MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR KHENCHELA
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Département de Mathématiques et Informatiques

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques Appliquées

Existence et unicité des solutions des équations intégro-différentielles fractionnaire avec conditions multipoints

……………………………………………

Réalisé par : ***Mordjane Souad***

Membres de jury :

Dirigé par : ***M.elle.D.Chergui***

NOM Prénom ***M. J .Bragdi***
NOM Prénom ***Mm.A.Derdoukh***

Présenté le 24/6/2018

Dedicaces

Je dédie ce mémoire

À mes chers parents

À mon cher Mari

À mes soeurs et à mon frère.

À toute ma famille. À mes amies.

À tous les membres des enseignants Mathématiques et informatique.

Remerciement

Je remercie Allah tout-puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire du mastère.

Je tiens à remercier profondément mon encadreur : l'enseignante **Chergui Jamila** pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements, et ses précieux conseils.

J'exprime ma gratitude envers les enseignants **Mr.J.Bragdi** et **Mm.A.Derdoukh** de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider les jurys.

Je tiens à remercier **Mr Lannani Abderrahim** Ensignant dans le département de la Génie industrielle qui m'aidait pondant mon travail.

Je tiens à remercier, tous ceux qui m'ont enseigné durant toutes mes études et en particulier mes enseignants à l'université de Abes Laghrour

Enfin, je tiens aussi à remercier tout ce qui m'a aidé de prés ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Notations **4**

Introduction générale **4**

Table des figures **7**

1 Préliminaire **10**

1.1 Outils de base 11

1.1.1 Espaces de fonctions 11

1.2 Fonctions Utiles 11

1.2.1 La fonction Gamma 11

1.2.2 La fonction Bêta 12

1.3 Intégrale fractionnaire 13

1.4 Dérivées fractionnaire 14

1.4.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville 15

1.4.2 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo 16

1.4.3 Transformée de Laplace des dérivées d'ordre fractionnaire 18

1.4.4 Equation différentielles d'ordre fractionnaire (EDF) 19

1.4.5 Equation intégro-différentielles d'ordre fractionnaire (EIDF) 19

1.5 Quelques résultats sur la théorie du point fixe 19

1.5.1 Théorème du point fixe de Banach 19

1.5.2 Théorème de point fixe de Krassnoseleskii 21

1.5.3 Théorème de l'Alternative de type Leray-Schauder 21

2 Etude de l'existence et l'unicité **22**

2.1 Présentation du problème 23

2.2 Résultat d'existence et d'unicité de la solution 25

2.2.1 D'après le théorème du point fixe de Banach 26

2.2.2 D'après le théorème du point fixe de Krasnosselskii 30

2.2.3 D'après le théorème de l'Alternative de type Leray-Schauder. 35

2.3 Application analytique 39

3 Applications : Synthèse des filtres fractionnaires analogiques 41

3.1 Définitions 42

3.1.1 Signale 42

3.1.2 Bruit 42

3.1.3 Systéme 42

3.1.4 filtre électrique 42

3.2 filtres analogiques 43

3.2.1 caractéristiques des filtres 43

3.2.2 Les différentes types des filtres 44

3.3 filtres fractionnaire 45

3.4 Contribution à la conception des filtres fractionnaires analogiques 45

3.4.1 Modélisation 45

3.4.2 l'Approximation par la méthode de cheref 47

3.4.3 Répence fréquentielle(Diagramme de Bode) 48

Conclusion 49

Bibliographie 50

Notations

- $C([a,b],\mathbb{R})$: l'espace des fonctions continues de [a,b] dans $\mathbb{R}$.
- $C^k[a,b]$: espace des fonctions k-fois contin$\widehat{u}$ment différentiables dans [a,b].
- D^α : la dérivée au sens de Riemanne-Liouville.
- ${}^cD^\alpha$: la dérivée au sens de Caputo.
- I^α : l'intégrale au sens de Riemanne-Liouville.
- $D(T)$: domaine de l'opérateur T.
- $R(T)$: l'ensemble d'arrivé de l'opérateur T.
- $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt.$
- $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx, \quad \alpha,\beta > 0.$
- $G(P) = \frac{V_c(P)}{E(P)}$, la fonction du transfért.
- $F(P)$:La transformée de Laplace

Abréviations

- EDF : equation différentielle fractionnaire.
- EDIF : equation différentielle integro-fractionnaire.
- FPP : Fractional Power Pole.
- ZPF : zéro à puissance fractionnaire.

Table des figures

1.1 la fonction gamma 12
1.2 la fonction beta 12

3.1 un model de bruit 42
3.2 représentation d'un filtre électrique 42
3.3 la représentation du gabarit d'un filtre pass bas 43
3.4 les différentes types des filtres 44
3.5 la représentation d'un filtre pass bas 45
3.6 la représentation d'un filtre pass haut 45
3.7 représentation d'un circuit 46
3.8 Diagramme de bode de la fonction du transfert 48

Introduction générale

Le calcul fractionnaire confiné historiquement à quelques correspondances datantes de 1695 entre les précurseurs de l'époque, le marquis de L'hôpital (1661-1704) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), sur la dérivation fractionnaire s'est depuis ces trois dernières décennies, énormément développe et pris beaucoup d'importance dans différents domaines de la recherche scientifique. Une des raisons principales réside dans ses applications dans de nombreuses disciplines scientifiques. Le calcul fractionnaire de par ses outils reste un moyen très adapté pour la résolution des systèmes différentiels. Ceux-ci traduisent en général des modèles mathématiques ou physiques de nombreux phénomènes naturels qui nous entourent. Les équations intégro-différentielles et les systèmes différentiels fractionnaires se sont révélés tout récemment comme étant très utiles dans le domaine de la physique, de l'ingénierie, la diffusion,...etc. Beaucoup de contributions ont été apportées ces dernières décennies tant à la théorie abstraite qu'aux applications des différentielles fractionnaire. Tous les travaux portent sur l'etude de l'existence et de l'unicité des solutions de ces équations et il a été prouvé dans de nombreux cas que les modèles d'ordre fractionnaires fournissent des résultats plus appropriés et plus pratique que les modèles classiques d'ordre entiers.

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour d'équations intégro-différentielles fractionnaires séquentielles avec des conditions multi points données par :

$$\begin{cases} ({}^cD^q + k{}^cD^{q-1})x(t) = f(t, x(t), {}^c D^\beta x(t), I^\gamma x(t)), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \quad x^{'}(0) = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i x(\zeta_i) = \lambda \int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} x(s)ds, \end{cases} \tag{1}$$

où ${}^cD^q$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α et $f : [0;1] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonctions continues donnée, $2 < q \leq 3, 0 < \beta, \gamma < 1, k > 0$ et $\lambda, a_i, i = 1 \ldots, m$ sont des constantes réels avec $\delta \geq 1, 0 < \eta < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m < 1$.

En 2013 Bashir Ahmed et Juan J.Nieto ont examiné l'existence des solutions d'un problème aux limites fractionnaires séquentielles avec conditions aux limites données par :

$$\begin{cases} ({}^cD^q + k\,{}^cD^{q-1})x(t) = pf(t, x(t) + qI^\beta g(t, x(t)), \quad t \in]0, 1[, \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions d'un problèmes aux limites intégro-différentielles par l'application de certains théorèmes du point fixe telle que : celui de **Banach**, **Krasnoselskii** et **l'Alternative de type Leray-Schauder** et par la suite en a fait une application réelle et on va voir le rôle important dû calcule fractionnaire dans le domaine d'électricité exactement dans le filtrage.

Ce mémoire est réparti en trois chapitres :

⧫ Dans le 1^{ere} chapitre nous présentons un préliminaire concernant les outils de base du calcul fractionnaire.

⧫ Dans le 2^{eme} chapitre nous étudions l'existence et l'unicité des solutions du problème intégro-différentielles fractionnaire séquentielles, et on a fait un exemple sur ce probléme.

⧫ Dans le 3^{eme} chapitre on a fait une Applications : Synthèse des filtres fractionnaire analogiques.

Chapitre 1

Préliminaire

Ce chapitre est consacré aux définitions élémentaires et notions de bases relatives au calcul fractionnaire tel que les opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier, lemme et théorèmes qui seront utilisés à travers les chapitres qui suivent.

- Outils de base.
  - Espaces de fonctions (Métrique, Complet, Banach).
- Fonctions spéciales concernant la dérivation fractionnaire.
  - La fonction Gamma.
  - La fonction Bêta.
- Intégrale fractionnaire.
- Dérivées fractionnaire.
  - Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.
  - Dérivées fractionnaire au sens de Caputo.
  - La Transformé de Laplace de la dérivée au sens de Riemanne-Liouville.
  - La Transformé de Laplace de la dérivée au sens de Caputo.
- EDF et EIDF.
- Quelques résultats sur la théorie du point fixe.
  - Théorème du point fixe de Banach.
  - Théorème du point fixe de Krasnoselskii
  - Théorème de l'Alternative de type Leray-Schauder.

1.1 Outils de base

1.1.1 Espaces de fonctions

Définition 1.1 ***(Espace Métrique)***
Soit E un espace vectoriel sur un corps ($\mathbb{K}$ ou $\mathbb{C}$) et d une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$, on dit que d est une distance, si d vérifie les 3 propriétes suivante :

$\forall (x,y) \in E^2 \qquad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
$\forall (x,y) \in E^2 \qquad d(x,y) = d(y,x).$
$\forall (x,y) \in E^2 \qquad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$
Le couple (E,d) est appelé espace ***Métrique***.

Définition 1.2 ***(Une suite de Cauchy)***
Soit (E,d) un espace métrique et soit $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite des éléments dans E, on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de ***cauchy*** *ssi :*

$$\forall \epsilon > 0; \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad tq : p,q \in \mathbb{N}\ p > q > N_0; \quad \Longrightarrow d(x_p, x_q) \leq \epsilon.$$

Définition 1.3 ***(Espace Complet)***
Un espace métrique est dit ***Complet*** *si touts suite de Cauchy est convergente dans E.*

Définition 1.4 ***Espace de Banach***
On appelle espace de Banach toute espace vectoriel normé sur un sous corps ($\mathbb{K}$ ou $\mathbb{C}$), complet pour la distance issue de sa norme.

1.2 Fonctions Utiles

Dans cette partie nous présontons les fonctions utilisés qui jouent un grande rôle dans la théorie fractionnaire, sont les fonctions ***Gamma***, ***Bêta***.

1.2.1 La fonction Gamma

Présenter la fonction qui est très utilisée et qui permet en générale de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma qui intervient dans un grand nombre de formules mathématiques, en particulier dans le calcul de beaucoup de constantes dans la théorie des EDP.

