixations ou supports que nécessaires. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre. Les équations de la statique ne suffisent pas pour analyser ces poutres. On doit recourir à différentes méthodes.

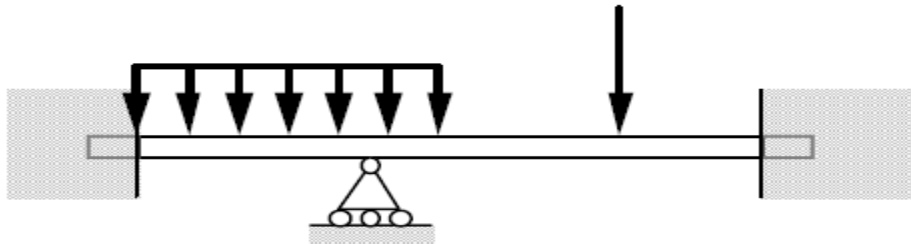


Figure II.8 Poutre supportée à double encastrement.

II.5 Propriétés matérielles des poutres FGM

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) peuvent être produits en changeant sans interruption les constituants des matériaux FGM avec micro structure non-uniformes et des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume [46].

Considérons une poutre rectangulaire en FGM. Comme montré dans la figure.II.9. Les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminées selon les demandes d'exécution. Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit :

Chapitre II Revue générale sur les théories des poutres

$E = E(z)$, $u = u(z)$. Delale et Erdogan ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. A cet effet, on a pris une valeur constante du coefficient de Poisson en tout point de la poutre FGM. Par contre le module de Young change dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM suivant une fonction de la loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM) ou une fonction sigmoïde (S-FGM).

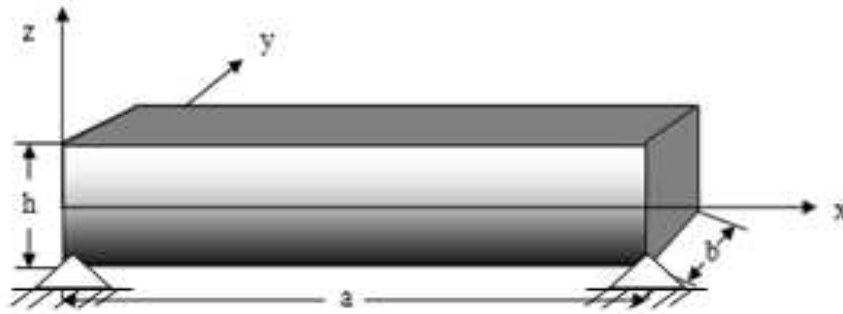


Figure II.9 Les coordonnées et la géométrie de la poutre à gradient de propriété [46].

II.5.1 Les propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance [43] :

$$V(z) = \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^p \quad (\text{II.4})$$

où p est le paramètre du matériau qui reflète le type de distribution des propriétés matérielles à travers l'épaisseur de la structure, c'est-à-dire définir les pourcentages des particules de chaque constituant (céramique et métal) en chaque couche de la structure et la variation (augmentation ou diminution selon le matériau) de ces pourcentages à travers l'épaisseur h de la poutre. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'un P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges

$$E(z) = V(z) \cdot E_1 + [1 - V(z)] \cdot E_2 \quad (\text{II.5})$$

où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la poutre FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure.II.10. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmentée rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

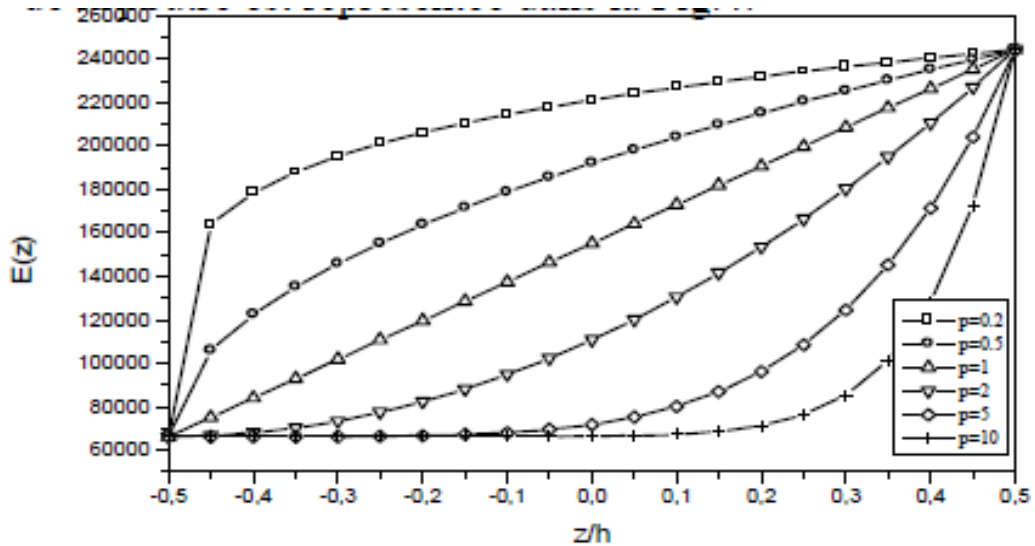


Figure II.10 La variation du module de Young dans une poutre P-FGM [46].

II.5.2 Les propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Dans le cas d'ajouter un matériau composite P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à un composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'une des interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une distribution harmonieuse des contraintes entre toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par [46]:

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.6})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.7})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par

$$E(z) = V_1(z).E_1 + [1 - V_1(z)].E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.8})$$

$$E(z) = V_2(z).E_1 + [1 - V_2(z)].E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.9})$$

La figure. II.11, montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (II.6) et (II.7) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (Poutre S-FGM)

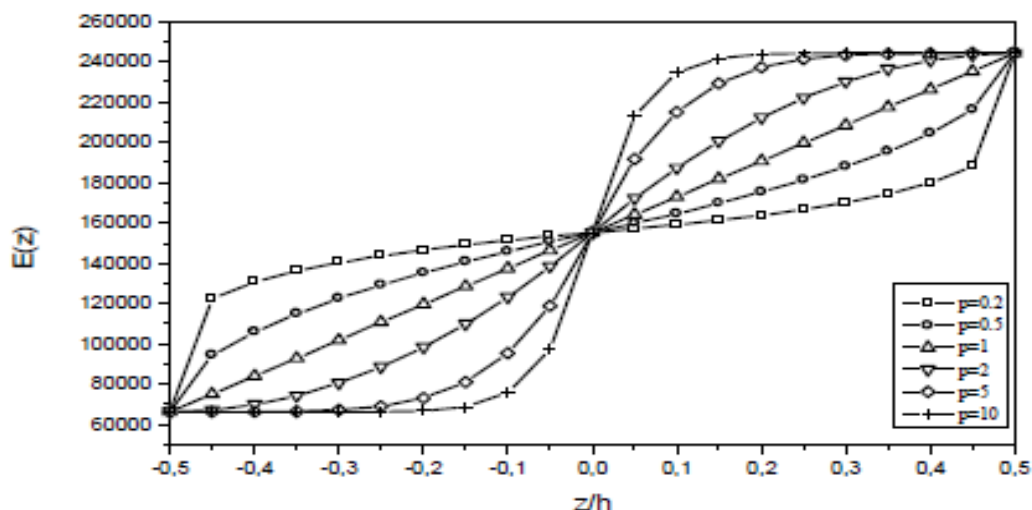


Figure II.11 La variation du module de Young dans une poutre S-FGM [46].

