



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de **Master**
Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

**Nouveaux résultats d'existence et
d'unicité pour les équations
différentielles fractionnaires**

Réalisé par : **KSOURI Ala Eddine**
NADJI Tahar

Dirigé par : **M. HAKKAR Naima**

Membres de jury :

M. NASRALLAH Ilham

Président

Dr. AOUAFI Rabiaa

Examineur

2020-2021

Dédicace

Je dédie ce travail

A ma famille, elle que m'a doté d'une éducation digne, son amour a fait de moi ce que je suis aujourd'hui :

A ma très chère mère

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

A mon très chère père

Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager. Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

A mes très chers frères Chouki, Ahlem, Selma, Bouchra et Djihen.

Et à tous mes chers amis, sans exception.

Ala Eddine

Je dédie ce travail

*Particulièrement à **Mon père feu**, pour le goût à l'effort qu'il a suscité en moi, de par sa rigueur.*

A ma très chère mère

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

A vous mes frères et sœurs, qui m'avez toujours soutenu et encouragé durant ces années d'études. A tous mes amis et connaissances.

Tahar

Remerciement

Avan toute chose, nous tenons à remercier "**Allah**" le tous puissant, pour nous avoir donné la force et la patience.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciement.

À notre encadreur de mémoire **Mme Hakkar Naima** prof de Université Abbes Laghour de Khenchela, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragement, sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous on fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de nos familles.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également au nos camarades de la promotion 2021 de Mathématiques et nos amis pour leur compagnie, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Finalement, nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons plusieurs résultats d'existence et d'unicité pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de **Caputo** avec des conditions locales et non locales dans des espaces de **Banach** de dimension infinie.

Mots clés :Équation Différentielles, calcul fractionnaire, dérivées fractionnaire au sens de Caputo.

Abstract

In this thesis, we present several existence results for certain classes of differential equations of fractional order in the sense of Caputo with non local conditions and local on Banach spaces of infinite dimension.

Key words :Fractional Differential Equations, fractional calculus, Caputo fractional derivative...

Table des matières

Notation	1
1 Préliminaire	4
1.1 Espace vectoriel normé	4
1.1.1 Espaces métriques	4
1.1.2 Espaces de Banach	5
1.1.3 Continuité dans les espaces normés	6
1.1.4 Compacité	6
1.1.5 Convexité	6
1.1.6 Contraction	7
1.1.7 Théorèmes de point fixe	9
2 Introduction à la dérivation fractionnaire	11
2.1 La dérivation fractionnaire	11
2.1.1 Outils de base	11
2.1.2 Fonction Gamma	11
2.1.3 Fonction Bêta	12
2.1.4 Liens entre la fonction Gamma et la fonction Bêta	12
2.2 Dérivées Fractionnaire	14
2.2.1 Approche de Riemann-Liouville	14
2.2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	16
3 Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires	21
3.1 Présentation du problème	21
3.1.1 Résultats d'existence et d'unicité	24
3.2 Application	29
Bibliographie	30

Notation

\mathbb{R}_*^+ : Ensemble des nombres réels positifs non nuls.

\mathbb{R}, \mathbb{C} : Ensemble des nombres réels (resp. complexes).

\mathbb{N} : Ensemble des nombres naturels.

$[a, b)$: Intervalle semi-ouvert d'extrémité a et b .

$Re(\cdot)$: Partie réelle d'un nombre complexe.

$Im(\cdot)$: Partie imaginaire d'un nombre complexe.

$[Re(\alpha)]$: Partie entière de $Re(\alpha)$.

$L^p(1 \leq p < \infty)$: L'espace des fonctions réelles f telles que f est mesurable et $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$.

L^∞ : L'espace des fonctions essentiellement bornées.

$L_{loc}^1(\Omega)$: Espace des fonctions localement intégrables tel que f est mesurable et pour tout compact K de Ω : $\int_K |f(t)| dt < \infty$.

$C([a, b])$: Espace des fonctions continues sur $[a, b]$.

$C^1([a, b])$: $f \in C^1([a, b])$ si f est dérivable sur $[a, b]$, et f' est continue sur $[a, b]$.

$C^n([a, b])$: Espace des fonctions n -fois continument différentiables.

$C^\infty([a, b])$: Si f est C^k sur $[a, b]$ pour tout k . Autrement dit, si f est indéfiniment dérivable sur $[a, b]$.

$AC^n([a, b])$: L'espace des fonctions à valeurs complexes $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ continues sur $[a, b]$ telles que $f^{(n-1)}(x) \in AC([a, b])$, c'est-à-dire :

$$AC^n([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ et } (D^{n-1}f)(x) \in AC([a, b]) \quad \left(D = \frac{d}{dx} \right) \right\}.$$

$AC([a, b])$: L'espace des fonctions absolument continue sur $[a, b]$.

$C(J, \mathbb{R})$: L'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans \mathbb{R} .

Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires à émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années.

Selon une thèse d'histoire des mathématiques récente, la question des dérivées fractionnaires fut abordée dès 1695 par Leibnitz dans une lettre à l'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande qu'elle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction x , Leibnitz répond que cela même à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des difficultés. Des nombreux mathématises se sont penchés sur cette question, en particulière **Euler** (1730), **Fourier** (1822), **Abel** (1823), **Liouville** (1832), **Riemann** (1847)..., etc. Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

La théorie des équations différentielles fractionnaires à émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux événements dans le monde réels.

Par exemple, les équations différentielles sont souvent applicables dans ingénierie, la physique, la chimie, la biologie,...etc.

