الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY

Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**

Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Stabilité d'un problème fractionnaire

Réalisé par : **AMRANI Youssra nour el-imen**
BEN DAAS Meryem

Dirigé par : **M .N.HAKKAR**

Membres de jury :

Dr.Dj.MANSOURI	**Président**
Dr.C.LAOUAR	**Examinateur**

2021-2022

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes parents :

Grace à leurs tendres encouragements et leurs grands sacrifices , ils ont pu crées le climat affectueux et propice à la poursuite de més études.

Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect , ma considiration et mes profonds sentiments envers eux.

A celui qui a le bon coeur mon frère Hani.

A ma petite soeur Sirine.

A mes Grands parents.

A toute la famille AMRANI.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

Merci !

AMRANI Youssra ✍

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes chères parents ma mère et mon père

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragement

A mes frères et ma soeur

A mes amies et mes camarades

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen ou de l'enseigment supérieur.

Merci !

BENDAAS Meryem ✍

Remerciement

Nous remercions ALLAH tous puissant qu'ils nous comblé de ses bienfaits et nous donnée assez de force pour achever ce travail

Nous voudrions présenter nos sincères remerciements et notre gratitude à notre encadreur HAKKAR . N d'avoir accepté de nous encadrer et nous guider et pour ses conseils et sa patience

Nous remerciements profondément nos professeurs pour leur éducation qu'ils nous ont prodigué au cours de ces cinq années passées à l'Université Abbes Laghrour Khenchela et l'Université Mentouri Constantine .

A la fin et à titre de reconnaissance nous précisons notre gratitude envers toute personne ayont apporté la moindre aide ou encouragement qui nous a permi d'élaborer ce modeste travail

Table des matières

Introduction

QUAND on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par la même introduire la dérivée seconde. Puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opérateur inverse de la dérivée, peut éventuellement être comme une dérivée d'ordre " moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17eme siècle(voir [17]), l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la n^{eme} dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$ cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire d'ordre et les définitions les plus utilisées sont celle de Riemann-Liouville et de Caputo. Chaque définition utilise l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville (voir[14]).

Ce travail est divisé en trois chapitres comme suit :

Le premier chapitre, nous allons mentionner les concepts des certaines fonctions spéciaux, intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi que certaines de leurs caractéristiques et la relation entre eux.

Deuxiéme chapitre : Ce chapitre est consacré à prouver l'existence et l'unicité des solutions des problémes de type Cauchy pour des équations ordinaires d'ordre fractionnaires sur un intervalle fini de l'axe réel dans l'espace des fonctions continues et sommables. Des équations fractionnaires non linéaires et linéaires sont considérées.

Le troisième chapitre portera sur « stabilité des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire » On présentera des techniques qui donnent une information sur la stabilité d'un système en ordre entier vers lordre fractionnaire ainsi que méthodes de Lyapunov. Enfin, on termine par la stabilité de l'équation de Basset.

Résumé

Dans ce travail, on traite un probléme de type de cauchy pour des équations ordinaires d'ordre fractionnaire. On obtient ainsi quelques résultats sur l'existence et l'unicité de la solution zéro pour l'équation fractionnaire de Basset En suite, on étudie la stabilité du système, et on donne des conditions suffisantes pour la stabilité de la solution par rapport aux ordres de dérivation fractionnaire.

Mots clés : Dérivée fractionnaire, théorème de point fixe ,l'inégalité de type Gronwald Letnikov, Stabilité de l'équation de Basset

Chapitre 1

Généralité sur les systèmes différentielle D'ordre fractionnaire

1.1 Préliminaires

Dans cette section nous présentons des définitions et quelques propriétées pour les fonctions : Gamma, Béta et Mittag-Leffler.

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1. *(voir [20]) La fonction Gamma est une fonction de base définie par l'intégrale :*

$$\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \;\; Re(x) > 0, \;\; x \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma(0^+) = +\infty$

On va citer quelque propriétés sur la fonction Gamma

Propriétés

1. Une propriété importante de $\Gamma(x)$ est la relation de récurrence suivante :
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ Re(x) > 0,\ x \in \mathbb{C}.$$
2. En particulier
$$\Gamma(n) = (n-1)!,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
3. comme conséquence de cette propriété, on a :
$$\Gamma(n+1) = n!,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
ce qui permet de dire que la fonction généralise la notion de factoriel.

4. $\forall x \in \mathbb{R}\{0, -1, -2, ...\}$, $\forall m \in \mathbb{C}$:
$$\Gamma(x+m) = x(x+1)...(x+m-1)\Gamma(x).$$

Exemples

Exemple 1. *on montre que* $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1-1}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}|_0^{+\infty} = 1.$$

Exemple 2. *On montre que* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Pour $x = \frac{1}{2}$ *, on a par définition*
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1-\frac{1}{2}}dt,$$
posons $t = u^2$ *donc* $dt = 2udu$*, il s'ensuit :*
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u}e^{-u^2}2udu = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

L'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

D'ou :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve.

1. Montrons que
$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(x+1)-1} dt.$$
par intégration par parties
$$\begin{cases} u = t^x \Longrightarrow u' = xt^{x-1}, \\ v' = e^{-t} \Longrightarrow v = -e^{-t}, \end{cases}$$
$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} - 1 dt = -e^{-t}|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$
2. Nous allons montrer la formule $\Gamma(n+1) = n!$ par récurrence sur n.

   * Si $n = 0$, alors
$$\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!.$$
   *Supposons la formule vérifiée pour $(n-1)$et considérons le cas n, c'est à dire que nous supposons que
$$\Gamma((n-1)+1) = \Gamma(n) = (n-1)!,$$
   est vérifié,

   alors
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$
   Donc la proposition (2) est démontré.

□

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2. *(Voir[2]) La fonction Bêta (qui est un type d'intégrale d'Euler, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par :*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{1.2}$$

Propriétés

1. Le changment de variable ($u = 1-t$) permet de montrer que la fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que :

$$\beta(x,y) = \beta(y,x).$$

2. Elle peut prendre aussi les formes intégrales suivants :

$$\beta(x,y) = \frac{1}{a^{x+y-1}}\int_0^a t^{x-1}(a-t)^{y-1}dt.$$
$$\beta(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt.$$
$$\beta(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)d\theta.$$

1.1.3 Lien entre la fonction Gamma et la fonction Béta

Une dérivation simple de la relation peut être trouvée dans le livre d'Emil Artin The Gamma Function. (voir [4]) Pour dériver cette relation, écrivez le produit de deux factorielles sous la forme

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_{u=0}^{\infty} e^{-u}\mathrm{u}^{x-1}du.\int_{v=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{v}^{y-1}\mathrm{d}v,\\ &= \int_{v=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-u-v}\mathrm{u}^{x-1}\mathrm{v}^{y-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Changer les variables par $u = z - t$ et $v = z(1-t)$ produit :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_{z=0}^{\infty}\int_{t=0}^{1} \mathrm{e}^{-z}(z-t)^{x-1}(z(1-t))^{y-1} z\mathrm{d}t\mathrm{d}z \\ &= \int_{z=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-z} z^{x+y-1}\mathrm{d}z. \int_{t=0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \\ &= \Gamma(x+y).\beta(x,y).\end{aligned}$$

La division des deux côtés $\Gamma(x+y)$ par donne le résultat souhaité.

L'identité déclarée peut être vue comme un cas particulier de l'identité de l'intégrale d'une circonvolution . Prise :

$$f(u) := \mathrm{e}^{-u}u^{x-1}1_{\mathbb{R}_+}$$

$$g(u) := \mathrm{e}^{-u}u^{y-1}1_{\mathbb{R}_+}$$

on a :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}} g(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(u)\mathrm{d}u = \beta(x,y)\Gamma(x+y).$$

1.1.4 Fonction Mittag-Leffler

Définition 1.3. *La fonction Mittag-Leffler est nommée d'après un mathématicien suédois qui l'a défini en 1903 (voir[18]). Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle,*e^x*, et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.*

** La représentation de la fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre est définie par la fonction suivante :*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)}. \tag{1.4}$$

la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.Cette dernière a été introduite par Agarwal et ele est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{1.5}$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation

De Définition (1.5), il en résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).$$

En effet, par déffinition on a :

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x x^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).
\end{aligned}$$

Cas particulier pour $\alpha = 0, 1, 2$ et $\beta = 2$ alors :

$$E_{0,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

$$E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x.$$

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

1.1.5 Formule de Dirichlet

Définition 1.4. *Soient $h(x,y)$ une fonction continue et α , β des réels positifs. L'expression suivante est dite formule de Dirichlet*

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}\mathrm{d}x \int_0^x (x-y)^{\beta-1} h(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^t \mathrm{d}y \int_y^t (t-x)^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1} h(x,y)\mathrm{d}x.$$

Certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'une intérêt particulier.
Par exemple, si on prend :

$$h(x,y) = g(x)f(y).$$

et

$$g(x) \equiv 1.$$

Alors :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}\mathrm{d}x \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y)\mathrm{d}y = B(\alpha,\beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y)\mathrm{d}y. \quad (1.6)$$

1.2 Intégration fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse dont l'étude se rapporte aux opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier. Dans cette section , on donne les différentes définitions de la dérivée fractionnaire.

