



Université Abbes LAGHROUR Khenchela
Faculté des Sciences & Technologie
Département de mathématiques et
Informatique



Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques Appliquées

Etude De l'équation De Helmholtz Dans Un Domaine Non Borné Avec Condition D'impédance

Réalisé par :

BOUZIANE Ahlem & KHERGAG Iman

Directeur de mémoire : **Dr. RAMOUL Hichem** **MCA** **(Univ. Khenchela)**

Devant le Jury :

Président : **Dr. ADJROUD Nacer** **MCA** **(Univ. Khenchela)**
Examineur : **Dr. AKROUT Kamel** **MCA** **(Univ. Tebessa)**

Présenté le: 30/05/2018



DEDICACES

Je dédie ce travail à...

*A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur,
ma vie et mon bonheur, qui n'a pas cessé de m'encourager de prier pour moi ;
maman que j'adore.*

*A mon père, mon exemple éternel, mon soutien moral et matériel,
tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, ce travail est
le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma
formation.*

A mes sœurs : « Amel, Wahiba, Kenza ».

Je vous dédie ce travail avec tous vœux de bonheur, de santé et de réussite.

A tous mes oncles et tantes surtout Tata « Noura »..

A toute la famille « Bouziane » .

A toute mes amis et collègues de promotion.

A toutes mes copines : « Bouchra, Walida ».

A mon amie, et mon binôme : « Imen ».

*A tous ceux ou celles qui me sont chers et qui j'ai omis involontairement de
citer .A tous qui aime AHLEM et tous que AHLEM aime.*

AHLEM



DEDICACES

Je dédie ce travail à...

Mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années de mes études, et qui a veillé tout au long à ma vie à m'encourager, à me donner l'aide et à me protéger.

Ma mère, pour la quelle qui me porter neuf mois, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, malgré sa séparation, qui reste toujours dans mon cœur.

A mes frères, ma vie et mon bonheur « Salah, Salama ».

Que dieu les garde et les protège.

A ma sœur, la lumière de mes jours « Naima ».

A toute ma grande famille : « Ben Othmane ».

A mes chères amies : « Ahlem, Salima, Chifaa ».

A mon amie et mon binôme « Ahlem » et toute sa famille.

Remerciements :

Nous remercions Dieu de nous avoir donné le courage, la santé, patience et courage de finir ce mémoire.

*Nous tenons à remercier notre directeur de mémoire : **Dr. Hichem RAMOUL**, qui n'a pas hésité de nous apporter main forte en nous guidant avec ses précieux conseils et remarques.*

Il nous a été d'une grande utilité et il fait preuve d'une grande humilité, modestie et grâce à ses efforts ce travail a fini par voir la lumière.

*Un grand merci à **Dr. Nacer ADJROUD** pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider ce jury.*

*Nos profonds remerciements vont aussi à **Dr. Kamel AKROUT** d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

Nous tenons à remercier l'université Abbes Laghror -Khenchela- surtout les enseignants des mathématiques qui ont laissé leur trace sur notre cursus universitaire.

Enfin, nous remercions toute personne qui a participé, de près ou de loin à réaliser ce mémoire

ملخص

هذه المذكرة مخصصة لدراسة مسألة انكسار امواج صوتية بواسطة عائق في البعد 2. الظاهرة الفيزيائية تخضع لمعادلة هلمهولتز بشرط التردد.

الوحدانية تبرهن بواسطة توطئة رليش و وجود الحل يعتمد على نظرية ريتز المبنية على تحويل المسألة الى معادلة تكاملية معدلة من الصنف الثاني

Abstract

This memoir is devoted to the study of scattering problem of acoustic waves by an obstacle in dimension 2. The physical phenomenon is governed by the Helmholtz equation with impedance condition.

The uniqueness is proved via Rellich Lemma and the existence of solution comes from Riesz theory which is based on the transformation of problem into regularized integral equation of second type.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un problème de diffraction d'ondes acoustique par un obstacle en dimension deux. Le phénomène physique est régi par l'équation de Helmholtz avec condition d'impédance.

L'unicité est démontrée via le Lemme de Rellich et l'existence de la solution se fait par la théorie de Riesz qui est basée sur la transformation du problème en une équation intégrale de seconde espèce régularisée.

Table des matières

Notations	1
Introduction	4
1 Rappel d'analyse fonctionnelle	6
1.1 Espaces des fonctions hölderiennes	7
1.2 Opérateurs compacts	7
1.3 Théorie de Riesz	8
1.4 Théorie de Fredholm	9
1.5 Formules de Green	11
1.6 Continuité et dérivabilité sous le signe intégrale	12
2 Position du problème physique	15
2.1 Modèle Physique	16
2.2 Equations mathématiques	17
3 Fonction de Green et représentations intégrales	19
3.1 Fonction de Green	20
3.1.1 Solutions radiales :	20
3.1.2 Calcul de la fonction de Green	21
3.1.3 Comportement à l'infini	23
3.2 Représentations intégrales	25
4 Quelques résultats sur la théorie du potentiel	32
4.1 Potentiel simple-couche	33
4.2 Potentiel double-couche	35
4.3 Quelques résultats de compacité	37
5 Existence et unicité	42
5.1 Unicité	43
5.2 Existence	44
5.2.1 Existence via un potentiel combiné	44
5.2.2 Existence via la représentation intégrale	50
Conclusion et perspectives	53

A	Rappel sur les fonctions de Bessel	55
A.1	Définitions	56
A.2	Relations de dérivation	56
A.3	Comportement à l'origine	57
A.4	Comportement à l'infini	57
B	Lemme de Rellich	59
B.1	Enoncé du lemme de Rellich	60
B.2	Preuve du lemme de Rellich	60
C	Opérateurs intégraux à noyau faiblement singulier	63
C.1	Géométrie du domaine	64
C.2	Définitions et compacité	64

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^2(\Omega^e) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega^e}) \text{ telle que :} & \\ \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = f & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) & r = |x| \rightarrow \infty \quad (S) \end{array} \right. \quad (P)$$

Ce type de problème modélise la diffraction d'ondes acoustiques par un obstacle immergé dans un liquide homogène. La dimension deux représente une section suivant une direction ou la diffraction par un obstacle infini dans une direction. La condition de radiation (S) dite de Sommerfeld modélise les ondes qui s'éloignent de l'obstacle. Le problème mathématique consiste à résoudre les questions d'existence et d'unicité. L'unicité est basée sur la condition de radiation et du lemme de Rellich. L'existence de la solution est démontrée essentiellement par la théorie de Riesz. La théorie du potentiel permet la transformation de notre problème en un problème basé sur l'existence d'une équation intégrale posé en domaine borné. Nos opérateurs étant faiblement singuliers et l'apparition de certains opérateurs qui ne sont pas compacts nous impose de régulariser l'équation intégrale en question pour pouvoir mener à bien l'application de la théorie de Riesz.

Le mémoire est organisé comme suit :

Le chapitre 1 est consacré à un rappel d'analyse fonctionnelle dans lequel on énonce les principaux outils indispensables à notre étude du problème.

Au chapitre 2, on donne la modélisation de notre problème et on écrit les équations mathématiques associées.

Le chapitre 3 est destiné à la recherche de la fonction de Green et son comportement à l'infini. On démontre aussi les formules de représentations intégrales nécessaires pour démontrer l'existence et l'unicité de notre problème (P).

Au chapitre 4, on donne les principaux résultats de la théorie du potentiel nous permettant par la suite d'écrire notre problème sous forme d'équation intégrale.

Le chapitre 5 est dédié à l'unicité et à l'existence de la solution. L'unicité se démontre par la condition de radiation et du lemme de Rellich. L'existence est démontrée par deux méthodes, l'une fait appel à un potentiel combiné (simple-double-couche) et l'autre est basée sur la représentation intégrale.

Le mémoire s'achève par une conclusion et des perspectives à envisager ainsi que 3 annexes : L'annexe A est consacrée au fonctions de Bessel et Hankel et leurs propriétés. Dans l'annexe B, on donne la démonstration détaillée du lemme de Rellich. L'annexe C est destinée aux opérateurs à noyau faiblement singulier afin de pouvoir exploiter les résultats de compacité et les appliquer pour la théorie du potentiel.

Notations

\mathbb{R} : Corps des nombres réels.

\mathbb{C} : Corps des nombres complexes.

\mathcal{C} : Espace des fonctions continues.

\mathcal{C}^m : Espace des fonctions m fois continûment différentiables.

$\mathcal{C}^\infty = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^m$.

$\mathcal{C}^{0,\alpha}$: Espace des fonctions Hölderiennes continues.

$\mathcal{C}^{1,\alpha}$: Espace des fonctions dérivables de dérivée Hölderienne.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$: Espace des fonctions \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 et à support compact dans \mathbb{R}^2 (dit aussi ; espace des fonctions test).

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$: Dual topologique de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ ou espace des distributions.

Δ : Opérateur de Laplace.

∇ : Gradient.

(\cdot, \cdot) le produit scalaire dans \mathbb{R}^2 .

Chapitre 1

Sommaire

1.1	Espaces des fonctions hölderiennes	7
1.2	Opérateurs compacts	7
1.3	Théorie de Riesz	8
1.4	Théorie de Fredholm	9
1.5	Formules de Green	11
1.6	Continuité et dérivabilité sous le signe intégrale	12



Rappel d'analyse fonctionnelle

Résumé

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions essentielles sur les fonctions hölderiennes et les opérateurs compacts ainsi que les principaux résultats de la théorie de Riesz-Fredholm et ses applications. A la fin de ce chapitre on énonce les formules de Green ainsi que quelques théorèmes de la continuité et de la dérivabilité sous le signe intégrale ([CK :83], [R :75], [Vo :72]).

1.1 Espaces des fonctions hölderiennes

Définition 1.1.1. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . On définit l'espace des fonctions hölderiennes continues et l'espace des fonctions dérivables de dérivée hölderienne, noté respectivement, $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ et $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ par

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{\Phi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}); \sup_{\substack{x, y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|\Phi(x) - \Phi(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty, \quad 0 < \alpha \leq 1\},$$

$$\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{\Phi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}); \sup_{\substack{x, y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|\nabla\Phi(x) - \nabla\Phi(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty, \quad 0 < \alpha \leq 1\},$$

avec leurs normes respectives

$$\|\Phi\|_{0,\alpha,\overline{\Omega}} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\Phi(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|\Phi(x) - \Phi(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

$$\|\Phi\|_{1,\alpha,\overline{\Omega}} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\Phi(x)| + \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla\Phi(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|\nabla\Phi(x) - \nabla\Phi(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Théorème 1.1.1. $(\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\Phi\|_{0,\alpha,\overline{\Omega}})$ et $(\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\Phi\|_{1,\alpha,\overline{\Omega}})$ sont des espaces de Banach pour $0 < \alpha \leq 1$.

Théorème 1.1.2. Soit $0 < \alpha \leq 1$ et Ω compact. Alors les injections :

$$\mathcal{C}^{j,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\Omega), \quad j = 0, 1,$$

sont compactes.

1.2 Opérateurs compacts

Soient X, Y, Z des espaces normés.

Définition 1.2.1. Un opérateur linéaire $A : X \rightarrow Y$ est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$ telle que

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X,$$

pour tout $x \in X$

On note par $L(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de X dans Y muni de la norme

$$\|A\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X},$$

Définition 1.2.2. A est dit compact, si pour chaque suite bornée (x_n) dans X , la suite (Ax_n) contient une sous-suite convergente dans Y .

Si on note $K(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires compacts de X dans Y , alors on a les résultats suivants :

Théorème 1.2.1. Si $A \in L(X, Y)$ et $B \in L(Y, Z)$. Alors $BA : X \rightarrow Z$ est compacte si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Théorème 1.2.2. Soit Y un espace de Banach et (A_n) une suite d'opérateurs dans $K(X, Y)$ qui converge uniformément vers l'opérateur linéaire $A : X \rightarrow Y$, i.e., $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Alors A est compact.

Théorème 1.2.3. Tout opérateur de rang fini est compact.

Théorème 1.2.4. L'opérateur identité $I : X \rightarrow X$ est compact si et seulement si X est de dimension finie.