Nous intéressons à étudie certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Notre objectif est de présenter quelques résultats d'existence de solutions pour quelques classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Pour obtenir l'existence des solution, des conditions suffisantes seront considérées dans l'étude des différentes classes des problèmes aux limites associés aux équations différentielles d'ordre fractionnaire de cette thèse.

La démarche suivie consiste à ramener la recherche de l'existence (sous des conditions convenables) des solutions à la recherche de l'existence des points fixes d'opérateurs appropriés moyennant la fonction de **Green** en appliquant différentes alternatives non linéaires dans les espaces de **Banach**, pour montrer l'existence des points fixes de ces opérateurs qui sont les solutions de nos problèmes.

Cette méthode est basé sur de théorèmes du point fixe tels que, le théorème de point fixe de **Banach**.

Dans ce mémoire, ces études en donnant résultats d'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire, moyennant la dérivée fractionnaire de **Caputo** dans des espaces de **Banach** de dimension infini, Cette étude se fera principalement à l'aide de théorème de point fixe de Banach combiné avec la technique de la mesure de non compacité.

Ce mémoire comprend trois chapitres.

Le premier chapitre intitulé "Preliminaires", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude.

Le deuxième chapitre intitulé "Introduction à la dérivation fractionnaire" nous proposons quelques définitions qui s'y rapportent les dérivations fractionnaires.

Le troisième chapitre intitulé "problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires" on s'intéresse à l'existence et l'unicité de solution pour le équation différentielle d'ordre fractionnaire de type **Caputo**.

Préliminaire

1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.1

Soit E un espace vectoriel réel. Une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée norme sur X si elle vérifie :

Positivité :

$$N(x) \geq 0, \forall x \in E.$$

Séparation :

$$N(x) = 0 \iff x = 0.$$

Homogénéité

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x).$$

On dit que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

On utilise bien souvent la notation $\| \cdot \|$ pour une norme.

Exemple 1.1

Soient $E = C([a, b], \mathbb{R})$ un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On définit les normes suivantes :

$\| f \|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ est dite norme de la moyenne.

$\| f \|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ est dite norme quadratique.

$\| f \|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ est dite norme uniforme.

1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.2

Une distance sur un ensemble $E \neq \emptyset$ est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

1.

$$\forall x, y, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

2.

$$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x),$$

3.

$$\forall x, y, z \in E, \quad d(x, y, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Définition 1.3

Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble et d est une distance.

Exemple 1.2

L'application

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = |x - y|$$

définie une distance, appelée distance usuelle.

1.1.2 Espaces de Banach

Définition 1.4

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy dans E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n > n_0, \|u_n - u_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.5

Un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E .

Définition 1.6

On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.

1.1.3 Continuité dans les espaces normés

Définition 1.7

Soit $(E, \| \cdot \|)$ et $(E', \| \cdot \|')$ deux espaces normés, et $f : E \rightarrow E'$ une application. f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : \| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon.$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Elle est dite continue sur E si elle est continue en tout point de E .

1.1.4 Compacité

Définition 1.8

Soient E un ensemble quelconque et A une partie de E . Une recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i \in I}$ des parties de E vérifiant : $A \subset \cup_{i \in I} B_i$.

Définition 1.9

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace normé. On dit que E est relativement compact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des parties de E dont le diamètre est inférieure à ε .

Définition 1.10

Un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ est dit compact s'il est relativement compact et complet.

Théorème 1.1

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un e.v.n sur E ou \mathbb{C} de dimension finie. Alors les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées de E .

1.1.5 Convexité

Définition 1.11

On dit que $\mathbb{C} \subset E$ est un ensemble convexe si :

$$\forall t \in [0, 1], \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, ta + (1 - t)b \in \mathbb{C}.$$

1.1.6 Contraction

Théorème 1.2

Le principe de contraction de Banach est le résultat le plus élémentaire dans la théorie du point fixe. Comme il est basé sur un processus itératif, alors il peut être rendu effectif sur un ordinateur pour trouver le point fixe d'une application contractante ; il peut ainsi réaliser l'exactitude désirée tout en jouant sur le nombre d'itérations dont on a besoin.

Ce théorème est **S.Banach** en 1922, il s'agit d'une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduite par Liouville en 1837 et développe système pratiquement pour la première fois par Picard en 1890.

Définition 1.12

Soit (E, d) un espace métrique, une application $f : E \rightarrow E$ est dite Lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si :

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \text{ pour tout } x, y \in E.$$

k est dite constante de Lipschitz.

Remarque 1.1

Une application Lipschitzienne est nécessairement continue.

Définition 1.13

L'application Lipschitzienne f est appelée non expansive si $k \leq 1$. contraction si $k < 1$.

Définition 1.14

Soit (E, d) un espace métrique, et $f : E \rightarrow E$ une application, on dit qu'un point $x \in E$ est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$

Théorème 1.3 (théorème du point fixe de contraction)

Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une contraction avec k sa constante de Lipschitz. Alors f admet une unique point fixe $u \in X$.

En outre, pour tout

$$x \in X, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = u.$$

avec

$$d(f^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x, f(x))$$

Preuve 1.1

— *Unicité* : Supposons qu'il existe $x, y \in X$ tel que

$$x = f(x) \text{ et } y = f(y).$$

Alors

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Par conséquent, $d(x, y) = 0$ ce qui entraîne $x = y$.