1.2.1 Intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b]

Définition 1.5. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On considère l'intégrale :*

$$I^1 f(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

on a aussi

$$\begin{aligned} I^2 f(x) &= \int_a^x I^1 f(u)du = \int_a^x (\int_a^u f(t)dt)du \\ &= \int_a^x (\int_t^x du) f(t)dt = \int_a^x (x-t) f(t)dt. \end{aligned}$$

Plus généralement la n-ième itération de l'opérateur I peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I^n f(x) &= \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n, \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \end{aligned} \tag{1.7}$$

Pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma :

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

Riemann rendu compte que le second membre de (1.7) paurait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

1.2.2 Intégrale au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.6. *(Voir [18]) Soit $\Omega = [a, b]$, un intervalle fini sur $\mathbb{R}$. et f une fonction intégrable sur Ω. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville I^{α}_{a+} d'orde réel $\alpha > 0$, est définie par :*

$$(I^{\alpha}_{a+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (t-s)^{\alpha-1} f(t)dt, (t > a, \alpha > 0), \tag{1.8}$$

où $\Gamma(\alpha)$ désigne la fonction Gamma définie dans (1.1). La formule (1.8) s'appelle intégrale fractionnaire d'ordre α à gauche.

Quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$ la définition (1.11) concide avec la $n^{iéme}$ intégrale de Riemann-Liouville de la forme :

$$\begin{aligned}(I_{a+}^{n} f)(t) &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} dt_2 \ldots \int_a^{s_{n-1}} f(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(t) dt, (n \in \mathbb{N}).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Propriétés :

Soit $h \in C[a,b]$ alors :$I_a^0 = h(x)$

L'opérateur intégral I_a^0 est linéaire.

Proposition :

Soit f une fonction intégrable et bornée ,et α et β deux nombres réels strictement positifs. Alors :

(a) $I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$.

(b) $\frac{d}{dx}(I_a^{\alpha} f(x)) = I_a^{\alpha-1} f(x), (\alpha > 1)$.

(c) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} (I_a^{\alpha} f)(t) = f(t), (\alpha > 1)$.

Preuve.

(a) On montre la premiére égalité :

$$I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds.$$

en utilisant le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) [\int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds] dt.$$

En effectuant le changement de variables $s = t + (x-t)y$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \int_0^1 [(x-t)(1-y)]^{\alpha-1} [y(x-t)]^{\beta-1} (x-t) dy dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy dt. \end{aligned}$$

D'aprés la définition de la fonction Bêta on :

$$\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy = B(\beta,\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

et par la suite on aura :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} dt = I_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

(b) On montre maintenant la deuxiéme égalité :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt\right). \end{aligned}$$

puisque $f(t)$ et $(x-t)^{\alpha-1}$ sont continues donc l'application :

$$t \longrightarrow (x-t)^{\alpha-1} f(t),$$

est continue et on a Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx}((x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= I_a^{\alpha-1} f(x). \end{aligned}$$

D'oû le résultat.

(c) Pour la dérniére identité, on considére la fonction $f \in C^0([a,b])$.

on a

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau.$$

De la relation (1.13), On peut écrire :

$$(I_a^\alpha 1(t)) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \longrightarrow 1 \quad quand \quad \alpha \longrightarrow 0^+.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |(I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t)| &= |\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau. \end{aligned} \tag{1.10}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a,b]$qui nous permet écrire :

$$\forall t, \tau \in [a,b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\tau - t| \delta \Longrightarrow |f(\tau) - f(t)| < \varepsilon,$$

ce qui entraine :

$$\int_{\alpha-1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \varepsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha}. \tag{1.11}$$

D'aute part

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-}(t-\tau)^{\alpha-1}(|f(\tau)+f(t)|)d\tau\\ &\leq 2sup|f(\zeta)|\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau, \forall t\in[a,b]\\ &= 2M\Big(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}-\frac{\delta^\alpha}{\alpha}\Big),\\ \text{où } M &= sup_{\zeta\in[a,b]}|f(\zeta)|. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Une combinaison de (1.11) et (1.12) nous donne :

$$\begin{aligned}|(I_a^\alpha f)(t)-\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)| &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}[\varepsilon\delta^\alpha+2M((t-a)^\alpha-\delta^\alpha)]\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[\varepsilon\delta^\alpha+2M((t-a)^\alpha-\delta^\alpha)].\end{aligned}$$

en faisent tendre α vers 0^+, on obtient :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}|(I_a^\alpha f)(t)-\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)|\leq\varepsilon,$$

autrement dit :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}|(I_a^\alpha f)(t)-f(t)|\leq\varepsilon;\forall\varepsilon>0,$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}|(I_a^\alpha f)(t)|=f(t).$$

□

1.3 Exemples d'intégrales d'ordre fractionnaires

Exemple 3. *Considérons la fonction $f(x)=x^\beta$.*
En remplaçant dans la fonction de l'intégrale de Riemann-Liouville, on obtient :

$$I^\alpha x^\beta=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}t^\beta dt,$$

En faisant le changement de variable : $t = ux \Rightarrow u = \dfrac{t}{x}$, *on obtient :*

$$\begin{aligned} I^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} x^{(\alpha-1)} (xu)^\beta x du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\beta} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du. \end{aligned}$$

donc on a :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}.$$

D'ou :

$$I^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}$$

La formule précédente est une généralisation du cas $\alpha = 1$.

En effetpour $\alpha = 1$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} I^1 x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} x^{\beta+1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)} x^{\beta+1} = \frac{1}{(\beta+1)} x^{\beta+1}. \end{aligned}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ *et pour* $\beta = 0, 1, 2$ *on a :*

$$I^{\frac{1}{2}} x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

$$I^{\frac{1}{2}} x^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}.$$

$$I^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}.$$

De ce qui précède, on déduit que l'intégrale fractionnaire d'ordre α *d'une constante* k *est donné par :*

$$I^\alpha k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha.$$

Exemple 4. *Soient $\alpha > 0$, $\beta > -1$ et $f(x) = (x-a)^{\beta}$ alors :*

$$(I_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\alpha)^{\beta} dt. \tag{1.13}$$

En effectuant le changement de variable ,

$$t = a + (x-a)y, \ (0 \leqslant 1),$$

Alors (1.13)*devient :*

$$\begin{aligned}
(I_a^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\alpha)^{\beta} dt. \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)y)^{\alpha-1}[x+(x-a)y-x]^{\beta}(x-a)dy. \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1} y^{\beta} dy. \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta} dy \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1} dy.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (1.6) *puis de la relation* (1.7) *, on arrive à :*

$$\begin{aligned}
(I_a^{\alpha} f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha, \beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta},
\end{aligned}$$

ainsi on obtient :

$$(I_a^{\alpha}(t-a)^{\beta}) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.14}$$

1.4 Dérivation fractionnaire

Connaissait les contributions de nombreux mathématiciens qui ont donné plusieurs approches de dérivations fractionnaires, dans cette sec-

tion on va restreindre à trois approches les plus populaires et les plus praticable qui sont : l'approche de Grünwald Letnikov, de Riemann-Liouville et l'approche de Caputo.

1.4.1 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald Letnikov

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald -Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraire. Ce qui permet d'exprimer la dérivée d'ordre entier p(si p est positif) et l'intégrale répétée (p) fois (si p est négatif), d'une fonction f comme ceci :
Pour une fonction f donnée, d'après la définition classique de la dérivation (la dérivée première (d'ordre 1) d'une fonction f) en un point t (voir[4]) on a :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \tag{1.15}$$

L'application de cette définition deux fois nous donne la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned}$$

En utilisant(1.15) nous obtenons :

$$f'''(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}.$$

et par récurrence pour n nous obtenons :

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh), \tag{1.16}$$

ou

$$\binom{n}{r} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}. \tag{1.17}$$

Remarque 1.1. *La formule (1.16) s'appelle dérivée d'ordre n à gauche, de même, en prenant les différences à droite, on obtient une dérivée d'ordre n (à droite)*

$$f^{n}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh),$$

Pour la simplicité on va considèrer que la dérivée (à gauche) dans tous ce qui suit.

Considérons maintenant l'expression suivante généralisant (1.16)

$$f^{p}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh), \tag{1.18}$$

ou p et n sont deux entiers arbitraire, remarquons que pour $p \leqslant n$ on a :

$$\begin{aligned} f^{p}(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) + \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=p+1}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh). \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $\binom{p}{p+j} = 0$ pour tout $j = 1, ...n$.

