



PEOPLE'S DEMOCRATIC  
REPUBLIC OF ALGERIA  
MINISTRY OF HIGHER  
EDUCATION AND SCIENTIFIC  
RESEARCH  
UNIVERSITÉ ABBES LAGHROUR-  
KHENCHELA



FACULTY OF SCIENCES AND TECHNOLOGY  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

N° de série: . . . . .

Mémoire de fin d'études  
Pour l'obtention du diplôme de Master  
Filière: Mathématiques  
Spécialité: Mathématiques Appliquées

Intitulé par:

Formation de motifs dans une diffusion croisée

Réalisé par:

Bakhouche Hanane  
Messas Hafidha

Dirigé par:

M. Zaidi

Membres de jury:

M. Bousaada	Président
A. Chergui	Examineur

2020-2021



## Remerciements



*Au nom d'Allah*

*le miséricordieux*

*Premièrement et partic-*

*ulièrement, je tiens à remercier*

*ALLAH le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années. Ainsi, je tiens également à exprimer ma vifs remerciements à notre encadreur **Zaidi Messaoud**, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire, ses conseils, ses encouragement. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Par ailleurs, mes remerciements s'adressent aussi à de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et a tous les membres du département des mathématiques. Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail. Et tous mes remerciements particuliers à mes **parents** pour leur soutien et leurs encouragements continus.*



*❖ Hanane ❖ Hafidha*





## *Dédicaces*

*Au nom d'Allah le miséricordieux*

*J'o*

*Aux personne*

*peuvent pas calculer leurs vertus.*

*Mon père et ma mère que Dieu le*

*À me*

*À tous me*

*À tous le*

## Résumé

Dans cette mémoire, nous avons donné une introduction sur les bases des systèmes de réaction diffusion, ce type de systèmes que nous utiliserons pour montrer l'effet de la diffusion et de la diffusion croisée dans la formation de motifs selon le mécanisme de Turing, poisson zèbre a été choisi comme un exemple pour l'étude, le modèle mathématique utilisé dans l'étude, est le système de Schnackenberg.

---

**Mots-Clés :** Système de réaction-diffusion - Formation de motifs - diffusion croisée - Alan Turing.

## ملخص

في هذه المذكرة أعطينا مقدمة عن أساسيات أنظمة رد الفعل والانتشار، هذا النوع من الأنظمة لنستعمله في تبين أثر كل من الإنشطار والإنشطار العابر في تكوين الانماط وفق أليه Alan Turing تم إختيار سمك الزرد كمثال للدراسة، النموذج الرياضي المستعمل في الدراسة، هو نظام شناكنبر.

---

**الكلمات المفتاحية:** نظام التفاعل والانتشار - تشكيل النمط - الانتشار العابر - Alan Turing.

## Abstract

In this memory, we have given an introduction about the basics of reaction diffusion systems, this type of systems we will use to show the effect of both diffusion and cross diffusion in forming patterns according to the turing mechanism, the Zebrafish was chosen as an example for the study, the mathematical model used in the study, is the Schnackenberg system.

---

**Key words :** Reaction-diffusion systems - Pattern formation- cross diffusion - Alan Turing.

---

---

# Table des matières

---

<b>Introduction Générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Notions fondamentales</b>	<b>9</b>
1.1 Notions en chimie et biologie . . . . .	9
1.1.1 Réaction . . . . .	9
1.1.2 Diffusion . . . . .	9
1.1.3 Le coefficient de diffusion $D$ . . . . .	9
1.1.4 Le flux . . . . .	9
1.1.5 Système inhibiteur activateur . . . . .	10
1.1.6 Diffusion croisée . . . . .	11
1.2 Quelques systemes de reaction diffusion en biologie . . . . .	11
1.2.1 Le système de Gierer Meinhardt . . . . .	11
1.2.2 Le système de Thomas . . . . .	11
1.2.3 Système Schnakenberg . . . . .	11
<b>2 Introduction sur réaction diffusion</b>	<b>13</b>
2.1 Lois de Fick . . . . .	13
2.1.1 Première loi de Fick . . . . .	13
2.1.2 Seconde loi de Fick . . . . .	13
2.1.3 Modélisation des systèmes de réaction-diffusion . . . . .	14
2.2 phénomène d'explosion en temps fini . . . . .	17
2.2.1 Notion de phénomène . . . . .	17
2.2.2 Exemple de réaction diffusion . . . . .	17
2.3 Existence globale et locale d'un système de réaction diffusion . . . . .	20
2.3.1 Existence locale . . . . .	20

---

2.3.2	Existence globale . . . . .	20
2.4	Exemple d'un système de deux espèces . . . . .	22
2.5	Analyse de l'instabilité de Turing pour les modèles biologiques . . . . .	23
2.5.1	Instabilité de Turing . . . . .	24
2.5.2	Résultats pour le modèle de Schnakenberg . . . . .	28
2.5.3	Résultats pour le modèle de glycolyse . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Formation de motifs dans une diffusion croisée</b>	<b>30</b>
3.1	Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces . . . . .	30
3.1.1	Condition de nos dimensionnalisation . . . . .	30
3.1.2	Analyse de stabilité . . . . .	32
3.1.3	Stabilité sans diffusion . . . . .	33
3.1.4	Instabilité induite par diffusion . . . . .	33
3.1.5	Le coefficients critiques . . . . .	35
3.1.6	Les conditions suffisantes pour la formation de motifs . . . . .	35
3.2	Application sur le système de Schnakenberg . . . . .	36
3.2.1	Le système de Schnakenberg . . . . .	36
3.2.2	Les points d'équilibres . . . . .	36
3.2.3	Instabilité induite par la diffusion pour le système de Schnakenberg	37
3.3	Formation de motifs dans une Diffusion et diffusion croisée . . . . .	39
3.3.1	Formation de motifs dans une Diffusion . . . . .	39
3.3.2	Formation de motifs dans une Diffusion croisée . . . . .	41
3.4	Le rôle de la diffusion croisée dans le modèle de Schnakenberg . . . . .	45
3.5	Motifs dans la nature . . . . .	46
	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>49</b>

---

---

# Introduction Générale

---

La science de la formation des motifs traite du visible. En biologie du développement, la formation de motifs fait référence à la génération d'organisations complexes de destins cellulaires dans l'espace et le temps.

Le rôle des gènes dans la formation de motifs est un aspect de la morphogenèse, la création d'anatomies diverses à partir de gènes similaires, actuellement explorée dans la science de la biologie du développement évolutif.

Les mécanismes impliqués sont bien vus dans la structuration antéro-postérieure des embryons de l'organisme modèle *Drosophila* (une mouche des fruits).

L'un des premiers organismes à avoir étudié sa morphogenèse et dans les ocelles des papillons, dont le développement est une variante du mécanisme standard (mouche des fruits). Motifs biologiques tels que les marques d'animaux, la segmentation des animaux et la phyllotaxie se forment de différentes manières.

En biologie du développement, la formation de motifs décrit le mécanisme par lequel des cellules initialement équivalentes dans un tissu en développement dans un embryon assument des formes et des fonctions complexes. La formation de motifs est génétiquement contrôlée et implique souvent chaque cellule dans un champ détectant et répondant à sa position le long d'un gradient de morphogène, suivie d'une communication de cellule à cellule à courte distance via des voies de signalisation cellulaire pour affiner le motif initial.

Dans ce contexte, un champ de cellules est le groupe de cellules dont le destin est affecté par la réponse aux mêmes signaux d'information de position définis.

Plus généralement, la morphologie des organismes est modelée par les mécanismes de la biologie du développement évolutif, tels que la modification du calendrier et du posi-

tionnement d'événements de développement spécifiques dans l'embryon.

Les mécanismes possibles de formation de motifs dans les systèmes biologiques incluent le modèle classique de réaction-diffusion proposé par Alan Turing. Pour les interactions de ce type, Turing a introduit le nouveau terme, systèmes de réaction-diffusion, qui est maintenant généralement utilisé.

Il a démontré qu'un état d'équilibre homogène est instable dans certains systèmes de ce type et que toute déviation locale minime par rapport à cet état d'équilibre suffit à déclencher la formation de motifs. Ce phénomène, appelé instabilité induite par la diffusion, Les systèmes de réaction-diffusion peuvent être utilisées pour modéliser l'évolution spatiale et temporelle des concentrations de deux espèces chimiques en interaction. Cette évolution peut donner lieu à d'intéressants motifs, qui permettent de reproduire les motifs observés sur le pelage de différents animaux, allant des taches de léopards ou de girafes aux rayures des zèbres. En effet, lors de la formation des motifs sur le pelage d'un animal, plusieurs substances chimiques entrent en jeu : les motifs sont formés de mélanine, elle-même produite par les mélanocytes qui réagissent à différentes substances chimiques. Les systèmes de réaction-diffusion, en tant que modèles pour l'étude de la formation des motifs, ont suscité beaucoup d'intérêt. De tels motifs (spirales, cercles concentriques, hexagones, bandes, solitons dissipatifs... ) peuvent se retrouver dans divers systèmes de réaction-diffusion malgré d'importantes différences entre ces systèmes. Une autre raison de l'intérêt porté aux systèmes de réaction-diffusion est qu'ils peuvent souvent être traités mathématiquement par des outils d'analyse et ce bien qu'ils se modélisent par des équations aux dérivées partielles non-linéaires.

Un système de réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus. Les systèmes de réaction diffusion sont de la forme

processus. Les systèmes de réaction diffusion sont de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u(t, x) + F(u(t, x)), x \in \Omega, t \geq 0 \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

où  $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x))$ ,  $u_i$  définie de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$ , est  $D$  est une matrice carrée diagonalisable définie positive appelée matrice de diffusion

---

$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est une application régulière localement Lipchitzienne et généralement non linéaire, représente la réaction.

Le problème (1) est posée sur un domaine ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  et complétée par des conditions initiales et des conditions sur le bord, par exemple les conditions de Dirichlet ou les conditions de Neumann.

Notre mémoire contient trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions générales et certaines définitions préliminaires.

Dans le deuxième chapitre on présente les origines d'un système de réaction diffusion et quelques exemples.

Ainsi que l'existence local et global du solution d'un système et quelques exemples.

Le troisième chapitre présente l'étude de formation de motifs pour un type de poisson zèbre, l'auteur a utilisé le système de Schnackenberg comme modèle mathématique pour cette étude, suivant le mécanisme de Turing, par l'interaction de deux espèces.