— *Existence* : Soit $x \in X$. Nous allons établir que $f^n(x)$ est une suite de Cauchy.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq kd(f^{n-1}(x), f^n(x)) \leq \dots \leq k^n d(x, f(x)).$$

Ainsi, pour $m > n$, où $n \geq 0$, on a :

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f^{n+2}(x)) + \dots + d(f^{m-1}(x), f^m(x)),$$

$$\leq k^n d(x, f(x)) + \dots + k^{m-1} d(x, f(x)),$$

$$\leq k^n d(x, f(x)) [1 + k + k^2 + \dots + k^{m-n-1}],$$

$$= \frac{k^n - k^m}{1 - k} d(x, f(x)).$$

Ainsi, pour $m > n$, $n \geq 0$,

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq \frac{k^n}{1 - k} \cdot d(x, f(x)).$$

Ceci montre que $\{f^n(x)\}$ est une suite de Cauchy et comme X est espace complet, alors il existe $u \in X$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = u$.

De plus, la continuité de f entraîne que

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x)) = f(u).$$

par conséquent, u est un point fixe de f . Ainsi si $m \rightarrow \infty$ alors

$$d(f^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)).$$

donne un résultat dans ce sens.

1.1.7 Théorèmes de point fixe

Nous avons besoin des théorèmes de point fixe suivants :

Définition 1.15

Soit X et Y deux espaces de Banach et $T : X \rightarrow Y$, un opérateur linéaire, on dit que T est compact si pour tout B_u on a $T(B_u)$ est relativement compacte avec

$$B_u = \{x \in X, \|x\| \leq u\}.$$

Remarque 1.2

L'ensemble $\{Tx/x \in X\}$, est dit relativement compacte dans X si son adhérence est compacte.

Théorème 1.4 (*Théorème d'Arzela Ascoli*)

Soit I un intervalle fermé et borné de \mathbb{R} . Un sous ensemble A de $C(I, X)$, est dit relativement compacte dans $C(I, X)$, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

i A est uniformément borné, c'est à dire $\exists k > 0, \forall u \in A$ on a

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in I} |u(x)| \leq k.$$

ii A est équicontinue, c'est - à - dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in I, \forall u \in A,$$

telle que

$$(|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.5 (*Théorème de point fixe de Banach*)

Soit (U, d) un espace métrique, complet et soit $T : U \rightarrow U$ une application telle que :

$$\forall x, y \in U, d(T_x, T_y) \leq kd(x, y), \text{ avec } k \in [0, 1[,$$

alors l'application T admet un unique point fixe $u^* \in U$.

Théorème 1.6 (Théorème de Krasnoselskii)

Soit X un espace de Banach et soit M un sous ensemble convexe, fermé et non vide de X . Soit A, B deux opérateurs telles que :

- $Ax + By \in M$, pour tous $x, y \in M$.
- A est compact et continu.
- B est contractant. Alors il existe $z \in M$ tel que $z = Az + Bz$.

Introduction à la dérivation fractionnaire

2.1 La dérivation fractionnaire

L'idée principale de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et d'intégration itérées. Le terme fractionnaire est un terme trompeur mais il est retenu pour suivre l'usage dominant.

2.1.1 Outils de base

2.1.2 Fonction Gamma

En mathématiques la fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (excepté en certains points).

Définition 2.1

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$, on définit la fonction suivante :

$$\Gamma : \alpha \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \quad (2.1)$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi - plan complexe où la partie réelle est strictement positive. En intégrant par parties, on peut voir que

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad Re(\alpha) > 0. \quad (2.2)$$

En particulier

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

2.1.3 Fonction Bêta

Fonction Bêta (qui est un type de l'intégrale d'Euler, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1 - \tau)^{q-1} d\tau, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0. \quad (2.4)$$

2.1.4 Liens entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0. \quad (2.5)$$

L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale

$$I^{(1)} f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u) du.$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x (x - t) f(t) dt.$$

Plus généralement le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I^{(n)} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$$

$$I^{(n)} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \text{ pour tout entier } n. \quad (2.6)$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma :

$$(n-1)! = \Gamma(n).$$

Riemann rendu compte que le seconde membre de (2.6) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 2.2

soit $f \in C[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt, \quad (2.7)$$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α , telle que $\alpha \in]-\infty, +\infty[$. et l'intégral.

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt. \quad (2.8)$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann - Liouville d'ordre α , telle que $b \in]-\infty, +\infty[$. et l'intégral.

Remarque 2.1

Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).

Théorème 2.1

Pour $f \in C[a, b]$, L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi - groupe .

$$I_{a^+}^{(\alpha)} [I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x), \text{ pour } \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2.9)$$

Preuve 2.1

La preuve découle directement de la définition

$$I_{a^+}^{(\alpha)} [I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(s-t)^{\alpha-1}} \int_a^x \frac{f(u)}{(t-u)^{\beta-1}} du.$$

Or $f \in C[a, b]$, d'après le théorème de Fubini on et par le changement $t = u + s(x-u)$, on obtient

$$I_{a^+}^{(\alpha)} [I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(t-u)^{\alpha+\beta-1}} du = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x).$$

Où $B(\alpha, \beta)$ désigne la fonction Bêta.

Proposition 2.1.1

Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann - Liouville pour $a = 0$ d'une fonction f qui possède la transformée de Laplace $F(s)$ dans le demi plan $Re(s) > 0$ est

$$L(I^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} F(s).$$

Exemple 2.1

On a $f(t) = (t-a)^m$. A l'aide de changement de variable $\tau = a + x(t-a)$ on trouve :

$$I^\alpha (t-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^m d\tau,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^m dx, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+m} \beta(m+1, \alpha), \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(t-a)^{\alpha+m}.
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0.5, m = 1$ et $a = 0$, on aura

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

2.2 Dérivées Fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

2.2.1 Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n - 1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$${}^R D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-p} f(t)). \quad (2.10)$$

Remarque 2.2

Si f est de classe C^n , alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées on obtient

$${}^R D^p f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = {}^G D^p f(t).$$

Dans ce cas l'approche de Gronwall-Lettonie et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

Exemple 2.2

- La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville.
En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-

Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$${}^R D^p C = \frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}.$$

— La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Riemann-Liouville.