On remarquant que :

$$\begin{aligned}(-1)^r\binom{\alpha}{r} &= (-1)^r\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha-r+1)}\\ &= (-1)^r\frac{\alpha(\alpha-1)...(-r+1)}{r!}\\ &= (-1)^r\frac{\alpha.(\alpha-1)...(\alpha-r+1)(\alpha-r)!}{r!(\alpha-r)!}\\ &= \frac{-\alpha.(-\alpha+1)...(-\alpha-r+1)}{r!}\\ &= \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)}.\end{aligned}$$

Alors :

$$^{GL}D^{\alpha}f(t) = ^{GL}D^{-\alpha}f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{-\alpha}}\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha)}f(t-rh).$$

Cas particuliers :

Cas pour $\alpha = 1$ on a :

$$\begin{aligned}^{GL}I^1 f(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{-1}}\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(1)}f(t-rh)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{-1}}\sum_{r=0}^{+\infty}f(t-rh).\end{aligned}$$

En tenant compte de $t-nh=a$ et f est continue alors :

$$^{GL}I^1 f(t) = \int_0^{t-a} f(t-y)dy = \int_a^t f(\tau)d\tau.$$

Cas pour $\alpha = 2$ on a :

$$\begin{aligned}^{GL}I^2 f(t) &= \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(r+2)}{\Gamma(r+1)\Gamma(2)}f(t-rh)\\ &= \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n}(r+1)f(t-rh).\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $t-h=z$, on déduit que :

$$^{GL}I^2 f(t) = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n+1}(rh)f(z-rh) = \int_0^{t-a} zh(t-z)dz = \int_a^t (z-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Et par récurrence on peut généraliser :

$$^{GL}I^{\alpha}f(t)=\lim_{h\to 0}h^{\alpha}\sum_{r=0}^{n}\binom{\alpha}{r}f(t-rh)=\frac{1}{(\alpha-1)!}\int_{a}^{t}(z-\tau)f(\tau)d\tau.$$

1.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.7. *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1\leq p<n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned}^{R}D^{p}f(t)&=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau \qquad (1.19)\\&=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}(I^{n-p}f(t)).\end{aligned}$$

Remarque 1.2. *Si f est de classe C^n,alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées on obtient*

$$^{R}D^{p}f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}+\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}f^{(n)}(\tau)d\tau. \qquad (1.20)$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-liouville sont équivalentes.

Exemple

(a) ***La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville***

En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$$^{R}D^{p}C=\frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}. \qquad (1.21)$$

(b) ***La dérivée de*** $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ ***au sens de Riemann-Liouville***

Soit p *non entier et* $0 \leq n-1 < p < n$ *et* $\alpha > 1$ *, alors on a :*

$$^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha}d\tau, \quad (1.22)$$

En faisant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$*, on aura :*

$$\begin{aligned} ^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}(t-a)^{n+\alpha-p}\int_{a}^{t}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha}ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)B(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(n-p)}(t-\alpha)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)}(t-\alpha)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-\alpha)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

**Propriétés*

(a) ***Composition avec l'intégrale fractionnaire***

- L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire

$$^{R}D^{p}(I^{p}f(t)) = f(t), \quad (1.23)$$

en générale on a

$$^{R}D^{p}(I^{q}f(t)) =^{R} D^{p-q}f(t), \quad (1.24)$$

et si $p-q < 0,^{R} D^{p-q}f(t) = I^{q-p}f(t)$.

- En générale la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$$^{R}D^{-p}(^{R}_{a}D^{q}_{t}f(t)) =^{R} D^{q-p}f(t) - \sum_{k=1a}^{m} \left[^{R}D^{q-k}_{t}f(t)\right]_{t=0} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}. \tag{1.25}$$

avec $m-1 \leq q < m$.

(b) ***Composition avec les dérivées d'ordre entier***

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle(d'ordre entiére)ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ *pour tout*$k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} (^{R}D^{p}f(t)) =^{R} D^{n+p}f(t), \tag{1.26}$$

mais

$$^{R}D^{p}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t)\right) =^{R} D^{p}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}. \tag{1.27}$$

(c) ***Composition avec les dérivées fractionnaires***

Soit $n-1 \leq p < n$ *et* $m-1 \leq q < m$ *, alors*

$$^{R}D^{p}(^{R}D^{q}_{t}f(t)) =^{R} D^{p+q}f(t) - \sum_{k=1}^{m} \left[^{R}D^{q-k}f(t)\right]_{t=0} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(p-k+1)}, \tag{1.28}$$

et

$$^{R}D^{q}(^{R}D^{q}f(t)) =^{R} D^{p+q}f(t) - \sum_{k=1}^{m} \left[^{R}D^{p-k}f(t)\right]_{t=0} \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)}. \tag{1.29}$$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire $^{R}D^{p}$ *et* $^{R}D^{p}(p \neq q)$*, ne commutent que si et* $[^{R}D^{p-k}f(t)]_{t=0} = 0$ *pour tout* $k = 1, 2, ..., n$ *, et* $^{R}D^{q-k}f(t)]_{t=0}$ *pour tout* $k = 1, 2, ..., m$

1.4.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La dérivation partielle dans le sens de Riemann-Liouville a joué un rôle actif dans le développement de micro-calcul en mathématiques pures et appliquées à la fin les années 1960 ont nécessité une révision qui a conduit de nombreux auteurs, dont Caputo, à trouver une nouvelle définition de la dérivation fractionnaire en raison de problèmes appliqué à la fexibilité optique et la mécanique.

Définition 1.8. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f(t)$ donnée sur l'intervalle $[a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$ est définie par la relation suivante :*

$$ {}_{a}^{c}D_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, \qquad [\alpha] = n-1. \qquad (1.30)$$

avec $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Définition 1.9. *On appelle dérivée fractionnaire (à gauche)de Caputo d'une fonction $f(t)$ la relation suivante :*

$$ {}_{a^{+}}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} \frac{f^{n}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, \quad \forall t > a.$$

Définition 1.10. *On appelle dérivée fractionnaire (à droite) de Caputo d'une fonction $f(t)$ la relation suivante :*

$$ {}_{b}^{C}D_{t}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} (-1)^{n} \int_{t}^{b} \frac{f^{n}(s)}{(s-t)^{\beta+1-n}} ds, \quad \forall t < b.$$

Théorème 5. *Pour $n-1 \leqslant \alpha \leqslant n$, si $f(x)^{n}([a, b])$ la dérivée ${}_{a^{+}}^{c}D_{t}^{\alpha} f(t)$* presque partout sur $[a, b]$.

i) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ la dérivée ${}_{b}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t)$ peut être représentée par :

$$ {}_{b}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a}^{t} \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds = I_{a^{+}}^{n-\alpha} D^{n} f(t). \qquad (1.31)$$

en particulier, si $0 < \alpha < 1$ et $f(t) \in$[a,b]

$$ {}_{b}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds = I_{a^+}^{n-\alpha} Df(t). \tag{1.32} $$

ii) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$ {}_{a^+}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t). $$

1.4.4 Relation entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théoréme suivante établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Soit $p > 0$ *avec* $n-1 < p < n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, *supposons que* f *est une fonction telle que* ${}_{a}^{C}D_t^{p}$ *et* ${}_{a}^{R}D_t^{p}$ *existent alors :*

$$ {}^{C}D^{p} f(t) = {}^{R}D^{p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}, \tag{1.33} $$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ *pour* $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ *on aura :*

$$ {}^{C}D^{p} f(t) = {}^{R}D^{p} f(t). $$

1.4.5 Equations et systéme d'équations différentielles fractionnaires

Avant de commencer laisser nous introduire une définition d'une équation différentielle fractionnaire EDF L'équation différentielle fractionnaire est une équation qui contient une ou des dérivées fractionnaire.

Définition 1.11. *Soit* $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, n = [\alpha] + 1$ *et* $A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *alors*

$$ {}^{RL}D^{\alpha}(x) = f(x, y(x)), \tag{1.34} $$

est appelée équation différentielle de type Riemann-Liouville . Comme condition initiales pour ce type d'EDF on utilise :

$$^{RL}D^{\alpha-k}y(0) = b_k; (k = 1, 2, ..., n-1), \lim_{z \to -0^+} I^{n-\alpha}y(z) = b_n.$$

De la même maniére

$$^{C}D(x) = f(x, y(x)), \tag{1.35}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Cputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales :

$$y^k(0) = b_k; (k = 0, 2, ..., n-1).$$

Remarque 1.3. *L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les EDFs* (1.34) *et* (1.35) *nous assure l'unicité des solutions de l'EDF correspondante.*

Le système fractionnaire est un système qui est décrit par des équations diffrentielles fractionnaires.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur le calcul intégral fractionnaire et dérivation fractionnaire,nous avons défini les fonctions Gamma, Bêta, et la fonction Mittag-Leffer. Ces fonctions jouent un rôle important dans la la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire.