II.5.3 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [46]:

$$E(z) = E_2 \cdot e^{B \cdot (z+h/2)} \quad (\text{II.10})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (\text{II.11})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre est représentée dans la figure.II.12.

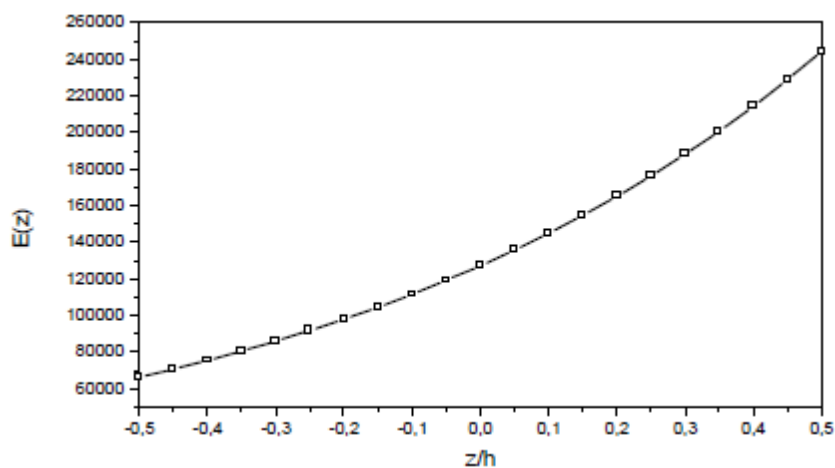


Figure II.12 La variation du module de Young dans une poutre E-FGM

II.6 Les théories des poutres

II.6.1 Theorie d'Euler Bernoulli (CLASSICAL BEAM THEORY- CBT)

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines. Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre),

La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane [44]. (figure II.13).

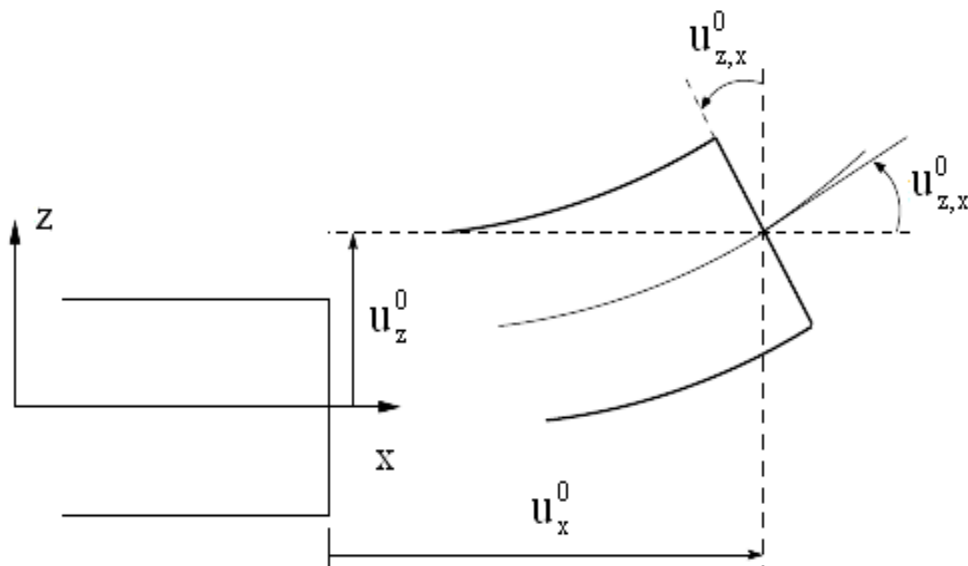


Figure II.13 Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli [44].

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est:

$$f(z) = 0 \tag{II.1}$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, t) \tag{II.2}$$

avec, u_0 et w_0 sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

II.6.2 Théorie de Timoshenko (FSDBT)

La théorie de Timoshenko [44] est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes. Elle s'applique sur des poutres courtes et est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (figure II.14). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses [Timoshenko, 1972].

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit: $f(z) = z$.

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT). Le champ de déplacements de Timoshenko s'écrit alors :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \gamma_{xz}^0(x, t)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, t) \tag{II.3}$$

avec γ_{xz}^0 est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre, tel que :

$$z \gamma_{xz}^0(x, t) = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_0(x, t) \tag{II.4}$$

et $\phi_0(x, t)$ étant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

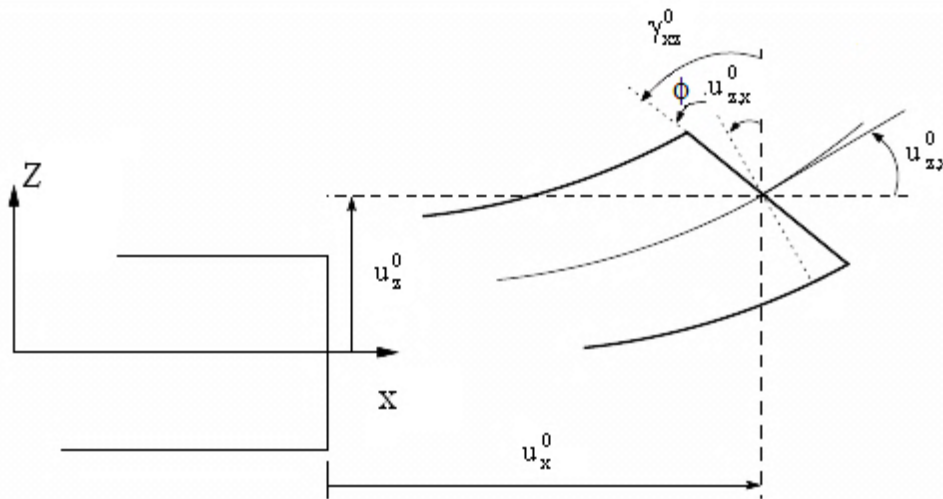


Figure II.14 Cinématique de la poutre de Timoshenko[44].

II.6.3 Théorie d'ordre élevé

Dans cette (HSDT) théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puis qu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de « gauchissement ». Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.16). La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ représente le cisaillement. Le champ de déplacement devient [59]:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) y_{xz}^0(x, t)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, t) \tag{II.6}$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$f(z = \pm h/2) = 0 \tag{II.7}$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition (II.7).