---

---

# Notions fondamentales

---

## 1.1 Notions en chimie et biologie

### 1.1.1 Réaction

La réaction est une interaction entre deux ou plusieurs objets. Un exemple simple est celui d'une réaction de décomposition donnée par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u.$$

**Ex chimiques**

### 1.1.2 Diffusion

Elle désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogène les concentrations chimiques. C'est un phénomène de transport irréversible qui se traduit par la disparition d'espèces chimiques dans un milieu.

### 1.1.3 Le coefficient de diffusion $D$

Le coefficient de diffusion correspond à une grandeur caractéristique du phénomène de diffusion de la matière. Ce coefficient permet ainsi de mesurer le rapport entre le flux molaire qui est provoqué et le gradient de concentration de l'espace chimique que l'on considère ou, plus généralement, de la variable d'effort qui entraîne cette diffusion.

### 1.1.4 Le flux

un vecteur qui pointe dans la direction du mouvement de particule. à travers un certain élément de surface de la zone préposée pendant un intervalle de temps noté  $J$

### 1.1.5 Système inhibiteur activateur

considérons le système d'équation de réaction de diffusion suivant dans une dimension spatiale pour deux réactifs

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= d_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= d_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(u, v)\end{aligned}$$

Un système activateur-inhibiteur est un système dans lequel, près d'un point  $x$ , un réactif (L'activateur) stimule la production du second réactif et où le second réactif (L'inhibiteur) réduit la production (production) du premier réactif. Les systèmes activateurs-inhibiteurs sont capables d'expliquer de nombreux processus de formation de motifs dans la nature. L'interaction de ces deux substances peut être décrite par deux équations différentielles simples qui intègrent l'influence de l'activateur et de l'inhibiteur l'un sur l'autre ainsi que les processus de production, de dégradation et de diffusion.

Un ensemble d'équations différentielles d'un système activateur-inhibiteur est présenté et le comportement du système est décrit. Enfin, un modèle de réaction-diffusion alternatif a été utilisé pour simuler les processus de formation de motifs.

Un système activateur-inhibiteur se compose de deux substances qui agissent l'une sur l'autre. L'activateur stimule sa propre production par autocatalyse ainsi que la production de l'inhibiteur.

L'inhibiteur à son tour réprime la production de l'activateur. De plus, l'inhibiteur diffuse plus rapidement que l'activateur de telle sorte que des schémas de concentrations d'activateur et d'inhibiteur peuvent apparaître.

Alan Turing propose un scénario impliquant deux espèces, qui il s'appelle morphogènes et la conjonction des propriétés suivantes :

- L'espèce  $A$  active sa propre production.
  - L'espèce  $A$  active aussi la production de la seconde espèce  $B$ .
  - L'espèce  $B$  inhibe la production de l'espèce  $A$ .
  - L'espèce  $B$  diffuse plus vite que l'espèce  $A$ .
-

### 1.1.6 Diffusion croisée

Le phénomène dans le quel un gradient de concentration d'une espèce induit un flux d'une autre espèce chimique.

## 1.2 Quelques systemes de reaction diffusion en biologie

### 1.2.1 Le système de Gierer Meinhardt

Est un mécanisme activateur inhibiteur suggéré par Gierer et Meinhardt (1972) et largement étudié et utilisé depuis lors. cet système est donné par

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= D_A \nabla^2 A + k_1 - k_2 A + \frac{k_3 A^2}{B} \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= D_B \nabla^2 B + k_4 A^2 - k_5 B\end{aligned}$$

où ici  $A$  est l'activateur et  $B$  l'inhibiteur. Le terme  $\frac{k_3 A^2}{B}$  est à nouveau autocatalytique. Koch et Meinhardt (1994) examinent les applications du système de diffusion par réaction de Gierer-Meinhardt à la formation de modèles biologiques de structures complexes. Ils donnent une bibliographie étendue des applications de ce modèle spécifique et de ses variations[3].

### 1.2.2 Le système de Thomas

Le vrai système empirique d'inhibition du substrat étudié expérimentalement par Thomas (1975) le système de Thomas est donné comme suit

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= D_A \nabla^2 A + k_1 - k_2 A - \frac{k_5 AB}{k_6 + k_7 A + k_8 A^2}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= D_B \nabla^2 B + k_3 - k_4 B - \frac{k_5 AB}{k_6 + k_7 A + k_8 A^2}.\end{aligned}$$

### 1.2.3 Système Schnakenberg

Le système de Schnakenberg utilise des équations aux dérivées partielles pour décrire une réaction autocatalytique avec un comportement oscillatoire possible.

---

Le modèle de Schnakenberg est représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \gamma (a - u + u^2 v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d \Delta v + \gamma (b - u^2 v) \end{cases}$$

Ce système représente le comportement de deux espèces chimiques, généralement appelées activateur et inhibiteur.

Ce modèle représente le comportement de deux espèces chimiques, généralement appelées activateur et inhibiteur. Si  $u$  est l'activateur chimique, la réaction cinétique est telle que dans l'équation (1) le terme  $u^2 v$  est la production de  $u$  en présence de  $v$ . Dans l'équation (2) le même terme  $u^2 v$  représente la consommation de  $v$  en présence de  $u$ .

Le système ci-dessus est représenté sous sa forme sans dimension, où  $a$  et  $b$  sont des termes sources,  $d$  est le coefficient de diffusion et est une constante sans dimension.

Toutes les constantes  $a, b, d$  et sont positives[4].

---

# Introduction sur réaction diffusion

## 2.1 Lois de Fick

### 2.1.1 Première loi de Fick

La première loi de Fick énonce que le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration. Cette loi est inspirée de la loi de "Fourier" sur la conduction de la chaleur. Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante :

$$J = -D \frac{\partial u}{\partial x}.$$

La première loi de Fick décrit la liaison entre la première de la contraction de la substance  $u$  et le flux lorsqu' en supposant la conservation de la masse dans une dimension, la loi est : en plusieurs dimension on doit utiliser le gradient  $\nabla$ , donc la loi s'écrit[1]

$$J = -D \nabla u. \tag{2.1}$$

### 2.1.2 Seconde loi de Fick

La loi de conservation des espèces indique que la variation par unité de temps de la quantité de particules  $i$ ,  $\iiint_V C_i dV$  dans un volume donné  $V$  est égale au flux sortant  $\iint_S J_i dS$  du vecteur densité de courant  $J_i$  de particules  $i$  à travers la surface fermée  $S$  délimitant le volume  $V$ . En utilisant le théorème de la divergence, et en identifiant les deux intégrants ci-dessous, on obtient la deuxième loi de Fick suivante[5].

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V C_i dV = \iint_S J_i dS = \iiint_V \nabla J_i dV. \tag{2.2}$$

Le signe moins provient du fait que la concentration diminue quand le flux sortant augmente. On a donc

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla J_i = 0. \tag{2.3}$$

### 2.1.3 Modélisation des systèmes de réaction-diffusion

Les systèmes de réaction-diffusion décrivent le comportement et les interactions de deux types de particules ou plus. Les termes  $\Delta u$  et  $\Delta v$  sont les termes de diffusion et décrivent la propagation de ces particules. Les termes de réaction sont représentés par  $f$  et  $g$ , et ces termes décrivent comment les particules interagissent les unes avec les autres.  $u$  et  $v$  apparaissent dans les deux équations, en général, le système ne peut pas être écrit en deux équations distinctes. Les systèmes de réaction-diffusion peuvent être obtenus à partir d'équations de conservation de la masse. Supposons qu'on étudie un système contenant  $P$  quantités  $u_1, u_2, \dots, u_p$ , qui peuvent représenter des densités des concentrations de réactifs chimiques, de population, etc. Les densités des espèces sont représentées par un vecteur

$$u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_p(t, x)), t \geq 0, x \in \Omega,$$

où  $\Omega$  est un domaine borné et régulier de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $J_i$  le flux de l'espèce  $u_i$  et  $f_i$  son taux de création volumique horaire. Pour tout  $A \subset \Omega$  borné, régulier, la conservation de la masse pour  $u_i$  à l'intérieur de  $A$  s'écrit[7]

$$\frac{d}{dt} \int_A u_i + \int_{\partial A} J_i \cdot \nu = \int_A f_i, i \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad (2.4)$$

où  $\nu$  est la dérivée normale extérieure sur la frontière  $\partial A$  de  $A$ . D'après le théorème de Gauss Green,

$$\frac{d}{dt} \int_A u_i + \int_A \operatorname{div} J_i = \int_A f_i, i \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

Comme  $A$  est quelconque, on obtient l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \operatorname{div} J_i = f_i, i \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (2.5)$$

D'après la loi de Fick,  $J_i$  est proportionnel au gradient de la concentration des espèces, ce qui donne,

$$J_i = - \sum_{j=1}^p d_{ij} \nabla u_j, i = 1, \dots, p, \quad (2.6)$$

où les  $d_{ii}$  sont les coefficients de diffusion,  $D = (d_{ii}), 1 \leq i \leq p$  est une matrice diagonale avec  $d_{ii} > 0, \forall i = 1, \dots, p$  on retrouve finalement le système de réaction-diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} + D \Delta u = f(u). \quad (2.7)$$

le système de réaction-diffusion s'accompagne souvent de certaines conditions initiales et d'autres aux bords selon l'origine et la nature du problème étudié. S'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière de  $\Omega$  sur lequel le problème est posé, nous choisissons les conditions aux bords de Neumann. Et s'il n'y a pas d'individus sur la frontière, nous prenons les conditions aux bords homogènes de Dirichlet. Lorsque les données initiales sont suffisamment régulières, l'existence locale de solutions pour les systèmes de la forme (2.7) est bien connue.

L'existence globale est un problème ouvert en général, et on sait qu'elle ne peut avoir lieu sans hypothèses supplémentaires sur les  $f_i$ , termes de réaction cinétique.

Laissez-nous faire quelques commentaires sur la structure des non-linéarités  $f_i$ .

Tout d'abord, on supposera toujours que le modèle préserve la positivité des solutions.

Il est bien connu que cela revient à supposer que  $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$  est quasi-positif, ce qui signifie[5]

$(\mathbf{H}_1) \forall i \in \{1, \dots, p\}, f(t, x, u) \geq 0$  pour tout  $(t, x, u) \in (0, +\infty) \times \Omega \times [0, +\infty)^p$  tel que  $c_i = 0$ .