Chapitre 2

Existance et Unicité d'un problème fractionnaire

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à prouver l'éxistence et l'unicité des solutions des problèmes de type Cauchy pour des équations ordinaires d'ordre fractionnaires sur un intervalle fini de l'axe réel dans l'espace des fonctions continues et sommables. Des équations fractionnaires non linéaires et linéaires sont considérées.

2.1.1 Equations différentielles avec des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Dans cette section nous donnons des conditions pour une solution unique au problème de type Cauchy

$$D^{\alpha}_{a_+}y(t) = f(t, y(t)); \qquad (0 < \alpha < 1, \quad t > a). \tag{2.1}$$

$$D^{\alpha-1}_{a_+}y(a_+) = b, b \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Dans l'espace $L^{\alpha}(a,b)$ défini pour $\alpha \in \mathbb{R}(\alpha > 0)$ par

$$L^{\alpha}(a,b) = \{y \in L(a,b) : D^{\alpha}_{a_+}y \in L(a,b)\}. \tag{2.3}$$

Ici $L(a,b) = L_1(a,b)$ est l'espace des fonctions sommables dans un intervalle fini $[a,b]$ de l'axe réel $\mathbb{R}$ défini par :

$$\| f \|_1 = \int_a^b |f(t)|dt. \tag{2.4}$$

Les recherches sont basées sur la transformation des problèmes considérés aux équations intégrales de Volterra du deuxième forme et sur l'utilisation du théorème du point fixe de Banach.

Nous présentons le théorème classique du point fixe de Banach dans un espace métrique complet.

Théorème 6. *Soit (U,d) un espace métrique complet non vide , soit $0 < \omega < 1$ et soit $T : U \to U$ une contractante telle que, pour chaque $u, v \in U$, la relation*

$$d(Tu, Tv) \leq \omega d(u,v). \tag{2.5}$$

est vérifée. Alors l'opérateur T a un point fixe unique $u^* \in U$. En outre, si $T^k (k \in N)$ est la séquence des opérateurs défnis par :

$$T^1 = T \quad et \quad T^k = TT^{k-1}, \qquad (k \in N \;\; 1), \tag{2.6}$$

alors pour tout $u_0 \in U$, la séquence $\{T^k u_0\}^{k=1}_{\infty}$ converge vers le point fixe u^* .

Nous notons que, si la contractante $T : U \to U$ vérifie la condition (2.5), est appelée une contraction, ou une application contractive (preuve voir([6]))

2.1.2 Equivalence entre le problème de type Cauchy et l'équation intégrale de Volterra

Dans cette sous-section (voir [8],[9]) nous montrons que le problème de type Cauchy (2.1)-(2.2) *et l'équation intégrale de Volterra*

$$y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds, \qquad (t>a), \quad (2.7)$$

Èquivalente dans le sens que, si $y(t) \in L(a,b)$ *satisfait une de ces relations, alors elle satisfait l'autre .*

Lemme

L'opérateur d'intégration fractionnaire I_α^{a+} *avec* $\alpha \in \mathbb{R}(0<\alpha<1)$ *est borné dans* $L(a,b)$ *:*

$$\| I_{a_+}^{\alpha} \|_1 \leq \| \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \| g \|_1 . \qquad (2.8)$$

Lemme

Soit $y(t) \in L(a,b)$ *, nous prouvons pour n'importe quel* $t \in [a,b]$ *que* (2.8) *est vérifiée*

Nous avons :

$$I_\alpha^{a+}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds,$$

alors

$$\begin{aligned}
\| I^{\alpha}_{a+}g \|_1 &= \| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)ds \| \leq \| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \mid (t-s)^{\alpha-1} \mid \| g \|_1 \, ds \\
&\leq \frac{\| g \|_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \ , \ (t-s>0) \\
&\leq \frac{\| g \|_1}{\Gamma(\alpha)} \left[-\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha} \right]_a^t \\
&\leq \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \| g \|_1 \ .
\end{aligned}$$

car $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$ *, et comme* $(t-a) \leq (b-a)$ *, nous obtenons*

$$\| I^{\alpha}_{a+} \|_1 \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \| g \|_1$$

Théorème 7. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ $(0 < \alpha < 1)$ *. Soit* G *un ensemble ouvert dans* $\mathbb{R}$ *,*

et $f : (a,b) \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(t,y) \in L(a,b)$ *pour toute* $y \in G$*.*

Si $y(t) \in L(a,b)$*, alors* $y(y)$ *satisfait les relation* (2.1)-(2.2) *si, et seulment si,* $y(t)$ *satisfait l'équation intégrale* (2.7)*.*

D'abord nous prouvons la nécessité. Soit $y(t) \in L(a,b)$ *satisfait les relations* (2.1) *et* (2.2)*. Depuis que* $f(t,y) \in L(a,b)$*,* (2.1) *signifie que* $D^{\alpha}_{\alpha} + y(t)$ *existe dans* $L(a,b)$*.*

Selon (1.14)

$$D^{\alpha}_{\alpha+}y(t) = \frac{d}{dt}(I^{1-\alpha}_{\alpha+}y) \ , \quad (I^{0}_{\alpha+}y)(t) = y(t). \tag{2.9}$$

et d'aprés (2.9) *nous voyons que* $I^{1-\alpha}_{\alpha+} \in AC^1[a,b]$*. Et comme* $I^{1-\alpha} = D^{\alpha-1}_{\alpha+}y(t)$*, alors* $D^{\alpha-1}_{\alpha+}$ *inAC*$^1[a,b]$*. Selon le lemme 2.1.2 , l'intégrale*

$I_{\alpha+}^{\alpha}f(s,y(s))$ existe dans $L(a,b)$. Appliquant l'opérateur $I_{\alpha+}^{\alpha}$ sur les deux côtés de (2.1)

$$\begin{aligned} I_{\alpha+}^{\alpha}D_{\alpha+}^{\alpha}y(t) = I_{\alpha+}^{\alpha}f(t,y(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds \quad (2.10)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds. \end{aligned}$$

D'autre part nous avons :

$$\begin{aligned} I_{\alpha+}^{\alpha}D_{\alpha+}^{\alpha}y(t) &= y(t) - \frac{D_{\alpha+}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} \quad (2.11)\\ &= y(t) - \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

D'aprés (2.10) et (2.11) nous oubtenons :

$$y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\ ,\ (t>a),$$

avec $0<\alpha<1$, et par conséquent la nécessité est prouvée.

Maintenant nous prouvons la suffisance . Soit $y(t) \in L(a,b)$ satisfait l'équation (2.7).

Appliquant l'opérateur $D_{\alpha+}^{\alpha}$ aux deus côtés de (2.7), nous avons :

$$D_{\alpha+}^{\alpha}y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(D_{\alpha+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-1}) + (D_{\alpha+}^{\alpha}I_{\alpha+}^{\alpha}f(t,y(t)). \quad (2.12)$$

*Dàprés (1.31) nous avons $D^{\alpha}(t-a)^{\alpha-1} = 0$ car $\alpha > \alpha-1$, et selon la relation (**??**) nous obtenons*

$$D_{\alpha+}^{\alpha}I_{\alpha+}^{\alpha}f(t,y(t)) = I_{\alpha+}^{\alpha-\alpha}f(t,y(t)) = f(t,y(t)).$$

Alors par conséquent (2.12) prend la forme :

$$D_{\alpha+}^{\alpha}y(t) = f(t,y(t)),\ (0<\alpha<1,\ t>a),$$

et donc nous arrivons à l'équation (2.1).

Maintenant nous prouvons que la relation (2.2) *aussi réalisée. Pour ceci nous appliquons l'opérateur* $D^{\alpha-1}_{\alpha+}$ *aux deux côtés de* (2.7).

$$D^{\alpha-1}_{\alpha+}y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(D^{\alpha-1}_{\alpha+}(t-a)^{\alpha-1}) + (D^{\alpha-1}_{\alpha+}I^{\alpha}_{\alpha+}f(t,y(t)). \tag{2.13}$$

Dàprés la relation $D^{\alpha}_{\alpha+}(t-a)^{\beta} = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$ *nous trouvons que :*

$$D^{\alpha}_{\alpha+}(t-a)^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)} = \Gamma(\alpha). \tag{2.14}$$

et selon la rtelation (2.13) *nous avons :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha-1}_{\alpha+}I^{\alpha}_{\alpha+}f(t,y(t)) &= I^{\alpha-\alpha+1}_{\alpha+}f(t,y(t)) = I_{a+}f(t,y(t)) \\ &= \int_a^t f(s,y(s))ds. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dàprés (2.13),(2.14) *et* (2.15) *nous arrivons à :*

$$D^{\alpha-1}_{\alpha+}y(t) = b + \int_a^t f(s,y(s))ds. \tag{2.16}$$

Nous prenons dans (2.16) *la limite* $t \longrightarrow a+$ *; nous obtenons la relation :*

$$D^{\alpha-1}_{\alpha+}y(a+) = b.$$

Ainsi la suffisance est prouvée, qui accomplit la preuve du Théoréme 2.1.3

Corollaire 8. *Soit* $0 < \alpha < 1$ *, soit* G *un ensemble ouvert dans* $\mathbb{R}$*, et* $f : [a,b] \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(t,y) \in L(a,b)$ *pour toute* $y \in G$.
Si $y(t) \in L(a,b)$*, alors* $y(t)$ *satisfait les relations* (2.1) *et* (2.2) *si, et seulement si ,* $y(t)$ *satisfait l'équation intégrale* (2.7).