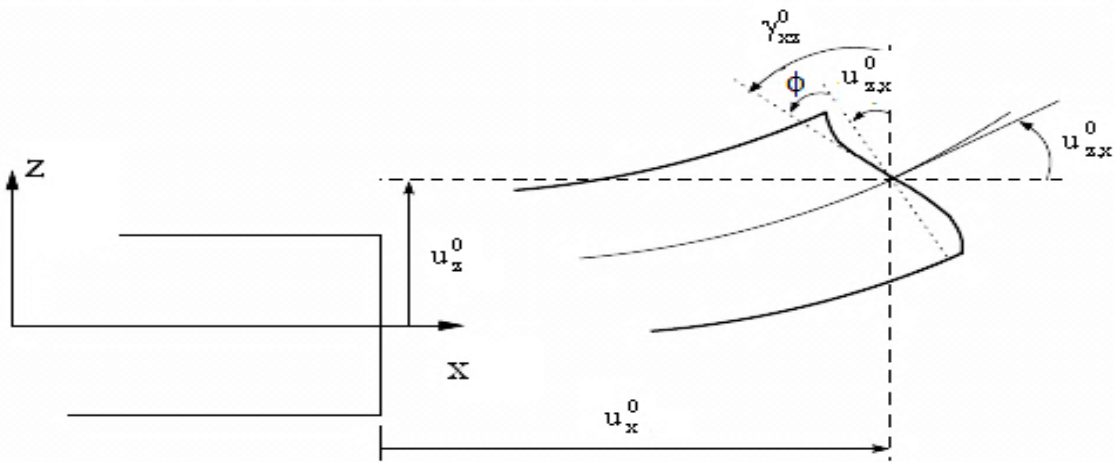


Figure II.15 Cinématique de la théorie d'ordre élevé d'une poutre [44].

Chapitre II Revue générale sur les théories des poutres

Tableau II.1 Différentes fonctions de gauchissement utilisées dans les théories des poutres isotropes et FGM.

Théorie	fonction de gauchissement $f(z)$
Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT)	$f(z) = 0$
Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT)	$f(z) = z$
Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) [Levinson, 1980], [Murthy, 1981] et [Reddy, 1984]	$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) [Karama et al, 2003]	$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
Le modèle trigonométrique [Touratier 1991]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}$
Le modèle de Mechab (2009) , utilisé aussi [par Ait Atmane et al, 2010, et El Meiche et al,2011]	$f(z) = \frac{1}{\cos h\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} \left[z \cos h\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{h}{2} \sin h\left(\frac{\pi z}{2}\right) \right]$
Modèle de Panc (1975), utilisé aussi par [Kaczkowski (1968), Reissner (1975), Voyiadjis et Shi (1991), Shi et Voyiadjis (2011)]	$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$

Chapitre III

Modélisation mathématique de problème de flexion des poutres

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier le comportement en flexion des poutres fonctionnellement graduées, supposons une théorie hyperbolique raffinée qui utilise seulement trois variables, nous déterminons les équations d'équilibre à l'aide du principe des travaux virtuels, et les expressions de contraintes normales et tangentielles ainsi que les expressions des déplacements.

III.2 Cinématiques et déformations

En se basant sur une nouvelle théorie hyperbolique raffinée, le champ du déplacement est donné comme suit [46]:

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, z, t) = 0 \\ w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2.z.\sin h\left(\frac{z^2}{h^2}\right)}{2.\sin h\left(\frac{1}{4}\right) + \cos h\left(\frac{1}{4}\right)} & \text{modèle 1} \\ \frac{1}{10} \left(\frac{h \sin h\left(\frac{10z}{h}\right)}{\cos h(5)} \right) + \frac{h}{100} & \text{modèle 2} \\ z - h \sin h\left(\frac{z}{h}\right) + z \cos h \frac{1}{2} & \text{HBT} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

et u_0 , v_0 sont les déplacements de la fibre moyenne de la poutre, $f(z)$ est la fonction qui définit la distribution de la déformation transversale ainsi que les contraintes tangentielles suivant l'épaisseur.

Le champ de déformation pour le champ de déplacement de l'équation (III.1) est écrit sous la forme compactée suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (\text{III.3a})$$

$$\gamma_{xz} = \left(1 - \frac{df}{dz}\right) \frac{dw_s}{dx} = g \frac{dw_s}{dx} \quad (\text{III.3b})$$

où $g = 1 - \frac{df}{dz}$ sont les fonctions de forme des déformations de cisaillement transversale.

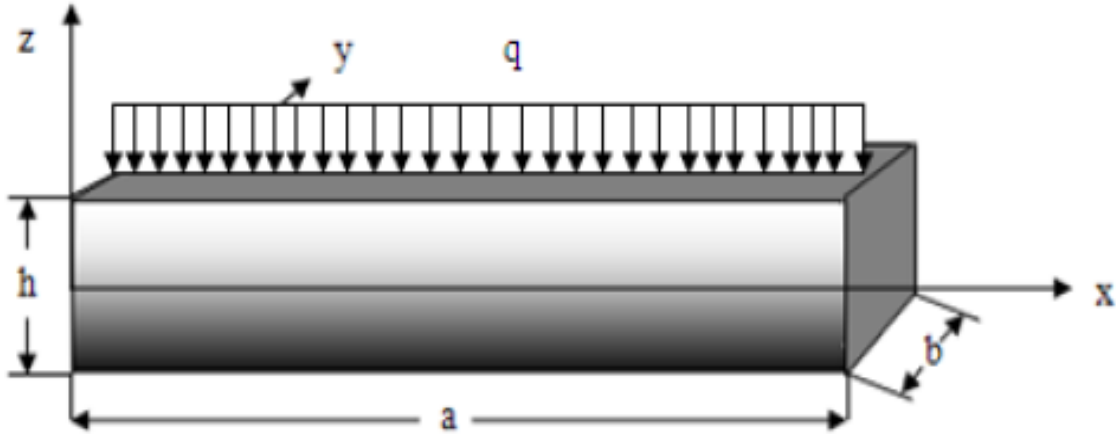


Figure III .1 Géométrie et coordonnées de poutre FGM.

III.3 Les équations du mouvement

Le principe du travail virtuel est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé dans les formes analytiques [47] :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (\text{III.4})$$

La variation de l'énergie de déformation de la poutre peut être indiquée par :

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx = \int_0^L \left(N \frac{d\delta u}{dx} - M_b \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q \frac{d\delta w_s}{dx} \right) dx \quad (\text{III.5})$$

où N , M et Q sont les résultats des contraintes définies comme suit :

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (\text{III.6a})$$

$$M_b = \int_A z \sigma_x dA \quad (\text{III.6b})$$

$$M_s = \int_A f(z) \sigma_x dA \quad (\text{III.6c})$$

$$Q = \int_A g(z) \tau_{xz} dA \quad (\text{III.6d})$$

La variation de l'énergie potentielle par la charge transversale appliquée q peut s'écrire :

$$\delta V = - \int_0^L q \delta (w_b + w_s) dx \quad (\text{III.7})$$

En remplaçant les expressions de δU et δV par les équations (III.5) et (III.7) dans l'équation (III.4) et en intégrant les parties de l'espace en collectant les coefficients de δw_b et δw_s on obtient les équations suivantes du mouvement de la poutre :

$$\delta u : \frac{dN}{dx} = 0 \quad (\text{III.8a})$$

$$\delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q = 0 \quad (\text{III.8b})$$

$$\delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} + q = 0 \quad (\text{III.8c})$$