Ensuite, pour espérer l'existence de solutions globales en temps,  $f$  doit satisfaire des hypothèses supplémentaires. Ces hypothèses viennent souvent du modèle qu'on étudie. Par exemple, la conservation de la masse correspond à supposer  $\sum_{i=1}^p f_i = 0$ . Plus généralement,

la masse totale décroît si  $(\mathbf{H}_2) \sum_{i=1}^p f_i \leq 0$

On vérifie facilement que les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , avec des conditions de Neumann homogène au bord, garantissent que les solutions de (2.7) sont uniformément bornées dans  $L^1(\Omega)$  étant donné que pour tout  $t > 0$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^p u_i(t, x) dx \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^p u_i(0, x) dx,$$

et  $\|c_i(t)\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u_i(t, x) dx$  puisque  $c_i$  est positive. Dans le cas homogène, où les fonctions  $u_i$  ne dépendent pas de  $x$ , on peut remarquer qu'elles sont aussi solutions du système

d'équations différentielle ordinaires associé

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = f_1(t, x, u) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial u_p}{\partial t} = f_p(t, x, u) \end{array} \right.$$

Pour des données initiales positives, les solutions restent positives. Étant donné que

$$\sum_{i=1}^p u_i(t) \leq \sum_{i=1}^p u_i(0),$$

elles sont uniformément bornées sur leur intervalle maximal de définition. Par conséquent, dans ce cas particulier, les solutions maximales sont globales. Il est alors naturel de se demander si les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  sont suffisantes pour assurer l'existence de solutions globales fortes pour le système de réaction diffusion (2.7). La réponse est non : des solutions explicites d'un système du type (2.7) avec les propriétés  $(H_1)$  et  $(H_2)$  ont été construites, et ces solutions explosent en norme  $L^\infty(\Omega)$  en temps fini. Dans ce dernier exemple, les coefficients de diffusion sont pourtant constants, et les nonlinéarités sont bornées par des expressions polynomiales[6].

L'explosion peut même avoir lieu en dimension  $N = 1$ , à condition que la croissance des nonlinéarités soit assez rapide. Ceci prouve que lorsqu'on s'intéresse à l'existence globale de solutions fortes, on doit faire des hypothèses supplémentaires sur  $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ . Il existe de nombreuses références sur les problèmes d'existence globale pour ces systèmes, où diverses hypothèses sur les fonctions  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$  sont examinées [23, 14]. Pour une vue d'ensemble, voir [2]

L'existence de solutions globales faibles est plus facile à obtenir dans le cas de coefficients de diffusion constants et pour des nonlinéarités a priori bornées pour tout  $T > 0$  dans  $L^1((0, T), \Omega)$ . L'existence de solutions globales faibles est prouvée. Ce résultat implique que si la croissance de  $f_i$  par-rapport à  $c$  est au plus quadratique, on a l'existence de solutions globales faibles sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ . Ce résultat repose de façon essentielle sur une estimation  $L^2$ , pour les coefficients de diffusion  $d_i$  constants, cette estimation garantit que sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , les solutions de (2.7) satisfont les

---

estimations a priori

$$\forall T > 0, \exists C = C(T, \|c(0)\|_{L^2(\Omega)^p, d_i}) > 0 : \|c\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^p} \leq C.$$

## 2.2 phénomène d'explosion en temps fini

### 2.2.1 Notion de phénomène

Le phénomène d'explosion se produit dans divers types d'équations d'évolution non linéaires. Dans ce travail, nous ne traiterons que quelques exemples des équations paraboliques.

### 2.2.2 Exemple de réaction diffusion

Nous considérons l'exemple suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - u + u^p, 0 < x < \pi \quad t > 0 \quad (2.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad t > 0 \quad (2.9)$$

où  $p$  est fixé. L'existence et la non-négativité peuvent être montrées (nous en parlerons plus tard). Nous définissons (comme fonction auxiliaire)[16]

$$\psi(t) = \int_0^\pi u(x, t) \sin x dx.$$

Nous pouvons donc multiplier l'EDP (2.8) par  $\sin(x)$  et une intégration sur  $[0, \pi]$  et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial t} \sin x dx, \\ &= \int_0^\pi \Delta u \sin x dx - \psi + \int_0^\pi u^p \sin x dx. \end{aligned}$$

Une intégration par parties pour l'intégrale  $\int_0^\pi \Delta u \sin x dx$  donne

$$\int_0^\pi \Delta u \sin x dx = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \cos x dx.$$

D'après les conditions aux limites (2.9) et une autre intégration par parties pour  $\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \cos x dx$  on obtient

$$\int_0^\pi \Delta u \sin x dx = - \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \cos x dx = - \int_0^\pi u \sin x dx = -\psi.$$

Finalement

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2\psi + \int_0^\pi u^p \sin x dx,$$

de l'inégalité de Hölder il vient

$$\int_0^\pi |gh| dx \leq \left[ \int_0^\pi |g|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \times \left[ \int_0^\pi |h|^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{1-\frac{1}{p}}.$$

Choisir  $g = u(\sin x)^{\frac{1}{p}}$  et  $h = (\sin x)^{1-\frac{1}{p}}$ , avec une intégration sur l'intervalle  $[0, \pi]$ , alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u \sin x dx &\leq \left[ \int_0^\pi u^p \sin x dx \right]^{\frac{1}{p}} \times \left[ \int_0^\pi ((\sin x)^{1-\frac{1}{p}})^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{1-\frac{1}{p}}, \\ \int_0^\pi u \sin x dx &\leq \left[ \int_0^\pi u^p \sin x dx \right]^{\frac{1}{p}} \times \left[ \int_0^\pi \sin x dx \right]^{1-\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$\left( \int_0^\pi u \sin x dx \right)^p \leq \left( \left[ \int_0^\pi u^p \sin x dx \right]^{\frac{1}{p}} \right)^p \left( \left[ \int_0^\pi \sin x dx \right]^{1-\frac{1}{p}} \right)^p.$$

Cette inéquation nous conduit à

$$\psi^p \leq \int_0^\pi u^p \sin x dx \times (2)^{p-1},$$

ce qui donne

$$\int_0^\pi u^p \sin x dx \geq \frac{\psi^p}{2^{p-1}},$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2\psi + \int_0^\pi u^p \sin x dx \geq -2\psi + \frac{\psi^p}{2^{p-1}}.$$

Par conséquent, si nous partons d'une valeur initiale satisfaisante

$$\psi(0) = \int_0^\pi u_0(x) \sin x dx > 2^{\frac{p}{v}-i},$$

alors nous obtenons

$$\frac{\partial \psi(0)}{\partial t} \geq -2\psi(0) + \frac{\psi^p(0)}{2^{p-1}} = \psi(0) \left[ \frac{\psi^p(0)}{2^{p-1}} - 2 \right] > 0,$$

une fonction croissante monotone. On montre que la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -2\psi + \frac{\psi^p}{2p-1} \\ \psi(0) = \psi_0 \end{cases}$$

est

$$\psi(t) = \left[ 2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-1}{p-1}}.$$

On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-1}{p-1} \left[ 2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-1}{p-1}-1} 2(p-1) e^{2(p-1)t} [\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}].$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= - \left[ 2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-p}{p-1}} 2e^{2(p-1)t} [\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}] \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -2e^{2(p-1)t} \left[ \left[ 2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-1}{p-1}} \right]^p [\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}]. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\psi(t) = \left[ 2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-1}{p-1}}.$$

Alors

$$\psi^{-(p-1)} = 2^{-p} + e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}),$$

par suite

$$e^{2(p-1)t} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) = \psi^{-(p-1)} - 2^{-p}.$$

Remplaçant dans

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2\psi^p [\psi^{-(p-1)} - 2^{-p}].$$

Finalement on trouve l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -2\psi + \frac{\psi^p}{2p-1} \\ \psi(0) &= \left[ 2^{-p} + (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) \right]^{\frac{-1}{p-1}} = \psi_0. \end{aligned}$$

La solution tend à l'infini, comme

$$\psi^{-(p-1)} = 2^{-p} + e^{2(p-1)t^*} (\psi_0^{-p+1} - 2^{-p}) = 0 \iff t^* = \frac{1}{2(p-1)} \ln \left[ \frac{2^{-p}}{2^{-p} - \psi_0^{-p+1}} \right]$$

$$\lim \psi(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow t^* = T_{\max} = \frac{1}{2(p-1)} \ln \left[ \frac{2^{-p}}{2^{-p} - \psi_0^{-p+1}} < +\infty \right]$$


---

c'est-à-dire temps fini de l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous trouvons

$$\|\psi\| = \left\| \int_0^\pi u \sin x dx \right\| \leq \int_0^\pi \|u\| \|\sin x\| dx \leq \|u\|_{L^2(0,\pi)} \times \|\sin x\|_{L^2(0,\pi)}$$

Nous savons déjà que  $\psi \rightarrow +\infty$ , donc il en résulte directement que  $\|u\|_{L^2(0,\pi)} \rightarrow +\infty$ , en cas de  $\psi(0) > 2^{\frac{p}{p-1}}$

$$\lim \| \psi(t) \|_\infty = +\infty, t \rightarrow T_{\max}$$

et donc explosion en temps fini des solutions.

## 2.3 Existence globale et locale d'un système de réaction diffusion

Pour démontrer l'existence des solutions des systèmes de réaction diffusion, il y a plusieurs méthodes telles que la méthode des régions invariantes, méthode de l'effet régularisant, méthodes fonctionnelles basées sur des estimations à priori ou sur des fonctionnelles de Lyapunov.

### 2.3.1 Existence locale

#### Théorème 2.1

*Sous les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$   $[x_1]$ , le système (2.14) admet une unique solution locale  $(u, v)$  sur  $[0, T_{\max}) \times \Omega$ , et il existe deux fonctions  $N_1, N_2 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  continues telles que  $0 \leq u(t, x) \leq N_1(t)$  et  $0 \leq v(t, x) \leq N_2(t)$  pour tout  $(t, x) \in [0, T_{\max}) \times \Omega$ . De plus le temps maximal d'existence  $T_{\max}$  est caractérisé par si  $T_{\max} < +\infty$ , alors  $\lim (\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) = +\infty, t \rightarrow T_{\max}$ .*

### 2.3.2 Existence globale

Il n'existe pas de solutions générales des systèmes de réaction diffusion. On passe maintenant à l'existence globale, l'existence globale de la solution du système, c'est-à-dire déterminer si  $T_{\max} = +\infty$ , nous utilisons la contraposée de la caractérisation du temps

maximal d'existence

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{s' il existe une fonction } M : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \text{ continue telle que ,} \\ \|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty \leq M(t) \text{ pour tout } t \in [0, T_{\max}), \\ \text{alors } T_{\text{tax}} = +\infty, \end{array} \right. \quad (2.10)$$

c'est-à-dire, si les fonctions  $u(t)$  et  $v(t)$  sont bornées pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $T < T_{\max}$ , alors,  $T_{\max} = +\infty$  Abdelmalek et Kouachi, a généralisé le système d'une matrice diagonale à  $m$  composants, et utiliser une seule inégalité pour la condition de croissance polynomiale des termes de réaction.