2.2 Existence et unicité de la solution du problème de type Cauchy

Dans cette sous-section nous établissons l'existence d'une solution unique au problème (2.1)-(2.2) *de type Cauchy dans l'espace* $L^{\alpha}(a,b)$ *défini dans* (2.3) *sous les conditions du théoréme 2.1.3, et la condition de Lipschitz sur* $f(t,y)$ *par rapport à la deuxiéme variable. Pour toutes* $y_1, y_2 \in G \subset \mathbb{R}$

$$|f(t,y) - f(t,y_2)| \leqslant A|y_1 - y_2| \quad (A > 0). \tag{2.17}$$

où $A > 0$ *ne dépend pas de* $t \in [a,b]$.

Théorème 9. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ $(0 < \alpha < 1)$ *, soit* G *un ensemble ouvert dans* $\mathbb{R}$*,*
et $f : [a,b] \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(t,y) \in L(a,b)$ *pour toute* $y \in G$ *et la condition* (2.17) *est satisfaite.*
Alors il existe une solution unique $y(t)$ *au probléme de type Cauchy* (2.1)-(2.2) *dans l'éspace* $L^{\alpha}(a,b)$.

Preuve.
D'abord nous prouvons l'existence d'une solution unique $y(t) \in L(a,b)$
Selon le théoreme 2.1.3 il est suffsant de prouver l'existence d'une solution unique
$y(t) \in L(a,b)$ à l'équation intégrale non linéaire (2.7) de Volterra. Pour ceci nous appliquons la méthode connue, pour des équations intégrales non linéaires de Volterra, deprouver d'abord le résultat sur une partie de l'intervalle $[a,b]$.

L'équation (2.7) semble raisonnable dans n'importe quel intervalle $[a, t_1] \subset [a, b](a < t_1 < b)$.

Choisissons t1 telle que l'inégalité :

$$A\frac{(t_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1. \tag{2.18}$$

est vérifiée, et puis prouvons l'existence d'une solution unique $y(t) \in L(a, t_1)$ à l'équation (2.7) sur l'intervalle $[a, t_1]$. Pour ceci nous utilisons le théorème 2.1.1 du point fixe de Banach pour l'espace $L(a, t_1)$, qui est clairement un espace métrique complet avec la distance.

$$d(y_1, y_2)\|y_1 - y_2\| = \int_a^{t_1} |y_1(t) - y_2(t)|dt. \tag{2.19}$$

Nous réecrivons l'équation intégrale (2.7) sous la forme $y(t) = (Ty)(t)$, où

$$(Ty)(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds, \tag{2.20}$$

avec

$$y_0(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(t - a)^{\alpha-1}, \tag{2.21}$$

Pour appliquer le théoréme 2.1.1 du point fixe nous devons prouver ce qui suit :

(1) si

$y(t) \in L(a, t_1), alors (Ty)(t) \in L(a, t_1)$, (2) pour toutes $y_1, y_2 \in L(a, t_1)$; l'évaluation suivante est vérifiée :

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_1 \leqslant \|y_1 - y_2\|_1 \ , \ \omega = A\frac{(t_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \tag{2.22}$$

Il découle de que $y_0(t) \in L(a, b)$: Depuis que $f(t, y) \in L(a, b)$; et d'aprés le lemme 2.1.2 (avec $b = t_1$ et $g(t) = f(t, y(t))$, l'intégrale dans le côté droit de appartient également à $L(a,_t 1)$, et par conséquent $(Ty)(t) \in L(a, t_1)$.

Maintenant nous prouvons l'évaluation (2.22). D'aprés (2.2)- (2.2)et (2.3) (définition de $L^{\alpha}(a,b)$), utilisons la condition de Lipschitz (2.17) et appliquant la relatio(avec $b = t_1$ et $g(t) = f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\|_{L(a,t_1)} &\leqslant |^{\alpha}_{\alpha+}[|f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|]\|_{L(a,t_1)} \\
&\leqslant A\Big\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t_1-s)^{\alpha-1}|y_1(s) - y_2(s)|ds\Big\|_{L(a,t_1)} \\
&\leqslant \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\|y_1 - y_2\|_{L(a,t_1}\int_a^t (t_1-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leqslant A\frac{(t_1-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1 - y_2\|_{La,t_1} = \omega\|y_1 - y_2\|_{L(a,t_1)}.
\end{aligned}$$

ce qui donne (2.22). Selon (2.18) vérifie $0 < \omega < 1$, et par conséquent (d'aprés le théoréme 2.1.1) il existe une solution unique $y^*(t) \in L(a, t_1)$ à l'équation (2.7) dans l'intervalle $[a, t_1]$:

D'aprés le théorème 2.1.1, la solution y^* est obtenu comme une limite de la séquence convergente $(T^m y_0^*)(t)$:

$$\lim_{m\to\infty} \|T^m y_0^* - y^*\| = 0. \tag{2.23}$$

où $y_0^*(t)$ est n'importe quelle fonction dans $L(a,b)$: Si au mois un $b \neq 0$ dans les conditions initiales (2.2), nous pouvons prendre $y_0^*(t) = y_0(t)$ avec $y_0(t)$ définie par (2.2).

D'aprés l'équation (2.2), la séquence $(T^m y_0^*)(t)$ est définie par la formule de récurrence

$$(T^m y_0^*)(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_{m-1}(s))ds \quad (m = 1, 2, ...). \tag{2.24}$$

Si nous dénotons $y_m(t) = T^m y_0^*$ alors la derniére relation prend la forme

$$y_m(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_m - 1(s))ds \quad (m \in \mathbb{N}), \tag{2.25}$$

et (2.23) peut être récrit comme suit :

$$\lim_{m\to\infty} \|y_m - y^*\|_{L(a,t_1)} = 0. \tag{2.26}$$

Ceci signifie que nous avons appliqué réellement la méthode d'approximations successives pour trouver une solution unique y^* à l'équation intégrale (2.7) dans $[a, t_1]$:

Aprés, nous considérons l'intervalle $[t_1, t_2]$, où $t_2 = t_1 + h$, $h > 0$ et vérifie $t_2 < b$: Réecrivons l'équation (2.7) sous la forme

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)(s))ds + \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t_1} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Depuis que la fonction $y(s)$ est uniquement définie sur l'intervalle $[t_1, t_2]$; la derniére intégrale peut être considéré comme fonction connue, et nous réecrivons la derniére équation comme :

$$y(t) = y_{01}(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds, \tag{2.28}$$

où $y_{01}(t)$ est définie par

$$y_{01}(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t_1} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds. \tag{2.29}$$

est la fonction connue. Utilisons les mêmes arguments comme ci-dessus, nous concluons qu'il existe une solution unique $y^*(t) \in L(t_1, t_2)$ à l'équation (2.7) dans l'intervalle $[t_1, t_2]$: Prenons l'intervalle suivant $[t_2, t_3]$, où $t_3 = t_2 + h_2$ et $h_2 > 0$ telle que $t_3 < b$, et par la répétition de ce processus, nous concluons qu'il existe une solution unique $y^*(t) \in L(a, b)$ pour l'équation (2.7) sur l'intervalle $[a, b]$ Ainsi, il existe une solution unique

$y(t) = y^*(t) \in L(a,b)$ à l'équation intégrale (2.7) de Volterra, et par conséquent au problème de type Cauchy (2.1)- (2.2). Pour terminer la preuve du théorème 2.1.5, nous devons prouver que la solution $y(t) \in L(a,b)$ est unique et appartient à l'espace $L(a,b)$: Selon (2.3), il est suffisant de prouver cela $D^{\alpha}_{\alpha+1} \in L(a,b)$ D'aprés la preuve ci-dessus, la solution est une limite de

$$G_3(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{\frac{1}{2}(3k+1)} E^{(k)}_{1,\frac{1}{2}(3+k)}(-t).$$

La séquence $y_m(t) \in L(a,b)$:

$$\lim_{m\to\infty} \parallel y_m - y \parallel_1 = 0. \tag{2.30}$$

avec le choix de certain y_m sur chacun $[a, t_1], ..., [t_{m-1}, b]$. Daprés (2.7) et (2.8) nous avons

$$\parallel D^{\alpha}_{a+} y_m - D^{\alpha}_{a+} y \parallel_1 = \parallel f(t, y_m) - f(t, y) \parallel_1 \leq A \parallel y_m - y \parallel_1, \tag{2.31}$$