Les conditions aux limites sont de la forme :

$$w_b \text{ Ou } Q_b = \frac{dM_b}{dx} \quad (\text{III.9a})$$

$$w_s \text{ Ou } Q_s = \frac{dM_s}{dx} + Q \quad (\text{III.9b})$$

$$\frac{dM_b}{dx} \text{ Ou } M_b \quad (\text{III.9c})$$

$$\frac{dM_s}{dx} \text{ Ou } M_s \quad (\text{III.9d})$$

III.4 Les équations constitutives

FGM recommande les matériaux céramiques et métalliques. Les propriétés matérielles des poutres FG sont supposées varier continûment dans l'épaisseur de la poutre par une loi de puissance [48]:

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V_c. \quad V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^P. \text{ et } V_m = 1 - V_c \quad (\text{III.10})$$

où P représente la propriété effective du matériau telle que le module de Young E , le coefficient de Poisson. Les indices m et c représentent respectivement les composants métalliques et céramiques, et l'exposant P est l'indice de loi de puissance qui régit la gradation de la fraction volumique. La valeur de P égale à zéro représente une poutre céramique, tandis que P infini indique une poutre métallique. La variation de l'association de la céramique et du métal est linéaire pour $P=1$. Les relations comportementales linéaires d'un faisceau FG peuvent s'écrire comme suit :

$$\sigma_x = Q_{11}(z)\varepsilon_x \quad (\text{III.11a})$$

$$\tau_{xz} = Q_{55}(z)\gamma_{xz} \quad (\text{III.11b})$$

où:

$$Q_{11}(z) = E(z) \quad (\text{III.12a})$$

$$Q_{55}(z) = E(z)/2[1 + \nu(z)] \quad (\text{III.12b})$$

En remplaçant les équations (III.2) et (III.3) dans l'équation (III.12) et les résultats suivants dans l'équation (III.6), les équations constitutives des résultats de contrainte sont obtenues comme suit :

$$N = A \frac{du}{dx} - B \frac{d^2 w_b}{dx^2} - B_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (\text{III.13a})$$

$$M_b = B \frac{du}{dx} - D \frac{d^2 w_b}{dx^2} - D_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (\text{III.13b})$$

Chapitre III Modélisation mathématique de problème de flexion des poutres

$$M_s = B_s \frac{du}{dx} - D_s \frac{d^2 w_b}{dx^2} - H_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (\text{III.13c})$$

$$Q = A_s \frac{dw_s}{dx} \quad (\text{III.13d})$$

Avec :

$$A = \int_A Q_{11} dA \quad (\text{III.14a})$$

$$B = \int_A f z Q_{11} dA \quad (\text{III.14b})$$

$$B_s = \int_A z Q_{11} dA \quad (\text{III.14c})$$

$$D = \int_A z^2 Q_{11} dA \quad (\text{III.14d})$$

$$D_s = \int_A z f(z) Q_{11} dA \quad (\text{III.14e})$$

$$H_s = \int_A f^2(z) Q_{11} dA \quad (\text{III.14f})$$

$$A_s = \int_A g^2(z) Q_{55} dA \quad (\text{III.14g})$$

En remplaçant les contraintes résultant de l'équation (III.14) dans l'équation (III.8), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u, w_s, w_b) comme :

$$A \frac{d^2 u}{dx^2} - B \frac{d^3 w_b}{dx^3} - B_s \frac{d^3 w_s}{dx^3} = 0$$

$$B \frac{d^3 u}{dx^3} - D \frac{d^4 w_b}{dx^4} - D_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + q = 0$$

$$B \frac{d^3 u}{dx^3} - D_s \frac{d^4 w_b}{dx^4} - H_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + A_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} + q = 0$$

On obtient que les solutions se présente par cette forme (Abdelbaki Chikh, 2019)

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(\lambda x) \\ w_b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{bn} \sin(\lambda x) \\ w_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{sn} \sin(\lambda x) \end{array} \right.$$

On est donné pour une charge uniforme

$$Q_n = \frac{4q_0}{m\pi} (m=1,3,5,\dots)$$

Chapitre III Modélisation mathématique de problème de flexion des poutres

Les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_n \\ Q_n \end{Bmatrix}$$

Avec

$$\begin{aligned} C_{11} &= -A\lambda^2, C_{12} = B\lambda^3, C_{13} = B_s\lambda^3, \\ C_{22} &= -\lambda^4 D, C_{23} = -\lambda^4 D_s, \\ C_{33} &= -\lambda^2 A_s - \lambda^4 H_s, \\ C_{21} &= C_{12}, C_{31} = C_{13}, C_{32} = C_{23} \end{aligned}$$

III.5 Conclusion :

Ce chapitre fournit la modélisation mathématique de flexion simple de la poutre PFGM et la dérivation des équations du mouvement a souligné les points communs entre les théories et leurs diffé. Pour la simulation numérique du phénomène la flexion de la poutre dans le prochain chapitre.

Chapitre IV

Simulation, résultats et discussions

IV.1 Introduction

D'après nos résultats concernant les déplacements et les contraintes, des exemples seront traités en appliquant les paramètres adimensionnels suivants :

$$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w \left(\frac{L}{2} \right), \quad \bar{u} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} u \left(0, -\frac{h}{2} \right)$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x \left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right), \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \sigma_{xz} (0,0)$$

IV.2 Résultats et discussions

Dans cette partie les résultats obtenus sont présentés et comparés avec d'autres résultats qui existent déjà [48]. La combinaison entre deux matériaux métal et céramique: Al/ZrO₂ et Al/Al₂O₃ est considérée.

Les propriétés matérielles du métal et du céramique sont:

- Céramique (Pc: alumine, Al₂O₃): E_c = 380 GPa; ν_c = 0,3.
- Métal (Pm: aluminium, Al): E_m = 70 GPa; ν_m = 0,3.

Le tableau IV.1 présente les résultats numériques non dimensionnels de la flèche, des déplacements horizontaux, axial et les contraintes tangentiels et normaux de la poutre PFGM soumises à une charge uniforme q₀ pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et en même temps en faisant varier le rapport a/h de la poutre. Les résultats obtenus sont comparés à d'autres théories des faisceaux. Sur la base des résultats présentés, ce modèle donne des résultats qui sont généralement identiques aux autres théories du cisaillement, comme on peut le voir dans littérature [48]. Dans le cas de poutre, on peut voir que l'augmentation de l'indice de loi de puissance **P** entraîne une augmentation de la flèche w à travers l'épaisseur de la poutre PFGM sous charge uniforme.

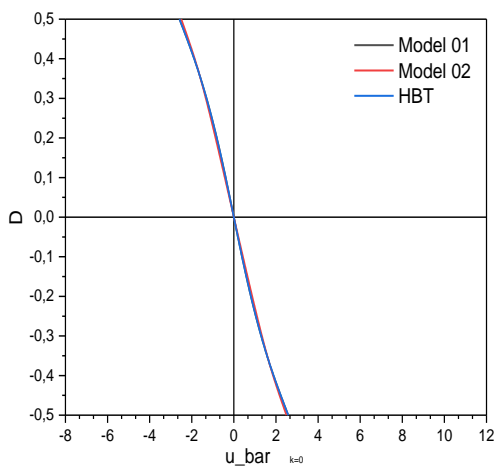
Chapitre IV Simulation, résultats et discussions

Tableau IV.1 Résultats numériques des déplacements axiaux et les contraintes normales et tangentielles de la poutre FGM sous la charge uniforme.