Théorème 1.2.5. (Ascoli-Arzelà) Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $\mathcal{C}(G)$ l'espace de Banach équipé de la norme du maximum

$$\|\varphi\|_{\infty, G} = \max_{x \in G} |\varphi(x)|.$$

Un ensemble $U \subset \mathcal{C}(G)$ est relativement compact si et seulement si il est uniformément borné et équicontinu, i.e., s'il existe une constante C telle que :

$$|\varphi(x)| \leq C,$$

pour tout $x \in G$ et tout $\varphi \in U$ et pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tels que pour tout $x, y \in G$, on a

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon,$$

pour toute fonction $\varphi \in U$.

1.3 Théorie de Riesz

Soient X un espace normé, $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire compact. Posons $L = I - A$ où I l'opérateur identité de X .

Théorème 1.3.1. Le sous-espace $N(L) = \{\phi \in X; L\phi = 0\}$ est de dimension finie.

Théorème 1.3.2. Le sous-espace $R(L) = \{L\phi \in X; \phi \in X\}$ est fermé.

Théorème 1.3.3. Si L est injectif, alors L est bijectif et l'opérateur inverse $L^{-1} = (I - A)^{-1}$ existe et il est borné.

Ce qui signifie, que si l'équation homogène

$$\phi - A\phi = 0$$

n'admet que la solution triviale $\phi = 0$, alors pour tout $f \in X$, l'équation non-homogène

$$\phi - A\phi = f$$

admet une solution unique $\phi \in X$ qui dépend continûment de f .

Corollaire 1.3.1. Le résultat du Théorème 1.3.3 reste valable si on remplace l'opérateur $I - A$ par l'opérateur $S - A$ où S est un opérateur linéaire borné ayant un inverse S^{-1} borné.

1.4 Théorie de Fredholm

Dans cette section, on énonce l'alternative de Fredholm qui représente un résultat fondamental dans la théorie de Fredholm. L'alternative de Fredholm est souvent utilisée pour démontrer l'existence des solutions pour les équations intégrales de seconde espèce.

Soient X et Y deux espaces normés.

Définition 1.4.1. Une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est dite non dégénérée, si

$$\forall \Phi \in X, \Phi \neq 0, \exists \Psi \in Y \text{ telle que } \langle \Phi, \Psi \rangle \neq 0,$$

$$\forall \Psi \in Y, \Psi \neq 0, \exists \Phi \in X \text{ telle que } \langle \Phi, \Psi \rangle \neq 0.$$

On appelle deux espaces normés équipés de la forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$: un système dual, et on note $\langle X, Y \rangle$.

Exemple 1.4.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble non vide, compact et mesurable au sens de Jordan vérifiant $\Omega = \overline{\Omega}$. Si $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace de Banach équipé de la norme du maximum, alors $\langle \mathcal{C}(\Omega), \mathcal{C}(\Omega) \rangle$ est un système dual pour la forme bilinéaire suivante :

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Phi(x) \Psi(x) d\mu(x), \quad \Phi, \Psi \in \mathcal{C}(\Omega).$$

Définition 1.4.2. Soit $\langle X, Y \rangle$ un système dual et $A : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire. L'opérateur $B : Y \rightarrow Y$ est appelé opérateur adjoint de A si

$$\forall \Phi \in X, \Psi \in Y, \quad \langle A\Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, B\Psi \rangle.$$

Dans ce cas, on note $B = A^*$.

Exemple 1.4.2. Soient Ω un ensemble vérifiant les hypothèses de l'exemple (1.4.1) et $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors dans $\langle \mathcal{C}(\Omega), \mathcal{C}(\Omega) \rangle$, l'opérateur intégral défini par

$$(A\Phi)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) \Phi(y) d\mu(y), \quad \Phi \in \mathcal{C}(\Omega),$$

possède un adjoint défini par

$$(A^*\Psi)(x) = \int_{\Omega} K(y, x) \Psi(y) d\mu(y), \quad \Psi \in \mathcal{C}(\Omega).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \langle A\Phi, \Psi \rangle &= \int_{\Omega} (A\Phi)(x) \Psi(x) d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} K(x, y) \Phi(y) d\mu(y) \right\} \Psi(x) d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} \Phi(y) \left\{ \int_{\Omega} K(x, y) \Psi(x) d\mu(x) \right\} d\mu(y) \\ &= \int_{\Omega} \Phi(y) (A^*\Psi)(y) d\mu(y) = \langle \Phi, A^*\Psi \rangle. \end{aligned}$$

Remarque 1.4.1. L'exemple ci-dessus reste valable, si on remplace le noyau K par un noyau faiblement singulier. (voir Annexe C)

Théorème 1.4.1. (Alternative de Fredholm) Soit le système dual $\langle X, Y \rangle$, $A : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire compact et $A^* : Y \rightarrow Y$ son adjoint compact. Alors on a :

ou bien,

$$N(I - A) = 0, \quad N(I - A^*) = 0,$$

$$(I - A)(X) = X \quad \text{et} \quad (I - A^*)(Y) = Y$$

ou bien,

$$\dim N(I - A) = \dim N(I - A^*) \in \mathbb{N}^*,$$

$$(I - A)(X) = \{f \in X / \langle f, \Psi \rangle = 0, \forall \Psi \in N(I - A^*)\},$$

$$(I - A^*)(Y) = \{g \in Y / \langle \Phi, g \rangle = 0, \forall \Phi \in N(I - A)\}.$$

On donne maintenant une application directe de l'alternative de Fredholm pour les équations linéaires de deuxième espèce :

Définition 1.4.3. Soit X un espace de Banach et $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire compact et $A^* : Y \rightarrow Y$ son adjoint compact. L'équation

$$\Phi - A\Phi = f, \quad \Phi \in X, f \in X \tag{1.1}$$

est appelée : équation linéaire de seconde espèce.

L'équation

$$\Psi - A^*\Psi = g, \quad \Psi \in Y, g \in Y \tag{1.2}$$

est appelée : équation adjointe de (1.1).

On a également leurs équations homogènes respectives

$$\Phi - A\Phi = 0 \tag{1.3}$$

$$\Psi - A^*\Psi = 0 \tag{1.4}$$

Application : D'après l'alternative de Fredholm on a :

Ou bien les équations (1.1) et (1.2) admettent une solution quels que soient les seconds membres, et cette solution est unique ;

Ou bien les équations (1.3) et (1.4) possèdent le même nombre fini de solution linéairement indépendantes Φ_1, \dots, Φ_n et Ψ_1, \dots, Ψ_n respectivement ; dans ce cas, pour que l'équation (1.1), respectivement (1.2), admette une solution, il est nécessaire et suffisant que

$$\langle f, \Psi_k \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

respectivement

$$\langle \Phi_k, g \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

La solution générale de l'équation (1.1) est

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \Phi_k$$

et celle de l'équation (1.2) est

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \Psi_k$$

où Φ_0 (resp. Ψ_0) est une solution de l'équation (1.1) (resp.(1.2)) et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des constantes arbitraires.

Remarque 1.4.2. L'alternative de Fredholm reste vraie si on remplace l'opérateur $I - A$ par $U + V$, où U est un opérateur qui admet un inverse borné et V un opérateur compact ou de rang fini.

1.5 Formules de Green

Définition 1.5.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert de frontière Γ . On note

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| < 1, |x_2| < 1\},$$

$$C^+ = \{(x_1, x_2) \in C, x_2 > 0\},$$

$$C^0 = \{(x_1, 0), |x_1| < 1\}.$$

La frontière Γ est dit de classe \mathcal{C}^2 , si pour chaque $x \in \Gamma$, on peut trouver un voisinage ouvert U et une bijection $\varphi : C \rightarrow U$ qui vérifie les conditions suivantes :

- 1) $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{C})$ et $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^2(\overline{U})$.
- 2) $\varphi(C^0) = U \cap \Gamma$.
- 3) $\varphi(C^+) = U \cap \Omega$.

Définition 1.5.2. Soient $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^2 , alors la première et la deuxième formule de Green sont valables :

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx - \int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) ds.$$

• η : la normale extérieure à $\partial \Omega$ et $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} = (\nabla(\cdot), \eta)$

1.6 Continuité et dérivabilité sous le signe intégrale

On aura besoin aussi des théorèmes suivants sur la continuité et la dérivation d'une fonction définie par une intégrale par rapport à un paramètre (cf. [Vo :72], [R :75]).

Soit (E, Λ, μ) un espace mesuré et $f : E \times I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction donnée, où I est un intervalle de \mathbb{R} . On suppose que pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est $(\Lambda, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, avec $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne.

Théorème 1.6.1. (Continuité d'une intégrale par rapport à un paramètre). Si f vérifie les hypothèses suivantes :

- (i) Pour tout $x \in E$, $f(x, \cdot)$ est continue sur I ,
- (ii) Pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t) \in L^1(E, \Lambda, \mu)$,
- (iii) Il existe une fonction $g \in L^1(E, \Lambda, \mu)$, telle que, pour tout $t \in I$,

$$|f(\cdot, t)| \leq |g(x)|.$$

Alors, la fonction

$$t \mapsto F(t) = \int_E f(x, t) d\mu(x)$$

est continue sur I .

Théorème 1.6.2. (Dérivabilité d'une intégrale par rapport à un paramètre). Si f vérifie les hypothèses suivantes :

- (i) Pour tout $x \in E$, $f(x, \cdot)$ est dérivable sur I ,
- (ii) Pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t) \in L^1(E, \Lambda, \mu)$,
- (iii) Il existe une fonction $g \in L^1(E, \Lambda, \mu)$, telle que, pour tout $t \in I$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \right| \leq |g(x)|.$$

Alors,

1. La fonction

$$t \mapsto F(t) = \int_E f(x, t) d\mu(x)$$

est dérivable sur I .

2. Pour tout $t \in I$,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in L^1(E, \Lambda, \mu) \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dt}(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

1.6 Continuité et dérivabilité sous le signe intégrale

Théorème 1.6.3. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et μ une mesure sur Γ , où Γ est une courbe fermée de classe \mathcal{C}^1 par morceaux dans \mathbb{R}^2 . Soit

$$\begin{aligned} f : \Gamma \times U &\rightarrow \mathbb{C} \\ (t, z) &\mapsto f(t, z) \end{aligned}$$

une fonction continue sur $\Gamma \times U$, telle que pour tout $t \in \Gamma$, la fonction $z \mapsto f(t, z)$ est analytique sur U . On suppose de plus que la fonction

$$(t, z) \mapsto \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}$$

est continue sur $\Gamma \times U$. Alors la fonction définie pour tout z de U par

$$F(z) = \int_{\Gamma} f(t, z) d\mu(t)$$

est analytique dans U et on a

$$\frac{d}{dz} F(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} d\mu(t).$$

Chapitre 2

Sommaire

2.1	Modèle Physique	16
2.2	Equations mathématiques	17



Position du problème physique

Résumé

L'objet de ce chapitre est de décrire le modèle physique dont l'étude mathématique (existence et unicité de la solution) sera développée dans les chapitres qui vont suivre. Ce modèle en question est régi par l'équation de Helmholtz qui constitue le modèle le plus simple pour l'étude de la diffraction ou de la propagation des ondes (cf. [CK :83]).

2.1 Modèle Physique

Dans ce chapitre, on donne l'origine physique du problème P (Modélisation). On considère Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 (en réalité (en dimension 3), Ω représente la section bornée dans une direction) vérifiant :

1. Le bord Γ de Ω est supposé compact de classe \mathcal{C}^2 .
2. L'extérieur de Ω , noté : $\Omega^e = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, est supposé connexe.

On s'intéresse maintenant à la diffraction des ondes acoustiques par l'obstacle Ω immergé dans un fluide homogène de densité ρ . La modélisation de ce genre de problèmes est déterminée par la fait que le potentiel de vitesse de propagation des ondes $w(x, t)$, le champs de vitesse v et la pression p satisfont les équations suivantes :

$$v = \frac{1}{\rho} \nabla w, \quad p - p_0 = -\frac{\partial w}{\partial t} - \gamma w, \quad (2.1)$$

où p_0 représente la pression du milieu non perturbé et γ un coefficient d'absorption. En vertu de l'équation linéarisée de la continuité (issue de la mécanique des fluide) :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (p - p_0) + \rho \nabla \cdot v = 0,$$

w satisfait l'équation des ondes dissipative suivante :

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} - c^2 \Delta w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega^e \times \mathbb{R}^+, \quad (2.2)$$

avec c est la vitesse du son dans le fluide homogène .