Ainsi, d'aprés (2.15) et (2.16), nous obtenons

$$\lim_{m\to\infty} \parallel D^{\alpha}_{a+} y_m - D^{\alpha}_{a+} y \parallel_1 = 0.$$

et par conséquent $D^{\alpha}_{a+} y(t)(a,b)$: Ceci accomplit la preuve du théorème ... $\square$

2.2.1 Equations différentielles fractionnaires

Equation différentielle fractionnaire à un seul terme

Considérons l'équation difféfetienlle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante (voir[4]) :

$$aD^{\alpha}_0 = f(t), \qquad (n - 1 \leq \alpha < n), \tag{2.32}$$

$$[D^{\alpha-k-1}y(t)]_{t=0} = 0, \qquad (k = 0, 1, ..., n-1), \tag{2.33}$$

Appliquant la transformée de Laplace sur les deux côtés de l'équation (2.17) nous obtenons

$$as^{\alpha}Y(s) = F(s),$$

et comme

$$G_1(t) = L^{-1}\{\frac{1}{as^{\alpha}}\} = \frac{1}{a}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

ou $G_1(t)$ est appelée la fonction fractionnaire de Green à un seul terme. Sous les conditions initiales données, la solution $y(t)$ de l'équation (2.17) est obtenue par la convolution

$$y(t) = \int_0^t G_1(t-s)f(s)ds = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds = \frac{1}{a}I_0^{\alpha}f(t).$$

Exemple

Si nous prenons $a = 1$, $f(t) = 1$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$ l'équation est devenue

$$D_0^{\frac{1}{2}}y(t) = 1, \tag{2.34}$$

avec

$$\left[D^{\alpha-1}y(t)\right]_{t=0} = 0, \tag{2.35}$$

La solution est donnée par :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^t (t-s)^{\frac{-1}{2}}ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}.$$

2.2.2 Equation différentielle fractionnaire à deux termes

Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante :

$$aD_0^{\alpha}y(t) + by(t) = f(t), \qquad (n-1 \leq \alpha < n), \tag{2.36}$$

avec les mêmes conditions définies par (2.2).

L'utilisation de la transformée de Laplace donne :

$$as^{\alpha}Y(s)+bY(s)=F(s). \tag{2.37}$$

Nous pouvons aussi écrire (2.22) sous la forme

$$Y(s)=\frac{1}{a}\frac{1}{s^{\alpha}+\frac{b}{a}}F(s),$$

et comme :

$$G_2(t)=L^{-1}\{\frac{1}{a}\frac{1}{s^{\alpha}+\frac{b}{a}}\}=\frac{1}{a}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\frac{b}{a}t^{\alpha}),$$

ou $G_2(t)$ est appelée la fonction fractionnaire de Green à deux termes , et $E_{\alpha,\beta}$ la fonction Mittag-Leffer de deux paramètres.

La solution $y(t)$ de l'équation (2.2) est obtenue par la convolution

$$y(t)=\int_0^t G_2(t-s)f(s)ds.$$

Exemple 10. *Si nous prenons $a=1$; $b=1$; $f(t)=1$; $\alpha=\frac{1}{2}$ nous obtenons :*

$$D_0^{\frac{1}{2}}y(t)+y(t)=1,$$

avec la même condition initiale (2.2) :

La fonction de Green est donnée par :

$$G_2(t)=t^{\frac{-1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-t^{\frac{1}{2}}),$$

la solution prend la forme

$$y(t)=-\int_0^t E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-s^{\frac{1}{2}}ds=-\sqrt{t}E_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(-\sqrt{t}).$$

2.2.3 Equation différentielle fractionnaire à trois termes

Nous considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante :

$$aD_0^{\beta}y(t)+bD_0^{\alpha}y(t)+cy(t)=f(t),(n-1\leq\alpha<\beta<n), \tag{2.38}$$

avec les conditions (2.22) *et* $\Big[D_{\beta-k-1}y(t)\Big]_{t=0}$, $(k=0,1,...,n-1)$ *Sous ces conditions, la transformée de Laplace donne*

$$Y(s)=\frac{1}{as^{\beta}+bs^{\alpha}+c}F(s),$$

Nous posons

$$g(s)=\frac{1}{as^{\beta}+bs^{\alpha}+c}.$$

Et comme nous avons supposé que $\beta>\alpha$, *nous pouvons écrire* $g(s)$ *sous la forme*

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{1}{c}\frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha}+b}\frac{1}{1+\dfrac{cs^{\alpha}}{as^{\beta-\alpha}+b}} && (2.39)\\ &= \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big(\frac{c}{a}\Big)^{k+1}\frac{s^{-\alpha k-\alpha}}{(s^{\beta-\alpha}+\frac{b}{a})^{k+1}}. && (2.40)\end{aligned}$$

Nous appliquons la transformée inverse de Laplace sur les deux côtés de (2.24), *on obtient :*

$$G_3(t)=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Big(\frac{c}{a}\Big)^k t^{\beta(k+1)-1}E^{(k)}_{\beta-\alpha,\beta+\alpha k}\Big(-\frac{b}{a}t^{\beta-\alpha}\Big).$$

Ou $G_3(t)$ *la fonction de Green, et* $E_{\lambda,\mu}$ *la fonction de Mittag-Leffer de deux paramètres, avec*

$$E^{\lambda,\mu}_{(k)}=\frac{d^k}{dz^k}E_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(j+k)!z^j}{j!\Gamma(\lambda j+\lambda k+\mu)}\qquad(k=0,1,2,...).$$

Finalement, la solution de l'équation (2.23) *est donnée sous forme de convolution déffinie par :*

$$y(t)=\int_0^t G_3(t-s)f(s)ds.$$

Exemple 11. *Si nous prenons* $a = 1$ *;* $b = 1$ *;* $c = 1$ *;* $f(t) = 1$ *;*$\alpha = \dfrac{1}{2}$ *et* $\beta = \frac{3}{2}$ *, alors l'équation* (2.23) *est écrite sous forme :*

$$D_0^{\beta} y(t) + D_0^{\alpha} y(t) + y(t) = 1,$$

et la fonction $G_3(t)$ *déffinie par*

$$G_3(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{\frac{1}{2}(3k+1)} E^{(k)}_{1,\frac{1}{2}(3+k)}(-t).$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné des conditions pour une solution unique au probléme de type Cauchy pour des équations ordinaires d'ordre fractionnaires sur un intervalle fini de l'axe réel dans l'espace des fonctions continues et sommables.

Chapitre 3

Stabilité des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire

3.1 Stabilité des systèmes d'ordre entier

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)), x \in U \subset \mathbb{R}^n, \\ x(t_0) &= x_0, t_0 \in I \subset \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1}$$

Ou : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n > 2$.

3.1.1 Notion sur la stabilité

Dans cette section, on va présenter les notions de stabilité, on ordre entier au sens de Lyapunov.

Définition Systèmes non autonomes

Les systèmes non autonomes sont les systèmes qui dèpendant du temps et d'état.

La principale difffécultè dans l'étude de tel système est que les solutions dèpend de l'instant initial t_0

3.1.2 Définition Système autonomes

Un système est dit autonome ou système invariant si f *ne dépend pas explicitement du temps*

Remarque 3.1. *On peut toujours transformer un système non autonome dans* $\mathbb{R}^n$ *en sysème autonome dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *(ou* t *n'apparait pas explicitement) on pose :*

$$F : J \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \text{ par } F(t,x) = (1, f(t,x)),$$
$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,x) \end{pmatrix} = F(t,x).$$

3.1.3 Point d'équilibre

Soit le système non linéaire autonome décrit par l'équation d'état
$f(x) = \dot{x}$.
Le point x_e *est un point d'équilibre (ou état d'équilibre) du système s'il est solution du système d'équations algébriques*

$$f(x_e) = 0.$$

Remarque 3.2. • *Les points d'équilibre sont obtenus en résolvant l'équation* $f(x_e = 0)$

• *Un système non linéaire peut avoir plusieurs points d'équilibre isolés*

• *Le point d'équilibre* x_e *vérifie également la propriété suivante*

$$x(t_0) = x_e \Rightarrow x(t) = x_e, \forall t > t_0.$$

Exemple 12. *Soit le pendule simple décrit par la représentation d'état*

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{-g}{l} sinx_1 \end{pmatrix}\right].$$

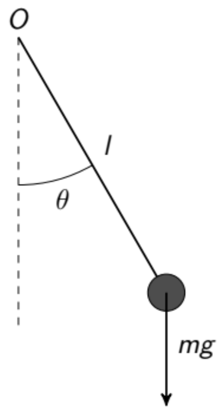

FIGURE 3.1 – Point d'équilibre d'un pendule simple

Les points d'équilibre sont donnés par :

$$x_2 = 0,$$
$$x_2 - \frac{g}{l} sinx_1 = 0.$$

Soit $x_2 = 0$ *,* $sinx_1 = 0$ *, ce qui conduit aux deux points d'équilibre* $x_e = (0[2\pi], 0)$ *et* $x_e = (\pi[2\pi], 0)$.
Ils correspondent physiquement aux positions verticales vers le haut et vers le bas.