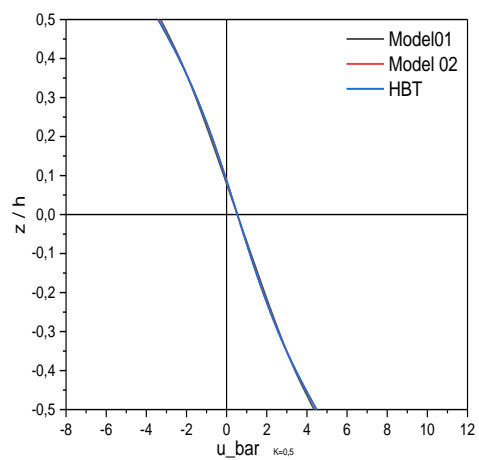
P	Method	L/h = 5				L/h = 20			
		\bar{w}	\bar{u}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xz}$	\bar{w}	\bar{u}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xz}$
0	Model 01	3.1577	0.9338	3.7849	0.6294	2.8958	0.2305	15.0087	0.6350
	Present	3.15774	0.933769	3.78491	0.629414	2.89576	0.230464	15.0088	0.634737
	Model 02	3.1654	0.9396	3.8014	0.7303	2.8962	0.2306	15.0129	0.7425
	Present	3.16537	0.939595	3.80141	0.730245	2.89625	0.230559	15.0129	0.742358
	HBT	3.1654	0.9397	3.8017	0.7312	2.8962	0.2306	15.0129	0.7429
	Present	3.16537	0.93967	3.80168	0.73132	2.89625	0.230555	15.0129	0.74355
	FSDBT	3.16566	0.9210526	3.74997	0.5836100	2.89625	0.230263	15.0001	0.5836100
	Present	2.8783	0.9211	3.7500	–	2.8783	0.2303	15.0000	–
0.5	Model 01	4.8189	1.6510	4.9688	0.6471	4.4638	0.4086	19.6946	0.6526
	Present	4.81886	1.65105	4.96878	0.647064	4.46381	0.408561	19.6947	0.652275
	Model 02	4.8285	1.6594	4.9916	0.7475	4.4644	0.4087	19.7003	0.7595
	Present	4.82855	1.65935	4.99161	0.747450	4.46445	0.408698	19.7003	0.759400
	HBT	4.8285	1.6595	4.9920	0.7484	4.4644	0.4087	19.7003	0.7599
	Present	4.82855	1.65948	4.99200	0.74851	4.46445	0.408681	19.7005	0.76057
	FSDBT	4.83487	1.633118	4.92062	0.6280304	4.46480	0.4082796	19.6823	0.64903381
	Present	4.4401	1.6331	4.9206	–	4.4401	0.4083	19.6825	–
1	Model 01	6.2465	2.2937	5.8548	0.6294	5.8041	0.5684	23.1982	0.6350
	Present	6.24654	2.29367	5.85481	0.629413	5.80409	0.568389	23.1982	0.634740
	Model 02	6.2594	2.3035	5.8827	0.7303	5.8049	0.5685	23.2051	0.7425
	Present	6.25944	2.30350	5.88271	0.730244	5.80492	0.568540	23.2050	0.742360
	HBT	6.2594	2.3036	5.8831	0.7312	5.8049	0.5685	23.2052	0.7429
	Present	6.25944	2.30363	5.88312	0.73132	5.80491	0.568526	23.2051	0.74355
	FSDBT	6.25992	2.27219	5.79588	0.626777	5.80493	0.568049	23.1830	0.676887
	Present	5.7746	2.2722	5.7959	–	5.7746	0.5680	23.1834	–
2	Model 01	8.0402	3.1007	6.8443	0.5633	7.4403	0.7689	27.0896	0.5687
	Present	8.04014	3.10068	6.84439	0.563252	7.44031	0.768911	27.0896	0.568480
	Model 02	8.0674	3.1125	6.8813	0.6674	7.4420	0.7691	27.0989	0.6795
	Present	8.06740	3.11256	6.88132	0.667440	7.44204	0.769102	27.0988	0.679420
	HBT	8.0675	3.1127	6.8819	0.6685	7.4420	0.7691	27.0989	0.6802
	Present	8.06754	3.11275	6.88197	0.66862	7.44205	0.769084	27.0990	0.68073
	FSDBT	8.03030	3.07397	6.76758	0.55832	7.43967	0.768492	27.0695	0.628935
	Present	7.4003	3.0740	6.7676	–	7.4003	0.7685	27.0704	–
5	Model 01	9.7461	3.6898	8.0531	0.4758	8.8130	0.9130	31.7987	0.4810
	Present	9.74611	3.68975	8.05319	0.475773	8.81301	0.913040	31.7989	0.480799
	Model 02	9.8263	3.7093	8.1086	0.5869	8.8181	0.9134	31.8125	0.5988
	Present	9.82627	3.70934	8.10854	0.586908	8.81809	0.913374	31.8126	0.598710
	HBT	9.8271	3.7097	8.1095	0.5883	8.8181	0.9134	31.8127	0.5998
	Present	9.82707	3.70929	8.1096	0.58831	8.81814	0.913351	31.8128	0.60025
	FSDBT	9.64832	3.64964	7.94284	0.423445	8.80689	0.912410	31.7714	0.469895
	Present	8.7508	3.6496	7.9428	–	8.7508	0.9124	31.7711	–
10	Model 01	10.8613	3.8609	9.6517	0.5305	9.6856	0.9532	38.1235	0.5364
	Present	10.8613	3.86086	9.65169	0.530476	9.68563	0.953225	38.1236	0.536245
	Model 02	10.9369	3.8855	9.7102	0.6432	9.6904	0.9536	38.1382	0.6563
	Present	10.9370	3.88549	9.71013	0.643162	9.69043	0.953645	38.1383	0.656205
	HBT	10.9375	3.8859	9.7111	0.6445	9.6905	0.9536	38.1383	0.6572
	Present	10.9376	3.88558	9.7111	0.64453	9.69047	0.953618	38.1384	0.65771
	FSDBT	10.7194	3.80967	9.52280	0.442665	9.67673	0.952418	38.0912	0.470643
	Present	9.6072	3.8097	9.5228	–	9.6072	0.9524	38.0913	–

IV.3 Les résultats des graphes

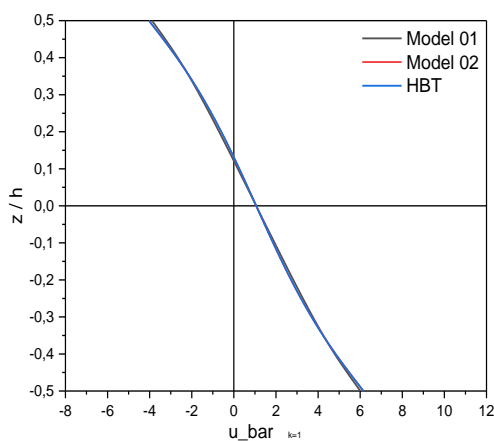
Les figures IV.1, IV.2 et IV.3 montrent respectivement le déplacement axial \bar{u} et les contraintes normales et tangentielles. Une comparaison entre les théories de déformation de cisaillement hyperbolique présentées par les modèles 1, 2 et HBT est également montrée dans ces figures pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance \mathbf{P} . On peut voir qu'il existe un bon accord entre ces deux modèles de déformation par cisaillement d'ordre supérieur et les autres modèles.