On s'intéresse maintenant et particulièrement aux solution périodiques de l'équation (2.2) , ce qui revient à écrire w sous la forme

$$w(x, t) = u(x) e^{-i\omega t}, \quad \omega > 0 \quad (2.3)$$

où ω est la fréquence (pulsation).

L'équation (2.2) se réduit alors à l'équation d'Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega^e, \quad (2.4)$$

avec $k^2 = \frac{\omega(\omega + i\gamma)}{c^2}$.

On choisira une détermination de k telle que :

$$\operatorname{Re}(k) > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(k) \geq 0.$$

Sur la frontière Γ , les propriétés physiques de l'obstacle nous conduisent à imposer la condition suivante :

$$(v, \eta) + \sigma (p - p_0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

où σ est le coefficient d'impédance acoustique et η la normale extérieure à Γ .

Ce qui donne moyennant (2.1) et (2.3), la condition d'impédance suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = 0, \quad (2.5)$$

avec $\lambda = i\sigma\rho(\omega + i\gamma)$.

2.2 Equations mathématiques

On définit maintenant le champ total solution de (2.4) et (2.5) comme suit :

$$u^T = u^I + u^D$$

où

- u^I : le champ incident.
- u^D : le champ diffracté.

Le champ total u^T doit satisfaire donc le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta u^T + k^2 u^T = 0 & \text{dans } \Omega^e \\ \frac{\partial u^T}{\partial \eta} + \lambda u^T = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On suppose que l'onde incidente u^I se comporte comme une onde plane, c'est à dire qu'elle s'écrit de la forme

$$u^I = A e^{ik(x, \nu)}$$

où ν représente la direction de propagation de l'onde plane avec $|\nu| = 1$ et $A \in \mathbb{C}$.

Le problème se réduit au problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta u^D + k^2 u^D = 0 & \text{dans } \Omega^e \\ \frac{\partial u^D}{\partial \eta} + \lambda u^D = f & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

avec $f = -\frac{\partial u^I}{\partial \eta} - \lambda u^I$.

Par souci de généralité, on suppose que f une fonction connue, continue sur Γ . Afin de sélectionner des solutions qui ont un sens physique ; à l'infini u^D doit satisfaire la condition suivante :

$$\frac{\partial u^D}{\partial r} - iku^D = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad r = |x| \longrightarrow +\infty \quad (S)$$

La condition (S) est appelée la condition de radiation (rayonnement) classique sortante de Sommerfeld. Cette condition modélise les ondes diffractées évanescentes, en d'autres termes ; les ondes qui s'éloignent de l'obstacle.

Le problème complet s'obtient en ajoutant la condition à l'infini (S) et en notant $u^D = u$. On obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^2(\Omega^e) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega^e}) \text{ telle que :} & \\ \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = f & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) & r = |x| \rightarrow \infty \quad (S) \end{array} \right. \quad (P)$$

Chapitre 3

Sommaire

3.1	Fonction de Green	20
3.1.1	Solutions radiales :	20
3.1.2	Calcul de la fonction de Green	21
3.1.3	Comportement à l'infini	23
3.2	Représentations intégrales	25



Fonction de Green et représentations intégrales

Résumé

Ce chapitre est consacré au calcul de la fonction de Green du milieu non perturbé (sans obstacle) et à l'étude de son comportement à l'infini. On démontrera aussi, dans ce chapitre, les représentations intégrales de la solution de l'équation de Helmholtz dans notre ouvert et dans son extérieur afin qu'on puisse ultérieurement démontrer l'existence de la solution.

3.1 Fonction de Green

On se propose dans cette section de calculer la fonction de Green adaptée à notre problème dans le milieu non perturbé.

3.1.1 Solutions radiales :

On rappelle les coordonnées polaires (r, θ) dans \mathbb{R}^2 rapportées à un repère cartésien (o, x_1, x_2)

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta, \\ x_2 = r \sin \theta, \end{cases}$$

avec $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |x|$ et $\theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$.

Définition 3.1.1. Une fonction $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est dite radiale, si $u(x) = v(r)$, avec $v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction donnée.

Dans ce paragraphe, on cherche les solutions radiales de l'équation de Helmholtz vérifiant la condition (S).

L'opérateur laplacien s'écrit en coordonnées polaires comme suit :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Cherchons maintenant les solutions radiales (*i.e.*, $u(x) = v(r)$) de l'équation de Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$. Dans ce cas, les solutions sont indépendantes de θ et on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) + k^2 v = 0.$$

Posons $v(r) = \Psi(z)$, avec $z = kr$, l'équation ci-dessus devient :

$$\frac{k}{r} \left(z \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \frac{d\Psi}{dz} \right) + k^2 \Psi = 0.$$

Ce qui est équivalent à l'équation de Bessel d'ordre zéro :

$$z^2 \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + z \frac{d\Psi}{dz} + z^2 \Psi = 0. \quad (3.1)$$

La solution générale de l'équation (3.1) est donnée sous la forme suivante (voir Annexe A) :

$$\Psi(z) = \alpha H_0^{(1)}(z) + \beta H_0^{(2)}(z), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Ou encore

$$u(x) = \alpha H_0^{(1)}(kr) + \beta H_0^{(2)}(kr), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

avec $H_0^{(1)}$ et $H_0^{(2)}$ sont respectivement les fonctions de Hankel de première et deuxième espèce d'ordre 0. On suppose maintenant que la solution générale mentionnée ci-dessus vérifie la condition de radiation (S).

3.1 Fonction de Green

Compte tenu du comportement asymptotique des fonctions de Hankel à l'infini (voir Annexe A) et les formules de dérivations

$$\frac{d}{dt} H_0^{(j)}(t) = -H_1^{(j)}(t), \quad j = 1, 2,$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= -k \left(\alpha H_1^{(1)}(kr) + \beta H_1^{(2)}(kr) \right) \\ &= -k \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left(\alpha e^{i(kr - \frac{3\pi}{4})} + \beta e^{-i(kr - \frac{3\pi}{4})} \right) + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad r \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

avec $Re(k) > 0$ et $Im(k) \geq 0$.

D'autre part, on a

$$iku = ik \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left(\alpha e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} + \beta e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})} \right) + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Il en résulte que

$$\frac{du}{dr} - iku = -2i\beta k \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})} + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

En vertu de la condition (S), on obtient :

$$-2i\beta k \sqrt{\frac{2}{k\pi}} \frac{\exp -i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{r}} = o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Compte tenu de $Im(k) \geq 0$, on en déduit que $\beta = 0$.

Enfin, on obtient :

$$u(x) = \alpha H_0^{(1)}(kr) = \alpha H_0^{(1)}(k|x|), \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (3.2)$$

3.1.2 Calcul de la fonction de Green

Définition 3.1.2. On appelle fonction de Green sortante associée à l'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^2 , la fonction $G(x, y)$ vérifiant :

1. $\Delta G(x, y) + k^2 G(x, y) = \delta$, dans \mathbb{R}^2 ,
2. $\frac{\partial G}{\partial \tau} - ikG = o\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)$, $\tau \rightarrow +\infty$,

avec $\tau = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

◆ δ désigne la masse de Dirac au point 0.

Remarque 3.1.1. $\Delta G(x, y) + k^2 G(x, y) = \delta$, est écrite au sens des distributions et on a $\Delta G(x, y) + k^2 G(x, y) = 0$, si $x \neq y$.

Cherchons maintenant une fonction de Green radiale, ce qui nous amène à trouver, via (3.2) :

$$G(x, y) = \alpha H_0^{(1)}(k|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Nous allons déterminer la constante α . Soit φ une fonction test radiale, en utilisant alors les coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \Delta G + k^2 G, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \alpha H_0^{(1)}(k\tau) (\Delta\varphi + k^2\varphi) \tau d\tau d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \alpha H_0^{(1)}(k\tau) \left[\frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\tau \frac{d\varphi}{d\tau} \right) + k^2 \varphi \right] \tau d\tau \\
&= 2\pi\alpha \left\{ \int_0^{+\infty} H_0^{(1)}(k\tau) \frac{d}{d\tau} \left(\tau \frac{d\varphi}{d\tau} \right) d\tau + k^2 \int_0^{+\infty} H_0^{(1)}(k\tau) \varphi \tau d\tau \right\} \\
&=: 2\pi\alpha \{I_1 + I_2\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

En utilisant les formules de dérivations :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} H_0^{(1)}(z) &= -H_1^{(1)}(z), \\
\frac{d}{dz} H_1^{(1)}(z) &= H_0^{(1)}(z) - \frac{1}{z} H_1^{(1)}(z),
\end{aligned}$$

ainsi que le comportement des fonctions de Hankel au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
H_0^{(1)}(z) &\sim \frac{2i}{\pi} \log z, \\
H_1^{(1)}(z) &\sim -\frac{2i}{\pi z},
\end{aligned}$$

alors par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[k\tau\varphi(\tau) H_1^{(1)}(k\tau) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} k\varphi(\tau) H_1^{(1)}(k\tau) d\tau \\
&\quad - \int_0^{+\infty} k^2\tau\varphi(\tau) \left(H_0^{(1)}(k\tau) - \frac{1}{k\tau} H_1^{(1)}(k\tau) \right) d\tau \\
&= \frac{2i}{\pi} \varphi(0) - I_2.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

En substituant (3.4) dans (3.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta G + k^2 G, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} &= 4i\alpha\varphi(0) \\
&= 4i\alpha \langle \delta, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$1 = 4i\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4i}.$$

Finalement, on trouve que

$$\boxed{G(x, y) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|x-y|), \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y.} \tag{3.5}$$

3.1.3 Comportement à l'infini

On donne ici le comportement à l'infini de la fonction de Green (3.5). Ce comportement à l'infini va nous permettre par la suite d'établir une représentation intégrale de notre solution du problème (P).

Proposition 3.1.1. *Soit G la fonction de Green (3.5). Alors pour $r = |x| \rightarrow +\infty$, on a*

1. $G(x,y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$.
2. $\frac{\partial G(x,y)}{\partial r} - ikG(x,y) = O\left(\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\right)$.
3. $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} \right) - ik \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} = O\left(\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\right)$,

uniformément pour tout $y \in K$, où K est un compact de \mathbb{R}^2 et $\eta(y)$ désigne la normal au point y .

Démonstration. 1. On désigne par (r, θ) , (r', θ') les coordonnées polaires respectives de x et y . On a

$$G(x,y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right), \quad \tau = |x-y| \rightarrow +\infty.$$

Comme

$$\tau = |x-y| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\gamma)},$$

avec $r = |x|$, $r' = |y|$ et $\gamma = \theta - \theta'$, alors on a immédiatement :

$$G(x,y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Le résultat ci-dessus découle du fait que $\tau \sim r$ au voisinage de $+\infty$ uniformément pour tout $r' \in [0, A]$.

2. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x,y)}{\partial r} &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial G(x,y)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial r} \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|x-y|) \right) \frac{\partial x_j}{\partial r} \\ &= \frac{-k}{4i} \sum_{j=1}^2 \frac{x_j - y_j}{|x-y|} H_1^{(1)}(k|x-y|) \frac{x_j}{r} \\ &= \frac{-k}{4i} \frac{(x, x-y)}{r|x-y|} H_1^{(1)}(k|x-y|). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial r} - ikG(x,y) = \frac{-k}{4i} \left(\frac{(x, x-y)}{r|x-y|} H_1^{(1)}(k|x-y|) + iH_0^{(1)}(k|x-y|) \right).$$

En tenant compte de $H_1^{(1)}(t) = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$, $t \rightarrow +\infty$ et

$$\frac{(x, x-y)}{r|x-y|} = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow +\infty,$$

uniformément pour tout $y \in K$, on obtient

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial r} - ikG(x, y) = O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right) - \frac{-k}{4i} \left(H_1^{(1)}(k|x-y|) + iH_0^{(1)}(k|x-y|) \right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Par ailleurs, moyennant le comportement à l'infini des fonctions de Hankel, on a

$$H_1^{(1)}(k|x-y|) + iH_0^{(1)}(k|x-y|) = O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Ce qui entraîne

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial r} - ikG(x, y) = O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

3. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_j} \eta_j(y) \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|x-y|) \right) \eta_j(y) \\ &= \frac{k}{4i} \frac{H_1^{(1)}(k|x-y|)}{|x-y|} \sum_{i=1}^2 (x_j - y_j) \eta_j(y) \\ &= \frac{k}{4i} \frac{(\eta(y), x-y)}{|x-y|} H_1^{(1)}(k|x-y|). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \right) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \right) \frac{\partial x_j}{\partial r} \\ &= \frac{k}{4i} \sum_{j=1}^2 \frac{x_j}{r} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{(\eta(y), x-y)}{|x-y|} H_1^{(1)}(k|x-y|) \right) \\ &\quad - \frac{k}{4i} \sum_{j=1}^2 \frac{x_j (x_j - y_j) (\eta(y), x-y)}{r|x-y|^3} H_1^{(1)}(k|x-y|) \\ &= \frac{k^2}{4i} \sum_{j=1}^2 \frac{x_j (x_j - y_j) (\eta(y), x-y)}{r|x-y|^2} H_0^{(1)}(k|x-y|) \\ &\quad - \frac{k}{4i} \sum_{j=1}^2 \frac{x_j (x_j - y_j) (\eta(y), x-y)}{r|x-y|^3} H_1^{(1)}(k|x-y|) \\ &\quad + \frac{k}{4i} \sum_{j=1}^2 \frac{x_j \eta_j(y)}{r|x-y|} H_1^{(1)}(k|x-y|). \end{aligned}$$

3.2 Représentations intégrales

Ou encore

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} \right) &= \frac{k^2 (\eta(y), x-y) (x, x-y)}{4ir |x-y|^2} H_0^{(1)}(k|x-y|) \\ &\quad - \frac{k (\eta(y), x-y) (x, x-y)}{2ir |x-y|^3} H_1^{(1)}(k|x-y|) \\ &\quad + \frac{k(x, \eta(y))}{4ir |x-y|} H_1^{(1)}(k|x-y|). \end{aligned}$$

En tenant compte de $H_1^{(1)}(t) = O(t^{-\frac{1}{2}})$, $t \rightarrow +\infty$ et

$$\begin{aligned} \frac{k (\eta(y), x-y) (x, x-y)}{2ir |x-y|^3} &= O\left(\frac{1}{r}\right), & \frac{k(x, \eta(y))}{4ir |x-y|} &= O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow +\infty, \\ \frac{(\eta(y), x-y)}{|x-y|} &= O(1), & \frac{(\eta(y), x-y) (x, x-y)}{r |x-y|^2} &= O(1), \quad r \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

on trouve que

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} \right) - ik \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} = O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{k^2}{4i} O(1) \left(H_0^{(1)}(k|x-y|) - i H_1^{(1)}(k|x-y|) \right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, le comportement des fonctions de Hankel à l'infini entraîne

$$H_0^{(1)}(k|x-y|) - i H_1^{(1)}(k|x-y|) = O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} \right) - ik \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} = O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

□

3.2 Représentations intégrales

Soit G la fonction de Green (3.5).

Théorème 3.2.1. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ solution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + K^2 u = 0, \quad \text{dans } \Omega.$$

Alors

$$\int_{\Gamma} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) G(x,y) \right\} ds(y) = \begin{cases} -u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega^e. \end{cases}$$

Démonstration. Pour $x \in \Omega$, choisissons $\alpha > 0$ assez petit pour que $S_{x,\alpha} = \{y \in \mathbb{R}^2, |x-y| = \alpha\} \subset \Omega$. En appliquant la deuxième formule de Green dans le domaine $D_\alpha = \{y \in \Omega, |x-y| > \alpha\}$ aux fonctions $u(y)$ et $G(x, \cdot)$, on obtient

$$\int_{\Gamma \cup S_{x,\alpha}} \left(u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} - G(x,y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) \right) ds(y) = 0$$

Donc

$$\int_{\Gamma} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) G(x,y) \right\} ds(y) = - \int_{S_{x,\alpha}} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) G(x,y) \right\} ds(y). \quad (3.6)$$

Montrons à présent que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{S_{x,\alpha}} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) G(x,y) \right\} ds(y) = u(x).$$

Notons

$$\begin{aligned} I^\alpha &= \int_{S_{x,\alpha}} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) G(x,y) \right\} ds(y) \\ &= I_1^\alpha - I_2^\alpha, \end{aligned}$$

avec

$$I_1^\alpha = \int_{S_{x,\alpha}} u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} ds(y)$$

et

$$I_2^\alpha = \int_{S_{x,\alpha}} \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) G(x,y) ds(y).$$

D'après les calculs établis dans la section précédente, on trouve

$$\begin{aligned} I_1^\alpha &= -\frac{k}{4i} H_1^{(1)}(k\alpha) \int_{S_{x,\alpha}} u(y) ds(y). \\ &= -\frac{k\alpha}{4i} H_1^{(1)}(k\alpha) \frac{1}{\alpha} \int_{S_{x,\alpha}} u(y) ds(y). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a via la propriété de la moyenne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \int_{S_{x,\alpha}} u(y) ds(y) &= \frac{1}{\alpha} \int_{S_{x,\alpha}} (u(y) - u(x)) ds(y) + \frac{1}{\alpha} \int_{S_{x,\alpha}} u(x) ds(y) \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{S_{x,\alpha}} (u(y) - u(x)) ds(y) + 2\pi u(x). \end{aligned}$$

3.2 Représentations intégrales

D'autre part, en vertu du théorème des accroissements finis, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\alpha} \int_{S_{x,\alpha}} (u(y) - u(x)) ds(y) \right| &\leq \frac{1}{\alpha} \int_{S_{x,\alpha}} |u(y) - u(x)| ds(y) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \int_{S_{x,\alpha}} |x - y| |\nabla u(x + \theta h)| ds(y) \\ &\leq 2\pi\alpha \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

avec $0 < \theta < 1$ et $h = x - y$. D'où

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_{S_{x,\alpha}} (u(y) - u(x)) ds(y) = 0.$$

Moyennant le comportement au voisinage de 0 suivant :

$$H_1^{(1)}(k\alpha) \sim \frac{-2i}{k\pi\alpha}$$

on obtient

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_1^\alpha = u(x).$$

Concernant I_2^α , on a

$$I_2^\alpha = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k\alpha) \int_{S_{x,\alpha}} \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) ds(y).$$

Comme

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) \right| &= \left| \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_j}{\partial y_j}(y) \eta_j(y) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_j}{\partial y_j}(y) \frac{y_j - x_j}{|x - y|} \right| \\ &\leq \sqrt{2} |\nabla u|, \end{aligned}$$

alors

$$|I_2^\alpha| \leq \frac{\alpha\pi}{\sqrt{2}} |H_0^{(1)}(k\alpha)| \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

A partir du comportement au voisinage de 0 suivant :

$$H_0^{(1)}(k\alpha) \sim \frac{2i}{\pi} \ln(k\alpha),$$

on obtient

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_2^\alpha = 0.$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I^\alpha = u(x).$$

Par suite, la relation (3.6) entraîne par passage à la limite ($\alpha \rightarrow 0$);

$$\int_{\Gamma} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) G(x, y) \right\} ds(y) = -u(x).$$

Si $x \in \Omega^e$, on applique la deuxième formule de Green dans Ω ($G(x, \cdot) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$) et nous avons directement

$$\int_{\Gamma} \left(u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) G(x, y) \right) ds(y) = 0.$$

D'où le théorème. □

Définition 3.2.1. On dit qu'une fonction $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ satisfait la condition de radiation faible sortante de Sommerfeld si :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} - iku \right|^2 ds = 0, \quad (3.7)$$

où $S_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = R\}$, $R > R_0 > 0$.

Lemme 3.2.1. La condition de Sommerfeld (S) implique la condition faible (3.7).

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que (S) est vérifiée. Alors par définition, $\exists R_0 > 0$ tel que

$$|x| = R > R_0 \implies \left| \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - iku \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{R}}.$$

D'où

$$\int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} - iku \right|^2 ds \leq \frac{\varepsilon^2}{R} \int_{S_R} ds = 2\pi\varepsilon^2.$$

Ce qui prouve que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} - iku \right|^2 ds = 0.$$

D'où la proposition □

Proposition 3.2.1. Si u est solution du problème (P), alors

$$\int_{S_R} |u|^2 ds = O(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Supposons que $S_R \subset \Omega^e$ pour $R > R_0$. En appliquant la première formule de Green aux fonctions ku et \bar{u} dans le domaine $D_R = \{y \in \Omega^e : |y| < R\}$, on obtient

$$k \int_{S_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} ds = k \int_{\Gamma} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} ds - \bar{k} |k|^2 \int_{D_R} |u|^2 dy + k \int_{D_R} |\nabla u|^2 dy \quad (3.8)$$

3.2 Représentations intégrales

Par ailleurs, le lemme 3.2.1 entraîne

$$0 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} - iku \right|^2 ds = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 + |k|^2 |u|^2 + 2Im \left(ku \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right) \right\} ds. \quad (3.9)$$

En substituant la partie imaginaire de (3.8) dans (3.9) on trouve que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{S_R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 + |k|^2 |u|^2 \right\} ds + 2Im(k) \int_{D_R} \{ |k|^2 |u|^2 + |\nabla u|^2 \} dy \right\} = -2Im \left(k \int_{\Gamma} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} ds \right). \quad (3.10)$$

Le résultat découle du fait que les 4 membres de gauche de l'équation (3.10) sont tous postifs ($Im(k) \geq 0$) et sont tous bornés quand $R \rightarrow +\infty$ car leur somme tend vers une limite finie. \square

Théorème 3.2.2. *Si u est solution du problème (P), alors*

$$\int_{\Gamma} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) G(x, y) \right\} ds(y) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ u(x), & x \in \Omega^e. \end{cases}$$

Démonstration. Pour x fixé dans Ω^e , on note $D_R = \{y \in \Omega^e, |y| < R\}$ et $S_R = \{y \in \mathbb{R}^2, |y| = R\}$ avec $R > 0$ supposé assez grand pour que $S_R \subset \Omega^e$. En appliquant la deuxième formule de Green aux fonctions $u(y)$ et $G(x, y)$ dans $D = \{y \in D_R, |x - y| > \alpha\}$ tout en choisissant α assez petit pour que $S_{x, \alpha} = \{y \in D_R, |x - y| = \alpha\} \subset D_R$, on obtient :

$$\int_{\Gamma_{\alpha, R}} \left(u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} - G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) \right) ds(y) = 0,$$

où $\Gamma_{\alpha, R} = \Gamma \cup S_{x, \alpha} \cup S_R$.

Si on note

$$A(y) = u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} - G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y),$$

on peut écrire alors

$$\begin{aligned} \int_{S_R} A(y) ds(y) &= \int_{S_R} u(y) \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta} - ikG(x, y) \right) - \int_{S_R} G(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}(y) - iku \right) ds(y) \\ &= I_1^R - I_2^R. \end{aligned}$$

Par ailleurs, via le comportement de G , l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la Proposition 3.2.1 ci-dessus, on obtient

$$I_1^R = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad I_2^R = o(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} A(y) ds(y) = 0.$$

En procédant de la même manière qu'au Théorème 3.2.1 tout en considérant la bonne direction de la normale, on montre que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{S_{x,\alpha}} A(y) ds(y) = -u(x).$$

Ce qui entraîne par passage aux limites ($\alpha \rightarrow 0$, $R \rightarrow +\infty$)

$$\int_{\Gamma} A(y) ds(y) = u(x).$$

Si $x \in \Omega$, on applique la deuxième formule de Green aux fonctions $G(x, \cdot)$ et $u(y)$ dans D_R ($G(x, \cdot) \in C^2(\overline{D_R})$) et on obtient :

$$\int_{\Gamma \cup S_R} \left(u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} - G(x,y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) \right) ds(y) = 0,$$

où $\Gamma_R = \Gamma \cup S_R$.