Stabilité au sens de Lyapunov

Soit x_e *un point d'équilibre du système* $x = f(x)$ *. Ce point d'équilibre est dit stable si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \| x(t) - x_e \| < \varepsilon \ , \ \forall t \geq t_0.$$

Le point d'équilibre est dit instable s'il n'est pas stable.

3.1.4 Stabilité asymptotique

Définition(Point attractif)

Le point d'équilibre x_e du système $x = f(x)$ est dit attractif si et seulement si

$$\exists \gamma > 0 : \parallel x(t_0) - x_e \parallel < \gamma \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0.$$

Définition(Stabilité exponentielle)

On dit que l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable (noté ES), s'il existe un voisinage de l'origine noté $U(0), \exists \lambda_1 > 0$ et $\exists \lambda_2 > 0$, tels que

$$\parallel x(t) \parallel \leqslant \lambda_1 \parallel x_0 \parallel e^{\lambda_2(t-t_0)}, \forall x_0 \in U(0), \forall t_0 \geqslant 0.$$

Dans ce cas , la constante λ_2 est appelée le taux ou aussi la vitesse de convergence.

** L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre globalement exponontiellement stable (noté GES), si $U(0) = \mathbb{R}^n$.*

Remarque 3.3. *Il est important de remarquer que la propriété de la stabilité exponontielle du système entraine nécessairement la stabilité asymptotique de ce dernier.*

3.1.5 Méthode de Lyapunov

(Voir [5]) A.M.Lyapunov a proposé deux méthodes pour l'étude de la stabilité des systémes non linéaire. La premiére méthode consiste à calculer les points déquilibre afin de linéariser autour de ces points pour

*évaluer la stabilité ou bien l'instabilité, cette méthode consiste à examiner les valeurs propres de la matrice Jacobienne. La deuxiéme méthode est une généralisation de l'idée de l'énergie du systéme, le but est de trouver une fonction qui décroît le long des trajectoires du systéme, cette fonction est appelée **"fonction Lyapunov"**.*

Définition :

Fonction définie positive : Une fonction scalaire $V(x)$ continûment différentiable (par rapport à X) est dite définie positive dans une région U autour de l'origine si : $V(0) = 0$ et $V(X) > 0$, $\forall X \in U | X \neq 0$.

Fonction définie semi-positive si : $V(0) = 0$ et $V(X) \geq 0$, $\forall X \in U | X \neq 0$.

Fonction quadratique définie positive : La fonction quadratique est définie par $V(X) = X^T Q X$, ou Q une matrice $n \times n$ réelle symétrique , est définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice sont strictement positives.

Principes de Lyapunov :

Soit S un systéme dynamique de vecteur d'état X ,possédee un point d'équilibre X_e. Soit B_{Xe} une boule de R^n centrée en X_e .

S'il existe une fonction scalaire $V(X) : (B_{Xe} \longrightarrow R)$ continûment dérivable , posséde les propriétés suivantes :

Stabilité locale

- $V(X_e) = 0$.
- $V(X) > 0$ *définie positive* $\forall X \in B_{Xe}, X \neq X_e$.
- $\dot{V}(X) \leq$ *semi-définie négative* $\forall X \in B_{Xe}$.

Alors X_e est un point d'équilibre localment stable dans B_{Xe}.

Stabilité locale et asymptotique

L'état d'équilibre $X_e = 0$ *est globalement asymptotique stable s'il existe une fonction continuellement dérivable* $V(x)$ *telle que :*

- $V(X_e) = 0$.
- $V(X) > 0$ *définie positive* $\forall X \in B_{Xe}$, $X \neq X_e$.
- $\dot{V}(X) < 0$ *définie néfative* $\forall X \in B_{Xe}$.
- $\dot{V}(X) \rightarrow -\infty$ *quand* $\|X\| \rightarrow \infty$.

3.2 Méthodes d'analyse de stabilité des systèmes non linéaires

3.2.1 Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov se base sur l'analyse du comportement du système non linéaire autour de son point d'équilibre x_e *(linéarisé ce système au voisinage de* x_e *). Cette stratégie s'appelle méthode de linéaisation. Donc, on étudie les valeurs propres i du système de la matrice Jacobienne déduite au point d'équilibre* x_e

Avec un système de deuxième ordre : $\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$

la matrice (matrice Jacobienne) évaluée au point d'équilibre aura l'expression :

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{X_e} .$$

3.2.2 Deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe)

La deuxième méthode de Lyapunov est basée sur l'aspect physique fondamental de l'énergie. Si l'énergie totale d'un système, linéaire ou non-linéaire, est continûment dissipée (on parle de système dissipatif), alors le système doit converger obligatoirement vers un point d'équilibre. Alors, la philosophie de Lyapunov, pour étudier la stabilité d'un système, est d'analyser la variation d'une seule fonction scalaire (appelée la fonction de Lyapunov) dépendant de l'énergie totale du système. C'est à dire, on va définir cette fonction de Lyapunov décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du domaine d'attraction.

Proposition 3.1. *Si xe est un équilibre et toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $Df(x_e)$ ont les parties réelles strictement négatives, alors x_e est asymptotiquement stable.*

Si au moins une valeur propre a la partie réelle strictement positive, alors x_e est instable.

Exemples explicatif

Exemple 13. *Soit le système dont on veut connaître la stabilité :*

$\ddot{x} - \varepsilon x^2 \dot{x} + x = 0$ *Le passage en équations d'état :* $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$.

Ainsi : $\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = \varepsilon x_1^2 - x_1, \end{cases}$

Ce système possède un point d'équilibre $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

• *Analysons la stabilité de ce système avec la fonction candidate de Lyapunov :*

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

• *la dérivée de* $V(x)$ *:*

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x_2} = x_1\dot{x_1} + x_2\dot{x_2} = x_1x_2 - x_1x_2 + \varepsilon x_1^2x_2^2 = \varepsilon x_1^2x_2^2.$$

• *Donc :*

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \varepsilon x_1^2x_2^2.$$

Ainsi , $V(x)$ *est une fonction d"finie positive qui est strictement décroissante le long de toutes les trajectoires possible si* $\varepsilon < 0$

• *En vertu de la théorie de Lyapunov, le système est globalement stable si* $\varepsilon = 0$.

• *Il est globalement asymptotiquement stable si* $\varepsilon < 0$ (*V(x)*> 0 *pour* $x \neq 0$).

• *Sinon il est globalement instable .*

Exemple 14. *Soit :* $\begin{cases} \dot{x_1} = 2x_1(x_2^2 - 1), \\ \dot{x_2} = -x_2(x_1^2 + 1), \end{cases}$

• *Le point d'équilibre est* $(x_1, x_2) = (0, 0)$ *.On vérifie la stabilité avec la fonction de Lyapunov :*

$$(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2},$$

En dérivant :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= x_1\dot{x_1} + x_2\dot{x_2} \\ &= 2x_1^2(x_2^2 - 1) - x_2^2(x_1^2 + 1) \\ &= x_1^2x_2^2 - 2x_1^2 - 2x_1^2 - x_2^2.\end{aligned}$$

La condition de stabilité :

$$\dot{V}(x_1, x_2) < 0 \Rightarrow x_1^2x_2^2 - 2x_1^2 - x_2^2 < 0,$$

Cette condition peut être réécrite comme suit :

$$\dot{V}(x_1, x_2) < 0 \Rightarrow x_2^2 < \frac{2x_1^2}{(x_1^2 - 1)},$$

- *Essayons ce second candidat :*

$$V_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2}{2},$$

On trouve alors :

$$\dot{V}_2(x_1, x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2) < 0.$$

Ce qui mène à conclure que le système est globalement asymptotiquement stable.

Conclusion : *le choix de la fonction candidate de Lyapunov influe sur le type de stabilité du système.*

3.2.3 Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire :

Les systèmes d'ordre fractionnaires sont des systèmes décriés par des équations différentielles ou ses dérivées sont d'ordre non entier, le problème de la stabilité consiste à étudier le comportement d'un système donné aprés qu'il ait subi une perturbation venant l'écarter de sa position d'équilibre.
Dans tout ce qui suit, on considère le système différentielle suivant :

$$^{c}D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)). \tag{3.2}$$

ou

$$0 < \alpha \leqslant 1, x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

une fonction continue et $^{c}D^{\alpha}x(t)$ *désingne la dérivée de Caputo.*

Point d'équilibre :

Prenons le système (3.2), avec condition initiale $x(t_0) = x_0$ *, Pour évaluer les points d'équilibre du système (3.2), il suffit de résoudre l'équation :*

$$D^\alpha x(t) = 0.$$

Si x_e *est une solution de l'équation , alors :* $f(x_e) = 0$.