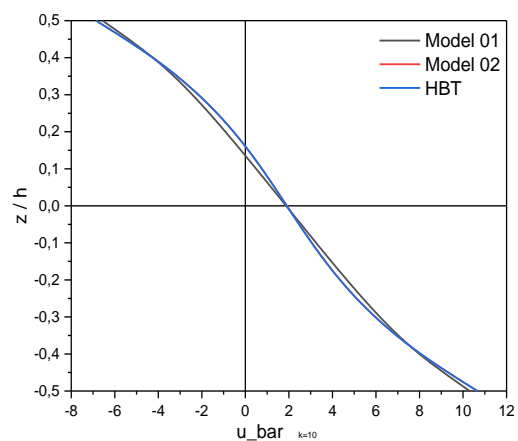
(a) $\mathbf{P=0}$



(b) $\mathbf{P=0.5}$



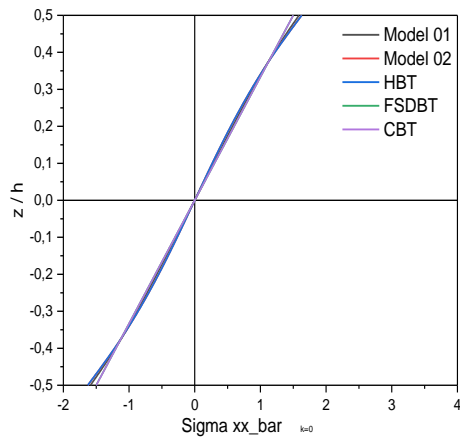
(c) $\mathbf{P=1}$



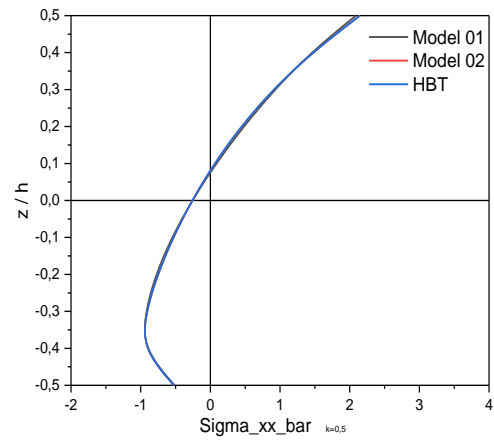
(d) $\mathbf{P=10}$

Figure IV.1 Variation de déplacement sans dimension $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{0}, \mathbf{z})$ à travers l'épaisseur de la poutre PFGM

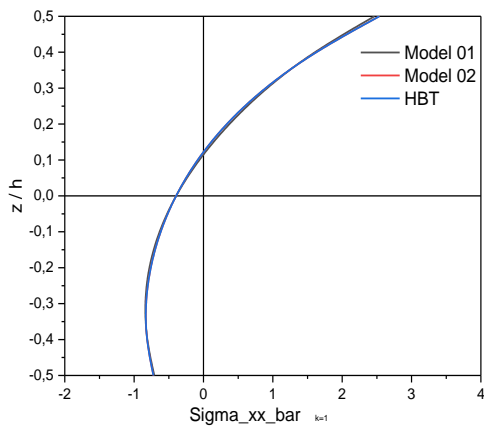
Sous une charge uniforme avec ($\mathbf{L} = 2\mathbf{h}$).
 (a) $\mathbf{P} = 0$, (b) $\mathbf{P} = 0,5$, (c) $\mathbf{P} = 1$ et (d) $\mathbf{P} = 10$.



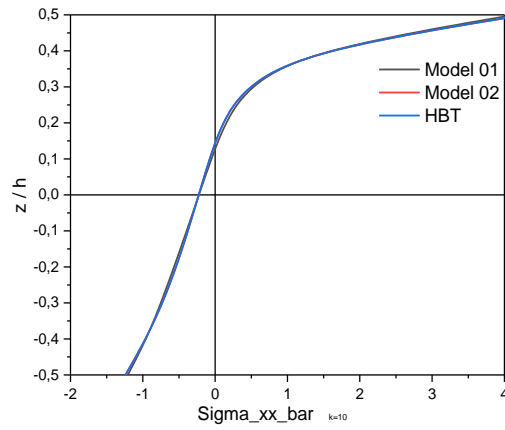
(a) P=0



(b) P=0.5



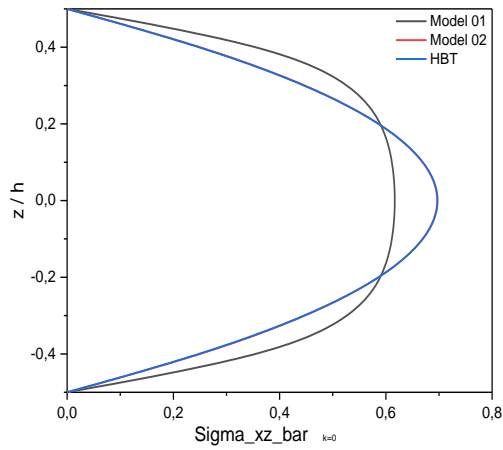
(c) P=1



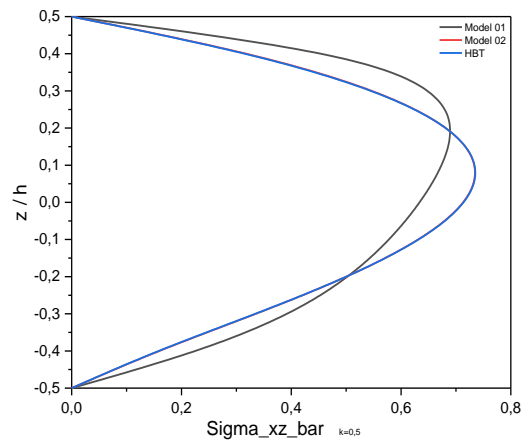
(d) P=10

Figure IV.2 Variation des contraintes normales à travers l'épaisseur de la poutre PFGM

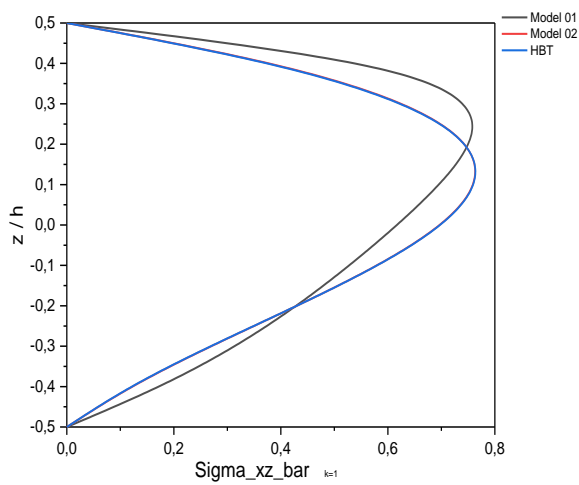
(a) $P = 0$, (b) $P = 0,5$, (c) $P = 1$ et (d) $P = 10$.