Comme

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} A(y) ds(y) = 0,$$

alors, au passage à la limite quand $R \rightarrow +\infty$, on trouve

$$\int_{\Gamma} A(y) ds(y) = 0.$$

D'où le résultat. □

Remarque 3.2.1. En vertu du Théorème 3.2.2, on remarque que

$$u(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

Théorème 3.2.3. Toute solution du problème (P) est analytique dans Ω^e .

Démonstration. En effet, compte tenu de l'analyticité de la fonction $G(x, \cdot)$ pour les coordonnées x_1, x_2 de x (cf. [CK :83]) et de la continuité de la fonction

$$(y, x) \mapsto u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} - G(x,y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)$$

sur $\Gamma \times \Omega^e$, les Théorèmes 1.6.3 et 3.2.2 impliquent que u est analytique dans Ω^e . □

Chapitre 4

Sommaire

4.1	Potentiel simple-couche	33
4.2	Potentiel double-couche	35
4.3	Quelques résultats de compacité	37



Quelques résultats sur la théorie du potentiel

Résumé

Ce chapitre est consacré essentiellement à un rappel étendu sur les notions élémentaires de la théorie du potentiel. On démontre ici seulement quelques résultats qui concerne le modèle étudié (cf. [CK :83], [CWZ :98]). La compacité des potentiels est basée sur la théorie des opérateurs faiblement singuliers (voir Annexe C)

4.1 Potentiel simple-couche

Définition 4.1.1. Soit $\Phi \in \mathcal{C}(\Gamma)$ et G la fonction de Green (3.5). La fonction

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi(y) G(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (4.1)$$

est appelée potentiel simple-couche de densité Φ . u possède les propriétés suivantes :

1. u est une solution de l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
2. u est continue dans tout \mathbb{R}^2 .

Théorème 4.1.1. Supposons que la fonction $K(x, y)$ est définie et continue pour tous $x \in G \subset \mathbb{R}^2$, $y \in \Gamma$, $x \neq y$, et qu'il existe des constantes positives M et $\alpha \in (0, 1]$ tels que

$$|K(x, y)| \leq M |x - y|^{\alpha-1} \quad (4.2)$$

et

$$|K(x, y) - K(z, y)| \leq M |x - z| |x - y|^{\alpha-2} \quad (4.3)$$

pour tous $x, z \in G$, $y \in \Gamma$ avec

$$2|x - z| \leq |x - y| \leq 2. \quad (4.4)$$

Alors le potentiel généralisé défini par

$$u(x) = \int_{\Gamma} K(x, y) \Phi(y) ds(y), \quad x \in G \quad (4.5)$$

Avec la densité $\Phi \in \mathcal{C}(\Gamma)$ appartient à l'espace $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Gamma)$. De plus

$$\|u\|_{\alpha,G} \leq C_{\alpha} \|\Phi\|_{\infty,\Gamma}. \quad (4.6)$$

Pour une certaine constante C_{α} en fonction de α .

Théorème 4.1.2. Le potentiel simple-couche u avec une densité continue satisfait :

$$\|u\|_{\alpha,\mathbb{R}^2} \leq C_{\alpha} \|\Phi\|_{\infty,\Gamma} \quad (4.7)$$

pour tout $0 < \alpha < 1$ avec C_{α} une constante dépend de Γ et α .

Démonstration. Soit

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

Il suffit de vérifier le cas $x, z \in \Gamma$, $x \neq z$ pour appliquer le Théorème 4.1.1. On a donc

$$\begin{aligned} |K(x, y)| &= \left| \frac{-i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) \right| \\ &\leq \frac{M}{\sqrt{|x-y|}} \\ &= M|x-y|^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K(z, y)| &= \left| \frac{-i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) + \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|z-y|) \right| \\ &\leq \frac{1}{4} \left| H_0^{(1)}(k|x-y|) - H_0^{(1)}(k|z-y|) \right| \end{aligned}$$

En utilisant les accroissements finis avec $H(t) = H_0^{(1)}(kt)$, on a :

$$|K(x, y) - K(z, y)| \leq \frac{|k|}{4} |r - r'| \max_{s \in [r, r']} |H_1^{(1)}(ks)|.$$

On a

$$|z - y| \leq \frac{3}{2} |x - y|. \quad (*.1)$$

Et

$$\frac{1}{2} |x - y| \leq |z - y|. \quad (*.2)$$

de (*.1) et (*.2) on obtient :

$$\frac{1}{2} |x - y| \leq |z - y| \leq \frac{3}{2} |x - y|. \quad (*.3)$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{|x - y|} \leq \frac{2}{|x - y|^{\frac{3}{2}}} \quad (*.4)$$

D'après (*.3) et (*.4)

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K(z, y)| &\leq M |x - y| \frac{1}{|x - y|} \\ &\leq M |x - y| \frac{1}{|x - y|^{\frac{3}{2}}} \\ &= M |x - y| |x - y|^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Le résultat s'obtient avec $\alpha = \frac{1}{2}$. □

Théorème 4.1.3. *Le potentiel simple-couche u avec une densité $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Gamma)$ satisfait :*

$$\|\nabla u\|_{\alpha, \overline{\Omega^e}} \leq C_\alpha \|\Phi\|_{\alpha, \Gamma}. \quad (4.8)$$

pour tout $0 < \alpha < 1$ avec C_α une constante dépend de Γ et α .

On désigne par les indices (+) et (-) les limites obtenues en approchant la frontière Γ de l'extérieure ou de l'intérieure, et on note :

$$h_+(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega^e}} h(y) \quad \text{et} \quad h_-(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} h(y), \quad x \in \Gamma.$$

4.2 Potentiel double-couche

Théorème 4.1.4. *Pour le potentiel simple-couche u avec une densité continue Φ , nous avons*

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \eta}(y) = \int_{\Gamma} \Phi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2} \Phi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial u_+}{\partial \eta} - \frac{\partial u_-}{\partial \eta} = -\Phi \quad \text{sur } \Gamma$$

4.2 Potentiel double-couche

Définition 4.2.1. Etant donnée une fonction $\Psi \in \mathcal{C}(\Gamma)$, la fonction

$$v(x) = \int_{\Gamma} \Psi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (4.10)$$

est appelée le potentiel double-couche de densité Ψ . v est aussi solution de l'équation de Helmholtz.

Théorème 4.2.1. *Pour le potentiel double-couche v on a les formules suivantes :*

$$v_{\pm}(x) = \int_{\Gamma} \Psi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} ds(y) \pm \frac{1}{2} \Psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.11)$$

et on a immédiatement la formule du saut suivante :

$$v^+ - v^- = \Psi \quad \text{sur } \Gamma. \quad (4.12)$$

Théorème 4.2.2. *Le potentiel double-couche v de densité continue Ψ satisfait*

$$\frac{\partial v^+}{\partial \eta} = \frac{\partial v^-}{\partial \eta} \quad \text{sur } \Gamma. \quad (4.13)$$

Théorème 4.2.3. *Le potentiel double-couche v de densité $\Psi \in \mathcal{C}(\Gamma)$ satisfait*

$$\|v\|_{\alpha, \Gamma} \leq C_{\alpha} \|\Psi\|_{\infty, \Gamma} \quad (4.14)$$

pour tout $0 < \alpha < 1$ avec C_{α} une constante dépend de Γ et α .

Démonstration. Soit $x, z \in \Gamma$, $x \neq z$ et en utilisant le comportement au voisinage de 0 de la fonction de Hankel ainsi que les résultats de l'annexe C, on obtient

$$\begin{aligned} |K(x, y)| &= \left| \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \right| = \left| \frac{k}{4i} H_1^{(1)}(k|x-y|) \frac{\langle \eta(y), x-y \rangle}{|x-y|} \right| \\ &\leq \frac{1}{4} \left| H_1^{(1)}(k|x-y|) \right| \frac{L|x-y|^2}{|x-y|} \\ &\leq M' \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
K(x, y) - K(z, y) &= \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial G(z, y)}{\partial \eta(y)} \\
&= \frac{k}{4i} \left\{ \frac{H_1^{(1)}(k|x-y|)}{|x-y|} \langle \eta(y), x-y \rangle - \frac{H_1^{(1)}(k|z-y|)}{|z-y|} \langle \eta(y), z-y \rangle \right\} \\
&= \frac{k}{4i} \left\{ \frac{H_1^{(1)}(k|x-y|)}{|x-y|} \langle \eta(y), x-z+z-y \rangle - \frac{H_1^{(1)}(k|z-y|)}{|z-y|} \langle \eta(y), z-y \rangle \right\} \\
&= \frac{k}{4i} \frac{H_1^{(1)}(k|x-y|)}{|x-y|} \langle \eta(y), x-z \rangle + \langle \eta(y), z-y \rangle \left[\frac{H_1^{(1)}(k|x-y|)}{|x-y|} - \frac{H_1^{(1)}(k|z-y|)}{|z-y|} \right] \\
&\leq \left| \frac{k}{4i} \frac{H_1^{(1)}(k|x-y|)}{|x-y|} \langle \eta(y) - \eta(x), x-z \rangle \right| + \frac{k}{4i} \frac{H_1^{(1)}(k|x-y|)}{|x-y|} \langle \eta(x), x-z \rangle \\
&\quad + \langle \eta(y), z-y \rangle \left[\frac{H_1^{(1)}(k|x-y|)}{|x-y|} - \frac{H_1^{(1)}(k|z-y|)}{|z-y|} \right] \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \frac{k}{4i} H_1^{(1)}(k|x-y|) \frac{\langle \eta(y) - \eta(x), x-z \rangle}{|x-y|} \right| \\
&= \frac{k}{4} \left| H_1^{(1)}(k|x-y|) |\eta(y) - \eta(x)| |x-z| \frac{1}{|x-y|} \right| \\
&\leq \frac{C}{|x-y|} L |x-y| |x-z| \frac{1}{|x-y|} \\
&\leq M |x-z| |x-y|^{-1}.
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left| \frac{k}{4i} \frac{H_1^{(1)}(k|x-y|)}{|x-y|} \langle \eta(x), x-z \rangle \right| \\
&\leq \frac{M}{|x-y|^2} |x-z|^2 \\
&\leq M' |x-z| |x-y|^{-1}
\end{aligned}$$

Car :

$$2|x-z| \leq |x-y| \leq 2$$

$$\begin{aligned}
|I_3| &= \left| \langle \eta(y), z-y \rangle \left[\frac{H_1^{(1)}(k|x-y|)}{|x-y|} - \frac{H_1^{(1)}(k|z-y|)}{|z-y|} \right] \right| \\
&\leq L |z-y|^2 \left| \frac{H_1^{(1)}(k|x-y|)}{|x-y|} - \frac{H_1^{(1)}(k|z-y|)}{|z-y|} \right|
\end{aligned}$$

4.3 Quelques résultats de compacité

En utilisant les accroissements finis, avec $H(t) = \frac{H_1^{(1)}(kt)}{t}$, on a :

$$\begin{aligned} |I_3| &= M |z-y|^2 \left| |x-y| - |z-y| \right| \max_{s \in [r, r']} \left| \frac{H_0^{(1)}(kt) - \frac{1}{kt} H_1^{(1)}(kt) - H_1^{(1)}(kt)}{t^2} \right| \\ &\leq M |x-z| |x-y|^{-1} \end{aligned}$$

Car :

$$\frac{1}{2} |x-y| \leq |z-y| \leq \frac{3}{2} |x-y|.$$

D'où

$$|K(x, y) - K(z, y)| \leq M |x-z| |x-y|^{-1}.$$

D'où le résultat avec $\alpha = 1$. □

Théorème 4.2.4. *Le potentiel double-couche v satisfait :*

$$\|\nabla v\|_{\alpha, \overline{\Omega^e}} \leq C_\alpha \|\Psi\|_{1, \alpha, \Gamma}. \quad (4.15)$$

pour tout $0 < \alpha < 1$ avec C_α une constante dépend de Γ et α .

4.3 Quelques résultats de compacité

On se propose ici de démontrer quelques résultats de compacité des potentiels via les propriétés des intégrales à noyau faiblement singulier (voir Annexe C).