Définition 1.5 *Pour tout nombre complexe z telle que $Re(z) > 0$, on définit la fonction suivante appelée Gamma et noté par la lettre grecque Γ.*

$$\begin{array}{llll} \Gamma : & \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \end{array}$$

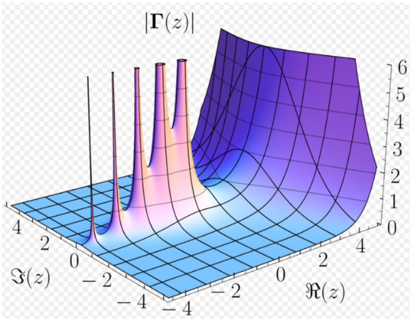


FIGURE 1.1 – la fonction gamma

Une intégration par partie de cette formule nous donne :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En particulier $\Gamma(1) = 1$ *et on déduit que :*

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

C'est à dire Γ *est le prolongement de la fonction factoriel à l'ensemble des nombres complexe.*

La fonction Γ *sur* $\mathbb{R}^*$ *est caractérisées par :*

$$\Gamma(1) = 1$$

et pour $x > 0$, *on a :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

1.2.2 La fonction Bêta

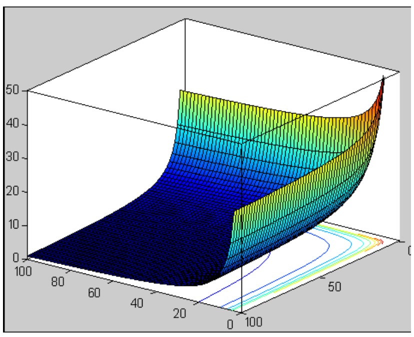


FIGURE 1.2 – la fonction beta

Définition 1.6 *La fonction $B(p,q)$ est la fonction Bêta (ou intégrale eulerienne de première espèce), définie de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1}x^{q-1}dx, \qquad p,q > 0.$$

On a une égalité exprimant le lien entre l'intégrale eulérienne de première et seconde espèce :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad Re(p) > 0, \quad Re(q) > 0.$$

1.3 Intégrale fractionnaire

*Nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer la définition de l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Louiville**.*

Définition 1.7 *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,t]$. On considère l'intégrale*

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

$$I^2 f(t) = \int_0^t ds \int_0^s f(r)dr.$$

On permutons l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^2 f(t) = \int_0^t (t-s)f(s)ds.$$

Plus généralement le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I^n f(t) &= \int_0^t dt \int_0^{t_1} dt_1 \int_0^{t_2} dt_2 \ldots\ldots\ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{(n-1)} f(s)ds. \end{aligned}$$

Pour tout entier n.

*Cette formule est appelée formule de **Cauchy** et depuis la généralisation du factoriel par la fonction **Gamma** : $(n-1)! = \Gamma(n)$. **Riemann** rendu compte que le seconde membre de $I^{(n)}f(t)$ pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit.*

Définition 1.8 *Pour une fonction $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** d'ordre $\alpha > 0$ est donné par :*

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds.$$

Exemple 1.1 *Soit $f(t) = t^c$ avec $c > -1$. En effet :*

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^c ds.$$

En utilisant le changement de variable et la définition de la fonction ***Bêta*** *on obtient :*

$$s = tx \qquad et \qquad 0 \leq x \leq 1; \qquad donc \qquad ds = tdx. \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
I^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [t - tx]^{\alpha-1} x^c t^{c+1} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [t(1-x)]^{\alpha-1} x^c t^{c+1} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} t^{c+1} (1-x)^{\alpha-1} x^c dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha+c} (1-x)^{\alpha-1} x^c dx \\
&= \frac{t^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^c dx \\
&= \frac{t^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha)} B(c+1, \alpha),
\end{aligned}$$

où B est la la fonction définit par :

$$B(r_1, r_2) = \int_0^1 t^{r_1-1}(1-t)^{r_2-1} dt \qquad avec \qquad (r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{*+})$$

et comme

$$B(r_1, r_2) = \frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}{\Gamma(r_1 + r_2)}.$$

Alors il résulte que :

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(c+1) t^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha + c + 1)}.$$

1.4 Dérivées fractionnaire

La définition de la dérivation fractionnaire a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires. Il y'a beaucoup d'approche pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les plus fréquentent dans les applications.

1.4.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.9 *Soient* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \ \alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$, *dérivées fractionnaires au sens de Riemanne-Liouville d'ordre* $\alpha > 0$ *est définie par :*

$$\begin{aligned} D_0^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \\ &= D^n (I_0^{n-\alpha} f(t)). \end{aligned}$$

Propriété 1.1 *1. Si* $\alpha > \beta > 0$, *alors pour* $f \in L^1[a, b]$, *l'égalité*

$$D_0^{\beta}(I_0^{\alpha} f)(x) = I_0^{\alpha-\beta} f(x), \tag{1.2}$$

est presque par tout sur [a,b].

2. Pour $\alpha > 0$, *on a :*

$$D_0^{\alpha} f(x) = I_0^{-\alpha} f(x). \tag{1.3}$$

Remarque 1.1 *Pour* $\alpha = 0$, *on a :*

$$D^0 f(x) = D I_0^1 f(x) = I f(x).$$

Pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$D_0^m f(x) = D^{m+1} I_0^{m+1-m} f(x) = D^{m+1} I_0^1 f(x) = D^m f(x).$$

Ainsi pour $\alpha \in \mathbb{N}$, *la dérivée fractionnaire de* ***Riemann-Liouville*** *coïncide avec la dérivée usuelle.*

Exemple 1.2 - ***La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville :***

En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$$D^{\alpha} c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.$$

- ***La dérivée de*** $f(t) = (t-a)^{\beta}$ ***au sens de Riemann-Liouville :***

Soit α *non entier et* $0 \leq n-1 < \alpha < n$ *et* $\beta > -1$, *alors on a :*

$$D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta} d\tau.$$

En faisant le changement de variable : $\tau = a + s(t-a)$, *on aura :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}(t-a)^{n+\beta-\alpha}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta}ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)B(n-\alpha,\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-s)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(t-s)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Lemme 1.1 *Pour* $\alpha > 0$, *la solution générale de l'équation homogène*

$$D_0^{\alpha}u(t) = 0,$$

dans $C[0,T] \cap L[0,T]$ *est :*

$$u(t) = c_0 t^{\alpha-n} + c_1 t^{\alpha-n+1} + \cdots + c_{n-1}t^{\alpha-1},$$

où c_i, $i = 1,2,\cdots,n-1$, *sont des constantes arbitraires. Nous avons toujours :*

$$D_0^{\alpha}I_0^{\alpha}u(t) = u(t)$$

et

$$I_0^{\alpha}\left(D_0^{\alpha}u(t)\right) = u(t) + c_0 t^{\alpha-n} + c_1 t^{\alpha-n+1} + \cdots + c_{n-1}t^{\alpha-1}.$$

1.4.2 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.10 *Soient* $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha]+1$, *dérivée fractionnaire au sens de **Caputo** à droite de 0 d'ordre* $\alpha > 0$ *est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds \\ &= I_0^{n-\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right). \end{aligned}$$

Propriété 1.2 *1. **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :***
Si f *est une fonction continue et* $\alpha > 0, \beta > 0$ *on a :*

$${}^{c}D_0^{\beta}[I_0^{\alpha}f(x)] = I_0^{\alpha-\beta}f(x), \tag{1.4}$$

donc l'opérateur de dérivation de ***Caputo*** *est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.*
2. ***La dérivée de*** $f(t) = t$ ***au sens de Caputo :***

$$^cD_0^\alpha t = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \tag{1.5}$$

3. ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo :***
La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.

$$^cD_0^\alpha c = 0. \tag{1.6}$$

Exemple 1.3 ***La dérivée de*** $f(t) = (t-a)^\beta$ ***au sens de Caputo***
Soit n *un entier et* $0 \leq n-1 < \alpha < n$*, alors on a :*

$$f^n(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(\tau-a)^{\beta-n},$$

d'où

$$^cD_0^\alpha (t-a)^\beta \quad = \quad \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau,$$

en effectuant le changement de varriable : $\tau = a + s(t-a)$*, on obtient :*

$$\begin{aligned} ^cD_0^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Lemme 1.2 *Supposons que* $u \in C[0,1] \cap L^1[0,1]$*, avec* $u^{(n)} \in C[0,1] \cap L^1[0,1]$ *alors :*

$$I_0^\alpha \left(^cD_0^\alpha u(t)\right) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1}t^{n-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$*,* $\quad i = 1, 2, 3, \cdots, n-1$ *et* $n = [\alpha] + 1$*.*

Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemanne-Liouville

L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.
Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est $\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$.
Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville), c'est-à-dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on intègre d'ordre fractionnaire $(m-\alpha)$.

1.4.3 Transformée de Laplace des dérivées d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivées.

La Transformée de Laplace de la dérivée de Riemanne -Liouville

$$L\{D^{\alpha}f(t)\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k}[D^{\alpha-k-1}f(t)]_{t=0}$$

avec $n-1 < \alpha < n$. Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemanne-Liouville est bien connue. Mais son applicabilité on pratique et limitée a cause de l'absence de l'interprétation physique des valeurs limite es dérivées d'ordre fractionnaire pour $t = 0$.

La Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

$$L\{{}^{c}D^{\alpha}f(t)\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}f^{k}(0)$$

avec $n-1 < \alpha < n$

1.4.4 Equation différentielles d'ordre fractionnaire (EDF)

Définition 1.11 *Soient $\alpha > 0$, et $\alpha \notin \mathbb{N}$, telle que $n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Alors :*

$$D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t))$$

est appelée l'equation différentielles d'ordre fractionnaire.

1.4.5 Equation intégro-différentielles d'ordre fractionnaire (EIDF)

Soit $\alpha > 0$, et $0 < t < 1$:

$$D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), \int_0^t K(s, u(s))ds),$$

où $D^{\alpha}u(t)$ est appelée équation différentielle d'ordre fractionnaire et f une fonction non-linére continue.

1.5 Quelques résultats sur la théorie du point fixe

Dans cette partie on va étudier quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connue entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes, on verra ensuite le théorème de Krasnosselskii enfin nous abordons le théorème du point fixe de L'Alternative de Leray-Schauder.

Définition 1.12 ***"Point fixe"***
Soit X un espace de Banach et $T : D(t) \subset X \to R(t) \subset X$. T un opérateur non linéaire. Supposons que $M = D(t) \cap R(t)$ non vide, un point x^* est appelé point fixe de T si :

$$T(x^*) = x^*.$$

Définition 1.13 ***Application contractante***
On dit que l'opérateur T est un opérateur contractant (ou simplement une contraction) sur $Q \subset D(T)$, s'il existe $L \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall x, y \in Q : \|T(x) - T(y)\| \leq L \|x - y\|,$$

L : s'appelle rapport de contraction.

1.5.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existences des solutions pour les équations différentielles ou des équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

Théorème 1.5.1 ***"Théorème du point fixe de Banach (ou principe de l'application contractante)"***
Supposons que l'opérateur T applique une partie fermée bornée $Q \subset X$ (X est de Banach) dans lui-même i.e : $T(Q) \subset Q$ est une contraction de rapport L sur Q.
Alors, T admet dans Q un point fixe x^* et un seul.

Théorème d'Ascoli-Arzela

Définition 1.14 ***"L'ensemble Relativement Compact"***
Soit E un espace topologique et F un sous-ensemble de E, on dit que F est relativement compact si sa fermeture $\bar{F}$ (adhérence) est compacte.

Définition 1.15 ***"L'ensemble Uniformément Borné"***
Soit F un ensemble relativement compact $C(\bar{F})$ l'espace de Banach des fonctions continues $x(t), t \in \bar{F}$ donc on dit que M est uniformément borné si :

$$\exists c \geq 0; \quad \forall x \in M : \|x(t)\| \leq c, \qquad \text{telle que } t \in \bar{F},$$

ou encore

$$\|x\| \leq c, \qquad x \in M.$$

Ainsi donc, dir que les fonctions de M sont uniformément bornées signifie que M est borné dans $C(\bar{F})$.

Définition 1.16 ***L'ensemble des fonctions équicontinues***
On dit que les fonctions de M sont équicontinues si :

$$\forall x \in M \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall t_1, t_2 \in \bar{F} : \|t_1 - t_2\| < \delta \Longrightarrow \|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon, .$$

Théorème 1.5.2 ***Théorème d'Ascoli-Arzela***
Soit F un ensemble relativement compact dans un espace vectoriel normé E et soit $C(\bar{F})$ un espace de Banach, formé de fonctions continues $x(t), t \in F$, pour qu'un ensemble $M \subset C(\bar{F})$, soit compact il faut et il suffit que les fonctions de M soient :
(a) uniformément bornées,
(b) équicontinues.