### Proposition 2.1

On considère des problèmes paraboliques semilinéaires de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u) & x \in \Omega \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0 & x \in \Omega \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $D$  est une matrice diagonale définie positive,  $D$  est la matrice de diffusion.  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une fonction localement Lipschitzienne. Soit  $X$  un espace de Banach des fonctions définies dans  $\Omega$ . On suppose que le problème (2.11) possède pour tout  $u_0 \in X$  une solution unique  $u$  dans l'intervalle  $[0, T]$ , où  $T = T(u_0)$  :

Alors il existe  $T_{\max} = T_{\max}(u_0) \in (T, +\infty]$  avec les propriétés suivantes :

- i) La solution  $u$  est continue dans l'intervalle  $[0, T_{\max})$  :
- ii) Si  $T_{\max} < \infty$ , alors  $u$  ne peut être continue dans  $[0; \tau)$  pour tout  $\tau > T_{\max}$ . On appelle  $u$  la solution maximale et  $T_{\max}$  est son temps maximal d'existence.
- iii) D'autre côté on considère que  $T = T(\|u_0\|_X)$ . Alors l'un des deux :  $T_{\max} = \infty$  ou  $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty$  est satisfait.

Le principe de prolongement de la solution nous conduit à l'alternative suivante :

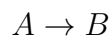
- a) ou bien  $T_{\max} = +\infty$  et la solution est dite globale
- b) ou bien  $T_{\max} < +\infty$  et la solution explose en temps fini c'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty.$$

Ainsi pour étudier l'existence globale des solutions, il suffit d'avoir des estimations uniformes sur ces solutions. Par conséquent, pour montrer l'existence globale de solutions classiques, il suffit de montrer que celles-ci restent uniformément bornées sur leur temps d'existence.

## 2.4 Exemple d'un système de deux espèces

On considère la réaction chimique



Ici,  $A$  et  $B$  sont les concentrations de deux espèces chimiques. Le taux de réaction, c'est-à-dire de la consommation de  $A$  ou de la productions de  $B$

$$\frac{dA}{dt} = -KA, \quad \frac{dB}{dt} = KA.$$

C'est la loi d'action de masse. Le coefficient  $K$  est donné par la loi d'Arrhenius

$$K(T) = k_0 e^{-E/RT},$$

où  $k_0$  est une constante,  $E$  est l'énergie d'activation,  $R$  est la constante de gaz,  $T$  est la température.

L'évolution de la température est donnée par l'équation

$$\frac{dT}{dt} = qK(T)A$$

$q$  est la production de chaleur.

Les distributions de la température et de la concentration en espace sont décrites par les équations de réaction-diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + qK(T)A \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = d_A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - K(T)A \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = d_B \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + K(T)A. \quad (2.14)$$

Ici,  $k$  est le coefficient de diffusion de la chaleur,  $d_A$  et  $d_B$  sont les coefficients de diffusion de masse.

Ce système d'équations doit être complétée par les conditions initiales :

$$T(x, 0) = T_0(x), A(x, 0) = A_0(x), B(x, 0) = B_0(x), \quad (2.15)$$

où  $T_0(x)$  et  $A_0(x)$  et  $B_0(x)$  sont des fonctions données.

Si on suppose que  $d_A = d_B = d$  et on utilise la notation  $C = A + B$ , alors la somme des équations (2.13) et (2.14) donne

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 2d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (2.16)$$

La condition initiale est la suivante :  $C(x, 0) = A(x, 0) + B(x, 0)$ . Si elle ne dépend pas de  $x$ , c'est-à-dire  $C(x, 0) = C_0$  où  $C_0$  est une constante, alors en appliquant la solution de l'équation de réaction -diffusion homogène (2.17)

$$C(x, t) = \frac{C_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/4Dt} dy$$

avec  $D = 2d$ , en faisant le changement de variable

$$z = \frac{x-y}{2\sqrt{Dt}}, dz = -\frac{1}{2\sqrt{Dt}} dy$$

on trouve

$$C(x, t) = -\frac{2\sqrt{Dt}C_0}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-z^2} dz,$$

d'où

$$\begin{aligned} C(x, t) &= \frac{C_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \\ &= C_0 \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation (2.16) est  $C(x, t) \equiv C_0$  pour tout  $x$  et  $t$ . Alors,

$$\begin{aligned} A(x, t) &= C_0 - B(x, t). \\ u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/4Dt} \Phi(y) dy. \end{aligned} \quad (2.17)$$

## 2.5 Analyse de l'instabilité de Turing pour les modèles biologiques

La diffusion est un processus naturel par lequel un système donné atteint l'équilibre et est présente dans de nombreuses situations quotidiennes.

---

Dans les systèmes diffusifs composés de plusieurs substances ou espèces, les phénomènes de diffusion peuvent s'accompagner de réactions chimiques ou d'autres interactions qui modifient localement les concentrations.

Les systèmes qui incluent la diffusion et de telles interactions entre les substances sont appelés systèmes de réaction-diffusion, les modèles de réaction-diffusion peuvent évoluer vers un modèle spatial stable et hétérogène à partir d'un état homogène d'équilibre spatial, en raison de petites perturbations dans les concentrations initiales.

Ce phénomène est connu sous le nom d'instabilité de diffusion ou d'instabilité de Turing.

### 2.5.1 Instabilité de Turing

En 1952, Alan Turing a écrit l'article fondateur proposant que le processus de génération de structures et de formes dans les systèmes biologiques soit basé sur des processus chimiques de diffusion qui se produisent sur eux. Trois types d'instabilités ont été trouvés :

- a) oscillatoire dans le temps et uniforme dans l'espace,
- b) stationnaire dans le temps et périodique dans l'espace,
- c) oscillatoire dans le temps et l'espace.

Le deuxième type d'instabilité, qui induit la formation de motifs spatiaux là où il n'y en avait pas auparavant, est connu sous le nom d'instabilité de Turing. L'analyse mathématique des équations de diffusion des réactions permet d'arriver à des conditions qui doivent être vérifiées afin de permettre le développement de ce processus de génération de motifs. [25]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \beta f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + \beta g(u, v) \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $u$  et  $v$  sont les concentrations des substances,  $f$  et  $g$  sont les fonctions de réaction et  $d$  est le rapport entre les constantes de diffusion des différentes espèces.

Dans l'analyse de l'instabilité de Turing, on suppose généralement que les flux aux frontières sont égaux à zéro, de sorte que le modèle spatial formé ne subit aucune influence d'aucune entrée externe. L'instabilité de Turing se produit lorsque de petites perturbations spatiales d'un état d'équilibre homogène conduisent un système décrit par les équations (2.18) à assumer un nouvel état stationnaire inhomogène. L'analyse se fait en deux étapes.

---

A partir d'un état d'équilibre homogène, les conditions de stabilité temporelle sont développées après que de petites perturbations dans la distribution spatiale soient introduites et que les conditions d'instabilité spatiale soient atteintes. Dans un système homogène, avec des concentrations uniformes dans l'espace, les termes de diffusion disparaissent donc les équations (2.18) peuvent être réécrites comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \beta g(u, v) \end{cases} \quad (2.19)$$

Un état stable,  $(u, v) = (u_0, v_0)$ , est trouvé lorsque la dérivée temporelle des concentrations des substances dans le système s'annule.

D'après les équations (2.19), les équations suivantes doivent être satisfaites :

$$f(u_0, v_0) = g(u_0, v_0) = 0 \quad (2.20)$$

Considérant de petites perturbations dans les concentrations  $w = (w^u(t), w^v(t))^T$  les équations (2.19) peuvent être écrites pour un point,  $(u_0 + w^u(t), v_0 + w^v(t))$ , au voisinage de l'état d'équilibre, en utilisant le développement de la série de Taylor pour les fonctions  $f$  et  $g$ . En ne considérant que les termes linéaires, on peut obtenir les équations suivantes :

$$w_t = \beta A w \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

où les indices dans la définition de la matrice de stabilité,  $A$ , représentent les dérivées partielles de  $f$  et  $g$  calculées à  $(u_0, v_0)$ .

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\beta A$  de vecteur propre  $V$ , alors :

$$\beta A V = \lambda V. \quad (2.22)$$

Ainsi  $X = e^{\lambda t} V$  est la solution de l'équation (2.21). L'état d'équilibre d'origine est linéairement stable si  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , puisque, dans ce cas, la perturbation  $w \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . La détermination des valeurs propres de  $A$  se fait, comme d'habitude, en résolvant l'équation caractéristique conduisant à

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \beta \left[ (f_u + g_v) \pm \sqrt{(f_u + g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u)} \right] \quad (2.23)$$


---

De l'analyse de l'équation (2.23), il résulte que la stabilité, c'est-à-dire  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , est garantie si :

$$f_u + g_v < 0, \quad (2.24)$$

$$f_u g_v + f_v g_u > 0. \quad (2.25)$$

Les conditions ci-dessus garantissent une stabilité linéaire dans le temps pour l'état homogène d'origine, donc sans l'influence des termes diffusifs. En présence de diffusion, on a le système complet de réaction-diffusion donc les perturbations spatiales et temporelles doivent satisfaire :

$$w_t = D\Delta w + \beta A w. \quad (2.26)$$

Les solutions du système d'équations ci-dessus ont la forme :

$$w(r, t) = \sum_k c_k e^{\lambda(k)t} W_k(r), \quad (2.27)$$

où les constantes  $c_k$  sont déterminées par développement de Fourier des conditions initiales en termes de  $W_k(r)$ , qui sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres  $k$  du problème aux valeurs propres. Si le problème est unidimensionnel, défini en  $0 < x < a$ ,  $w$  est une combinaison linéaire de termes sous la forme de  $\cos(k \cdot x)$  et les valeurs propres,  $k = \frac{n\pi}{a}$  (un ensemble discret de valeurs), sont appelées onde Nombres. La substitution de l'équation (2.27) dans (2.26) donne pour chaque  $k$  :

$$\lambda W_k = \beta A W_k + D\Delta W_k \quad (2.28)$$

L'équation (2.28) peut être réécrite comme :

$$[\lambda I - \beta A - k^2 D] W_k = 0 \quad (2.29)$$

Puisque nous recherchons une solution non triviale pour le système cidessus, le déterminant de la matrice multipliant  $W_k$  dans l'équation (2.29) doit être égal à zéro. Ainsi les valeurs propres  $\lambda(k)$  doivent satisfaire :

$$\lambda^2 + \lambda [k^2(1 + d) - \beta (f_u + g_v)] + h(k^2) = 0 \quad (2.30)$$

où

$$h(k^2) = dk^4 - \beta (df_u + f_v) k^2 + h(k^2) + \beta^2 |A|. \quad (2.31)$$

Afin que l'état stationnaire soit instable aux perturbations spatiales, il faut imposer pour la solution  $\lambda(k)$  de l'équation (2.30) que  $\text{Re } \lambda(k) > 0$  pour un certain  $k \neq 0$ .