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > -1$, alors on a :

$${}^R D^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} {}^R D^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\alpha-p} \int_a^t (1-s)^{n-p-1} s^\alpha ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1) B(n-p, \alpha+1)}{\Gamma(n-p)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1) \Gamma(n-p) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p) \Gamma(\alpha-p+1) \Gamma(n+\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

alors

$${}^R D^{0.5} t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

Proposition 2.2.1

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,

$${}^R D^p (I^p f(t)) = f(t),$$

en général on a :

$${}^R D^p (I^q f(t)) = {}^R D^{p-q} f(t).$$

et si $p-q < 0$,

$${}^R D^{p-q} f(t) = I^{q-p} f(t).$$

En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$${}^R D^{-p} ({}^R D_t^q f(t)) = {}^R D^{q-p} f(t) - \sum_a^m [{}^R D_t^{q-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}, \text{ avec } m-1 \leq q < m.$$

2. *Composition avec les dérivées d'ordre entier* La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si :

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\frac{d^n}{dt^n}({}^R D^p f(t)) = {}^R D^{n+p} f(t).$$

mais

$${}^R D^p \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}^R D^{n+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}.$$

3. *Composition avec les dérivées fractionnaires.*

Soit $n-1 \leq p < n$ et $m-1 \leq q < m$, alors

$${}^R D^p ({}^R D_t^q f(t)) = {}^R D^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}^R D^{q-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(p-k+1)},$$

$${}^R D^q ({}^R D^p f(t)) = {}^R D^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^n [{}^R D^{p-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)},$$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire ${}^R D^p$ et ${}^R D^q$ ($p \neq q$), ne commutent que si et

$$[{}^R D^{p-k} f(t)]_{t=a} = 0, \text{ pour tout } k = 1, 2, \dots, n,$$

et

$$[{}^R D^{q-k} f(t)]_{t=a} = 0, \text{ pour tout } k = 1, 2, \dots, m..$$

2.2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 2.3

Pour une fonction donnée f sur l'intervalle $[a, b]$ la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo de f , d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :

$${}^c D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f_n(s) ds = I^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(t),$$

ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désignant la partie entière de α .

Proposition 2.2.2

Nous donnons les propriétés suivantes :

1. Si f est une fonction continue on a

$${}^c D^\alpha I^\alpha f = f.$$

2. On suppose que $n - 1 < \alpha < n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ l'existe, alors

$${}^c D^\alpha D^m f(t) = {}^c D^{\alpha+m} f(t) \neq D^{m\alpha} D^\alpha f(t).$$

3. Soit $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ l'existe alors, on a les propriétés suivantes pour l'opérateur de Caputo.

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^c D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}^c D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).$$

4. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur. Soit $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ linéaire

$${}^c D^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^c D^\alpha f(t) + {}^c D^\alpha g(t).$$

Lemma 2.2.3

Si $x \in AC^n([0, 1])$, alors La Dérivée de Caputo ${}^c D^\alpha f(t)$ existe presque par tout sur $[0, 1]$, ou

$$AC^n([0, 1]) = \{x \in AC^{n-1}([0, 1]),$$

(x^{n-1}) est absolument continu, et n est le plus petit entier supère ou égal à α

Lemma 2.2.4

Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle,

$${}^c D^\alpha f(t) = 0.$$

admet la solution

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

tel que : $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n - 1, n = [\alpha] + 1$.

Preuve 2.2

supposons que ${}^c D^\alpha f(t) = 0$, d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens

de Caputo en obtient

$$I^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) = 0.$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds = 0.$$

puisque $\Gamma(n-\alpha-1) \neq 0$, on a

$$\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds = 0.$$

et par suite

$$t^{n-\alpha-1} * f^n(s) = 0.$$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité.

$$L(t^{n-\alpha-1} * f^n(t))(s) = L(0)(s) = 0. F(s) = L(f)(s)$$

on obtient

$$\frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}} (s^n F(s) - \sum_{k=0}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)) = 0.$$

alors

$$s^n F(s) - \sum_{k=0}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0) = 0.$$

donc

$$F(s) = \sum_{k=0}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0).$$

on applique maintenant la transformée inverse de Laplace

$$L^{-1}(F(s)) = L^{-1} \left(\sum_{k=0}^n s^{-k} f^{(k-1)}(0) \right) (t).$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^n f^{n-k}(0) L^{-1}(s^{-k})(t), \\ &= \sum_{k=0}^n f^{n-k}(0) \cdot \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}. \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $i = k - 1$ on trouve

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} t^i,$$

pour

$$c_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!},$$

Supposons maintenant que :

$$f(t) = \sum_i^{n-1} c_i t^i.$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo aux deux membres de l'égalité :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= {}^c D^\alpha \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i D^\alpha t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right)^n t^i. \end{aligned}$$

puisque $(0 \leq i \leq n-1 < n)$ on a

$${}^c D^\alpha f(t) = 0.$$

Lemma 2.2.5

Soit $\alpha > 0$, alors

$$I^{\alpha c} D^\alpha f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n = [\alpha] + 1$.