1.5.2 Théorème de point fixe de Krassnoseleskii

Théorème 1.5.3 ***"Théorème de point fixe de Krasnosseleskii"***
Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé, borné et convexe. $U; V$ sont deux applications de D dans X telles que : U est une contraction (de constante k) et V est compacte et continue. $Ux + Vy \in D$
$\forall x; y \in D;$ *Alors il existe* $x \in D$ *tel que* $Ux + Vx = x$

1.5.3 Théorème de l'Alternative de type Leray-Schauder

Théorème 1.5.4 ***"Théorème de l'Alternative de type Leray-Schauder"***
Soient X un espace de Banach, C un ensemble convexe et fermé de X, U un ensemble ouvert de C et $0 \in U$. on suppose que $T : \bar{U} \to C$ est un opérateur continue et compacte. Alors : (a) T admet un point fixe dans $\bar{U}$, ou bien (b) il existe $x \in \partial U$ (borne de U) et $\lambda \in]0,1[$ avec $x = \lambda F(x)$.

Chapitre 2

Etude de l'existence et l'unicité

Dans ce chapitre on va étudier l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation intégro-différentielles fractionnaire séquentielles avec des conditions multi-points.

- Présentation du problème.
- Résultats d'existence.
  - D'après le théorème de Banach.
  - D'après le théorème de Krasnosselskii .
  - D'après l'Alternativele de Leray-Schauder.

2.1 Présentation du problème

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites pour des équations intégro-différentielles d'ordre fractionnaire.

$$\begin{cases} ({}^cD^q + k{}^cD^{q-1})x(t) = f(t, x(t), {}^cD^{\beta}x(t), I^{\gamma}x(t)), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \\ \sum_{i=1}^{m} a_i x(\zeta_i) = \lambda \int_0^{\eta} \frac{(\eta - s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} x(s)ds, \end{cases} \tag{2.1}$$

où ${}^cD^q$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α et $f : [0;1] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonctions continues donnée, $2 < q \leq 3, 0 < \beta, \gamma < 1, k > 0$ et $\lambda, a_i, i = 1 \ldots, m$ sont des constantes réels avec $\delta \geq 1, 0 < \eta < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m < 1$.

Pour ce problème on présentera trois (03) résultats d'existence, le premier est basé sur le théorème de point fixe de **Banach** et le second sur le théorème de point fixe de **Krassnoselskii** et le troisième **l'Alternative de type Leray-Schauder**.

Commençons par étudié d'abord le problème aux limites linéaire.

Lemme 2.1 *Pour tous $y(t) \in C([0,1], \mathbb{R})$, la fonction $x \in C^3([0,1], \mathbb{R})$ est la solution de l'équation différentiel fractionnaire séquentielle :*

$$({}^cD^q + k{}^cD^{q-1})x(t) = y(t)$$

sous les conditions (2,1) si et seulement si :

$$\begin{aligned} x(t) \quad = \quad & \frac{kt - 1 + e^{-kt}}{\Delta} \Big\{ \lambda \int_0^{\eta} \frac{(\eta - s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)} \Big(\int_0^{\tau} \frac{(\tau - \omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(\omega) d\omega \Big) d\tau \Big) ds \\ & - \sum_{i=1}^{m} a_i \int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i - s)} \Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(\tau) d\tau \Big) ds \Big\} \\ & + \int_0^t e^{-k(t-s)} \Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(\tau) d\tau \Big) ds, \end{aligned}$$

telle que :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} a_i (k\zeta_i - 1 + e^{-k\zeta_i}) - \frac{\lambda}{\Gamma(\delta)} \Big(\frac{k\eta^{\delta+1}}{\Gamma(\delta+1)} - \frac{\eta^{\delta}}{\delta} + \int_0^{\eta} (\eta - s)^{\delta-1} e^{-ks} ds \Big) \neq 0 \tag{2.2}$$

Preuve.D'après le lemme (2.1) on aura que la solution générale de ce problème est donnée par :

$$x(t) + k^c D^{-1} x(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} y(s) ds + C_0 + C_1 t + C_2 t^2. \tag{2.3}$$

Où C_0, C_1, C_2 sont des constantes, (2.3) peut être exprimé par :

$$x(t) = -k \int_0^t x(s) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} y(s) ds + C_0 + C_1 t + C_2 t^2. \tag{2.4}$$

Aprés la multiplication par e^{kt}, on peut écrire $(2,4)$ comme :

$$(x(t)e^{kt})' = e^{kt} \Big(\frac{1}{\Gamma(q-1)} \int_0^t (t-s)^{q-2} y(s) ds + C_1 + 2C_2 t \Big). \tag{2.5}$$

En intégrant $(2,5)$ de 0 a t et aprés la multiplication par e^{-kt}, nous obtenons

$$x(t) = b_0 e^{-kt} + \frac{b_1}{k}(1 - e^{-kt}) + \frac{b_2}{k^2}(kt - 1 + e^{-kt}) + \int_0^t e^{-k(t-s)} \Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(\tau) d\tau \Big) ds. \tag{2.6}$$

En utilisant les données $(x(0) = 0, x'(0) = 0)$ on trouve que $b_0 = 0$ et $b_1 = 0$, donc (2.6) prend la forme :

$$x(t) = \frac{b_2}{k^2}(kt - 1 + e^{-kt}) + \int_0^t e^{-k(t-s)} \Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(\tau) d\tau \Big) ds. \tag{2.7}$$

En utilisant la condition $\sum_{i=1}^{m} a_i x(\zeta_i) = \lambda \int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} x(s) ds$ dans $(2,7)$, nous obtenons la valeur de b_2 telle que :

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{k^2}{\Delta} \Big\{ \lambda \int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)} \Big(\int_0^\tau \frac{(\tau - \omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(\omega) d\omega \Big) d\tau \Big) ds \\ &\quad - \sum_{i=1}^{m} a_i \int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i - s)} \Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(\tau) d\tau \Big) ds \Big\}, \end{aligned}$$

où Δ est donné par $(2,2)$, on substitue la valeur de b_2 dans la formule $(2,7)$, on obtient la solution $x(t)$. Ce qui acheve notre preuve. ■

Maintenant, nous présentons quelques estimations dans nous avons besoin dans la suite.

Lemme 2.2 *Pour $y \in \mathbb{C}([0,1], \mathbb{R})$, avec $\|y\| = \sup_{t \in [0,1]} |y(t)|$, on a*

(i) $$\Big| \int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)} \int_0^\tau \frac{(\tau - \omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} y(\omega) d\omega \Big) d\tau \Big) ds \Big|$$
$$\leq \frac{\eta^{q+\delta-2}}{k^2 \Gamma(q) \Gamma(\delta)} (k\eta + e^{-k\eta} - 1) \|y\|$$

$$(ii) \quad \Big|\sum_{i=1}^{m} a_i \int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}y(\tau)d\tau\Big)ds\Big| \leq \sum_{i=1}^{m}|a_i|\zeta_i^{q-1}(1-e^{-k\zeta_i})\frac{\|y\|}{k\Gamma(q)}$$

$$(iii) \quad \Big|\int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}y(\tau)d\tau\Big)ds\Big| \leq \frac{1}{k\Gamma(q)}(1-e^{-k})\|y\|$$

Preuve. (i) évidemment

$$\int_0^{\tau} \frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}d\omega = \frac{\tau^{q-1}}{\Gamma(q)}$$

et

$$\int_0^s e^{-k(s-\tau)}\frac{\tau^{q-1}}{\Gamma(q)}d\tau \leq \frac{s^{q-1}}{\Gamma(q)}\int_0^s e^{-k(s-\tau)}d\tau = \frac{s^{q-1}}{k\Gamma(q)}(1-e^{-ks}),$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^{\eta} \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)}\Big(\int_0^{\tau}\frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}y(\omega)d\omega\Big)d\tau\Big)ds\Big| \\
&\leq \|y\|\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\frac{s^{q-1}}{k\Gamma(\delta)}\Big)(1-e^{-ks})ds \\
&\leq \|y\|\frac{\eta^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\frac{\eta^{q-1}}{k\Gamma(q)}\Big)\int_0^{\eta}(1-e^{-ks})ds \\
&\leq \frac{\eta^{q+\delta-2}}{k^2\Gamma(\delta)\Gamma(q)}(\eta k + e^{-k\eta}-1)\|y\|.
\end{aligned}$$

■

La preuve de (ii), (iii) est similaire. Ce qui achève notre démonstration.

2.2 Résultat d'existence et d'unicité de la solution

Cette section est consacrée aux principaux résultats concernant l'existence et l'unicité des solutions au problème $(2, 1)$. Tout d'abord, nous fixons notre terminologie.
Soit $X = \Big\{x : x \in \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}),^c D^{\beta}x \in \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})\Big\}$ c'est l'espace muni de la norme

$$\|x\|_X = \|x\| + \|^c D^{\beta}x\| = \max_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max_{t\in[0,1]}|^c D^{\beta}x(t)|.$$

$(X, \|.\|)$ est un espace de Banach .

En utilisant le lemme $(2, 1)$, nous introduisons un opérateur $T : X \to X$ comme suit :

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \frac{kt-1+e^{-kt}}{\Delta}\Big\{\lambda\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)} \\
&\times\Big(\int_0^\tau \frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}f(\omega,x(\omega),{}^cD^\beta x(\omega),I^\gamma x(\omega))d\omega\Big)d\tau\Big)ds \\
&-\sum_{i=1}^m a_i\int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}f(\tau,x(\tau),{}^cD^\beta x(\tau),I^\gamma x(\tau))d\tau\Big)ds\Big\} \\
&+\int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}f(\tau,x(\tau),{}^cD^\beta x(\tau),I^\gamma x(\tau))d\tau\Big)ds.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Ainsi chaque solution du problème aux limites $(2,1)$ est solution du problème (2.8) et vice versa. Donc on doit chercher le point fixe de l'opérateur T c'est-à-dire $x^* \in X$ vérifiant l'équation $Tx(t) = x(t)$ et ainsi ce point fixe x^* est solution du problème (2.1).

Alors pour faire des calcules façile, on a besoin de fixé ces valeur dans les symboles : (p, $\widetilde{p}$, Λ, Λ_1, L_1, Δ_1) telle que :

$$
P = \sup_{t\in[0,1]}\Big|\frac{(kt-1+e^{-kt})}{\Delta}\Big| = \frac{1}{|\Delta|}(e^{-k}+k-1), \tag{2.9}
$$

$$
\widetilde{P} = \sup_{t\in[0,1]}\Big|\frac{k(1-e^{-kt})}{\Delta}\Big| = \frac{1}{|\Delta|}k(1-e^{-k}), \tag{2.10}
$$

$$
\Lambda = P\Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)}(1-e^{-k}), \qquad \Lambda_1 = \widetilde{P}\Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)}(2-e^{-k}), \tag{2.11}
$$

$$
L_1 = 1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}, \tag{2.12}
$$

$$
\Delta_1 = |\lambda|\frac{\eta^{q+\delta-2}}{k^2\Gamma(q)\Gamma(\delta)}(\eta k + e^{-k\eta}-1) + \sum_{i=1}^m |a_i|\zeta_i^{q-1}(1-e^{-k\zeta_i})\frac{1}{k\Gamma(q)} \tag{2.13}
$$

et Δ donnée par $(2,2)$. Maintenant nous présentons le résultat d'unicité.