Pour s'assurer de l'existence d'une telle racine, il faut que  $h(k^2) < 0$  dans l'équation (2.15). De plus, puisque le coefficient de  $k^4$  dans l'équation (2.31) est positif, des valeurs négatives de  $h(k^2)$  se produiront pour  $k^2$  entre ses racines  $k_1^2$  et  $k_2^2$  :

$$k_1^2 < k^2 < k_2^2 \quad (2.32)$$

On peut montrer (2.24) qu'une condition nécessaire pour obtenir des racines positives avec  $d$  différent de 1, est :

$$(df_u + g_v) > 0. \quad (2.33)$$

Par contre, pour obtenir deux racines réelles distinctes il faut un discriminant positif :

$$(df_u + g_v)^2 - 4d|A| > 0 \quad (2.34)$$

En bref, les conditions qui restreignent l'espace des paramètres caractérisant l'espace de Turing peuvent être résumées avec l'ensemble d'inéquations suivant, obtenu à partir des équations (2.24), (2.25), (2.33) et (2.34)

$$f_u + g_v < 0 \quad (2.35)$$

$$f_u g_v + f_v g_u > 0 \quad (2.36)$$

$$df_u + g_v > 0 \quad (2.37)$$

$$(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) > 0. \quad (2.38)$$

En plus de satisfaire les inégalités (2.35)-(2.38) ci-dessus, les problèmes bidimensionnels définis dans  $0 < x < p, 0 < y < q$ , doivent satisfaire l'équivalent de l'équation (2.32), c'est-à-dire les valeurs entières des nombres d'onde dans les deux sens met  $n$  doivent satisfaire l'inégalité suivante :

$$k_1^2 < \pi^2 \left( \frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} \right) < k_2^2. \quad (2.39)$$

## 2.5.2 Résultats pour le modèle de Schnakenberg

En utilisant le modèle de schnakenberg, on suppose que les dérivées temporelles sont égal à zéro,  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ , qui nous permettent de trouver l'état stationnaire :

$$(u_0, v_0) = \left( a + b, \frac{b}{(a + b)^2} \right) \quad (2.40)$$

Nos simulations ont ensuite été effectuées en utilisant le paramètre décrit dans le tableau 2.1. Le domaine utilisé dans ces simulations était  $0 < x < 1$  et  $0 < y < 1$ . Un maillage de  $26 \times 26$  points a été utilisé dans les simulations :

Après un temps égal à 8 , nous avons collecté les résultats. La fonction odeint a renvoyé les valeurs de la solution en utilisant 60 points également répartis.

Pour cette simulation, nous avons appliqué une perturbation de 0,9% dans la condition initiale. Pour obtenir l'instabilité de Turing, les inégalités définies par les équations (2.35) à (2.38) doivent être satisfaites[25].

$$f_u + g_v = -35.34 < 0$$

$$f_u g_v + f_v g_u = 31229.96 > 0$$

$$df_u + g_v = 1119.36 > 0$$

$$(df_u + g_v)^2 + 4d(f_u g_v - f_v g_u) = 107748.65 > 0$$

En substituant à ces inégalités les valeurs données par le tableau 2.1

Parameter	Value
$a$	0.1
$b$	0.9
$d$	9.1676
$\gamma$	176.72

TABLE 2.1 – Paramètres utilisés pour simuler le modèle de Schnakenberg

on obtient, dans cette situation,  $m = 2$  et  $n = 1$ , ou vice versa, sont des valeurs qui satisfont à l'inégalité. Ainsi, les motifs qui peuvent être formés sont comme lillustre la figure 2.1.

---

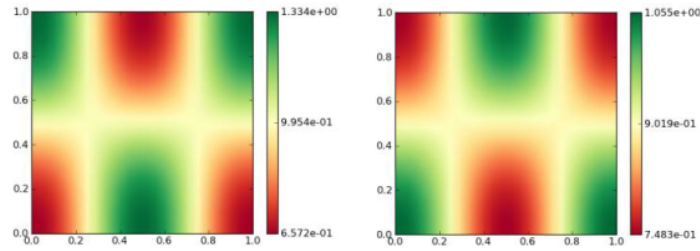


FIGURE 2.1 – Concentration de  $u$ , à gauche, et  $v$ , à droite, pour le modèle de Schnakenberg sur un maillage 2D.

### 2.5.3 Résultats pour le modèle de glycolyse

Les valeurs qui satisfont l'inégalité sont  $m = 5$  et  $n = 2$ , donc les motifs [25] qui peuvent être formés sont présentés dans la figure 2.2. Pour calculer la simulation pour ce premier ensemble de valeurs de test, le domaine bidimensionnel  $0 < x < \pi$  et  $0 < y < \pi$  a été utilisé. De plus, un maillage avec  $61 \times 61$  à égale 500 ont été utilisés dans la simulation qui a calculé 1000 points également espacés dans l'intervalle temporel analysé. Le niveau de perturbation appliqué dans la condition initiale utilisée dans la simulation était de 0,5%.

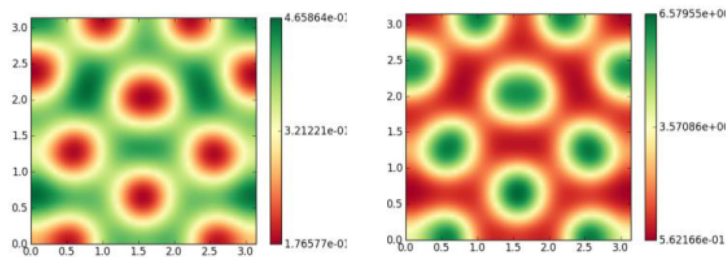


FIGURE 2.2 – Concentration de  $u$ , à gauche, et  $v$ , à droite, pour le modèle de Schnakenberg sur un maillage 2D.

# Formation de motifs dans une diffusion croisée

---

## 3.1 Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces

### 3.1.1 Condition de nos dimensionnalisation

Soit un système de réaction diffusion à deux espèces

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= D_A \Delta A + F(A, B) \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= D_B \Delta B + G(A, B) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} F(A, B) = k_1 - k_2 A + k_3 A^2 B, \\ G(A, B) = k_4 - k_3 A^2 B. \end{cases} \quad (3.2)$$

Où les  $D_A, D_B, k_i, i = 1, 4$  sont strictement positives.

Le système (3.2) est appelé la cinétique de Schnakenberg.

On introduit  $L$  comme une échelle de longueur et on pose [4]

$$u = A \left( \frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v = B \left( \frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t^* = \frac{D_A t}{L^2}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad (3.3)$$

$$d = \frac{D_B}{D_A}, \quad a = \frac{k_1}{k_2} \left( \frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{k_4}{k_2} \left( \frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = \frac{L^2 k_2}{D_A}. \quad (3.4)$$

Prenant la dérivée partielle de  $A$  par rapport à  $t^*$  et  $x^*$ , donne

$$\frac{\partial A}{\partial t^*} = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t^*} = \frac{L^2}{D} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \frac{\partial A}{\partial x^*} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^*} = L \frac{\partial A}{\partial x} \quad (3.5)$$

$$\Delta(x)A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{L^2} \Delta(x^*) \quad (3.6)$$

$$A = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u \quad \text{donc} \quad \frac{\partial A}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t^*} \quad (3.7)$$

$$\frac{D_A}{L^2} \frac{\partial A}{\partial t^*} = \frac{D_A}{L^2} \Delta(x^*) A + F(A, B). \quad (3.8)$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial A}{\partial t^*} = \Delta(x^*) A + \frac{L^2}{D_A} F(A, B) \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} (k_1 - k_2 A + k_3 A^2 B). \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} \left[ k_1 - k_2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u + k_3 \left[ \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u \right]^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right]. \quad (3.11)$$

En suite, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} \left[ k_1 \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - k_2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} u + k_3 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} u^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right]. \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} \left[ k_1 \frac{k_2}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - k_2 u + k_2 u^2 v \right]. \quad (3.13)$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} k_2 \left[ \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - u + u^2 v \right]. \quad (3.14)$$

On obtient la suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} k_2 [a - u + u^2 v]. \quad (3.15)$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \gamma [a - u + u^2 v]. \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \gamma f(u, v). \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t^*} = \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t^*} = \frac{L^2}{D_A} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \frac{\partial B}{\partial x^*} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^*} = L \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (3.18)$$

$$\Delta(x) B = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{L^2} \Delta(x^*) B. \quad (3.19)$$

$$B = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \quad \text{donc} \quad \frac{\partial B}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t^*}. \quad (3.20)$$

$$\frac{D_A}{L^2} \frac{\partial B}{\partial t^*} = \frac{D_B}{L^2} \Delta(x^*) B + G(A, B). \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \Delta(x^*) B + \frac{L^2}{D_A} G(A, B). \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} [k_4 - k_3 A^2 B]. \quad (3.23)$$

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} \left[ k_4 - k_3 \left[ \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u \right]^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right]. \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} \left[ k_4 \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - k_3 \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u \right]^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right]. \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} k_2 \left[ \frac{k_4}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - u^2 v \right]. \quad (3.26)$$

Alors

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = d\Delta(x^*) v + \gamma [b - u^2 v]. \quad (3.27)$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = d\Delta(x^*) v + \gamma g(u, v). \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \gamma f(u, v) \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + \gamma g(u, v) \text{ sur } \Omega. \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