Définition 4.3.1. On note $\Pi(\Gamma)$ l'espace linéaire de toutes les fonctions continues Ψ , tel que la dérivée par rapport la normale du potentiel double-couche Ψ est continue sur Γ . On définit :

$$\Pi(\Gamma) = \left\{ \Psi \in \mathcal{C}(\Gamma) \text{ tel que : } \frac{\partial v}{\partial \eta} \text{ est continue} \right\} \quad (4.16)$$

Proposition 4.3.1. *L'ensemble $\Pi(\Gamma)$ est non vide.*

Démonstration. Soit $\Psi \in \mathcal{C}^{1, \alpha}(\Gamma)$. D'après les résultats précédents, on trouve en particulier

$$\nabla v \in \mathcal{C}^{0, \alpha}(\Gamma). \quad (4.17)$$

En vertu de l'injection

$$\mathcal{C}^{0, \alpha}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{C}(\Gamma), \quad (4.18)$$

on en déduit que

$$\mathcal{C}^{1, \alpha}(\Gamma) \subset \Pi(\Gamma).$$

Donc $\Pi(\Gamma) \neq \emptyset$. □

Théorème 4.3.1. Soit l'opérateur intégral suivant : $S : \mathcal{C}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}(\Gamma)$ défini par

$$(S\Phi)(x) = 2 \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma \quad (4.19)$$

est compact sur $\mathcal{C}(\Gamma)$. De plus, on a $S : \mathcal{C}(\Gamma) \longrightarrow \Pi(\Gamma)$.

Démonstration. 1. Comme $\Phi \in \mathcal{C}(\Gamma)$, la régularité du potentiel simple-couche entraîne

$$S\Phi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$$

et

$$\nabla S\Phi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega^e}).$$

Moyennant

$$\|S\Phi\|_{1,\alpha} = \|S\Phi\|_{\infty} + \|\nabla S\Phi\|_{0,\alpha},$$

on obtient :

$$S\Phi \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Gamma).$$

Mais $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Gamma) \subset \Pi(\Gamma)$. Alors

$$S\Phi \in \Pi(\Gamma).$$

2. On pose

$$S_{x,1} = \{y \in \Gamma \text{ tel que } |x - y| < 1\}.$$

on a

$$\begin{aligned} (S\Phi)(x) &= 2 \int_{S_{x,1}} G(x, y) \Phi(y) ds(y) + 2 \int_{\Gamma \setminus S_{x,1}} G(x, y) \Phi(y) ds(y) \\ &=: A_1\Phi(x) + A_2\Phi(x). \end{aligned}$$

A_2 est immédiatement compact d'après le théorème (Ascoli-Arzelà).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |K(x, y)| &= |G(x, y)| = \left| \frac{-i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) \right| \\ &\leq M' |x-y|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Alors $\exists M' > 0$ et $\alpha = \frac{1}{2} \in]0, 1]$ telles que

$$|K(x, y)| \leq M' |x-y|^{\alpha-1}.$$

D'où A_2 est compact sur $S_{x,1}$. Donc S est compact sur $\mathcal{C}(\Gamma)$. □

Théorème 4.3.2. Soit l'opérateur intégral suivant : $K : \mathcal{C}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}(\Gamma)$ défini par :

$$(K\Phi)(x) = 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \Phi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma. \quad (4.20)$$

Alors K est compact sur $\mathcal{C}(\Gamma)$.

4.3 Quelques résultats de compacité

Démonstration. De la même manière que pour l'opérateur S et en tenant compte de

$$\langle \eta(y), x - y \rangle \leq L|x - y|^2,$$

on a

$$\begin{aligned} |K(x, y)| &= \left| \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \right| = \left| \frac{-ik}{4} H_1^{(1)}(k|x - y|) \frac{\langle \eta(y), x - y \rangle}{|x - y|} \right| \\ &\leq M' \end{aligned}$$

Alors $\exists M' > 0$ et $\alpha = 1 \in]0, 1]$ telles que $|K(x, y)| \leq M'|x - y|^{\alpha-1}$. Donc K est compact sur $\mathcal{C}(\Gamma)$. \square

Théorème 4.3.3. Soit l'opérateur intégral suivant : $K' : \mathcal{C}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}(\Gamma)$ défini par :

$$(K'\Phi)(x) = 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(x)} \Phi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma. \quad (4.21)$$

Alors K' est compact sur $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Démonstration. La démonstration se fait exactement de la même manière que pour l'opérateur K . \square

Théorème 4.3.4. Soit les opérateurs intégraux suivants : $T, T_0 : \Pi(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}(\Gamma)$ définis par :

$$(T\Phi)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial \eta(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \Phi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma$$

et

$$(T_0\Phi)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial \eta(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial \eta(y)} \Phi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma$$

avec

$$G_0(x, y) = \frac{-1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{|x - y|} \right).$$

Alors l'opérateur $T - T_0$ est compact sur $\Pi(\Gamma)$.

Démonstration. On a

$$G(x, y) = \frac{-i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|),$$

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} = \frac{-ik}{4} H_1^{(1)}(k|x - y|) \frac{\langle \eta(y), y - x \rangle}{|x - y|}$$

et

$$\frac{\partial G_0(x, y)}{\partial \eta(y)} = \frac{-1}{2\pi} \frac{\langle \eta(y), x - y \rangle}{|x - y|^2}.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\nabla_x \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \right) &= \frac{k^2(x-y)}{4i|x-y|^2} H_0^{(1)}(k|x-y|) \langle \eta(y), x-y \rangle \\ &\quad - \frac{k(x-y)}{2i|x-y|^3} H_1^{(1)}(k|x-y|) \langle \eta(y), x-y \rangle + \frac{k\eta(y)}{4i|x-y|} H_1^{(1)}(k|x-y|) \\ \nabla_x \left(\frac{\partial G_0(x, y)}{\partial \eta(y)} \right) &= \frac{\eta(y)}{2\pi|x-y|^2} \langle \eta(y), x-y \rangle - \frac{(x-y)}{|x-y|^4} \langle \eta(y), x-y \rangle.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}K(x, y) &= \nabla_x \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \right) - \nabla_x \left(\frac{\partial G_0(x, y)}{\partial \eta(y)} \right) \\ &= \frac{k(x-y) \langle \eta(y), x-y \rangle}{4i|x-y|^4} \left\{ k|x-y|^2 H_0^{(1)}(k|x-y|) - 2H_1^{(1)}(k|x-y|)|x-y| - \frac{4i}{k\pi} \right\} \\ &\quad + \frac{k\eta(y)}{4i|x-y|^2} \left\{ H_1^{(1)}(k|x-y|)|x-y| + \frac{4i}{2\pi k} \right\}.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}K(x, y) \sim H(x, y) &= \frac{k(x-y) \langle \eta(y), x-y \rangle}{4i|x-y|^4} \left\{ -2 \left(\frac{-2i}{k\pi|x-y|} \right) |x-y| + k|x-y|^2 \left(\frac{2i}{\pi} \ln(k|x-y|) \right) - \frac{4i}{k\pi} \right\} \\ &\quad + \frac{k\eta(y)}{4i|x-y|^2} \left\{ \left(\frac{-2i}{k\pi|x-y|} \right) |x-y| + \frac{2i}{\pi k} \right\}.\end{aligned}$$

Cependant

$$H(x, y) \sim \frac{k^2 \langle \eta(y), x-y \rangle (x-y)}{2\pi|x-y|^2} \ln(k|x-y|) = H'(x, y)$$

et

$$\begin{aligned}|H'(x, y)| &= \left| \frac{k^2 \langle \eta(y), x-y \rangle (x-y)}{2\pi|x-y|^2} \ln(k|x-y|) \right| \\ |H'(x, y)| &\leq \frac{Lk^2}{\pi} |x-y| |\ln(k|x-y|)| \\ &\leq M|x-y| \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \\ &\leq M'.\end{aligned}$$

D'où $\exists M' > 0$ et $\alpha = 1 \in]0, 1]$ telles que $|K(x, y)| \leq M'|x-y|^{\alpha-1}$. Donc $T - T_0$ est compact sur $\Pi(\Gamma)$. \square

Chapitre 5

Sommaire

5.1	Unicité	43
5.2	Existence	44
5.2.1	Existence via un potentiel combiné . . .	44
5.2.2	Existence via la représentation intégrale	50



Existence et unicité

Résumé

L'objet de ce chapitre démontre l'existence et l'unicité de notre problème (P). L'unicité est basée essentiellement sur la condition de radiation et le lemme de Rellich. L'existence se fera par deux méthodes, la première est basée sur un potentiel combiné (simple-double couche) et dans la seconde on utilisera la représentation intégrale.

5.1 Unicité

On rappelle d'abord notre problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^2(\Omega^e) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega^e}) \text{ telle que :} & \\ \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = f & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) & r = |x| \rightarrow \infty \quad (S) \end{array} \right. \quad (P)$$

Lemme 5.1.1. (Rellich) Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^e) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega^e})$ solution de

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega^e, \quad k > 0,$$

vérifiant

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |u|^2 ds = 0.$$

Alors $u = 0$ dans Ω^e .

Démonstration. Voir Annexe B. □

Théorème 5.1.1. Si u est une solution de (P) vérifiant la condition

$$\text{Im}(\overline{k}\lambda) \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (U)$$

alors u est unique.

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (P) et posons $w = u_1 - u_2$. Alors w est solution du problème (P) homogène (i.e., $\frac{\partial w}{\partial \eta} + \lambda w = 0$ sur Γ). En s'inspirant de la démonstration de la proposition 3.2.1, on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{S_R} \left\{ \left| \frac{\partial w}{\partial \eta} \right|^2 + |k|^2 |w|^2 \right\} ds + 2 \text{Im}(k) \int_{D_R} \{ |k|^2 |w|^2 + |\nabla w|^2 \} dy \right\} = -2 \text{Im} \left(k \int_{\Gamma} w \frac{\partial \overline{w}}{\partial \eta} ds \right).$$

Mais, en vertu de la condition au bord, on a

$$\text{Im} \left(k \int_{\Gamma} w \frac{\partial \overline{w}}{\partial \eta} ds \right) = \text{Im} \left(\overline{k} \int_{\Gamma} \lambda |w|^2 ds \right).$$

Alors, en tenant compte de la condition (U), on distingue deux cas :

1. Si $\text{Im}(k) > 0$, on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} |w|^2 dy = 0.$$

Il en résulte que $\forall R > R_0$, $w = 0$ dans D_R . D'où $w = 0$ dans Ω^e .

2. Si $\text{Im}(k) = 0$, on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |w|^2 ds = 0.$$

D'où $w = 0$ dans Ω^e via le lemme de Rellich.

Ce qui entraîne dans les deux cas que $u_1 = u_2$ dans Ω^e . □

5.2 Existence

Dans cette section, on va passer d'un problème aux limites posé en domaine non borné à un problème sur un domaine borné. Cela revient à étudier une équation intégrale de second espèce et appliquer la théorie de Riesz pour démontrer l'existence de la solution.

5.2.1 Existence via un potentiel combiné

Proposition 5.2.1. *Le potentiel combiné (simple-double couche)*

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left\{ G(x, y) + i\chi \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \right\} \Phi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \quad (5.1)$$

avec $\chi \neq 0$ un nombre réel arbitraire tel que $\chi \text{Re}k > 0$ est une solution du problème (P) si et seulement si la densité $\Phi \in \Pi(\Gamma)$ vérifie l'équation intégrale

$$(1 - i\chi\lambda)\Phi - (K' + i\chi T + i\chi\lambda K + \lambda S)\Phi = -2f. \quad (5.2)$$

Démonstration. En effet, d'après les résultats des chapitres précédents, le potentiel (5.1) est une solutions de classe $\mathcal{C}^2(\Omega^e) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega^e})$ de l'équation de Helmholtz et qui vérifie la condition de Sommerfeld. Cela revient seulement à prouver l'équivalence de la condition d'impédance avec l'équation intégrale. On pose alors

$$u(x) = u_1(x) + i\chi u_2(x),$$

avec

$$\begin{cases} u_1(x) = \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi(y) ds(y), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \\ \text{et} \\ u_2(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} \Phi(y) ds(y), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \end{cases}$$

5.2 Existence

Si $x \in \Gamma$, alors moyennant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{1+}}{\partial \eta} = \frac{1}{2}K'\Phi - \frac{1}{2}\Phi, & x \in \Gamma, \\ u_{2+} = \frac{1}{2}K\Phi + \frac{1}{2}\Phi, & x \in \Gamma, \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} u_+ &= \frac{1}{2}S\Phi + i\chi \left(\frac{1}{2}K\Phi + \frac{1}{2}\Phi \right), \\ \frac{\partial u_+}{\partial \eta} &= \frac{1}{2}K'\Phi - \frac{1}{2}\Phi + i\chi \frac{1}{2}T\Phi. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+}{\partial \eta} + \lambda u_+ &= \frac{1}{2}K'\Phi - \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2}i\chi T\Phi + \lambda \left(\frac{1}{2}S\Phi + i\chi \left(\frac{1}{2}K\Phi + \frac{1}{2}\Phi \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ (1 - i\chi\lambda)\Phi - \left(K' + i\chi T + i\chi\lambda K + \lambda S \right) \Phi \right\}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Afin d'appliquer la théorie de Riesz, on commence dans une première étape par démontrer que l'équation (5.2) homogène admet une solution triviale $\Phi \in \Pi(\Gamma)$.