2.2.1 D'après le théorème du point fixe de Banach

Nous considérons l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites (2.1).

Théorème 2.2.1 *Soit $f : [0,1]\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue qui satisfait la condition suivante :*

$$
(H_1) \quad |f(t,x,y,z) - f(t,x_1,y_1,z_1)| \le L(\|x-x_1\| + \|y-y_1\| + \|z-z_1\|).
$$

Pour tout $t \in [0,1], x, y, z, x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{R}$ *(L est la constante de Lipschitz), donc le problème* $(2,1)$ *admet une solution unique si* $LL_1(\Lambda + \dfrac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)}) < 1$, *où* Λ, Λ_1, L_1 *sont donnée par* $(2,11),(2,12)$.

Preuve. On pose

$$r \geq \frac{M_0(\Lambda + \frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)})}{1 - LL_1(\Lambda + \frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)})},$$

où Λ, Λ_1, L_1 sont donnée dans $(2,11),(2,12)$ avec $M_0 = sup_{t\in[0,1]}|f(t,0,0,0)|$, alors nous montrons que $TB_r \subset B_r$ où $B_r = \{x \in X : \quad \|x\|_X \leq r\}$.

Pour $x \in B_r$, en utilisant (H_1), nous obtenons

$$\begin{aligned}
|f(t,x(t),^c D^\beta x(t), I^\gamma x(t)| &\leq |f(t,x(t),^c D^\beta x(t), I^\gamma x(t)) - f(t,0,0,0)| + |f(t,0,0,0)| \\
&\leq L(|x(t)| + |^c D^\beta x(t)| + |I^\gamma x(t)|) + M_0 \\
&\leq L(\|x\|_X + \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\|x\|) + M_0 \\
&\leq L\left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\right)\|x\|_X + M_0 \\
&\leq LL_1\|x\|_X + M_0 \\
&\leq LL_1 r + M_0.
\end{aligned}$$

Alors, pour $x \in X$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|\ \mathrm{T(x)(t)}| \ &\leq \sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{kt-1+e^{-kt}}{\Delta}\right|\Big\{|\lambda|\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)} \\
&\quad\times\Big(\int_0^\tau \frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\omega,x(\omega),^c D^\beta x(\omega), I^\gamma x(\omega))|d\omega)d\tau\Big)ds \\
&\quad+\sum_{i=1}^m |a_i|\int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\tau,x(\tau),^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))|d\tau\Big)ds\Big\} \\
&\quad+\int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\tau,x(\tau),^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))|d\tau\Big)ds \\
&\leq (LL_1 r + M_0)\Big\{P\Big[|\lambda|\frac{\eta^{q+\delta-2}}{k^2\Gamma(q)\Gamma(\delta)}(\eta k + e^{-k\eta} - 1) \\
&\quad+\sum_{i=1}^m |a_i|\zeta_i^{q-1}(1-e^{-k\zeta_i})\frac{1}{k\Gamma(q)}\Big] + \frac{1}{k\Gamma(q)}(1-e^{-k})\Big\} \\
&\leq (LL_1 r + M_0)\Lambda.
\end{aligned}$$

En prenant la norme pour $t \in [0,1]$, nous obtenons

$$\|Tx\| \leq (LL_1 r + M_0)\Lambda.$$

nous avons aussi

$$\begin{aligned}
|T'(x)(t)| \leq\ & \Big|\frac{k - ke^{-kt}}{\Delta}\Big|\Big\{|\lambda|\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)} \\
& \times\Big(\int_0^\tau \frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\omega, x(\omega), {}^c D^\beta x(\omega), I^\gamma x(\omega))|d\omega\Big)d\tau\Big)ds \\
& + \sum_{i=1}^m |a_i| \int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i - s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \\
& \times |f(\tau, x(\tau), {}^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))|d\tau\Big)ds\Big\} \\
& + k\int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\tau, x(\tau), {}^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))|d\tau\Big)ds \\
& + \int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(s, x(s), {}^c D^\beta x(s), I^\gamma x(s))|ds \\
\leq\ & (LL_1 r + M_0)\Big\{\widetilde{P}\Big[|\lambda|\frac{\eta^{q+\delta-2}}{k^2\Gamma(q)\Gamma(\delta)}(\eta k + e^{-k\eta} - 1) \\
& + \sum_{i=1}^m |a_i|\zeta_i^{q-1}(1 - e^{-k\zeta_i})\frac{1}{k\Gamma(q)}\Big] + \frac{1}{\Gamma(q)}(2 - e^{-k})\Big\} \\
\leq\ & (LL_1 r + M_0)\Lambda_1.
\end{aligned}$$

Par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo avec $0 < \beta < 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|{}^c D^\beta (Tx)(t)| \leq\ & \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}|T'(x)(s)|ds \\
\leq\ & (LL_1 r + M_0)\Lambda_1 \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}ds \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}(LL_1 r + M_0)\Lambda_1.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_X =\ & \|T(x)\| + \|{}^c D^\beta T(x)\| \\
\leq\ & (LL_1 r + M_0)\Lambda + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}(LL_1 r + M_0)\Lambda_1 \\
<\ & r.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Celà montre que l'opérateur T applique l'ensemble fermé, borné B_r dans lui-même.

Maintenant pour $x, y \in X$ et pour chaque t dans $[0,1]$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
|(Tx)(t)-(Ty)(t)| &\leq \sup_{t\in[0,1]}\Big|\frac{kt-1+e^{-kt}}{\Delta}\Big|\Big\{|\lambda|\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)}\\
&\quad\times\Big(\int_0^\tau \frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\Big|f(\omega,x(\omega),^c D^\beta x(\omega), I^\gamma x(\omega))\\
&\quad -f(\omega,y(\omega),^c D^\beta y(\omega), I^\gamma y(\omega))|d\omega\Big)d\tau\Big)ds\\
&\quad +\sum_{i=1}^m |a_i|\int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\\
&\quad \times\Big|f(\tau,x(\tau),^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau)) - f(\tau,y(\tau),^c D^\beta y(\tau), I^\gamma y(\tau)|d\tau\Big)ds\Big\}\\
&\quad +\int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\tau,x(\tau),^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))\\
&\quad -f(\tau,x(\tau),^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))|d\tau\Big)ds\\
&\leq L\Big\{P\Big[|\lambda|\frac{\eta^{q+\delta-2}}{k^2\Gamma(q)\Gamma(\delta)}(\eta k+e^{-k\eta}-1)+\sum_{i=1}^m |a_i|\zeta_i^{q-1}(1-e^{-k\zeta_i})\frac{1}{k\Gamma(q)}\Big]\\
&\quad +\frac{1}{k\Gamma(q)}(1-e^{-k})\Big\}\Big[\|x-y\|+\|^c D^\beta x-^c D^\beta y\|+\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\|x-y\|\Big]\\
&\leq L\Big\{P\Big[|\lambda|\frac{\eta^{q+\delta-2}}{k^2\Gamma(q)\Gamma(\delta)}(\eta k+e^{-k\eta}-1)+\sum_{i=1}^m |a_i|\zeta_i^{q-1}(1-e^{-k\zeta_i})\frac{1}{k\Gamma(q)}\Big]\\
&\quad +\frac{1}{k\Gamma(q)}(1-e^{-k})\Big\}\Big[\|x-y\|_X+\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\|x-y\|\Big]\\
&\leq L\Big\{P\Big[|\lambda|\frac{\eta^{q+\delta-2}}{k^2\Gamma(q)\Gamma(\delta)}(\eta k+e^{-k\eta}-1)+\sum_{i=1}^m |a_i|\zeta_i^{q-1}(1-e^{-k\zeta_i})\frac{1}{k\Gamma(q)}\Big]\\
&\quad +\frac{1}{k\Gamma(q)}(1-e^{-k})\Big\}\Big(1+\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\Big)\|x-y\|_X\\
&\leq LL_1\Lambda\|x-y\|_X,
\end{aligned}
$$

nous avons aussi

$$\|(Tx)'(t)-(Ty)'(t)\| \leq LL_1\Lambda_1\|x-y\|_X.$$

Ce qui implique que

$$
\begin{aligned}
|^c D^\beta T(x)(t) -^c D^\beta T(y)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}|T'(x)(t)-T'(y)(t)|ds\\
&\leq \frac{LL_1\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)}\|x-y\|_X.
\end{aligned}
$$

Finalemment, nous avons

$$\begin{aligned}\|T(x)-T(y)\|_X &= \|T(x)-T(y)\| + \|^cD^\beta T(x)(t) -^c D^\beta T(y)(t)\| \\ &\leq LL_1\Big(\Lambda + \frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)}\Big)\|x-y\|_X.\end{aligned}$$

Comme $LL_1\Big(\Lambda + \frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\delta)}\Big) \leq 1, T$ est une contraction.

D'après le principe de l'application contractante de Banach, le problème (2.1) admet une solution unique qui est ce point fixe de T. Ce qui achève la démonstration. ■

2.2.2 D'après le théorème du point fixe de Krasnosselskii

Notre second résultat d'existence est basé sur le théorème du point fixe de Krasnosselskii.

Théorème 2.2.2 *Supposons que* $T : [0,1]\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, *est une fonction continue qui satisfaisant* (H_1). *En plus de l'hypothèse suivante :*

$$(H_2) \quad |f(t,x_1,x_2,x_3)| \leq \mu(t), \forall (t,x_1,x_2,x_3) \in [0,1]\times\mathbb{R}^3, \ \textit{avec } \mu \in C([0,1],\mathbb{R}^+).$$

Alors le problème (2,1) admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,1]$ *si*

$$\Big(P + \frac{\widetilde{P}}{\Gamma(2-\beta)}\Big)\Delta_1 LL_1 < 1$$

. où P *est donnée par* $(2,9)$ *et* L_1, Δ_1 *sont définis dans* $(2,12),(2,13)$.

Preuve. *On note* $\sup_{t\in[0,1]}|\mu(t)| = \|\mu\|$, *soit l'ensemble fermé, borné et convexe* B_r *définit par* $B_r = \{x \in X : \quad \|x\|_X \leq r\}$, *on pose :*

$$r \quad \geq \quad \Big(\Lambda + \frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)}\Big)\|\mu\|. \tag{2.14}$$

où Λ, Λ_1 *sont données dans* $(2,11)$, *nous définissons les opérateurs* T_1, T_2 *sur* B_r *telle que :*

$$\begin{aligned}(T_1x)(t) &= \int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} f(\tau, x(\tau), ^cD^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))d\tau\Big)ds, \\ (T_2x)(t) &= \frac{kt-1+e^{-kt}}{\Delta}\Big\{\lambda\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)} \\ &\quad \times\Big(\int_0^\tau \frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} f(\omega, x(\omega), ^cD^\beta x(\omega), I^\gamma x(\omega))d\omega\Big)d\tau\Big)ds \\ &\quad -\sum_{i=1}^m a_i\int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \\ &\quad \times f(\tau, x(\tau), ^cD^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))d\tau\Big)ds\Big\}.\end{aligned}$$