### 3.1.2 Analyse de stabilité

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \gamma g(u, v) \end{cases} \quad (3.30)$$

$$f(u_0, v_0) = g(u_0, v_0) = 0.$$

$$w(t) = \begin{pmatrix} u(t) - u_0 \\ v(t) - v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

$$\partial w = \gamma J w$$

$$J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)}$$

$$w = \alpha e^{\lambda t} \quad (3.32)$$

### 3.1.3 Stabilité sans diffusion

$$\lambda^2 - \gamma(f_u + g_v)\lambda + \gamma^2(f_u g_v - f_v g_u) = 0, \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\gamma \left[ (f_u + g_v) + \sqrt{(f_u + g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u)} \right]}{2}, \\ \lambda_2 = \frac{\left[ \gamma(f_u + g_v) - \sqrt{(f_u + g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u)} \right]}{2}. \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\text{Tr}(J) = f_u + g_v < 0, \quad (3.35)$$

$$\det(J) = f_u g_v - f_v g_u > 0. \quad (3.36)$$

### 3.1.4 Instabilité induite par diffusion

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\Delta w + \gamma Jw, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$w = \sum_k c_k e^{\lambda_k t} \psi_k$$

$$\begin{cases} \Delta \psi_k + k^2 \psi_k = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\lambda \psi_k c_k e^{\lambda t} = k^2 D \psi_k c_k e^{\lambda t} + \gamma J \psi_k c_k e^{\lambda t}$$

$$\lambda \psi_k = D k^2 \psi_k + \gamma J \psi_k,$$

$$[\lambda I - \gamma J + D k^2] \psi_k = 0, \text{ tel que } \psi_k \neq 0 \quad (3.39)$$

$$\det(\lambda I - \gamma J + D k^2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \gamma f_u + k^2 & -\gamma f_v \\ -\gamma g_u & \lambda - \gamma g_v + dk^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + [(d+1)k^2 - \gamma(f_u + g_v)]\lambda + H(k^2) = 0 \quad (3.40)$$

$$H(k^2) = dk^4 - \gamma k^2 (df_u + g_v) + \gamma^2 \det(J)$$

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0,$$

$$\alpha = (d+1)k^2 - \gamma(f_u + g_v), \quad (3.41)$$

$$\beta = dk^4 - \gamma k^2 (df_u + g_v) + \gamma^2 \det(J) \quad (3.42)$$

$$k^2(d+1) - \gamma(f_u + g_v) > 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)}{2} - \frac{\sqrt{[k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)]^2 - 4H(k^2)}}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)}{2} + \frac{\sqrt{[k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)]^2 - 4H(k^2)}}{2} \end{cases}$$

$$df_u + g_v > 0. \quad (3.43)$$

$$2dk_m^2 - \gamma(df_u + g_v) = 0 \quad (3.44)$$

$$k_m^2 = \frac{\gamma(df_u + g_v)}{2d} \quad (3.45)$$

$$H_m = H(k_m^2) = dk_m^4 - \gamma k_m^2 (df_u + g_v) + \gamma^2 \det(J)$$

$$H_m = H(k_m^2) = \gamma^2 \left[ \det(J) - \frac{(df_u + g_v)^2}{4d} \right]$$

$$\det(J) < \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}$$

pour  $k \neq 0$ , et à la bifurcation, quand  $H(k_m^2) = H_m = 0$

$$\det(J) = \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}$$


---

### 3.1.5 Le coefficients critiques

A la bifurcation, lorsque  $H(k_m^2) = H_m = 0$ , nous avons besoin de

$$\det(J) = \frac{(df_u + g_v)^2}{4d},$$

$$\det(J) = f_u g_v - f_v g_u = \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}$$

$$d_c^2 f_u^2 + 2(2f_v g_u - f_u g_v) d_c + g_v^2 = 0$$

$$k_c^2 = \frac{\gamma(df_u + g_v)}{2d_c} = \gamma \frac{\sqrt{\det(J)}}{\sqrt{d_c}} = \gamma \frac{\sqrt{f_u g_v - f_v g_u}}{\sqrt{d_c}}$$

### 3.1.6 Les conditions suffisantes pour la formation de motifs

$$k_i^2 = \gamma \frac{df_u + g_v \pm \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)}}{2d}, \quad i = 1, 2$$

Ainsi,

$$k_1^2 < k^2 < k_2^2 \quad (3.46)$$

tel que

$$k_1^2 = \frac{\gamma}{2d} \left[ df_u + g_v - \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)} \right] \quad (3.47)$$

$$k_2^2 = \frac{\gamma}{2d} \left[ df_u + g_v + \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)} \right]. \quad (3.48)$$

L'expression  $\lambda = \lambda(k^2)$  est appelée relation de dispersion. Dans un intervalle instable,  $\text{Re } \lambda(k^2) > 0$  a un maximum pour  $k_m$  avec  $d > d_c$ . Cela implique qu'il existe un mode de croissance plus rapide dans la somme de  $w$ . Ainsi, nous avons

$$w \approx \sum_{k_1}^{k_2} c_k e^{\lambda(k)t} \psi_k \quad \text{pour les grands } t. \quad (3.49)$$

Pour récapituler nos résultats pour l'instabilité induite par la diffusion d'un système de réaction diffusion de deux espèces.

**Théorème 3.1**

Considérons le système de réaction diffusion (3.29) avec le point d'équilibre  $(u_0, v_0)$ . Les conditions pour que les motifs de Turing se forment sont

$$f_u + g_v < 0, \quad (3.50)$$

$$f_u g_v - f_v g_u > 0 \quad (3.51)$$

$$df_u + g_v > 0 \quad (3.52)$$

$$\frac{(df_u + g_v)^2}{4d} > f_u g_v - f_v g_u. \quad (3.53)$$

Où toutes les dérivées partielles sont évaluées à  $(u_0, v_0)$  : Si ces conditions sont remplies, il existe alors une gamme de motifs dépendant de  $\gamma$  ; les nombres d'ondes linéairement instables donnés dans (3.46)-(3.48). Ces motifs spatiaux sont les fonctions propres  $\psi_k$  avec les nombres d'onde  $k_1$  et  $k_2$ .

Notez que cela découle de (3.50) et (3.52) où  $d \neq 1$  ; et  $f_u$  et  $g_v$  doivent avoir des signes opposés. Par exemple, si  $f_u > 0$  et  $g_v < 0$ ,  $d > 1$ , cela signifie que l'inhibiteur du système (3.29) doit diffuser plus rapidement que l'activateur.

**3.2 Application sur le système de Schnakenberg****3.2.1 Le système de Schnakenberg**

$$\begin{cases} f(u, v) = a - u + u^2 v \\ g(u, v) = b - u^2 v \end{cases}$$

**3.2.2 Les points d'équilibres**

Les points d'équilibre sont obtenus par  $f(u, v) = g(u, v) = 0$ , d'où

$$a - u + u^2 v = 0$$

$$b - u^2 v = 0$$

$$(u_0, v_0) = \left( a + b, \frac{b}{(a + b)^2} \right).$$

$$J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} -1 + 2uv & u^2 \\ -2uv & -u^2 \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)}$$

par suite

$$J = \begin{pmatrix} \frac{b-a}{b+a} & (a+b)^2 \\ \frac{-2b}{b+a} & -(a+b)^2 \end{pmatrix}$$

### 3.2.3 Instabilité induite par la diffusion pour le système de Schnakenberg

$$\text{Tr}(J) = \frac{b-a}{b+a} - (a+b)^2 < 0$$

par conséquent

$$0 < b-a < (a+b)^3$$

$$\det J = \left[ \left( \frac{2b}{b+a} \right) (a+b)^2 \right] - \left[ \left( \frac{b-a}{b+a} \right) (a+b)^2 \right].$$

D'où Ainsi on a

$$\left[ d(b-a) - (b+a)^3 \right]^2 > 4d(b+a)^4.$$

par conséquent

$$0 < b-a < (a+b)^3$$

$$\det J = \left[ \left( \frac{2b}{b+a} \right) (a+b)^2 \right] - \left[ \left( \frac{b-a}{b+a} \right) (a+b)^2 \right].$$

D'où

$$\begin{aligned} \det J &= b^2 + a^2 + 2ab \\ &= (a+b)^2 > 0 \end{aligned}$$

$$df_u + g_v > 0$$

$$d(b-a) > (b+a)^3.$$

Ainsi on a

$$\left[ d(b-a) - (b+a)^3 \right]^2 > 4d(b+a)^4.$$


---

$$0 < b - a < (a + b)^3 \quad (3.54)$$

$$(a + b)^2 > 0, \quad (3.55)$$

$$d(b - a) > (b + a)^3, \quad (3.56)$$

$$\left[ d(b - a) - (b + a)^3 \right]^2 > 4d(b + a)^4. \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + a - u + u^2 v \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + b - u^2 v. \quad (3.59)$$

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} A_n \cos \left[ \frac{n\pi x}{p} \right] B_m \cos \left[ \frac{m\pi y}{q} \right] \quad (3.60)$$

$$w(t, x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} e^{\lambda(k^2)t} A_n \cos \left[ \frac{n\pi x}{p} \right] B_m \cos \left[ \frac{m\pi y}{q} \right], \quad (3.61)$$

où

$$k^2 = \pi^2 \left[ \frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} \right], \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\gamma\Gamma_1(a, b, d) = k_1^2 < k^2 < k_2^2 = \gamma\Gamma_2(a, b, d) \quad (3.62)$$

On utilise les inégalités (3.46)-(3.48), on obtient

$$\Gamma_1(a, b, d) = \frac{df_u + g_v - \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)}}{2d}.$$

$$\Gamma_1(a, b, d) = \frac{[d(b - a) - (a + b)^3] - \sqrt{[d(b - a) - (a + b)^3]^2 - 4d \det(J)}}{2d(a + b)}, \quad (3.63)$$

et pour

$$\Gamma_2(a, b, d) = \frac{df_u + g_v + \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)}}{2d}.$$

Ce qui donne par similitude

$$\Gamma_2(a, b, d) = \frac{[d(b - a) - (a + b)^3] + \sqrt{[d(b - a) - (a + b)^3]^2 - 4d \det(J)}}{2d(a + b)} \quad (3.64)$$

$$\omega_1^2 = \left[ \frac{2\pi}{k_2} \right]^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma\Gamma_2(a, b, d)} < \omega^2 < \omega_2^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma\Gamma_1(a, b, d)} \quad (3.65)$$

### 3.3 Formation de motifs dans une Diffusion et diffusion croisée

Le but de cette partie est de discuter des rôles de la diffusion et de la diffusion croisée dans la modélisation de la formation de motifs.

Cette partie étudie la dynamique spatiale d'un modèle zebra sh avec des diffusions croisées. Des conditions suffisantes pour la bifurcation de Hopf et la bifurcation de Turing sont obtenues en analysant l'équation caractéristique associée. De plus, nous déduisons des équations d'amplitude basées sur une analyse à plusieurs échelles, et en outre, en analysant.

Les équations d'amplitude, cinq catégories de motifs de Turing sont obtenues.

Enfin, des résultats de simulation numérique sont présentés pour valider l'analyse théorique. De plus, certains exemples démontrent que les diffusions croisées ont un effet sur la sélection des motifs, ce qui explique très bien la diversité du motif zebra fish. La formation de motifs a longtemps fasciné l'humanité, mais la nature n'est pas prête à livrer tous ses secrets. Alors que les systèmes de réaction-diffusion suggérés par Turing peuvent apporter quelques réponses, il est difficile d'appliquer ces idées à la biologie. Bien que l'application de systèmes de réaction-diffusion soit souvent utilisée pour expliquer la génération de motifs de peau animale, à partir de nos explorations des équations, nous pouvons conclure que les motifs émergeant de ces systèmes ressemblent davantage aux motifs d'organismes microscopiques.