Proposition 5.2.2. *Si la condition (U) est satisfaite et si l'équation intégrale (5.2) admet une solution Φ dans $\Pi(\Gamma)$, alors Φ est unique.*

Démonstration. En s'inspirant encore une fois de la démonstration de la Proposition 3.2.1, on obtient

$$-2\text{Im} \left(k \int_{\Gamma} u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \eta} ds \right) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{S_R} \left\{ \left| \frac{\partial u_+}{\partial \eta} \right|^2 + |k|^2 |u_+|^2 \right\} ds + 2\text{Im}(k) \int_{D_R} \{ |k|^2 |u|^2 + |\nabla u|^2 \} dy \right\}.$$

Ou encore (par la condition au bord : $f = 0$)

$$2\text{Im} \left(\bar{k} \int_{\Gamma} \lambda |u_+|^2 ds \right) = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{S_R} \left\{ \left| \frac{\partial u_+}{\partial \eta} \right|^2 + |k|^2 |u_+|^2 \right\} ds + 2\text{Im}(k) \int_{D_R} \{ |k|^2 |u|^2 + |\nabla u|^2 \} dy \right\}.$$

Alors, en tenant compte de $\text{Im}(k) \geq 0$, on distingue deux cas :

1. Si $\text{Im}(\bar{k}\lambda) > 0$ sur Γ , on a

$$\int_{\Gamma} |u_+|^2 ds = 0.$$

D'où $u_+ = 0$ sur Γ .

2. Si $\text{Im}(\bar{k}\lambda) = 0$ sur Γ , on a les cas suivants :

a). Si $\text{Im}(k) > 0$, on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} |u|^2 dy = 0.$$

et donc $u = 0$ dans Ω^e . Ce qui entraîne, via l'unicité de la solution, que $u_+ = 0$ sur Γ .
 b). Si $Im(k) = 0$, on obtient

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |u_+|^2 ds = 0$$

et $u_+ = 0$ sur Γ par le Lemme de Rellich.
 Par conséquent

$$\frac{\partial u_+}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

D'après les propriétés des potentiel simple et double-couche, on a

$$\begin{aligned} u_+ - u_- &= (u_{1+} - u_{1-}) + i\chi(u_{2+} - u_{2-}) = i\chi\Phi, \\ \frac{\partial u_+}{\partial \eta} - \frac{\partial u_-}{\partial \eta} &= \left(\frac{\partial u_{1+}}{\partial \eta} - \frac{\partial u_{1-}}{\partial \eta} \right) + i\chi \left(\frac{\partial u_{2+}}{\partial \eta} - \frac{\partial u_{2-}}{\partial \eta} \right) = -\Phi. \end{aligned}$$

Comme $u_+ = 0$ et $\frac{\partial u_+}{\partial \eta} = 0$ sur Γ , on trouve que u_- satisfait l'équation

$$u_- + i\chi \frac{\partial u_-}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (5.3)$$

D'après la formule de Green, on a :

$$\int_{\Gamma} \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial \eta} ds = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy - k^2 \int_{\Omega} |u|^2 dy.$$

Moyennant (5.3), on trouve

$$i\chi \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u_-}{\partial \eta} \right|^2 ds = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy - k^2 \int_{\Omega} |u|^2 dy.$$

D'où

$$\chi Im(i\bar{k}) \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u_-}{\partial \eta} \right|^2 ds = -Im(k) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy - Im(k) \int_{\Omega} |k|^2 |u|^2 dy.$$

Ou encore

$$\chi Re(k) \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u_-}{\partial \eta} \right|^2 ds = -Im(k) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy - Im(k) \int_{\Omega} |k|^2 |u|^2 dy.$$

Comme $\chi Re(k) > 0$ et $Im(k) \geq 0$ on obtient :

$$\frac{\partial u_-}{\partial \eta} = 0.$$

En vertu de (5.3), on a

$$u_- = 0.$$

Puisque $u_- = i\chi\Phi$ sur Γ , cela entraîne $\Phi = 0$ sur Γ . □

5.2 Existence

Théorème 5.2.1. *Si la condition (U) est satisfaite, l'équation intégrale (5.2) admet une solution unique dans $\Pi(\Gamma)$.*

L'unicité étant démontrée dans la Proposition 5.2.2, reste à démontrer l'existence. Pour ce faire, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 5.2.1. *Soit $T : \Pi(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma)$ l'opérateur défini par :*

$$(T\Phi)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial \eta(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} \Phi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma.$$

Alors, on a

$$TS = -(I + K')(I - K'). \quad (5.4)$$

Démonstration. En utilisant la représentation intégrale pour u un potentiel simple-couche de densité $\Phi \in \mathcal{C}(\Gamma)$, on a

$$\begin{cases} u_+(x) = \int_{\Gamma} u_+(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} ds(y) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_+}{\partial \eta}(y) G(x,y) ds(y), & x \in \Omega^e, \\ -u_-(x) = \int_{\Gamma} u_-(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} ds(y) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_-}{\partial \eta}(y) G(x,y) ds(y), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Alors

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} S\Phi$$

et

$$\begin{cases} \frac{1}{2} Tu_+ = \frac{\partial u_+}{\partial \eta} + \frac{1}{2} K' \left(\frac{\partial u_+}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_+}{\partial \eta} \right) \\ \quad = \frac{1}{2} (I + K') \left(\frac{\partial u_+}{\partial \eta} \right), \\ \frac{1}{2} Tu_- = -\frac{\partial u_-}{\partial \eta} + \frac{1}{2} K' \left(\frac{\partial u_-}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_-}{\partial \eta} \right) \\ \quad = -\frac{1}{2} (I - K') \left(\frac{\partial u_-}{\partial \eta} \right). \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} Tu_+ = -\frac{1}{4} (I + K') (I - K') \Phi, \\ \frac{1}{2} Tu_- = -\frac{1}{4} (I - K') (I + K') \Phi. \end{cases}$$

D'où

$$TS\Phi = -(I + K')(I - K')\Phi, \quad \Phi \in \mathcal{C}(\Gamma) .$$

Ce qui prouve que :

$$TS = -(I + K')(I - K').$$

D'où le résultat. □

Lemme 5.2.2. Soit $Im(k) > 0$. Alors $T : \Pi(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma)$ est bijectif et son inverse est donné par

$$T^{-1} = -S(I - K')^{-1}(I + K')^{-1}. \quad (5.5)$$

Démonstration. Soit $T\Phi = 0$. Alors le potentiel double-couche v de densité $\Phi \in \Pi(\Gamma)$ est solution des problèmes intérieur et extérieur de Neumann homogène suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ telle que} \\ \Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega. \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^2(\Omega^e) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega^e}) \text{ telle que} \\ \Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega^e. \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \\ u \text{ vérifie (S)}. \end{array} \right.$$

Pour le problème intérieur, on applique directement la première formule de Green aux fonctions \bar{v} et v dans le domaine Ω et on obtient :

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dy = k^2 \int_{\Omega} |v|^2 dy$$

En prenant partie imaginaire, on obtient :

$$0 = 2Re(k) Im(k) \int_{\Omega} |v|^2 dy$$

Comme $Re(k) > 0$ et $Im(k) > 0$, on trouve

$$v = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Donc par unicité de la solution, $v_- = 0$ sur Γ .

Pour le problème extérieur, il suffit de s'inspirer encore une fois de la relation (3.10) :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{S_R} \left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|^2 + |k|^2 |v|^2 \right\} ds + 2Im(k) \int_{D_R} \{ |k|^2 |v|^2 + |\nabla v|^2 \} dy \right\} = 0.$$

On obtient, en vertu du lemme de Rellich que

$$v = 0 \quad \text{dans } \Omega^e.$$

L'unicité entraîne encore que $v_+ = 0$ sur Γ .

5.2 Existence

Ainsi T est injectif via la formule du saut $\Phi = \nu_+ - \nu_- = 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Comme $Im(k) > 0$, on peut aussi montrer que le problème de Dirichlet intérieur admet une solution triviale. En suivant la même démarche que dans la proposition 5.2.1 (équivalence avec une équation intégrale) pour les problèmes extérieurs de Neumann et de Dirichlet moyennant les résultats énoncés dans [CK :83], on a

$$N(I - K') = \{0\},$$

et

$$N(I + K) = \{0\}.$$

L'Alternative de Fredholm entraîne

$$N(I + K') = \{0\}.$$

Comme les opérateurs K et K' sont compacts (voir le chapitre précédent), alors par la théorie de Riesz on obtient que $(I + K')^{-1}$ et $(I - K')^{-1}$ existent et sont bornés. Maintenant d'après le Lemme précédent, on a

$$TS = -(I + K')(I - K').$$

D'où

$$T^{-1} = -S(I - K')^{-1}(I + K')^{-1}.$$

Donc

$$\Phi = -S(I - K')^{-1}(I + K')^{-1}f$$

satisfait $T\Phi = f$. Par conséquent T est surjectif; donc bijectif et son inverse est donné par (5.5). \square

Preuve du Théorème 5.2.1. Comme T n'est pas compact, on ne peut pas appliquer directement la théorie de Riesz pour démontrer l'existence de la solution. Pour cela on régularise

$$(1 - i\chi\lambda)\Phi - (K' + i\chi T + i\chi\lambda K + \lambda S)\Phi = -2f$$

de la manière suivante

$$A_{k_0} \left[(1 - i\chi\lambda)I - (K' + i\chi(T - T_{k_0}) + i\chi\lambda K + \lambda S) \right] \Phi - i\chi\Phi = -2A_{k_0}f,$$

avec

$$A_{k_0} = (T_{k_0})^{-1} = -S(I - K')^{-1}(I + K')^{-1}$$

et $Im(k_0) > 0$.

On a transformé (5.2) en une équation équivalente

$$i\chi\Phi + B\Phi = -2A_{k_0}f \tag{5.6}$$

où

$$B = A_{k_0} \left[-(1 - i\chi\lambda)I + (K' + i\chi(T - T_{k_0}) + i\chi\lambda K + \lambda S) \right] \Phi.$$

L'opérateur B est compact car A_{k_0} est compact et

$$H = -(1 - i\chi\lambda)I + (K' + i\chi(T - T_{k_0}) + i\chi\lambda K + \lambda S)$$

est borné du fait que

$$T - T_{k_0} = (T - T_0) - (T_{k_0} - T_0)$$

soit compact.

Le résultat découle immédiatement moyennant (5.6) et du Corollaire 1.3.1. \square

5.2.2 Existence via la représentation intégrale

Proposition 5.2.3. *Soit u solution du problème (P). Alors la valeur $\Phi := u|_{\Gamma} \in \Pi(\Gamma)$ est une solution de l'équation intégrale :*

$$(1 - i\chi\lambda)\Phi - (K + S\lambda + i\chi T + i\chi K'\lambda)\Phi = -Sf - i\chi(f + K'f), \quad (5.7)$$

où $\chi \neq 0$ et $\chi \operatorname{Re}(k) > 0$

Réciproquement, soit $\Phi \in \Pi(\Gamma)$ solution de (1). Alors

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left\{ \Phi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta(y)} - [f(y) - \lambda(y)\Phi(y)] G(x, y) \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \quad (5.8)$$

est une solution du problème (P) et $u|_{\Gamma} = \Phi$.