Pour $x, y \in B_r$, *en utilisant la notation* (2.13), *nous avons*

$$\begin{aligned}
|T_1(x)(t)+T_2(y)(t)| &\leq \int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\tau,x(\tau),{}^cD^\beta x(\tau),I^\gamma x(\tau))|d\tau\Big)ds \\
&\quad + \sup_{t\in[0,1]}\Big|\frac{kt-1+e^{-kt}}{\Delta}\Big|\Big\{|\lambda|\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)} \\
&\quad \times\Big(\int_0^\tau \frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\omega,y(\omega),{}^cD^\beta y(\omega),I^\gamma y(\omega)\Big)|d\omega\Big)d\tau\Big)ds \\
&\quad +\sum_{i=1}^m |a_i|\int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\tau,y(\tau),{}^cD^\beta y(\tau),I^\gamma y(\tau))|d\tau\Big)ds\Big\} \\
&\leq \Big\{P\Delta_1+\frac{1}{k\Gamma(q)}(1-e^{-k})\Big\}\|\mu\| \\
&= \Lambda\|\mu\|.
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
|T_1'(x)(t)+T_2'(y)(t)| &\leq \Big|k\int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}f(\tau,x(\tau),{}^cD^\beta x(\tau),I^\gamma x(\tau))d\tau\Big)ds\Big| \\
&\quad +\Big|\int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}f(s,x(s),{}^cD^s x(s),I^\gamma x(s))\Big| \\
&\quad +\Big|\frac{k-ke^{-kt}}{\Delta}\Big\{\lambda\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)}\Big(\int_0^\tau \frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \\
&\quad \times f(\omega,y(\omega),{}^cD^\beta y(\omega),I^\gamma y(\omega))d\omega\Big)d\tau\Big)ds\Big| \\
&\quad +\Big|\sum_{i=1}^m a_i\int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}f(\tau,y(\tau),{}^cD^\beta y(\tau),I^\gamma y(\tau))d\tau\Big)ds\Big|\Big\} \\
&\leq \Big\{\widetilde{P}\Delta_1+\frac{1}{\Gamma(q)}(2-e^{-k})\Big\}\|\mu\| \\
&= \Lambda_1\|\mu\|,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
|{}^cD^\beta(T_1x(t)+T_2y(t))| &= |\int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}(T_1'x+T_2'y)ds| \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}|T_1'x+T_2'y|ds \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\Lambda_1\|\mu\|ds \\
&\leq \frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)}\|\mu\|.
\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\|T_1x+T_2y\|_X &= \|T_1x+T_2y\|+\|^cD^\beta(T_1x+T_2y)\|\\
&\leq \Big(\Lambda+\frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)}\Big)\|\mu\|\\
&< r.
\end{aligned}
$$

■

Anisi $T_1x+T_2y\in B_r$, nous prouvons que T_2 est contraction.

Soit $x,y\in B_r$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
|T_2(x)(t)-T_2(y)(t)| &\leq \sup_{t\in[0,1]}\Big|\frac{kt-1+e^{-kt}}{\Delta}\Big|\Big\{|\lambda|\int_0^\eta\frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)}\\
&\times\Big(\int_0^\tau\frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\omega,x(\omega),^cD^\beta x(\omega),I^\gamma x(\omega))\\
&-f(\omega,y(\omega),^cD^\beta y(\omega),I^\gamma y(\omega))|d\omega\Big)d\tau\Big)ds\\
&+\sum_{i=1}^m|a_i|\int_0^{\zeta_i}e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\tau,x(\tau),^cD^\beta x(\tau),I^\gamma x(\tau))\\
&-f(\tau,y(\tau),^cD^\beta y(\tau),I^\gamma y(\tau))|d\tau\Big)ds\Big\}\\
&\leq P\Delta_1LL_1\|x-y\|.
\end{aligned}
$$

Aussi

$$
\begin{aligned}
|T_2'(x)(t)-T_2'(y)(t)| &\leq \sup_{t\in[0,1]}\Big|\frac{k-ke^{-kt}}{\Delta}\Big|\Big\{\lambda\int_0^\eta\frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)}\\
&\times\Big(\int_0^\tau\frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\omega,x(\omega),^cD^\beta x(\omega),I^\gamma x(\omega))\\
&-f(\omega,y(\omega),^cD^\beta y(\omega),I^\gamma y(\omega)|d\omega\Big)d\tau\Big)ds\\
&+\sum_{i=1}^m|a_i|\int_0^{\zeta_i}e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\tau,x(\tau),^cD^\beta x(\tau),I^\gamma x(\tau))\\
&-f(\tau,y(\tau),^cD^\beta y(\tau),I^\gamma y(\tau))|d\tau\Big)ds\Big\}\\
&\leq \widetilde{P}\Delta_1LL_1\|x-y\|,
\end{aligned}
$$

ce qui implique que

$$\|^cD^\beta(T_2x-T_2y)\|\leq\int_0^t\frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}|T_2'x-T_2'y|ds\leq\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\widetilde{P}\Delta_1LL_1\|x-y\|.$$

Finalment, nous obtenons

$$\|T_2x - T_2y\|_X \leq \Big(P + \frac{\widetilde{P}}{\Gamma(2-\beta)}\Big)\Delta_1 L L_1 \|x-y\|.$$

Donc l'opérateur T_2 est une contraction.
Nous prouvons la continuité de T_1. Soit $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ et $x \in M$ telle que $x_n \longrightarrow x$ quand $n \longrightarrow \infty$, donc la continuité de f implique que $\lim_{n\longrightarrow\infty} f(t, x_n(t), ^cD^\beta x_n(t), I^\gamma x_n(t)) = f(t, x(t), ^cD^\beta x(t), I^\gamma x(t))$. Alors

$$\begin{aligned}
|T_1x_n(t) - T_1x(t)| &\leq \int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\tau, x_n(\tau), ^cD^\beta x_n(\tau), I^\gamma x_n(\tau)) \\
&\quad - f(\tau, x(\tau), ^cD^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))|d\tau ds \\
&\leq \frac{1}{k\Gamma(q)}(1-e^{-k})|f(\tau, x_n(\tau), ^cD^\beta x_n(\tau), I^\gamma x_n(\tau)) \\
&\quad - f(\tau, x(\tau), ^cD^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))|
\end{aligned}$$

nous avons aussi

$$\begin{aligned}
|T_1'x_n(t) - T_1'x(t)| &\leq k\int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\tau, x_n(\tau), ^cD^\beta x_n(\tau), I^\gamma x_n(\tau)) \\
&\quad - f(\tau, x(\tau), ^cD^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))|d\tau ds \\
&\quad + \int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(s, x_n(s), ^cD^\beta x_n(s), I^\gamma x_n(s)) \\
&\quad - f(s, x(s), ^cD^\beta x(s), I^\gamma x(s))|ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)}(1-e^{-k})|f(\tau, x_n(\tau), ^cD^\beta x_n(\tau), I^\gamma x_n(\tau)) \\
&\quad - f(\tau, x(\tau), ^cD^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))| + \frac{1}{\Gamma(q)}|f(s, x_n(s), ^cD^\beta x_n(s), I^\gamma x_n(s)) \\
&\quad - f(s, x(s), ^cD^\beta x(s), I^\gamma x(s))|,
\end{aligned}$$

par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo avec $0 < \beta < 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|^cD^\beta T_1x_n(t) - ^cD^\beta T_1x(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\frac{1}{\Gamma(q)}(2-e^{-k})|f(\tau, x_n(\tau), ^cD^\beta x_n(\tau), I^\gamma x_n(\tau)) \\
&\quad - f(\tau, x(\tau), ^cD^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))|ds.
\end{aligned}$$

par conséquence

$$\begin{aligned}
\|T_1x_n(t) - T_1x(t)\|_X &= \|T_1x_n(t) - T_1x(t)\| + \|^cD^\beta T_1x_n(t) - ^cD^\beta T_1x(t)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)}(1-e^{-k})|f(\tau, x_n(\tau), ^cD^\beta x_n(\tau), I^\gamma x_n(\tau))
\end{aligned}$$

$$-f(\tau, x(\tau), {}^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))|$$
$$+\frac{1}{\Gamma(q)}|f(s, x_n(s), {}^c D^\beta x_n(s), I^\gamma x_n(s))$$
$$-f(s, x(s), {}^c D^\beta x(s), I^\gamma x(s))|$$
$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \frac{1}{\Gamma(q)}(2-e^{-k})$$
$$\times|f(\tau, x_n(\tau), {}^c D^\beta x_n(\tau), I^\gamma x_n(\tau))$$
$$-f(\tau, x(\tau), {}^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau))|ds.$$

Clairement $\|T_1 x_n(t) - T_1 x(t)\| \longrightarrow 0$, *quand* $n \longrightarrow \infty$, *ce qui implique la continuité de* T_1. *Aussi,* T_1 *est uniformément borné sur* B_r, *nous avons*

$$\begin{aligned}
\|T_1 x\| &\leq \frac{(1-e^{-k})}{k\Gamma(q)}\|\mu\|, \\
\|T_1' x\| &\leq \frac{(2-e^{-k})}{\Gamma(q)}\|\mu\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|{}^c D^\beta T_1 x\| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(1-\beta)}|T_1' x|ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{(2-e^{-k})}{\Gamma(q)}\|\mu\|.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\|T_1 x\|_X \leq \frac{(1-e^{-k})}{k\Gamma(q)}\|\mu\| + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{(2-e^{-k})}{\Gamma(q)}\|\mu\|.$$

Maintenant nous prouvons l'équicontinue de l'opérateur T_1, *soit* $\Omega = [0,1] \times B_r \times B_r \times B_r$ *et nous définissons* $M_r = \sup_{(t,x)\in\Omega} |f(t, x(t), {}^c D^\beta x(t), I^\gamma x(t))|$.
Pour $0 < t_1 < t_2 < 1$, *nous avons*

$$\begin{aligned}
|(T_1 x)(t_2) - (T_1 x)(t_1)| &= \Big|\int_0^{t_2} e^{-k(t_2-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \\
&\quad \times f(u, x(u), {}^c D^\beta x(u), I^\gamma x(u))du\Big)ds \\
&\quad - \int_0^{t_1} e^{-k(t_1-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \\
&\quad \times f(u, x(u), {}^c D^\beta x(u), I^\gamma x(u))du\Big)ds\Big| \\
&\leq \int_0^{t_1} |e^{-k(t_2-s)} - e^{-k(t_1-s)}| \int_0^s \frac{(s-u)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \times|f(u,x(u),^{c}D^{\beta}x(u),I^{\gamma}x(u))|duds \\
& + \int_{t_1}^{t_2} e^{-k(t_2-s)} \int_0^s \frac{(s-u)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \\
& \times|f(u,x(u),^{c}D^{\beta}x(u),I^{\gamma}x(u))|duds \\
\leq \;& \frac{M_r}{k\Gamma(q)}(|t_2^q - t_1^q| + |t_2^q e^{-kt_2} - t_1^q e^{-kt_1}|) \longrightarrow 0, quand \\
& t_2 \longrightarrow t_1.
\end{aligned}
$$

Aussi

$$
\begin{aligned}
|^{c}D^{\beta}T_1(x)(t_2) -^{c} D^{\beta}T_1(x)(t_1)| \leq \;& \int_0^{t_1} \frac{|(t_1-s)^{\beta} - (t_2-s)^{\beta}|}{(t_1-s)^{\beta}(t_2-s)^{\beta}}|T_1'(x)(s)|ds \\
& + \int_{t_1}^{t_2} |(t_2-s)^{-\beta}||T_1'(x)(s)|ds \\
\leq \;& \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{(2-e^{-k})}{\Gamma(q)} \Big\{ \int_0^{t_1} \frac{|(t_1-s)^{\beta} - (t_2-s)^{\beta}|}{(t_1-s)^{\beta}(t_2-s)^{\beta}} ds \\
& + \int_{t_1}^{t_2} |(t_2-s)^{-\beta}|ds \Big\} \longrightarrow 0, quand \quad t_2 \longrightarrow t_1.
\end{aligned}
$$

Alors T_1 est un opérateure est équicontinue. Donc par le théorème d'Ascoli-Arzela T_1 est relativement compact. D'aprés le théorème du point fixe de Krasnoselskii, le probéme $(2,1)$ admet au moins une solution.