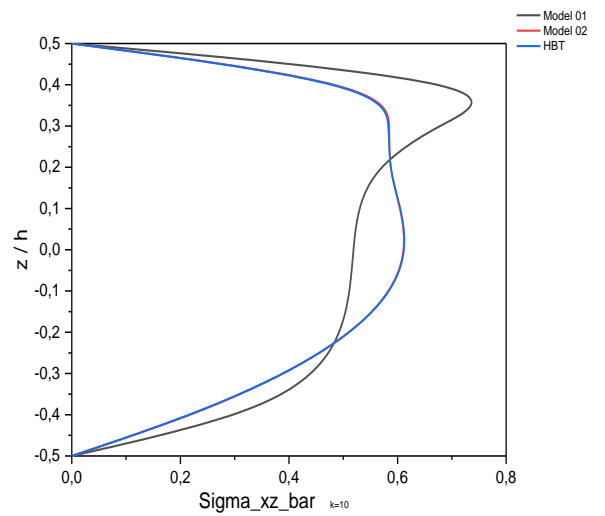
(a) $P=0$



(b) $P=0.5$



(c) $P=1$



(d) $P=10$

Figure IV.3 Variation des contraintes tangentielle à travers l'épaisseur de la poutre PFGM

(a) $P = 0$, (b) $P = 0,5$, (c) $P = 1$ et (d) $P = 10$.

IV.4 Conclusion

La théorie raffinée proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement et d'analyse statique de la flexion des poutres en PFGM. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la poutre.

Conclusion générale

Conclusion générale

Conclusion générale

Les structures des poutres des matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Une nouvelle théorie hyperbolique raffinée est proposée pour l'étude de flexion des poutres FGM. Deux différents types de théories sont proposés pour la comparaison des solutions analytiques obtenues pour une poutre FGM simplement appuyée afin d'étudier le déplacement axial, les contraintes normales et tangentielles, l'indice matériel pour plusieurs valeurs de l'indice de loi de puissance « P » et rapport d'épaisseur (z/h). Les résultats obtenus sont en accord avec ceux prédits par la théorie trigonométrique. Plusieurs exemples ont été résolus afin de démontrer la validité de ce nouveau modèle en comparant avec les deux autres modèles. En perspective, il est prévu d'appliquer ce modèle en changeant les conditions aux limites de poutres. Ceci d'une part. D'autre part, il est prévu d'intégrer d'autres paramètres au modèle présenté afin de se rapprocher de la réalité pratique des structures dans leur environnement. En plus, il serait très intéressant d'étudier l'influence de défauts de fabrication à savoir la porosité sur la réponse globale des structures FGM sous différentes sollicitations. Enfin, nous pouvons dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de la recherche dans le domaine des matériaux composites fonctionnellement gradués et précisément leurs comportements vis-à-vis des chargements thermomécaniques et des forces de précontrainte.

Références Bibliographique

Références Bibliographiques

- [01] [Pantelakis, SP.G., Alexopoulos, N.D]. Assessment of the ability if conventional and advanced wrought aluminum alloys for mechanical performance in light-weight applications, *Materials & Design*, 29(1), 80-91,2008.
- [02] [Nabil, F., Emmanuel, B., Mohamed, G., Claudia, C., Christian, C., Olivier, R], (2011). Matériaux composites alumine/aluminium à gradient de fonction: modélisation numérique pour le calcul de la conductivité thermique effective, 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon.
- [03] [Markworth, A., Ramesh, K. & Parks Jr, W]. (1995). Études de modélisation appliquée à des matériaux fonctionnellement classés. *Journal of Materials Science*, 30, 2183-2193, 10, 1007/BF01184560.
- [04] [Finot, M., Blech, I. A., Suresh, S., & Fujimoto, H]. (1997). Large deformation and geometric instability of substrates with thin-film deposits. *Journal of Applied Physics*, 81(8), 3457–3464. doi:10.1063/1.365042).
- [05] [Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T]. (2017). Functionally graded materials. *Topics in Mining. Metallurgy and Materials Engineering*. Springer, doi: 10.1007/978-3-319-53756-6.
- [06] [Miyamoto, Y., Kaysser, WA, Rabin, BH, Kawasaki, A., Ford, RG (Eds.)], (1999). Matériaux fonctionnellement classés: Conception, traitement et applications, 10.1007 / 978-1-4615-5301-4, Volume (5), Springer, États-Unis.
- [07] [Öchsner, A., Murch, G.E. and Lemos], M.J.S. (2008), *Cellular and Porous Materials*, WILEY-VCH, 398-417.
- [08] [Amada, S. et al]., 1996. The mechanical structures of bamboos in viewpoint of functionally gradient and composite materials. *Journal of Composite Materials*, 30(7), pp. 800–819.
- [09] [Ray, A. K., Das, S. K., S, M. & Ramachandrarao, P]., 2004. Microstructural haracterization of bamboo. *Journal of Material Sciences*, 39(3), pp. 1055–1060.
- [10] [Amada, S. et al]., 1997. Fiber texture and mechanical-graded structure of bamboo. *CompositesPart B*, Volume 28, pp. 13–20.
- [11] [Janssen, J. J. A]., 1991. *Mechanical Properties of Bamboo*. s.l.:Kluwer Academic Publishers.
- [12] [Kim, J. & Paulino, G. H]., 2002. Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal of Numerical Methods Engineering*, Volume 53, pp. 1903–35.