#### 3.3.1 Formation de motifs dans une Diffusion

L'utilisation de la diffusion pour modéliser la formation de motifs a une longue histoire. Par exemple, le concept bien connu de « motifs de Turing » remonte au célèbre article de Turing [10] en 1952. Cependant, les progrès mathématiques dans la compréhension de ces modèles n'ont été réalisés que relativement récemment. Il s'avère être un principe général que les propriétés de stabilité d'un état stationnaire sont étroitement liées à la « forme » de l'état stationnaire.

Dans cet partie, la formation de motifs pour un modèle de Schnakenberg est étudiée en

---

deux dimensions. Le modèle a été étudié lorsque la diffusion est non linéaire. Les conditions d'instabilité due à la diffusion sont appliquées à ce modèle et montré que ce modèle peut formuler des motifs[10].

Le système de réaction diffusion sans diffusion croisée est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_u \Delta u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_v \Delta v + g(u, v) \end{cases}$$

où  $f(u, v) = \gamma(a - u + u^2v)$  et  $g(u, v) = \gamma(b - u^2v)$ , l'état d'équilibre de ce système est  $E = \left(a + b, \frac{b}{(a + b)^2}\right)$ ,  $a + b > 0$  et  $b > 0$ .

Dans ce cas, la matrice de diffusion, sera diagonale et aura des valeurs parfaitement positives. Pour choisir le type de motifs, l'auteur a effectué des simulations numériques approfondies du modèle spatialement étendu dans des espaces à deux dimensions, et les résultats qualitatifs apparaissent comme suit :

Nous pouvons observer que les motifs de rayures stationnaires et les motifs  $H_0$  émerge, voir figure 3.1.

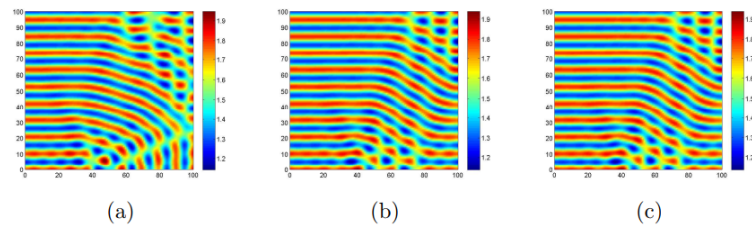


FIGURE 3.1 – Motifs sous forme des bandes et hexagones dans différents instants.

D'après la figure 3.1, la figure 3.2 et la figure 3.4 , il est évident que les motifs hexagonaux  $H_0$  et les motifs à rayures coexistent lorsque le système 2.2 n'a pas de diffusions croisées.

Cependant, il n'y a que des motifs à rayures ou des motifs hexagonaux lorsque les termes de diffusion croisée émergent et changent. En d'autres termes, les diffusions croisées peuvent modifier la sélection des motifs[11].

### 3.3.2 Formation de motifs dans une Diffusion croisée

Nous montrons que la diffusion croisée peut déstabiliser un équilibre uniforme qui est stable pour les systèmes cinétiques et d'autodiffusion ; d'autre part, la diffusion croisée peut également stabiliser un équilibre uniforme qui est stable pour le système cinétique mais instable pour le système de réaction d'autodiffusion.

Dans cette partie, nous considérons les systèmes réaction-diffusion avec diffusion croisée sur des domaines bornés ou non bornés, mais nous nous concentrons sur la stabilité linéarisée d'un équilibre constant[11].

Nous avons présenté une analyse détaillée de la stabilité linéaire pour les systèmes de réaction-diffusion avec diffusion croisée et validé nos résultats théoriques. Le système de réaction diffusion avec diffusion croisée est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_u \Delta u + d_{12} \Delta v + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_{21} \Delta u + d_v \Delta v + g(u, v) \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $f(u, v) = \gamma (a - u + u^2 v)$  et  $g(u, v) = \gamma (b - u^2 v)$ , l'état d'équilibre de ce système est

$$E = \left( a + b, \frac{b}{(a + b)^2} \right), \quad a + b > 0 \text{ et } b > 0$$

sur la figure 3.2 , qui montre que les motifs hexagonaux  $H_\pi$  prévalent sur l'ensemble du domaine, ce qui correspond à la figure 3.3 , qui montre poisson zèbre avec des motifs de taches dans la nature. La figure 3.4 montre des motifs de type taches et rayures, ce qui correspond à la figure 3.5, qui montre poisson zèbre avec des motifs de taches rayures dans la nature.

Hongyong Zhao [11], a étudié la formation de motifs pour un type de poisson, l'auteur a utilisé le système de Schnackenberg comme modèle mathématique pour cette étude avec des techniques et simulation numériques, quelques catégories de motifs de Turing sont obtenues, des taches, des bandes et des hexagonaux. En plus de l'effet de la diffusion croisée. Les figures suivantes montrent certains types de ces motifs.

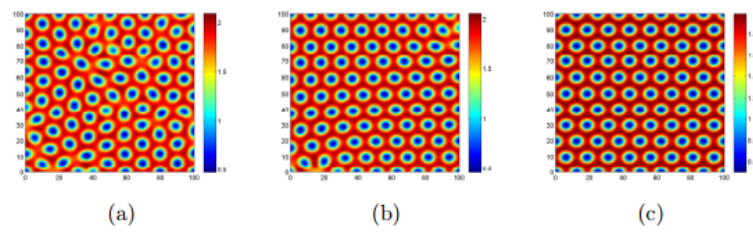


FIGURE 3.2 – Motifs sous forme des hexagones dans différents instants.



FIGURE 3.3 – Zebrafish with spot patterns in nature.

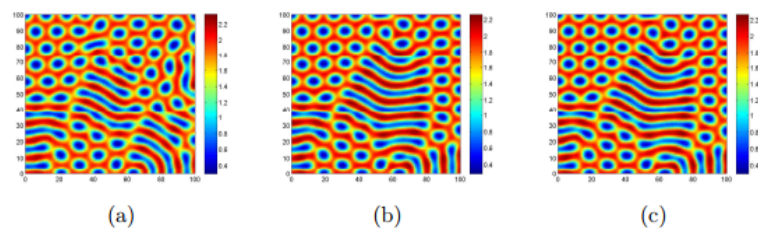


FIGURE 3.4 – Motifs sous forme des taches et des bandes dans différents instants.



FIGURE 3.5 – Zebrafish with spot-stripe patterns in nature.

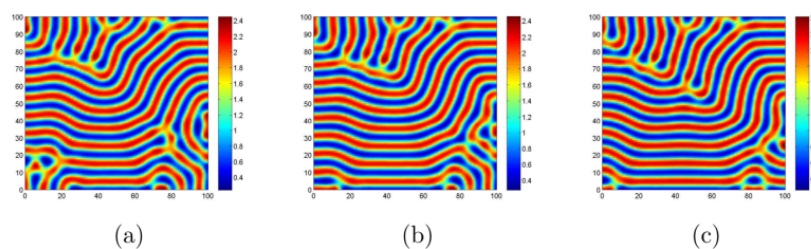


FIGURE 3.6 – Motifs sous forme des bandes dans différents instants.

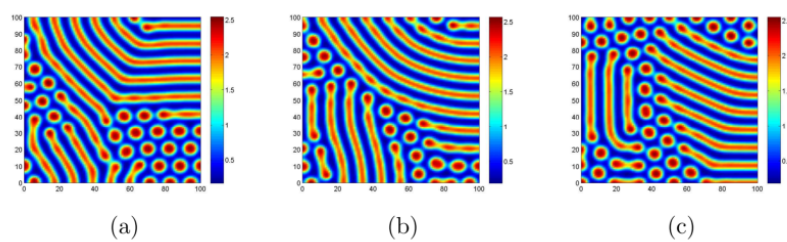


FIGURE 3.7 – Motifs sous forme des taches et des bandes dans différents instants.



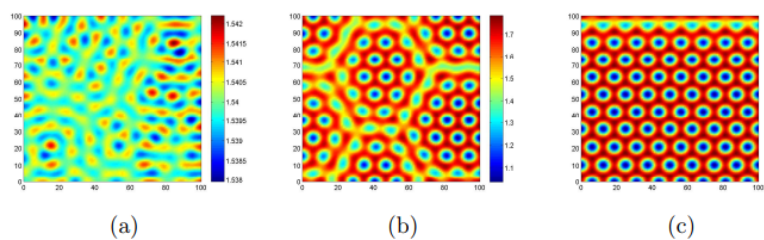
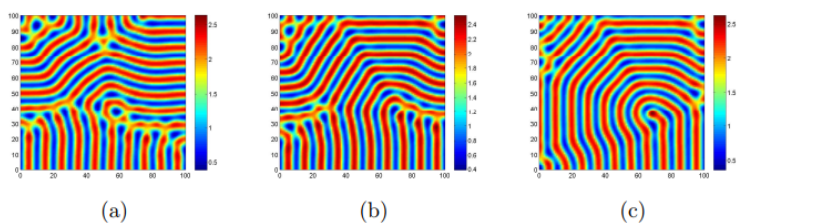
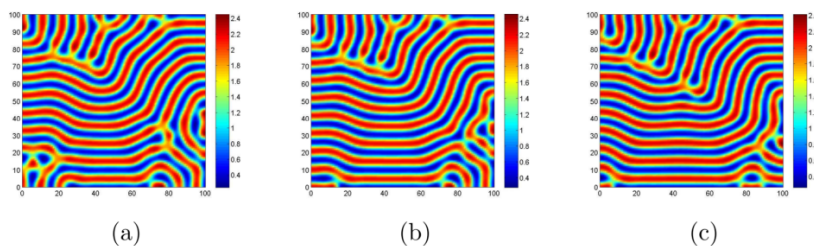
FIGURE 3.8 – Pictures of the time evolution of  $u$  at different instants.FIGURE 3.9 – Pictures of the time evolution of  $u$  at different instants.

FIGURE 3.10 – Motifs sous forme des bandes dans différents instants.