2.2.3 D'après le théorème de l'Alternative de type Leray-Schauder.

Notre troisième et dernier résultat d'existence est basé sur l'alternative de type Leray-Schauder.

Théorème 2.2.3 *Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : (H_3), il existe une fonction $\phi \in \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}^+)$ et Ω une fonction croissante, sous-homogéne c'est-a-dire $(\Omega(kx) \leq k\Omega(x)$ pour tout $k \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^+)$, $\Omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, telle que*

$$
|f(t,x_1,x_2,x_3)| \leq \phi(t)\Omega(\|x_1\| + \|x_2|\| + \|x_3\|), \qquad \forall (t,x_1,x_2,x_3) \in [0,1] \times \mathbb{R}^3,
$$

(H_4) il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$
\frac{M}{(\Lambda + \frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)})\|\phi\|L_1\Omega(M)} > 1,
$$

où Λ, Λ_1 et L_1 sont donnée par $(2,11),(2,12)$. Alors le problème (2.1) admet au moins une solution.

Preuve. *Tout d'abord, nous montrons que l'opérateur T définit par (2.8) qui est définit dans un ensemble bornée dans lui même est bornée. Soit $B_r = \{x \in \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}) : \quad \|x\|_X \leq r\}$. Pour tout $x \in B_r$, nous avons*

$$\begin{aligned}
|T(x)(t)| &\leq \sup_{t\in[0,1]}\Big|\frac{kt-1+e^{-kt}}{\Delta}\Big|\Big\{|\lambda|\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)}\\
&\quad\times\Big(\int_0^\tau \frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\omega,x(\omega),{}^cD^\beta x(\omega),I^\gamma x(\omega))|d\omega\Big)d\tau\Big)ds\\
&\quad+\sum_{i=1}^m |a_i|\int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\\
&\quad\times|f(\tau,x(\tau),{}^cD^\beta x(\tau),I^\gamma x(\tau))|d\tau\Big)ds\Big\}\\
&\quad+\int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\tau,x(\tau),{}^cD^\beta x(\tau),I^\gamma x(\tau))|d\tau\Big)ds\\
&\leq P\Big\{|\lambda|\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)}\Big(\int_0^\tau \frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\phi(\omega)\\
&\quad\times\Omega\Big(\|x\|+\|{}^cD^\beta x\|+\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\|x\|\Big)d\omega\Big)d\tau\Big)ds\\
&\quad+\sum_{i=1}^m |a_i|\int_0^{\zeta_i} e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\phi(\tau)\\
&\quad\times\Omega\Big(\|x\|+\|{}^cD^\beta x\|+\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\|x\|\Big)d\tau\Big)ds\Big\}\\
&\quad+\int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\phi(\tau)\Omega\Big(\|x\|\\
&\quad+\|{}^cD^\beta x\|+\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\|x\|\Big)d\tau\Big)ds\\
&\leq \Big\{P\Delta_1+\frac{1}{k\Gamma(q)}(1-e^{-k})\Big\}\|\phi\|\Omega(L_1\|x\|_X)\\
&\leq \Lambda\|\phi\|L_1\Omega(\|x\|_X).
\end{aligned}$$

Donc

$$\|T(x)\| \leq \Lambda\|\phi\|L_1\Omega(\|x\|_X).$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
|T'(x)(t)| &\leq \sup_{t\in[0,1]}\Big|\frac{k-ke^{-kt}}{\Delta}\Big|\Big\{|\lambda|\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)}\\
&\quad\times\Big(\int_0^\tau \frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(\omega,x(\omega),{}^cD^\beta x(\omega),I^\gamma x(\omega))|d\omega\Big)d\tau\Big)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{m}|a_i|\int_0^{\zeta_i}e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\\
&\times|f(\tau,x(\tau),^cD^{\beta}x(\tau),I^{\gamma}x(\tau))|d\tau\Big)ds\Big\}\\
&+k\int_0^t e^{-k(t-s)}\Big(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\\
&\times|f(\tau,x(\tau),^cD^{\beta}x(\tau),I^{\gamma}x(\tau))|d\tau\Big)ds\\
&+\int_0^t\frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|f(s,x(s),^cD^{\beta}x(s),I^{\gamma}x(s))|ds\\
\leq\ &\Big\{\widetilde{P}\Delta_1+\frac{1}{\Gamma(q)}(2-e^{-k})\Big\}\|\phi\|\Omega(L_1\|x\|_X)\\
\leq\ &\Lambda_1\|\phi\|L_1\Omega(\|x\|_X),
\end{aligned}$$

par la définition de la dérivée au sens de Caputo avec $0<\beta<1$, nous avons

$$\begin{aligned}
|^cD^{\beta}(Tx)(t)| &\leq \int_0^t\frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}|T'(x)(s)|ds\\
&\leq \Lambda_1\|\phi\|L_1\Omega(\|x\|_X)\int_0^t\frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}ds\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\Lambda_1\|\phi\|L_1\Omega(\|x\|_X).
\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_X &= \|T(x)\|+\|^cD^{\beta}T(x)\|\\
&\leq \left(\Lambda+\frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)}\right)\|\phi\|L_1\Omega(r).
\end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons que T est un opérateur équicontinue. Soit $t_1,t_2\in[0,1]$ avec $t_1<t_2$ et $x\in B_r$, nous avons

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t_2)-(Tx)(t_1)| \leq\ &\Big|\frac{k(t_2-t_1)+e^{-kt_2}-e^{-kt_1}}{\Delta}\Big\{\lambda\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big(\int_0^s e^{-k(s-\tau)}\\
&\times\Big(\int_0^{\tau}\frac{(\tau-\omega)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}f(\omega,x(\omega),^cD^{\beta}x(\omega),I^{\gamma}x(\omega))d\omega\Big)d\tau\Big)ds\\
&-\sum_{i=1}^{m}a_i\int_0^{\zeta_i}e^{-k(\zeta_i-s)}\Big(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times f(\tau, x(\tau), {}^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau)) d\tau\Big) ds\Big\}\Big| \\
& +\Big|\int_0^{t_1} (e^{-k(t_2-s)} - e^{-k(t_1-s)})\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \\
& \times f(\tau, x(\tau), {}^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau)) d\tau\Big) ds \\
& +\int_{t_1}^{t_2} e^{-k(t_2-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \\
& \times f(\tau, x(\tau), {}^c D^\beta x(\tau), I^\gamma x(\tau)) d\tau\Big) ds\Big| \\
\leq\ & \Big|\frac{k(t_2-t_1) + e^{-kt_2} - e^{-kt_1}}{\Delta}\Big|\Big[|\lambda|\frac{\eta^{q+\delta-2}}{k^2\Gamma(q)\Gamma(\delta)} \\
& \times(\eta k + e^{-k\eta} - 1) \\
& +\sum_{i=1}^m |a_i|\zeta_i^{q-1}(1-e^{-k\zeta_i})\frac{1}{k\Gamma(q)}\Big]\|\phi\|L_1\Omega(r) \\
& +\Big|\int_0^{t_1} (e^{-k(t_2-s)} - e^{-k(t_1-s)})\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} du\Big) ds \\
& +\int_{t_1}^{t_2} e^{-k(t_2-s)}\Big(\int_0^s \frac{(s-u)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} du\Big) ds\Big|\|\phi\|L_1\Omega(r) \longrightarrow 0, \\
& t_2 \longrightarrow t_1.
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
|{}^c D^\beta T(x)(t_2) - {}^c D^\beta T(x)(t_1)| \leq\ & \int_0^{t_1} \frac{|(t_1-s)^\beta - (t_2-s)^\beta|}{(t_1-s)^\beta (t_2-s)^\beta}\Big|T'(x)(s)\Big| ds \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \Big|(t_2-s)^{-\beta}\Big|\Big|T'(x)(s)\Big| ds \\
\leq\ & \frac{\Lambda_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big\{\int_0^{t_1} \frac{|(t_1-s)^\beta - (t_2-s)^\beta|}{(t_1-s)^\beta (t_2-s)^\beta} ds \\
& + \int_{t_1}^{t_2} |(t_2-s)^{-\beta}| ds\Big\}\|\phi\|L_1\Omega(r) \longrightarrow 0, \quad t_2 \longrightarrow t_1.
\end{aligned}$$

Alors l'opérateur T est équicontinue. D'après le théorème d'Ascoli-Arzela, l'opérateur T, est compact. Enfin, pour $\lambda \in (0,1)$, soit $x = \lambda Tx$ nous avons

$$\Big|x(t)\Big| \leq \Big\{P\Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)}(1-e^{-k})\Big\}\|\phi\|\Omega(L_1\|x\|_X) \leq \Lambda\|\phi\|L_1\Omega(\|x\|_X),$$

en prenant la norme pour $t \in [0,1]$, nous obtenons

$$\|x\| \leq \Lambda\|\phi\|L_1\Omega(\|x\|_X).$$

Nous avons aussi

$$\Big|x'(t)\Big| \leq \Big\{\widetilde{P}\Delta_1 + \frac{1}{k\Gamma(q)}(2-e^{-k})\Big\}\|\phi\|\Omega(L_1\|x\|_X) \leq \Lambda_1\|\phi\|L_1\Omega(\|x\|_X).$$

D'après la définition de la dérivée au sens de Caputo avec $0<\beta<1$, nous obtenons

$$\Big|^{c}D^{\beta}(x)(t)\Big| \leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\Big|x'(s)\Big|ds \leq \frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)}\|\phi\|L_1\Omega(\|x\|_X).$$

Finalement, nous obtenons

$$\|x\|_X = \|x\| + \|^{c}D^{\beta}(x)\| \leq \Big(\Lambda + \frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)}\Big)\|\phi\|L_1\Omega(\|x\|_X).$$

Par conséquent, nous avons

$$\frac{\|x\|_X}{\Big(\Lambda + \frac{\Lambda_1}{\Gamma(2-\beta)}\Big)\|\phi\|L_1\Omega(\|x\|_X)} \leq 1.$$

Daprès (H_4), il existe $M>0$ tel que : $\|x\| \neq M$, on défint l'ensemble $U = \{x \in C([0,1],\mathbb{R})\|x\| < M\}$. Il est evident que l'opérateur $T : \overline{U} \longrightarrow C([0,1],\mathbb{R})$ est continue et completement continue du choix de U il n'ya pas $x \in \partial U$ de telle sorte que $x = \lambda Tx$ pour un certain $\lambda \in]0,1[$. Par conséquent et d'après l'Alternative non linéaire du type Leray-Schauder, nous déduisons que T admet un point fixe $x \in \overline{U}$ qui est solution du probléme $(1,2)$. Ceci complete la preuve.

2.3 Application analytique

Cette section est consacré à la présentation de trois exemples d'applications du problème intégro-différentielle séquentielle pour valider nos résultats précédents.
On considére le probléme suivant :

$$\begin{cases} (^{c}D^{8/3} + \frac{2}{3}{}^{c}D^{5/3})x(t) = f(t, x(t), ^{c}D^{3/4}x(t), I^{1/2}x(t)), t \in [0,1], \\ x(0) = 0, x^{'}(0) = 0, x(\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}x(\frac{2}{5}) + \frac{5}{2}x(\frac{3}{5}) + 3x(\frac{4}{5}) = \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{(\frac{1}{10}-s)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}x(s)ds. \end{cases} \tag{2.16}$$

où $q=8/3, k=2/3, \beta=3/4, \gamma=1/2, a_1=1, a_2=3/2, a_3=5/2, a_4=3, \zeta_i=i/5, i=1,...,4, \lambda=1, \eta=1/10$, avec les valeurs données, on le trouve celà $\Delta \approx 0,6148915, \Delta_1 \approx 1,287595, P \approx 1,648123, \widetilde{P} \approx 0,527554, \Lambda \approx 2,607218, \Lambda_1 \approx 1,667317, L_1 \approx 2,128379$.