Preuve 2.3

On a d'après

$${}^c D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(t).$$

Appliquant aux deux membre de l'égalité

$$\begin{aligned} (I^\alpha) {}^c D^\alpha f(t) &= I^\alpha I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\ &= I^n \frac{d^n}{dt^n} f(t). \end{aligned}$$

on a par

$$\begin{aligned} {}^{RL} D^\alpha f(t) &= \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) (I^{n-\alpha} f(t)), \\ {}^{RL} D^n f(t) &= \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) (I^{n-n} f(t)), \\ &= \frac{d^n}{dt^n} f(t). \end{aligned}$$

donc

$$(I^\alpha)^c D^\alpha f(t) = (I^n)^{RL} D^n f(t).$$

on a

$$\begin{aligned}(I^n)^{RL} D^n f(t) &= f(t) - \sum_{j=1}^n \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} f^{(n-j)}(0) \\ &= (I^\alpha)^c D^\alpha f(t).\end{aligned}$$

on pose $k = n - j$,

$$\begin{aligned}(I^\alpha)^c D^\alpha f(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0), \\ &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k, \\ &= f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k \text{ avec } c_k = -\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.\end{aligned}$$

Théorème 2.2

Soient, $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, alors la relation entre l'opérateur de Riemann-Liouville et de Caputo est :

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0).$$

Exemple 2.3

La différentiation de la fonction constant pour l'opérateur de Caputo est.

$${}^c D^\alpha k = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} k^{(n)} dx = 0.$$

Alors

$${}^c D^\alpha k = 0, \quad k = \text{const.}$$

Et pour Riemann-Liouville.

$${}^{RL} D^\alpha k = \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0, \quad k = \text{const.}$$

Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires

Ce chapitre est consacré de l'existence du solution d'un problème aux limites fractionnaire.

3.1 Présentation du problème

On s'intéresse dans ce chapitre à un problème fractionnaire (3.1) engendré par l'équation suivante :

$${}^c D_{0+}^q y(t) - f(t, y(t)) = 0, \quad t \in (0, 1), \quad (3.1)$$

à laquelle on associe les conditions

$$\begin{cases} y(0) + y'(0) + y''(0) = 0, \\ y(\eta) + y'(\eta) + y''(\eta) = 0, \\ y(1) + y'(1) + y''(1) = 0. \end{cases}$$

où ${}^c D_{0+}^q$ est la dérivée de l'ordre fractionnaire de **Caputo**, $f \in C([0, 1] \times E, E)$. (E est de **Banach**) et $2 < q \leq 3$

Lemma 3.1.1

Pour $q > 0$ et $y(t) \in C[0; 1]$, l'équation fractionnaire homogène

$${}^c D^q y(t) = 0.$$

possède une solution

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}.$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n-1$, et $n = [q] + 1$.

Lemma 3.1.2

On suppose que $u \in C[0, 1] \cap L^1[0, 1]$ alors

$$({}^c I_{0+}^q)^c D_{0+}^q y(t) = y(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n-1$, et $n = [q] + 1, q > 0$.

Commencent d'abord par la résolution du problème auxiliaire.

Lemma 3.1.3

Soit $f(t) \in C[0, 1]$ une fonction donnée et $2 < q \leq 3$. La solution unique du problème fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^q y(t) - f(t, y(t)) = 0, & t \in (0, 1), \\ y(0) + y'(0) + y''(0) = 0, \\ y(\eta) + y'(\eta) + y''(\eta) = 0, \\ y(1) + y'(1) + y''(1) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

est donnée par

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, y(s)) ds + \left[\frac{t^2 - 3t + 1}{\Delta} \right] \times \int_0^\eta \Phi(s) f(s, y(s)) ds \\ + \left[\frac{\eta^2(t-1) + \eta t(2-t)}{\Delta} \right] \times \int_0^1 \Psi^*(s) f(s, y(s)) ds, \text{ où} \\ \Delta = (\eta^2 - \eta)\Gamma(q) \neq 0, \\ \Phi(s) = (\eta - s)^{q-1} + (q-1)(\eta - s)^{q-2} + (q-3q+2)(\eta - s)^{q-3}, \\ \Psi^*(s) = (1-s)^{q-1} + (q-1)(1-s)^{q-2} + (q-3q+2)(1-s)^{q-3}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Si est seulement si y est une solution du problème de la valeur limite d'ordre fractionnaire.

Preuve 3.1

Appliquant le lemme (3.1.1) on trouve :

$$y(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, y(s)) ds + c_1 + c_2 t + c_3 t^2. \quad (3.4)$$

en utilisant la condition (3.2) à y en (3.4) et par des calculs algébriques.

On peut avoir

$$\left[\frac{t^2 - 3t + 1}{\Delta}\right] \times \int_0^\eta \Phi(s)f(s, y(s))ds + \left[\frac{\eta^2(t - 1) + \eta t(2 - t)}{\Delta}\right] \\ \times \int_0^1 \Psi^*(s)f(s, y(s))ds - c_1 - c_2t - c_3t^2 = 0.$$