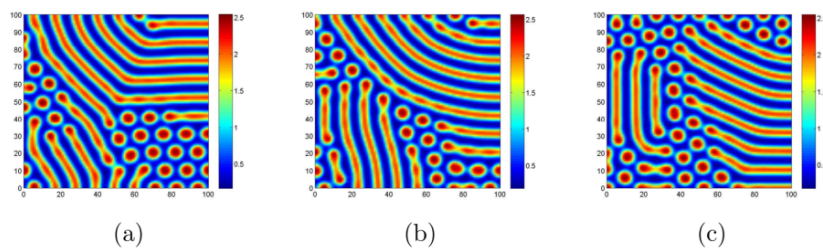


FIGURE 3.11 – Motifs sous forme des taches et des bandes dans différents instants.

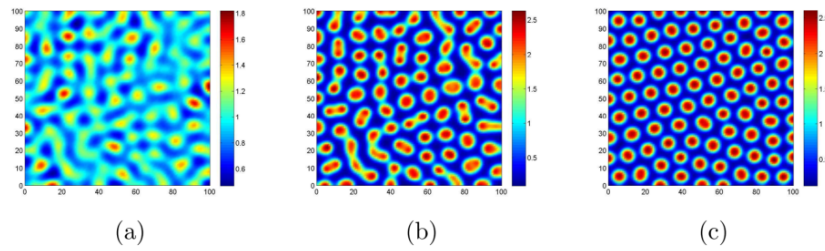


FIGURE 3.12 – Motifs sous forme des taches dans différents instants.

### 3.4 Le rôle de la diffusion croisée dans le modèle de Schnakenberg

Dans cette section, notre analyse se concentrera sur l'occurrence de la formation de motifs dans un domaine rectangulaire [24] Dans cet article, nous avons étudié le mécanisme de Turing induit par la diffusion croisée linéaire pour un système de réaction-diffusion de Schnakenberg à deux variables. Nous avons déterminé l'espace des paramètres distinguant, à chaque fois, la région supercritique de la sous-critique.

En particulier, nous avons trouvé que la région sous-critique augmente lorsque  $d_v$  (le terme de diffusion croisée pour l'activateur) augmente, tandis qu'elle diminue lorsque  $d_u$  (le terme de diffusion croisée pour l'inhibiteur) augmente[24].

En effectuant une analyse faiblement non linéaire, nous avons prédit l'amplitude et la forme du motif. Quelques types de motifs obtenus sont représentés sur les figures comme suit :

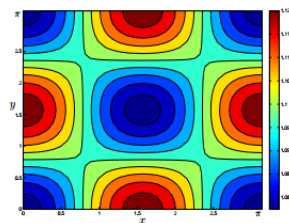


Figure 8 : Motif de carrés.

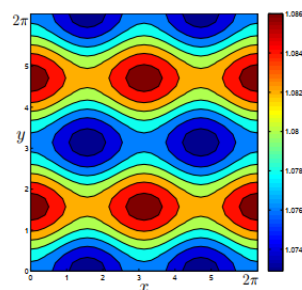


Figure 13 : Motif de modes mixtes.

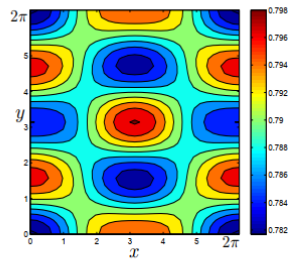


Figure 14 : Motif de super-carrés.

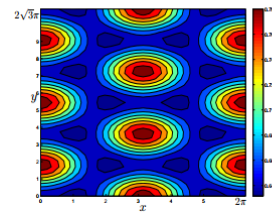


Figure 15 : Motif hexagonal.

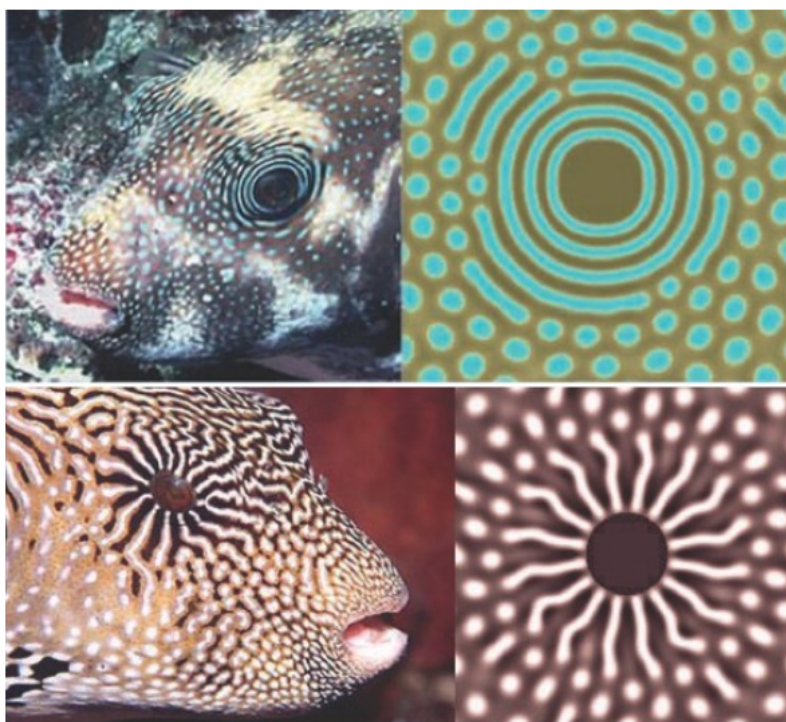
### 3.5 Motifs dans la nature



guépard



Serpents



Motifs de Turing chez les poissons

---

# Conclusion

---

Le but de cette mémoire est d'étudier l'effet de la diffusion croisée sur la formation de motifs, et de comparer cet effet avec l'effet de la diffusion normale sur cette formation. Nous avons utilisé le mécanisme de Turing pour la formation de motifs, le modèle mathématique utilisé dans l'étude est le modèle de Schnakenberg. Pour montrer la formation de certains types de motifs, le poisson Zèbre a été choisi pour cette étude. Grâce à l'étude, de nombreux types de motifs ont été obtenus par le mécanisme de Turing, motifs de type taches, motifs en forme de rayures, motifs contenant des taches et rayures, et aussi motifs de types hexagonaux. Pour obtenir ces types de motifs, soit prenez la matrice de diffusion comme une matrice diagonale, et on change à chaque fois les valeurs de ses éléments, la parallèle avec l'évolution des valeurs de paramètre  $b$ , soit prenez la matrice de la diffusion comme une matrice de diffusion croisée, et de faire les mêmes étapes précédentes ce que nous avons fait avec la matrice diagonale. Comme perspective, l'effet de la diffusion croisée sur la formation de motifs, peut être étudié à l'aide d'autres modèles mathématiques, comme le modèle Gray-Scott ou le modèle Brusselator, ....etc.

---

# Bibliographie

---

- [1] G. ROLLAND, *Global existence and fast-reaction limit in reaction-diffusion systems with cross effects* *General Mathematics [math.GM]*. École normale supérieure de Cachan ENS Cachan, 2012.
- [2] P.QUITTNER AND P.SOUPLET, *Superlinear Parabolic Problems Blow-up, Global Existence and Steady States*, Birkhäuser Basel, 2007 .
- [3] J.D. MURRAY, *Mathematical Biology I : Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, 2002.
- [4] J.D. MURRAY, *Mathematical Biology II : Spatial Models and Biomedical Applications*, Third Edition, Springer, 2002 .
- [5] M.ZAIDI, *thèse de doctorat en sciences mathématiques appliquées,étude des solutions globales de certains systèmes de réactions-diffusion par des méthodes fonctionnelles* ,université larbi tebessi- tebessa , 2021.
- [6] M. PIERRE AND D. SCHMITT, *Blowup in reaction-diffusion systems with dissipation of mass*, SIAM Rev, 42 (2000), pp. 93-106 (electronic).
- [7] M. PIERRE, *Global existence in reaction-diffusion systems with control of mass : a survey*, Milan J. Math, 78 (2010), pp. 417-455.
- [8] F. ROTHE, *Uniform bounds from bounded-Lp-functionals in reaction-diffusion equations*, J. Differential Equations, 45 (1982), pp. 207-233.
- [9] J. MORGAN AND S. WAGGONER, *Global existence for a class of quasi linear reaction diffusion systems*, Commun. Appl. Anal, 8 (2004), pp. 153-166.
- [10] *Théorie sur l'apparition de structures de Turing pour les biologistes ou éclaircissements sur deux intuitions ingénieuses*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 14 aout 1952 , Série B. et perspective

- 
- [11] H. ZHAO, Q. ZHANG AND L. ZHU, *The spatial Dynamics of a zebrafish model with crossdiffusions*, Mathematical Biosciences and Engineering, Volume 14 , Number 4, August 2017 pp 1035-1054.
- [12] S. ABDELMALEK, S. KOUACHI, *Proof of existence of global solutions for  $m$ -component reaction-diffusion systems with mixed boundary conditions via the Lyapunov functional method*, J. Phys., A 40 (2007) 12335-12350.
- [13] S. KOUACHI, *Existence of global solutions to reaction-diffusion systems with non-homogeneous boundary conditions via a Lyapunov functional*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2002(2002), No. 88, pp. 1 – 13.
- [14] S. KOUACHI, *Existence of global solutions to reaction-diffusion systems via a Lyapunov functional*, Electron. J. Differential Equations, 2001, No. 68, 10pp.
- [15] S. KOUACHI, *Global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a full matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ, 2002, No. 2, 10 pp.
- [16] C. KUTTLER, *Reaction diffusion equation with applications*, Sommersemester, 2011 .
- [17] D. HENRY, *Geometric Theory of Semi-Linear Parabolic Equations*, in : Lecture Notes in Mathematics, vol. 840, Springer-Verlag, New-York, 1984 .
- [18] J. A. SMOLLER, *Shock waves and reaction-diffusion equations. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 258. Springer-Verlag, New York, 1983 .
- [19] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J, 1964.
- [20] A. GIERER AND H. MEINHARDT, *A theory of biological pattern formation*, Kybernetik, 12 (1972), 30 – 39.
- [21] J. JOST, *Partial Differential Equations. Graduate Texts in Mathematics*, 214. SpringerVerlag, New York, 2013.
- [22] T. WITELSKI AND M. BOWEN, *Methods of Mathematical Modelling, Continuous Systems and Differential Equations*, Springer International Publishing, 2015 .
-

- 
- [23] S. L. HOLLIS, R. H. MARTIN, JR., AND M. PIERRE, *Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal., 18 (1987), pp. 744-761.
- [24] G. GAMBINO, M.C. LOMBARDO, S. LUPO, M. SAMMARTINO, *Super-critical and subcritical bifurcations in a reaction-diffusion*, Ricerche di Matematica journal, 2016, pp.449-467.
- [25] B. DACOROGNA, *Analyse avancée pour mathématiciens*.
-