Démonstration. Soit u solution du problème (P). D'après la représentation intégrale, on trouve que

$$\begin{aligned} Ku - S \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - u &= 0, \\ Tu - K' \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned}$$

Via $\frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = f$ sur Γ , on obtient avec $\Phi := u|_{\Gamma}$

$$K\Phi + S\lambda\Phi - \Phi = Sf$$

et

$$T\Phi + K'\lambda\Phi + \lambda\Phi = f + K'f.$$

En multipliant par $i\chi$ et en sommant, on trouve :

$$(1 - i\chi\lambda)\Phi - (K + S\lambda + i\chi T + i\chi K'\lambda)\Phi = -Sf - i\chi(f + K'f).$$

Réciproquement, soit $\Phi \in \Pi(\Gamma)$ solution de (5.7). Comme dans l'approche par potentiel combiné, il suffit de montrer que u donné par (5.8) vérifie la condition d'impédance (ie : $\frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = f$). On a :

$$u_- = \frac{1}{2}K\Phi - \frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{2}S(f - \lambda\Phi),$$

et

$$\frac{\partial u_-}{\partial \eta} = \frac{1}{2}T\Phi - \frac{1}{2}(f - \lambda\Phi) - \frac{1}{2}K'(f - \lambda\Phi).$$

5.2 Existence

En multipliant par $i\chi$ et en sommant on a

$$u_- + i\chi \frac{\partial u_-}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

On applique la première formule de Green aux fonctions \bar{u} , u dans Ω , on obtient :

$$i\chi \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u_-}{\partial \eta} \right|^2 ds = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy - k^2 \int_{\Omega} |u|^2 dy.$$

En prenant la partie imaginaire, on a

$$\begin{aligned} \chi \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u_-}{\partial \eta} \right|^2 ds &= -\text{Im}(k^2) \int_{\Omega} |u|^2 dy \\ &= -2\text{Re}(k) \text{Im}(k) \int_{\Omega} |u|^2 dy. \end{aligned}$$

On multiplie par $\text{Re}(k)$ et on obtient :

$$\chi \text{Re}(k) \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u_-}{\partial \eta} \right|^2 ds = -2[\text{Re}(k)]^2 \text{Im}(k) \int_{\Omega} |u|^2 dy$$

Comme $\chi \text{Re}(k) > 0$ et $\text{Im}(k) \geq 0$. Donc :

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u_-}{\partial \eta} \right|^2 ds = 0 \implies \frac{\partial u_-}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Mais

$$u_- + i\chi \frac{\partial u_-}{\partial \eta} = 0 \implies u_- = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Comme $u_- = 0$ sur Γ , la formule du saut donne

$$u_{+|\Gamma} = \Phi.$$

En vertu de $\frac{\partial u_-}{\partial \eta} = 0$ sur Γ , on obtient

$$\frac{\partial u_+}{\partial \eta} = f - \lambda \Phi.$$

Ce qui achève la preuve. □

Théorème 5.2.2. Si $\text{Im}(\bar{k}\lambda) \geq 0$, l'équation intégrale (5.7) admet une solution unique $\Phi \in \Pi(\Gamma)$.

Démonstration. L'unicité découle immédiatement de la Proposition précédente pour $f = 0$. En suivant la même démarche utilisée dans le potentiel combiné, on obtient l'équation intégrale régularisée suivante :

$$A_{k_0} \left[(1 - i\chi\lambda) I - (K + i\chi(T - T_{k_0}) + i\chi\lambda K' + \lambda S) \right] \Phi - i\chi\Phi = -T_{k_0} \left[Sf + i\chi(f + K'f) \right].$$

D'où la preuve. □

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire on démontré des résultats d'unicité et d'existence pour notre problème (P) via la théorie du potentiel. On a transformé le problème aux limites posé en domaine non-borné en un problème régi par une équation intégrale de seconde espèce posée dans un domaine borné régulier (compact).

Comme perspectives, on se propose à l'avenir :

1. d'étudier la régularité de la solution suivant la régularité de f .
2. d'étudier notre problème dans le cas \mathbb{L}^2 et dans le cas des espaces de Sobolev avec poids.
3. d'étudier notre problème dans le cas d'une frontière non bornée.

Annexe A

Sommaire

A.1 Définitions	56
A.2 Relations de dérivation	56
A.3 Comportement à l'origine	57
A.4 Comportement à l'infini	57



Rappel sur les fonctions de Bessel

Résumé

Dans cette Annexe nous donnons un bref aperçu sur les fonctions de Bessel et de Hankel ainsi que quelques unes de leurs principales propriétés (cf. [AS :64]).

A.1 Définitions

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

L'équation (A.1) est appelée équation de Bessel et sa solution est donnée par

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x),$$

où J_n et Y_n sont respectivement les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce d'ordre n données par les expressions suivantes :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + C \right] J_0(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

et

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k [\psi(k+1) + \psi(n+k+1)]}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}, \end{aligned}$$

avec $a_k = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{1}{m}$, $\psi(1) = -C$, $\psi(k) = -C + a_{k-1}$, $k \geq 2$ et C la constante de Euler, i.e., $C = 0,57721\dots$

On désigne respectivement par $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ les fonctions de Hankel de première espèce et deuxième espèce d'ordre n , et on écrit

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i Y_n(x),$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - i Y_n(x),$$

où i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Remarque A.1.1. La solution générale de (A.1) peut s'écrire aussi sous la forme

$$y(x) = \alpha H_n^{(1)}(x) + \beta H_n^{(2)}(x),$$

avec α et β des constantes complexes arbitraires.

A.2 Relations de dérivation

On énonce maintenant des relations de récurrence concernant la dérivation des fonctions de Hankel

$$\frac{d}{dx} (x^{-n} H_n^{(j)}(x)) = -x^{-n} H_{n+1}^{(j)}(x), \quad j = 1, 2,$$

$$\frac{d}{dx} H_n^{(j)}(x) = H_{n-1}^{(j)}(x) - \frac{x}{n} H_n^{(j)}(x), \quad j = 1, 2.$$

A.3 Comportement à l'origine

Les relations suivantes donnent les premiers termes du comportement des fonctions de Hankel d'ordre 0 lorsque x tend vers zéro.

$$H_0^{(1)}(x) \sim \frac{2i}{\pi} \log x, \quad x \rightarrow 0^+,$$

$$H_1^{(1)}(x) \sim -\frac{2i}{\pi x}, \quad x \rightarrow 0^+.$$

A.4 Comportement à l'infini

Les relations suivantes donnent les premiers termes du comportement des fonctions de Hankel d'ordre n lorsque r tend vers l'infini

$$H_n^{(1)}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i(r-(2n+1)\frac{\pi}{4})} + O(r^{-\frac{3}{2}}), \quad r \rightarrow +\infty,$$

$$H_n^{(2)}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-i(r-(2n+1)\frac{\pi}{4})} + O(r^{-\frac{3}{2}}), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Annexe **B**

Sommaire

B.1 Enoncé du lemme de Rellich	60
B.2 Preuve du lemme de Rellich	60



Lemme de Rellich

Résumé

On se propose ici de démontrer le lemme de Rellich énoncé au chapitre 5.

On rappelle le lemme de Rellich

B.1 Enoncé du lemme de Rellich

Lemme B.1.1. (Rellich) Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^e) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega^e})$ solution de

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega^e, \quad k > 0,$$

vérifiant

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |u|^2 ds = 0.$$

Alors $u = 0$ dans Ω^e .

B.2 Preuve du lemme de Rellich

Démonstration. On note (r, θ) les coordonnées polaires et soit D un disque ouvert centré à l'origine tel que $\overline{\Omega} \subset D$. Comme u est analytique réelle, alors pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, on peut faire un développement en série de Fourier comme suit :

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r) e^{in\theta}, \quad (\text{B.1})$$

où

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

$a_n(r)$ est solution de l'équation de Bessel dont la solution est donnée par

$$a_n(r) = \alpha_n H_n^{(1)}(kr) + \beta_n H_n^{(2)}(kr)$$

où α_n et β_n des constantes. Par l'égalité de Parseval, on a

$$\int_{|y|=R} |u|^2 ds = 2\pi R \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(R)|^2.$$

D'après l'hypothèse du Lemme, on obtient

$$R |a_n(R)|^2 \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty.$$

En vertu du comportement à l'infini des fonction de Hankel et du fait que

$$\overline{H_n^{(1)}(kr)} = H_n^{(2)}(kr),$$

on en déduit que

$$\alpha_n = \beta_n = 0.$$

B.2 Preuve du lemme de Rellich

Par conséquent

$$u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \setminus D.$$

En utilisant un argument de type prolongement analytique, on obtient que

$$u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^e$$

car Ω^e est connexe.

□

Annexe C

Sommaire

C.1 Géométrie du domaine	64
C.2 Définitions et compacité	64



Quelques résultats sur les opérateurs intégraux à noyau faiblement singulier

Résumé

Dans cette Annexe, nous rappelons quelques résultats sur les opérateurs intégraux à noyau faiblement singulier ([K :98]). Ces résultats sont d'une grande utilité dans la théorie du potentiel.

C.1 Géométrie du domaine

Lemme C.1.1. Soit Γ de classe \mathcal{C}^2 . Alors il existe une constante positive L telle que

$$|\eta(x) \cdot \{x - y\}| \leq L |x - y|^2 \quad (\text{C.1})$$

et

$$|\eta(x) - \eta(y)| \leq L |x - y| \quad (\text{C.2})$$

pour tout $x, y \in \Gamma$.

C.2 Définitions et compacité

Définition C.2.1. Soit $G \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble compact non vide. Un noyau K est dit faiblement singulier s'il est défini et continu pour tout $x, y \in G \subset \mathbb{R}^m$, $x \neq y$ et il existe des constantes positives M et $\alpha \in]0, m]$ telles que

$$|K(x, y)| \leq M |x - y|^{\alpha - m}, \quad x, y \in G, x \neq y. \quad (\text{C.3})$$

Considérons l'opérateur intégral suivant : $A : \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma)$ définie par

$$(A\Phi)(x) = \int_{\Gamma} K(x, y)\Phi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (\text{C.4})$$

où K est un noyau faiblement singulier.

Théorème C.2.1. L'opérateur intégral (C.4) est compact sur $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Démonstration. -Idée de la preuve : On va approcher l'opérateur en question par une suite d'opérateurs compacts. Pour cela nous choisissons une fonction linéaire et continue par morceaux $h : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2t - 1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, nous définissons la suite des noyaux continus $K_n : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ comme suit

$$K_n(x, y) = \begin{cases} h(n|x - y|)K(x, y), & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Les opérateurs intégraux $A_n : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathcal{C}(G)$ correspondant aux noyaux K_n sont compacts via le théorème d'Ascoli-Arzelà.

On montre ensuite que

C.2 Définitions et compacité

$$\|A_n - A\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

C'est ainsi que A est compact comme limite d'opérateurs compacts. □

Théorème C.2.2. *Soit K un noyau faiblement singulier. Alors dans $\langle \mathcal{C}(\Omega), \mathcal{C}(\Omega) \rangle$, l'opérateur intégral défini par*

$$(A\Phi)(x) = \int_G K(x, y)\Phi(y)d\mu(y), \quad x \in G,$$

possède un adjoint défini par

$$(B\Psi)(x) = \int_G K(y, x)\Psi(y)d\mu(y), \quad x \in G.$$

Démonstration. Le résultat découle immédiatement de l'exemple 1.4.2 en utilisant la suite (A_n) (du théorème ci-dessus) dans la preuve du théorème précédent. □

Bibliographie

- [AS :64] M. ABRAMOWITZ AND I. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Washington, 1964.
- [CWZ :98] S. N. CHANDLER-WILDE, C. ROSS AND B. ZHANG, Scattering by infinite one-dimensional rough surfaces , *Proc. R. Soc. Lond. A.* 455, (1999) 3767-3787.
- [CK :83] D. COLTON AND R. KRESS, *Integral equation methods in scattering theory*, John Wiley, New York, 1983.
- [K :98] R. KRESS, *linear integral equations*, Second edition, Springer, 1998.
- [R :75] W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1975.
- [Vo :72] K. VO-KHAC, *Distribution, Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles*, Tomes 1 et 2, Vuibert, Paris, 1972.