Or, la première condition dans (3.2) implique que

$$y(0) = -y'(0) - y''(0).$$

$$\left[\frac{1}{\Delta}\right] \int_0^\eta \Phi(s)f(s, y(s))ds - \left[\frac{\eta^2}{\Delta}\right] \int_0^1 \Psi^*(s)f(s, y(s))ds - c_1 = 0$$

donc

$$c_1 = \frac{1}{\Delta} \left[\int_0^\eta \Phi(s)f(s, y(s))ds - \eta^2 \int_0^1 \Psi^*(s)f(s, y(s))ds \right]. \quad (3.5)$$

et

$$y'(0) = -y(0) - y''(0)$$

$$\frac{2t - 3}{\Delta} \int_0^\eta \Phi(s)f(s, y(s))ds + \frac{\eta^2 + 2\eta - 2\eta t}{\Delta} \int_0^1 \Psi^*(s)f(s, y(s))ds - c_2 - c_3t = 0.$$

$$\frac{-3}{\Delta} \int_0^\eta \Phi(s)f(s, y(s))ds + \frac{\eta^2 + 2\eta - 2\eta t}{\Delta} \int_0^1 \Psi^*(s)f(s, y(s))ds = c_2.$$

alors :

$$c_2 = \frac{1}{\Delta} \left[(\eta^2 + 2\eta) \int_0^1 \Psi^*(s)f(s, y(s))ds - 3 \int_0^\eta \Phi(s)f(s, y(s))ds \right]. \quad (3.6)$$

et on à

$$y''(0) = -y(0) - y'(0)$$

$$\frac{2}{\Delta} \int_0^\eta \Phi(s)f(s, y(s))ds - \frac{2\eta}{\Delta} \int_0^1 \Psi^*(s)f(s, y(s))ds = 2c_3.$$

Donc :

$$c_3 = \frac{1}{\Delta} \left[\int_0^\eta \Phi(s)f(s, y(s))ds - \eta \int_0^1 \Psi^*(s)f(s, y(s))ds \right]. \quad (3.7)$$

En substituant les valeurs de c_1, c_2, c_3 à (3.4) on obtient (??).

3.1.1 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section on démontre l'existence et l'unicité de la solution dans l'espace de Banach $F = C([0, 1], E)$ muni de la norme

$$\| y \|_F = \sup_{0 \leq t \leq 1} \| y(t) \|_E .$$

où E est un espace de Banach.

Théorème 3.1

Supposons $2 < q \leq 3$, $f : [0, 1] \times E \longrightarrow E$ alors le problème (3.1) est équivalent à l'équation intégral

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, y(s)) ds + \left[\frac{t^2 - 3t + 1}{\Delta} \right] \\ &\times \int_0^\eta \Phi(s) f(s, y(s)) ds + \left[\frac{\eta^2(t-1) + \eta t(2-t)}{\Delta} \right] \times \int_0^1 \Psi^*(s) f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Preuve 3.2

Supposons que $y \in X$ est solution de (3.1) et de notons le membre droit par $W(t)$, alors on a

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, y(s)) ds + \left[\frac{t^2 - 3t + 1}{\Delta} \right] \times \int_0^\eta \Phi(s) f(s, y(s)) ds \\ &\quad + \left[\frac{\eta^2(t-1) + \eta t(2-t)}{\Delta} \right] \int_0^1 \Psi^*(s) f(s, y(s)) ds, \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, y(s)) ds + \frac{1}{\Delta} (t^2 - 3t + 1) \int_0^\eta \Phi(s) f(s, y(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} (\eta^2(t-1) + \eta t(2-t)) \int_0^1 \Psi^*(s) f(s, y(s)) ds, \\ &= I_{0+}^q f(s, y(s)) ds + \frac{t^2 - 3t + 1}{\Delta} \int_0^\eta \Phi(s) f(s, y(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} (\eta^2(t-1) + \eta t(2-t)) \int_0^1 \Psi^*(s) f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

et on a

$$W'(t) = I_{0+}^{q-1} f(s, y(s)) + \frac{2t-3}{\Delta} \int_0^\eta \Phi(s) f(s, y(s)) ds + \frac{\eta^2 + 2\eta - 2\eta t}{\Delta} \int_0^1 \Psi^*(s) f(s, y(s)) ds. \quad (3.8)$$

par une dérivation de (3.8), on trouve

$$W''(t) = I_{0+}^{q-2} f(s, y(s)) ds + \frac{2}{\Delta} \int_0^\eta \Phi(s) f(s, y(s)) ds - \frac{2\eta}{\Delta} \int_0^1 \Psi^* f(s, y(s)) ds$$

$$+\frac{2}{\Delta}(\int_0^\eta \Phi(s)f(s,y(s))ds - \eta \int_0^1 \Psi^* f(s,y(s))ds),$$

et comme

$$c_3 = \frac{1}{\Delta}[\int_0^\eta \Phi(s)f(s,y(s))ds - \eta \int_0^1 \Psi^*(s)f(s,y(s))ds]$$

donc

$$W''(t) = I_{0+}^{q-2} f(s,y(s)) + 2c_3$$

et on a

$${}^c D_{0+}^q f(t) = I_{0+}^{n-q} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right)$$

alors

$${}^c D_{0+}^q W(t) = I^{2-q} W''(t)$$

$$\begin{aligned} {}^c D_{0+}^q W(t) &= I^{2-q} (I_{0+}^{q-2} f(s,y(s)) + 2c_3) \\ &= f(s,y(s)) + 0 \\ &= f(s,y(s)). \end{aligned}$$

en d'autres termes on peut vérifier que

$$\begin{cases} y(0) + y'(0) + y''(0) = 0, \\ y(\eta) + y'(\eta) + y''(\eta) = 0, \\ y(1) + y'(1) + y''(1) = 0. \end{cases}$$

par la suite $y \in F$ une solution de (3.1)

Réciproquement : Soit $y \in E$ une solution du problème (3.1), par la méthode utilisée dans la preuve du lemme (3.1.3), on obtiens que $y \in E$ est une solution de l'équation (3.1).