Maintenant nous illustrons les résultats obtenus en choisissant différentes valeurs de $f(t, x(t), {}^c D^{3/4}x(t), I^{1/2}x(t))$, *d'abord considérons :*

$$\begin{aligned} f(t, x(t), {}^c D^{3/4}x(t), I^{1/2}x(t)) &= \frac{1}{\sqrt{t+121}}\Big(\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|} + tan^{-1}({}^c D^{3/4}x(t))\Big) \\ &\quad + \frac{1}{11}I^{1/2}x(t) + cos(\pi t/2), \end{aligned}$$

évidemment $L = 1/11$, *car*

$$\begin{aligned} &|f(t, x(t), {}^c D^{3/4}x(t), I^{1/2}x(t)) - f(t, y(t), {}^c D^{3/4}y(t), I^{1/2}y(t))| \\ &\leq \frac{1}{11}(\|x-y\| + \|{}^c D^{3/4}x(t) - {}^c D^{3/4}y(t)\| + \|I^{1/2}x(t) - I^{1/2}y(t)\|). \end{aligned}$$

Alors $LL_1(\Lambda + \frac{\Lambda_1}{\Lambda(2-\beta)}) \approx 0,860389 < 1$.

Ainsi, tous les conditions du théorème (2.2.1) *sont satisfaisant. Donc, par la conclusion du théorème* (2.2.1), *nous concluons que là 'existe une solution unique pour le problème* (2.16) *sur* $[0, 1]$.

Maintenant, nous montrons l'application du théorème (2.2.2) *avec la fonction non linéaire donnée par :*

$$f(t, x(t), {}^c D^{3/4}x(t), I^{1/2}x(t)) = \frac{3}{t+20}\Big(sin(x(t)) + \frac{|{}^c D^{3/4}x(t)|}{1+|{}^c D^{3/4}x(t)|}\Big) + \frac{3}{20}I^{1/2}x(t) + \frac{1}{10}.$$

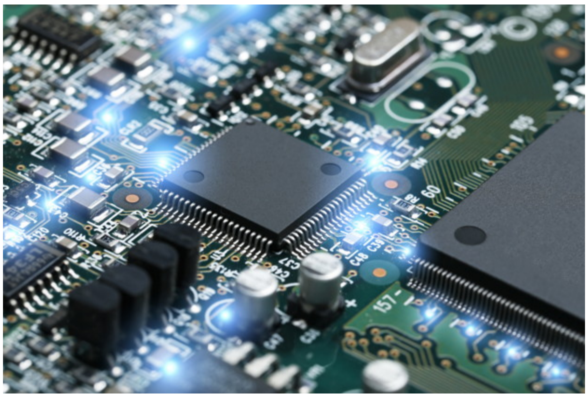
Avec $|x(t)| \leq \varrho, t \in [0, 1]$, *($\varrho$ c'est un constant réel). dans ce cas on a* $\mu(t) = \frac{6}{t+20} + \frac{3\varrho}{10\sqrt{\pi}} + \frac{1}{10}$, $L = 3/20$ *et* $LL_1P\Delta_1 \approx 0,6775$. *Clairement, tous les conditions du théorème* (2.2.2) *sont vérifies. En conséquence, la conclusion du théorème* (2.2.2) *implique que le problème* (2.16) *avec la valeur donnée de* f *a au moins une solution.*
Finalement pour appliquer le théoréme de L'Altérnative du type Leray-Schauder, nous choisissant :

$$f(t, x(t), {}^c D^{3/4}x(t), I^{1/2}x(t)) = \frac{1}{40+t}\Big(x(t)cos(x(t)) + {}^c D^{3/4}x(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}I^{1/2}x(t) + 2\Big).$$

Il est facile de voire cela $|f(t, x(t), {}^c D^{3/4}x(t), I^{1/2}x(t))| \leq (2/(40+t))(\|x\|_X + 1)$, *puis, par la condition* H_4, *avec* $\Omega(\|x\|_X) = 1 + \|x\|_X$ *et* $\|\phi\| = 1/20$, *nous trouvons cela* $M > M_1 \approx 0,898304$, *comme tous les conditions du théorème* (2.2.3) *sont satisfaits, alors il existe au moins une solution pour le problème* (2.16) *avec la valeur choisie de* f.

Chapitre 3

Applications : Synthèse des filtres fractionnaires analogiques



Comme en a vu précédemment concernant l'existence et l'unicité de la solution d'un problème fractionnaire utilisons les trois théoremes, aussi en veut voir le rôle et l'importance du calcule fractionnaire dans le domaine électrique plus précisament dans les circuits RC.
Le traitement du signal a pour principal objet la description des signaux liée au monde réel dans un but de traitement, d'identification, de compression, de compréhension ou de transmission. Dans ce contexte les filtres électriques ont toujours joué un très grand rôle qui traduise le but d'ordre fractionnaire, de telle sorte que les filtres réalisent une opération volontaire de mise en forme d'une grandeur électrique (courant ou tension), on s'interesse aux types de filtre pass bas pour filtrer notre grandeur utilise le calcule fractionnaire.

3.1 Définitions

3.1.1 Signale

Un signal est la représentation physique de l'information, qu'il convoie de sa source à son destinataire. La description mathématique des signaux est l'objectif de la théorie du signal. Elle offre les moyens d'analyser, de concevoir et de caractériser des systèmes de traitement de l'information.

3.1.2 Bruit

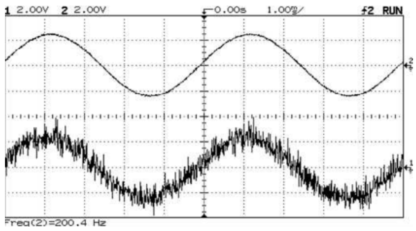


FIGURE 3.1 – un model de bruit

Un bruit correspond à tout phénomène perturbateur gênant la transmission ou l'interprétation d'un signal.

3.1.3 Systéme

Un système est un dispositif représenté par un modèle mathématique de type entrée/Sortie qui apporte une déformation au signal (Ex : modulateur, filtre, ...).

$$Entré \Longrightarrow [Systéme] \Longrightarrow Sortie$$

3.1.4 filtre électrique

FIGURE 3.2 – représentation d'un filtre électrique

Un filtre est un circuit électronique qui réalise une opération de traitement du signal. Autrement dit, il atténue certaines composantes d'un signal et en laisse passer d'autres.

3.2 filtres analogiques

Les filtres analogiques permettent de transformer les signaux. Ils sont très utilisés en électronique analogique, par exemple dans les circuits de traitement des signaux audio.

3.2.1 caractéristiques des filtres

fonction de transfert

La fonction de transfert d'un filtre s'écrit avec les notations complexes (jw) ou de Laplace (p), comme le rapport de deux polynômes :

$$F_p = \frac{N_p}{D_p} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p + a_3 p + ... + a^\alpha p}{b_0 + b_1 p + b_2 p + b_3 p + ... + bp} \qquad tq \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Concernant cette fonction de transfert, les remarques suivantes sont à noter :

- *Pour tout système réel le degré du dénominateur (β) doit être supérieur ou égal au degré du numérateur (α) : $\beta \geq \alpha$.*
- *Pour qu'un filtre soit stable, il faut que tous les pôles de la fonction de transfert soient à partie réelle négative.*
- *L'ordre d'un filtre est donné par le degré du polynôme du dénominateur (β) de la fonction de transfert.*
- *Toutes les fonctions de transfert peuvent être décomposées en produit de fonctions de transfert du premier et du deuxième ordre.*

Gabarit du filtre

Le gabarit d'un filtre est constitué des limites de tolérance pour les différentes éléments du filtre, à savoir :

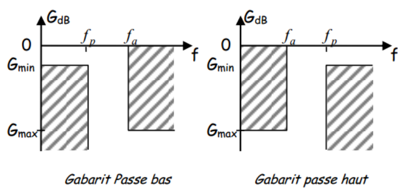


FIGURE 3.3 – la représentation du gabarit d'un filtre pass bas

- *La fréquence de coupure,*
- *L'atténuation dans la bande coupée, en dB,*

- *L'ondulation dans la bande passante, en dB,*

- *La largeur de la bande de transition, située entre la fréquence de coupure et la zone atténuée, car la coupure d'un filtre n'est jamais parfait,*
Il peut y avoir plusieurs fréquences de coupures dans le cas de filtres autres que passe-haut ou passe-bas :
- pour un filtre passe bas ou passe haut, f_p est le bord de bande passante, f_a est le bord de bande éliminer.
- G_{min} est le gain minimum que l'utilisateur exige dans la bande passante et G_{max} le gain maximum accepté dans les bande coupées. On définit la sélectivité k comme :
$k = \frac{f_p}{f_a}, k = \frac{f_a}{f_p}$ *pour un filtre passe bas,*

Fréquence de coupure du filtre

La fréquence de coupure du filtre est la fréquence séparant les deux modes de fonctionnement idéaux du filtre : bloquant et passant.

3.2.2 Les différentes types des filtres

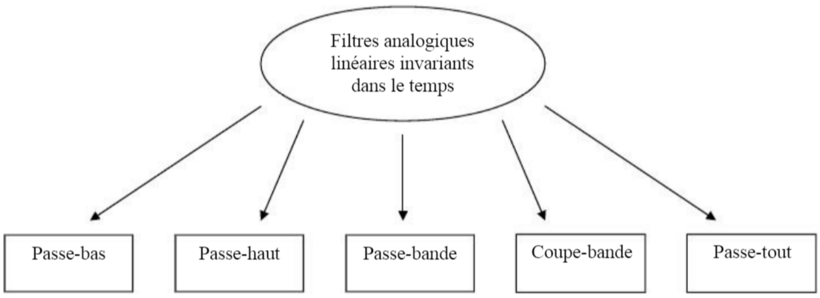


FIGURE 3.4 – les différentes types des filtres

On s'interesse aux filtres pass bas et pass haut.

filtre passe-bas

Il ne laisse passer que les fréquences au-dessous de sa fréquence de coupure. C'est un atténuateur d'aiguës pour un signal audio. On pourrait l'appeler coupe-haut.

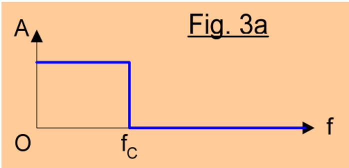


FIGURE 3.5 – la représentation d'un filtre pass bas

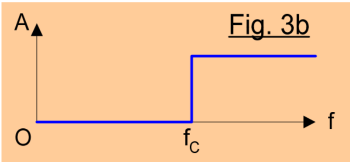


FIGURE 3.6 – la représentation d'un filtre pass haut

filtre passe-haut

Il ne laisse passer que les fréquences au-dessus d'une fréquence déterminée, appelée "fréquence de coupure". Il atténue les autres (les basses fréquences). Autrement dit, il «laisse passer ce qui est haut». C'est un atténuateur de graves pour un signal audio. On pourrait aussi l'appeler coupe-bas.