- [13] [Bartel, D. L., Davy, D. T. & Keaveny, T. M]., 2006. Orthopaedic Biomechanics: Mechanics and Design in Musculoskeletal Systems. In: U. S. River, ed. New Jersey: Pearson Education.
- [14] [Mahmood, M. & Akinlabi, E]., 2017. Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering. s.l.:Springer.
- [15] [Oxman, N]., 2010. Structuring materiality: design fabrication of heterogeneous materials. *Archit. Des.* , Volume 80, pp. 78–85
- [16] [Jian, C. Y., Hashida, T., Takahashi, H. & Saito, M]., 1995. Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method. *Composites Engineering*, pp. 879–889.
- [17] [Kawasaki, A. & Watanabe, R]., 1997. Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials. *Composites Part B Engineering*, pp. 29–35.
- [18] [Koizumi, M]., 1997. FGM activities in Japan. *Composites Part B*, Volume 28, pp. 1-4.
- [19] [Yoshihisa, U]., 2004. Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications. *Composites Part B*, Volume 39, pp. 39-51.
- [20] [AYACHE Belqassim], Analyse des propriétés statiques et dynamiques des structures FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbes La boratoire des Matériaux & Hydrologie. 2018/2019.
- [21] [B. B. Rabbab.2015] BACHIR BOUIADJRA Rabbab. «Contribution à l’Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur Fondations Elastiques». these de doctorat L.M.D 3^{ème} cycle d’universite des sciences et de la technologie d’oran mohamed boudiaf 2015.
- [22] [Benferhat Rabia], « Analyse et modélisation de l’influence du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés », Université Hassiba Ben Bouali – Chlef, 2017.
- [23] [Hashmi. 2014] Hashmi, Saleem. Gilmar, Ferreira, Batalha. Van Tyne, C. J. Yilbas, B. S. *Comprehensive materials processing*. Livre électronique, Oxford, Walltham, MA : Elsevier,2014.
- [24] [X. Jin, L. Wu, L. Guo, H. Yu, and Y. Sun], “Experimental investigation of the mixed-mode crack propagation in ZrO₂/NiCr functionally graded materials,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76(12), pp.1800-1810, 2009.
- [25] [Torii S., Tanaka S., Yano, T., Watanabe, Y., J Trans]. *Phenomena*, 6 189, 2004.
- [26] [Yeo J, Jung Y., Choi S]., Zirconia-stainless steel functionally graded material by tape casting *J Europ. Ceram. Soci.* 18 1281, 1998.

- [27] [Mishina H., Inumaru Y., Kaitoku K., Fabrication of ZrO₂/AISI316L functionally graded materials for joint prostheses *Mat. Sci. & Eng. A* 475 141,2008.
- [28] [El-wazery M., El-Desouky A., J Appl]. Fabrication and Characteristics of 8YSZ/Ni Functionally Graded Materials by Applying Spark Plasma Sintering Procedure *Sci. & Eng.* 12 313, 2014.
- [29] [A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane], A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [30] [Xiong, H.-P., Kawasaki, A., Kang, Y.-S., and Watanabe, R]. “Experimental Study of Heat Insulation Performance of Functionally Graded Metal / Ceramic Coatings and Their Behavior at High Surface Temperature,” *Surf. Coat. Technol.*, vol.194, pp. 203–214.
- [31] [Xiong H., Kawasaki A., Kang Y.], Watanabe R .Synthesis and characterization of in-situ reinforced Fe-TiC steel FGMs, *Surf & Coat. Technol.* 194 203, 2005.
- [32] [J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO], 2002, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992.
- [33] [L. Lostec], Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l’université de Limoges, 1997.
- [34] [M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya], Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.
- [35] [H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel], Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90- Sendai-Japan*; 139-43, 1990.
- [36] [Mahmood, M. & Akinlabi, E]. (2017).Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering, Springer.
- [37] [Domack, M. S., & Baughman, J. M]. (2005). Development of nickel-titanium graded composition components. *Rapid Prototyping Journal*, 11(1), 41–51. Doi: 10.1108/13552540510573383.
- [38] [Xiaoping Qian, Deba Dutta], (2003), Design of heterogeneous turbine blade. *Computer-Aided Design*, 35:319–329.
- [39] [Pierre Muller]. (2013). Fabrication additive de pieces multimatériaux. *Genie mécanique, Ecole Centrale de Nantes (ECN), Français*. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00918030>.

- [40] [Bandyopadhyay A., Krishna B.V., Xue W., Bose S]. (2009), Application of Laser Engineered Net Shaping (LENS) to manufacture porous and functionally graded structures for load bearing implants. *Journal of Materials Science*, 20:29–34.
- [41] [Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., Kawasaki T].(2004), Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application. *Composites Science and Technology*, 64(6):893–908.
- [42] [S. Hachemi, M. Mourad].2017 Senouci Hachemi, Maghrar Mourad « Etude analytique du Flambement et de la vibration libre de plaque FGM sandwich reposons sur fondation élastique ». Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de Master en Génie Civil.2017.
- [43] [BOUKHABIA ZAHIA, KADI NOURA], « Etude statique d'une plaque FGM sandwich par une nouvelle théorie hyperbolique » mémoire pour l'obtention du diplôme de master en génie civil, université Dr Tahar Moulay de Saida, (2018).
- [44] [K.P. Soldatos], A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mech.* 94(3) (1992)195–220. doi:10.1007/BF01176650.
- [45] REVUE « Nature & Technologie ». A- Sciences fondamentales et Engineering, n° 09/Juin 2013.
- [46] [A. Chikh, A. Bakora, H. Heireche, M.S.A. Houari, A. Tounsi, E.A.A. Bedia], Thermo-mechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory. *Struct. Eng. Mech.* 57(4) (2016) 617–639. doi:10.12989/sem.2016.57.4.617.
- [47] analyse du comportement statique des poutres sandwiches en FGM, First National Conference on New Materials and their Applications (CNMA'2020).
- [48] [CHIKH ABDELBAKI], Analysis of static behavior of a P-FGM Beam, *journal of matériels and engineering structures* 6 (2019) 513–524, décembre 2019.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de présenter une théorie hyperbolique raffinée qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse afin d'analyser la flexion statique des poutres épaisses fonctionnellement graduées (FGM). Cette théorie contient seulement trois variables contrairement aux autres théories des poutres.

Le nouveau modèle satisfait la nullité des contraintes de cisaillement transversale aux surfaces supérieure et inférieure de la poutre. Ces propriétés matérielles de la poutre FGM varient selon une distribution de la loi de puissance en termes de fraction volumique des constituants. On peut conclure que cette théorie est efficace et simple pour l'analyse de la réponse statique des poutres FGM.

Mots clés : Poutres FGM, théorie hyperbolique, théorie raffinée, solution de Navier.

Summary

The objective of this memory is to present a refined hyperbolic theory which takes into consideration the effect of transverse shearing in order to analyze Static bending of functionally graded thick beams (FGM). This theory contains only three variables unlike other beam theories. The new model satisfies the zero transverse shear stresses at the upper and lower surfaces of the beam. These material properties of the FGM beam vary according to a power law distribution in terms of the volume fraction of the constituents, it can be concluded that this theory is efficient and simple for the analysis of the static response of FGM beams.

Keywords: FGM beams, hyperbolic theory, refined theory, Navier's solution.

المخلص

الهدف من هذه المذكرة هو تقديم نظرية جديدة تأخذ في الاعتبار تأثير القص العرضي من أجل تحليل الانحناء الثابت للعوارض السمكية المتدرجة وظيفياً (FGM). تحتوي هذه النظرية على ثلاثة متغيرات فقط على عكس نظريات القص الأخرى. يلبي النموذج الجديد تصفير ضغوط القص العرضية على الأسطح العلوية والسفلية للعارضة. هذه الخصائص المادية للعارضة تتغير وفق قانون التوزيع الاسي للمادة من حيث النسب الحجمية للمكونات. يمكننا أن نستنتج أن هذه النظرية فعالة وبسيطة من أجل تحليل الاستجابة المستقرة للعوارض.

الكلمات المفتاحية: عوارض المواد المتدرجة وظيفياً، نظرية القطوع الزائدة، النظرية المكررة، حل نافيه.