Tout le long de cette section, on supposera que $f \in C([0,1] \times E; E)$ et on définit l'opérateur intégral

$$T : E \longrightarrow E$$

par

$$\begin{aligned} Ty(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,y(s))ds + \left[\frac{t^2 - 3t + 1}{\Delta} \right] \times \int_0^\eta \Phi(s)f(s,y(s))ds \\ &\quad + \left[\frac{\eta^2(t-1) + \eta t(2-t)}{\Delta} \right] \int_0^1 \Psi^*(s)f(s,y(s))ds. \end{aligned}$$

Alors on a le lemme suivant

Lemma 3.1.4

La fonction $y \in E$ est solution du problème fractionnaire (3.1) si et seulement si

$$Ty(t) = y(t), \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

Théorème 3.2

Soit $f : [0, 1] \times E \rightarrow E$ (E est de Banach), une fonction continue on suppose que elle satisfaisant les conditions

$$\| f(t, y) - f(t, y^*) \|_F \leq k \| y - y^* \|_F, \quad k > 0, \quad y, y^* \in F, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.9)$$

et soit d, r deux réel positive, $0 < d < 1$ si

$$\frac{2}{\Delta} M.k \leq d; \quad \frac{2}{\Delta} M.N \leq (1 - d)r \quad (3.10)$$

tg :

$$N = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t, 0)| \quad \text{et} \quad M = \sup_{t \in [0, 1]} |\Phi(t)|.$$

Alors le problème aux limite (3.1) admet une solutions unique dans F

Preuve 3.3

On va transformer le problème aux limites fractionnaire à un problème de point fixe. D'après le lemme (3.1.2), le problème fractionnaire (3.1) possède une solution si seulement si l'opérateur T admet un point fixe dans E . Soit l'ensemble fermé borné,

$$B_r = \{y \in F, \quad \sup_{t \in [0, 1]} \| y(t) \|_E \leq r\}.$$

★ on montre que $T(B_r) \subset B_r$. Soit

$$y \in B_r \quad \| Ty(t) \|_E$$

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, y(s)) ds \right\|_E + \left\| \frac{t^2 - 3t + 1}{\Delta} \int_0^\eta \Phi(s) f(s, y(s)) ds \right\|_E \\ & \quad + \left\| \frac{\eta^2(t-1) + \eta t(2-t)}{\Delta} \int_0^1 \Psi^*(s) f(s, y(s)) ds \right\|_E, \\ & \leq \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right| \| f(s, y(s)) \|_E ds + \left| \frac{t^2 - 3t + 1}{\Delta} \right| \int_0^\eta |\Phi(s)| \| f(s, y(s)) \|_E ds \end{aligned}$$

$$+ \left| \frac{\eta^2(t-1) + \eta t(2-t)}{\Delta} \right| \int_0^1 |\Psi^*(s)| \| f(s, y(s)) \|_E ds.$$

on à

$$\begin{aligned} t \in [0, 1] &\leq \int_0^1 \left| \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right| \| f(s, y(s)) \|_E ds + \left| \frac{1}{\Delta} \right| \int_0^\eta |\Phi(s)| \| f(s, y(s)) \|_E ds \\ &\quad + \left| \frac{\eta}{\Delta} \right| \int_0^1 |\Psi^*(s)| \| f(s, y(s)) \|_E ds \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right| \| f(s, y(s)) \|_E ds + \left| \frac{1}{\Delta} \right| \int_0^\eta |\Phi(s)| \| f(s, y(s)) \\ &\quad + f(s, 0) - f(s, 0) \|_E ds + \left| \frac{\eta}{\Delta} \right| \int_0^1 |\Psi^*(s)| \| f(s, y(s)) - f(s, 0) + f(s, 0) \|_E ds \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right| \| f(s, y(s)) \|_E ds + \frac{1}{\Delta} \int_0^\eta \Phi(s) \| f(s, y(s)) \|_E \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} \int_0^\eta \Phi(s) \| f(s, 0) \|_E + \frac{1}{\Delta} \int_0^\eta \Phi(s) \| f(s, 0) \|_E + \frac{\eta}{\Delta} \int_0^1 \Psi^*(s) \| f(s, y(s)) \|_E \\ &\quad + \frac{\eta}{\Delta} \int_0^1 \Psi^*(s) \| f(s, 0) \|_E ds + \frac{\eta}{\Delta} \int_0^1 \Psi^*(s) \| f(s, 0) \|_E ds. \end{aligned}$$

on à $\eta \in (0, 1)$ et

$$\begin{aligned} &\| Ty \|_F = \sup_{t \in [0, 1]} \| Ty(t) \|_E \\ &\leq \int_0^1 \frac{(1-t)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sup_{t \in [0, 1]} \| f(s, y(s)) \|_E + \frac{2}{\Delta} \int_0^1 \sup_{t \in [0, 1]} \Phi(s) \| f(s, y(s)) - f(s, 0) \|_E ds \\ &\quad + \frac{2}{\Delta} \int_0^1 \sup_{t \in [0, 1]} \Phi(s) \| f(s, 0) \|_E ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\| Ty \|_F \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s) \sup_{t \in [0, 1]} \| f(s, y(s)) \|_F \\ &\quad + \frac{2}{\Delta} \int_0^1 \sup_{t \in [0, 1]} \Phi(s) \sup_{t \in [0, 1]} \| f(s, y(s)) - f(s, 0) \|_F ds \\ &\quad + \frac{2}{\Delta} \int_0^1 \sup_{t \in [0, 1]} \Phi(s) \sup_{t \in [0, 1]} \| f(s, 0) \|_F ds \\ &\leq \frac{2}{\Delta} \int_0^1 \sup_{t \in [0, 1]} \Phi(s) k \| y(s) \|_F ds + \frac{2}{\Delta} \int_0^1 \sup_{t \in [0, 1]} \Phi(s) \|_F N ds. \\ &\leq \frac{2}{\Delta} M.k \| y(s) \|_F + \frac{2}{\Delta} M.N \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{\Delta} M.k.r + \frac{2}{\Delta} M.N.$$

on applique la conditions (3.9), on obtient

$$\| Ty \|_F \leq d.r + (1-d)r = r.$$

ce implique que $T(B_r) \subset B_r$.