3.3 filtres fractionnaire

Le comportement d'un filtre d'ordre fractionnaire est le plus souvent décrit par des équations différentielles ou des fonctions de transfert contenants des opérateurs d'ordre fractionnaire. Il existe deux types de fonction de transfert fractionnaire : la fonction implicite et la fonction explicite.
fonction implicit :

$$G(P) = \frac{1}{(1+\tau.P)^{\alpha}}$$

fonction explicit :

$$G(P) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i p^{m_i}}{\sum_{i=0}^{L} a_j p^{l_j}}$$

3.4 Contribution à la conception des filtres fractionnaires analogiques

3.4.1 Modélisation

L'étude des systèmes réels dans les différentes disciplines scientifiques nécessite souvent une modélisation c-à-d. la représentation du système par un modèle mathématique, dans ce *contexte nous avons apporté une contribution sur la modélisation des filtres électriques par le biais des opérateurs fractionnaires, en effet il s'agit de modéliser un filtre électrique qui se constitue d'une résistance et un condensateur en série. Donc on cherche à obtenir une équation différentielle qui relie l'entrée avec la sortie, pour ce faire on peut faire un appel aux lois générales de l'électricité : Loi des mailles (somme des tensions égales à zéro) :*

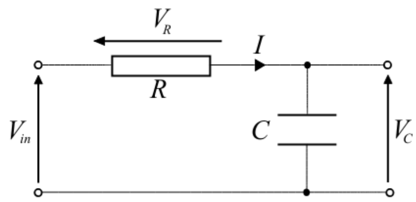


FIGURE 3.7 – représentation d'un circuit

$$\begin{aligned} e + (-v_R) + (-v_c) &= 0 \\ \Rightarrow e - v_R - v_c &= 0, \end{aligned}$$

telle que $v = R.i$ *et lorsqu'on a le courant d'entré c'est le meme pour la sortie on obtient :* $i = C\frac{dv_c}{dt}$ *donc*

$$e = R.C\frac{dv_c}{dt} + v_c, \tag{3.1}$$

içi on a travailler sur la dérivée d'order 1 mais pour amilioré l'intensitée du tension on a besoin d'introduire l'order fractionnaire de la détrivée $\frac{d^\alpha v_c}{dt}$ *telle que* $\alpha \in \mathbb{R}$*, de notre coté on peut remplacer cette dérivée par la dérivée au sens de Caputo* ${}^cD^\beta v_c$ *par la suite on introduise la transformé de Laplace dans (4.1) avec la transformé de La place de* ${}^cD^\beta v_c$ *on trouve :*

$$\begin{aligned} L(e) &= E(P) \\ L(R.C^cD^\beta v_c) &= R.CP^\alpha v_c - \sum_{k=0}^{n-1} P^{\alpha-k-1} f^k(0) \qquad tq : f^k(0) = 0 \\ et & \\ L(v_c(t)) &= V_c(P) \\ \Rightarrow E(P) &= R.CP^\alpha V_c(P) + V_c(P) \\ \Rightarrow E(P) &= V_c(P)(R.CP^\alpha + 1). \end{aligned}$$

D'aprés la définitoin de la fonction du transfért on trouve :

$$\begin{aligned} G(P) &= \frac{V_c}{E_c} = \frac{V_c}{V_c(P)(R.CP^\alpha + 1)} \\ G(P) &= \frac{1}{R.CP^\alpha + 1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.4.2 l'Approximation par la méthode de cheref

La méthode d'approximation de Charef a été introduite pour représenter le comportement dynamique des systèmes fractals, également appelés Fractional Power Pole (FPP), caractérisés par un diagramme d'amplitude de Bode à pente fractionnaire. Le système fractal, représenté par la fonctionde transfert, est alors approximé par une fonction de singularité constituée d'une série de pôes et de zéros dont le nombre et la distribution dépendent d'une erreur d'approximation définie au préalable. Cette approximation peut être obtenue en mettant en série plusieurs filtres passe bande dont le diagramme de Bode est constitué d'un ensemble des droites sont allternativement des pentes de –20 dB et 0 dB. Par conséquent, lorsque les pôles et les zéros de ces filtres sont particulièrement disposés, le lieu de Bode de a fonction de transfert non entière peut être approximée par une fonction du transfert d'ordre entier. Cette approximation est d'autant plus précise que le nombre de filtres utilisés est très grand et que la bande de fréquence est large. La fonction de transfert entière équivalente à cette mise en série des filtres passe bande c'est pour cela en peut pas tracer le diagrame de Bode dans notre cas car l'order de P est fractionnaire ce n'est pas un nembre entier, donc en a fait un appelle au méthode d'aproximations et en a choisie la méthode de charef pour approximer l'order fractionnaire a un order entier[].
Alors, dans la bande de fréquence $[\omega_L, \omega_H]$*, l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire est donnée par :*

$$G_D(P) = P^\alpha \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^{N}\Big(1+\dfrac{P}{z_0(ab)^i}\Big)}{\prod_{i=0}^{N}\Big(1+\dfrac{P}{az_0(ab)^i}\Big)}$$

avec $K_D = \frac{1}{\tau}$, $\quad \tau = RC$ *et* ω_c *la fréquence de coupure du ZPF à* $3m$ *dB est donnée par* $\omega_c = RC$ *et les parametres a, b ,*z_0 *et N sont données par :* $a = 10^{[y/10(1-m)]}, b = 10^{[y/10m]}, z_0 = \omega_c\sqrt{b}, p_0 = az_0 N = \Big(integer\Big[\frac{log(\omega_{max}/p_0)}{log(ab)}\Big]+1\Big)$*, telle que y est l'erreur d'approximation.*
Donc l'orsqu'on revient au notre calcule et en tantqu'on applique cette méthode sur (3.4) en trouve :

$$\begin{aligned} G(P) &= \frac{1}{R.CP^\alpha+1} \\ &\cong \frac{1}{R.CK_D\Big(\frac{\prod_{i=0}^{N}\left(1+\frac{P}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^{N}\left(1+\frac{P}{az_0(ab)^i}\right)}\Big)+1} \end{aligned}$$

on note que $RC = \tau$

$$G(P) = \frac{\prod_{i=0}^{3}\left(1+\frac{P}{az_0(ab)^i}\right)}{\tau K_D \prod_{i=0}^{3}\left(1+\frac{P}{z_0(ab)^i}\right)+\prod_{i=0}^{3}\left(1+\frac{P}{az_0(ab)^i}\right)}$$

Donc c'est la fonction du transfért qu'on a besoin pour tracer le diagramme de Bode.

3.4.3 Répence fréquentielle(Diagramme de Bode)

Un diagrame de Bode est un moyen de représenter le comportement fréquentielle d'un systéme. il permet une résolution grafique simplifiée, en particuler pour l'etude de la fonction du transfért d'un systéme asservie. il est utilisé afin de visualiser rapidement la marge de gain, la marge de fase, le gain continue, la bonde passante, le regéte des perturbation et la stabilité du systéme. son nom vient de l'inventeur de ce diagramme, Hendrik Wade Bode.
Voici un exemple de fléxibilité pour l'approximation de la fonction du trasfért pour nous arrivons a la mailleure valeure approché à la fréquence de coupure idéal c'est-a-dire un excellent filtrage du signal.

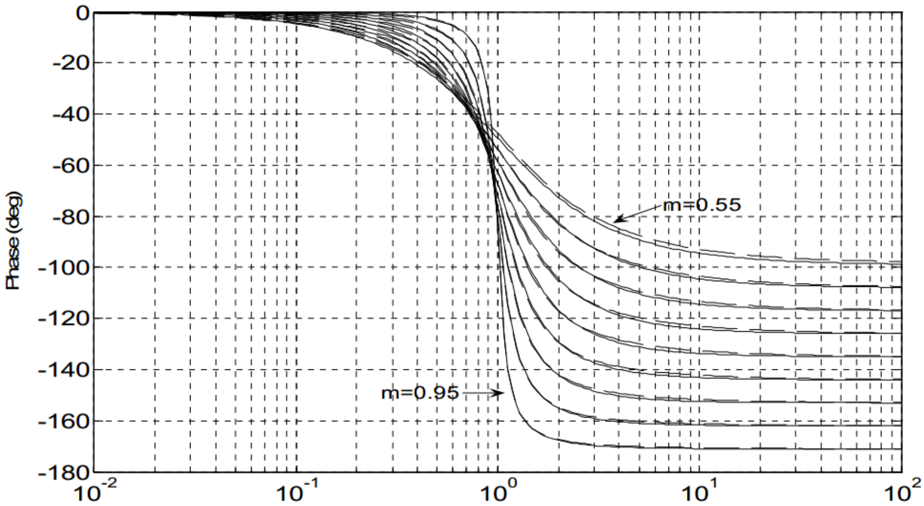


FIGURE 3.8 – Diagramme de bode de la fonction du transfert

Conclusion

L'objectif de notre travail est basé sur la détermination de l'existence et de l'unicité des solutions du problème aux limites avec conditions multipoints, ce dernier est présenté par une équation différentielle fractionnaire dont le terme f non linéaire dépend de la dérivée fractionnaire et l'intégrale fractionnaire. La résolution de ce problème se fait par le biais de trois résultats d'existence à savoir : le théorème du point fixe de Banach, et le théorème de point fix de krasnoselskii et enfin le théorème du point fixe de l'Alternative de type Leray-Schauder. De ce fait, nous avons détérminé l'existence et l'unicité du point fixe (solution du problème (2.1)) par le principe de l'application contractante. Et nous avons enchainé avec le théorème du point fixe de Krasnoselskii qui affirme que deux applications l'une sont contraction et l'autre est compacte et continue, admet un point fixe qui n'est pas nécessairement unique (possède au moins un point fixe). Et enfin, nous avons conclu notre étude par le théorème de l'Alternative de type Leray-Schauder qui consiste à trouver une solution n'est pas forcément unique. Enfin en a vu une application dans le domaine électrique exactement dans la spécialité du traitement du signal et on a vu l'importence et le rôle du calcul fractionnaire.

Bibliographie

[1] *B.Ahmed, J.Nieto, Boundary Value Problems for a Class of sequential Integrodifferential Equations of Fractional Order vol.2013(2013).*

[2] *B.Ahmed, S.k,Ntouyas, R.P.Agarwal and A.Alseadi, Existence results for sequential fractional integro-differential equations with nonlocal multi-point and strip conditions vol(2016)2016.NO.205,PP*

[3] *E.Zeidler, Non linear Functional Analysis and its applications, I (fixed point theorems).*

[4] *H.Laassami, C.Boughougal, Problèmes aux limites avec une contrainte intégrale, mémoire de master université Abbes Laghrour, Khenchela, 2016.*

[5] *H.Rahou, Problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires, mémoire de master université Abou Bekr Belkaid, Telemcen, 2015.*

[6] *J.Charles, M.Mberkhta, H.Queffélec, analyse fractionnelle et théorie des opérateurs Dunod, Paris 2010.*

[7] *L.C.Evans, Partial differential equations, second Edition, Graduate studies in Mathematice 19,AMS,2010.*

[8] *L.Schwartz, Analyse Tome 1, théorie des ensembles et topologie.*

[9] *M.M.elisabetta, P.Eduardo, Boundary value problems with an integral contraint Electronics journal of differential Equation vol.2015(2015).NO.257,PP.1-11.*

[10] *A.Lanani, S.Meghriche, A.Djouambi, Débruitage d'une Image IRM en Utilisant une Ondelette Fractionnaire vol.(2013) ;*

[11] *F.Leulmi, Synthèse des Filtres Fractionnaires Numériques : Algorithmes et Applications vol.2015(2015).NO.D012116004D.*

[12] *H.Nezzari, CONTRIBUTION A L'ANALYSE DES SYSTEMES DORDRE FRACTIONNAIRE vol.2013(2013).*

[13] *A.Djouambi, CONTRIBUTION A LA COMMANDE CRONE thése doctorat.2008*