★ On va montrer que l'opérateur T est contractant sur B_r soit

$$y, y^* \in B_r, \| Ty(t) - Ty^*(t) \|_E \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^{q-1}}{\Gamma(q)} \| f(s, y(s)) - f(s, y^*(s)) \|_E ds$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \int_0^\eta \Phi(s) \| f(s, y(s)) - f(s, y^*(s)) \|_E ds + \frac{\eta}{\Delta} \int_0^1 \Psi^*(s) \| f(s, y(s)) f(s, y^*(s)) \|_E ds.$$

pour $\eta \in [0, 1]$ et

$$\sup_{t \in [0,1]} \| Ty(t) - Ty^*(t) \|_E \leq \frac{1}{\Delta} \int_0^1 \sup |\Phi(s)| \sup \| f(s, y(s)) - f(s, y^*(s)) \| ds$$

$$+ \frac{\eta}{\Delta} \int_0^1 \sup |\Phi(s)| \sup \| f(s, y(s)) - f(s, y^*(s)) \|_E ds.$$

donc

$$\| Ty - Ty^* \|_F \leq \frac{1}{\Delta} \int_0^1 \| \Phi(s) \|_F \cdot \| f(s, y(s)) - f(s, y^*(s)) \|_F ds$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \int_0^1 \| \Phi(s) \|_F \cdot \| f(s, y(s)) - f(s, y^*(s)) \|_F ds.$$

on utilise la condition (3.8) on trouve :

$$\| Ty - Ty^* \|_F \leq \frac{1}{\Delta} M.k \| y - y^* \|_F + \frac{1}{\Delta} M.k \| y - y^* \|_F$$

$$\leq \frac{2}{\Delta} M.k \| y - y^* \|_F .$$

et la conditions (3,9) donne

$$\| Ty - Ty^* \|_F \leq d \| y - y^* \|_F .$$

on conclut que l'opérateur T est contraction. Alors le théorème du point fixe de Banach T admet un point fixe unique ce qui 'il est la solution du problème (3.1) •

3.2 Application

Exemple 3.1

Considérer le problème de la valeur limite à trois points d'ordre fractionnaire

$$\begin{cases} {}^c D^{2.6} y(t) = \frac{3e^{-2t}y}{(19 + 5e^{2t})(3 + y)}, & t \in (0, 1). \\ y(0) + y'(0) + y''(0) = 0, \\ y\left(\frac{2}{5}\right) + y'\left(\frac{2}{5}\right) + y''\left(\frac{2}{5}\right) = 0, \\ y(1) + y'(1) + y''(1) = 0. \end{cases}$$

On à :

$$f(t, y(t)) = \frac{3e^{-2t}y}{(19 + 5e^{2t})(3 + y)} \quad \text{et } q = 2.6 \quad \text{et } F = C([0, 1], R).$$

* Soit $y, y^* \in F$

$$\begin{aligned} |f(t, y(t)) - f(t, y^*(t))| &= \left| \frac{3e^{-2t}y}{(19 + 5e^{2t})(3 + y)} - \frac{3e^{-2t}y^*}{(19 + 5e^{2t})(3 + y^*)} \right| \\ &= \left| \frac{3e^{-2t}}{19 + 5e^{2t}} \right| \left| \frac{y}{3 + y} - \frac{y^*}{3 + y^*} \right| \\ &\leq \frac{3e^{-2t}}{19 + 5e^{2t}} \|y - y^*\|. \end{aligned}$$

on a :

$$\frac{3e^{-2t}}{19 + 5e^{2t}} \leq \frac{3}{24}$$

donc

$$\|f(t, y(t)) - f(t, y^*(t))\| \leq \frac{3}{24} \|y - y^*\|.$$

Alors $f(t, y(t))$ est vérifié (3.8) avec $k = \frac{3}{24}$ maintenant on vérifie la condition (3.9)

avec $k = \frac{3}{24}$

$$d = \left| \frac{\frac{3}{24} \left(\frac{2}{5} + 1 \right) \left[\left(\frac{2}{5} \right)^{0.6} + 1 \right]}{\Gamma(3.6) \left(\frac{-3}{5} \right)} \right| = 0.42 \leq 1.$$

Alors d'après le théorème (3.2) le problème (3.1) admet une solution unique.

Bibliographie

- [1] B. AHMAD , J.J.NIETO. *Existence Résultats for Non linéal Boundary Value Problèmes of Fractionnel Intégro différentiai Équations with Intégral Boundary Condition*, Hindawi Publicain Corporation, 2009, 11 p
- [2] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle :théorie et application . Masson*. Paris, 1983.
- [3] H. KAMEL . *Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires*, Thèse Doctorat, Université de Constantine 2007.
- [4] ROSS B . *The Développement of Fractionnel Calculs, 1695 - 1900*. Historia Math (1977)
- [5] B. N. SADOVSKII. *On a fixed point principle*. Funct. Anal. Appl. 1 1967 pp. 74 - 76
- [6] HITTA AMARA . *Topologie des espaces Métriques*, université Guelma.
- [7] Z. BAI AND Y.ZHANG. *Solvabilité of fractionnel thrée - point boundary value problèmes with non linéar growth*, Appl. Math. Comput.