3.2.4 Stabilité des systèmes linéaires autonomes

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant, nous savons bien qu'un système est stable si les racines du polynome caractéristique sont négatives ou à parties réelles négatives si elles sont complexes conjugés donc situées sur la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est diférente des systèmes d'ordre entier. En effet, la notion intéressante est que les systèmes fractionnaires peuvent bel et bien avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe (MATIGNON, Denis. Stability results for fractional di§erential equations with applications to control processing. In : Computational engineering in systems applications. 1996. p. 963-968.)

Théorème 15. *soit le système autonome suivante :*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

Telle que $x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1$ *et* $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

(a) La solution $x(t) = 0$ *du système (3.3) est asymptotiquement stable , si et seulement si* $\mid arg(\lambda) \mid > \alpha\dfrac{\pi}{2}$ *ou* λ *sont toute les valeurs propres*

de la matrice A , De plus le vecteur d'état $x(t)$ tends vers 0 et verifie la condition suivante : $\| x(t) \| < Nt^{-\alpha}, t > 0, \alpha > 0$

(b) *La solution $x(t) = 0$ du système (3.1) est stable , si et seulement si la condition : $|arg(\lambda)| \geqslant \alpha\frac{\pi}{2}$ est vérifie pour toute λ valeur propre de la matrice A , et les valeurs propres critiques satisfont à $|arg(\lambda)| = \alpha\frac{\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique qui coincide avec leur multiplicité algébrique.*

(c) *La solution $x(t) = 0$ du système (3.3) est instable , si et seulement si s'il existe une valeur propre de A vérifiant $| arg(\lambda) | < \alpha\frac{\pi}{2}$.*

Remarque 3.4. *Si $1 < \alpha < 2$, le système (3.3) est asymptotiquement stable, si et seulement si $|arg(\lambda_i) > \alpha\frac{\pi}{2}$, pour tout $i = 1, 2, 3, ..., n$*
La figure suivante montre les régions stables et les régions instables .

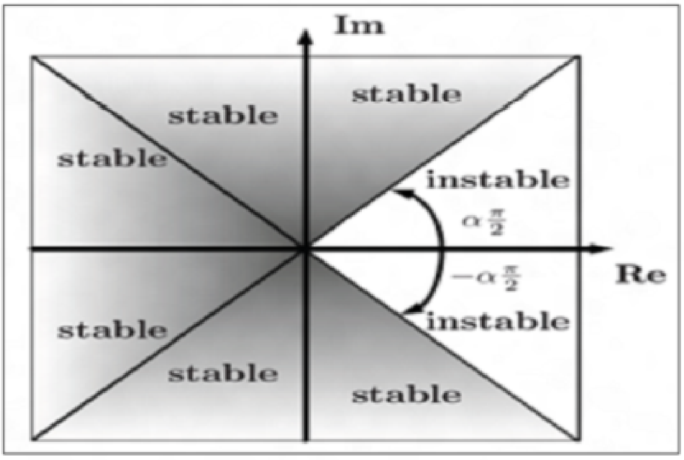

FIGURE 3.2 – Région de stabilité d'un système d'équations différentielles fractionnaires linéaire d'ordre $\alpha \in (0, 1)$

Corollaire

Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq ... \neq \alpha_n$ et tous les α_i sont des nombres rationnels entre 0 et 1 , tel que $\alpha_i = \frac{v_i}{u_i}; u_i, v_i \in \Bbbk\Bbbk^+$, soit m le plus petit commun mulitple des *dénoménateurs* u_i *avec* $i = \bar{1,n}$ *et en posant* $\rho = \frac{1}{m}$ *;alors le systeme* (3.3) *est asymptotiquement stable si toutes les racines de l'équation*

$$det[diag([\lambda^{m\alpha_1}, ..., \lambda^{m\alpha_n}]) - A] = 0. \tag{3.4}$$

satisfont $|arg(\lambda)| \geqslant \rho\frac{\pi}{2}$.

1. Ce corollaire dit que dans le cas des ordres rationnelles l'équation caractéristique peut etre transformée en une équation polynomiale d'ordre entier.

2. Le degrée de stabilité d'un système d'ordre fractionnaire dépend avec l'ordre fractionnaire α

3.2.5 Stabilité des systèmes linéaires non autonomes

Dans cette section, on étudie la stabilité d'un système différentiel fractionnaire linéaire non autonome avec la dérivée de Caputo, de la forme :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + B(t)x(t), \ t > t_0, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

ou $x \in \mathbb{R}^n$, *la matrice* $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$ *et* $B(t) : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *est une matrice continument différentiable.*

Théorème 16. *Si* $\forall \lambda_l \in spec(A) \neq 0$, $\mid Arg(\lambda_l) \mid \geq \dfrac{\alpha\pi}{2}$ *, telles que les valeurs propres critiques qui satisfont* $|Arg(\lambda_t)| = \dfrac{\alpha\pi}{2}$ *possèdent la meme multiplicité algébrique et géométrique et :*

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|B(t)dt\|,$$

est borné .

Alors : la solution du système (3.5) *est stable .*

Remarque 3.5. *On obtient la solution du système (3.3) en utilisant la transformation de Laplace et la transformée inverse de Laplace.*

$$x(t) = E_\alpha(A(t-t_0)^\alpha)x_0 + \int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-t_0)^\alpha)B(\tau)x(\tau)d\tau. \quad (3.6)$$

Théorème 17. *Si la matrice A satisfait $\forall \lambda_l \in spec(A) \neq 0$,$\mid Arg(\lambda_l) \mid \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ et $\|B(t)\| = O(t-t_0)^\gamma \; -1 < \gamma < 1-\alpha, t_0 > 0)$ pour $t \geqslant 0$.*
Alors : la solution du système (3.5) est asymptotiquement stable.

3.2.6 Stabilité de l'équation de Basset

Un probléme particuliérement important est l'étude d'une sphére soumise à la pesanteur, qui a été considérée d'abord par Basset dans ([3]), et plus tard dans ([4]), qui a présentéé une force hydraulique spéciale, généralement connue sous le nom "force de Basset".
Mainardi et autres a présenté une nouvelle formulation de cette force, appelée la force généralisée du basset, basée sur la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^{C}D^{\alpha}_{0+}(0 < \alpha < 1)$ et sur un modéle généralisé qui considéré par Basset.

$$V'(t) = a({}^{C}D^{\alpha}_{0+}V)(t) + V(t) = 1, \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < 1). \quad (3.7)$$

avec $V(0+) = V_0$. Nous pouvons écrire l'équation (3.7) sous la forme :

$$(V(t)-1)' + a^{c}D^{\alpha}_{0+}(V(t)-1) + (V(t)-1) = 0.$$

En tenant compte que ${}^{c}D\alpha_{a+}(1) = 0$. Si nous posons $y(t) = V(t) - 1$ nous obtenons :

$$y'(t) + a({}^{C}D^{\alpha}_{0+}y)(t) + y(t) = 0, \quad (3.8)$$

avec $(0 < \alpha < 1)$, et en prend $a \in \mathbb{R}$ et $y(0+) = 1$.
Dans cette section nous étudions la stabilité de l'équation de Basset dans les deux cas $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha = \frac{1}{4}$ La discussion sera déroulée selon les valeurs du

paramétre $a(a \in \mathbb{R})$.

Premier cas $\alpha = \frac{1}{3}$

1- Premiére forme

Considérons l'équation de Basset sous forme :

$$^{C}D_{0}^{3\alpha} + y(t) + a^{C}D_{0+}^{\alpha}y(t) = 0, \quad (\alpha = \frac{1}{3}). \tag{3.9}$$

avec la condition initiale $y(0+) = 0, a \in \mathbb{R}$ *et* $^{C}D_{0+}^{\alpha}$ *dénote la dérivée fractionnaire de Caputo.*

D'aprés le (théorème 11) nous pouvons écrire l'équation ((3.9) sous forme de système comme suit :

$$\begin{cases} ^{C}D_{0+}^{\alpha}y_1(t) = y_2(t), \\ ^{C}D_{0+}^{\alpha}y_2(t) = y_3(t), \\ ^{C}D_{0+}^{\alpha}y_3(t) = -ay_2(t) - y_1(t), \end{cases} \tag{3.10}$$

Le système (3.10) *a la forme :*

$$^{C}D_{0}^{\alpha} = AY(t).$$

tels que $^{C}D_{0+}^{\alpha}Y(t) = (^{C}D_{0+}^{\alpha}y_1(t),^{C}D_{0+}^{\alpha}y_3(t), Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T$, *et la matrice associé au système* (3.9) *est donnée par :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a & 0 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Il est clair que le seul point d'équilibre du système (3.10) *est* $(0, 0, 0)$ *:*

Discussion *(en tenant compte que* $\alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} = 0.523598775$*).*

Nous discutons la stabilité du point d'équilibre $(0; 0; 0)$ *selon les valeurs de* $a(a \in R)$ *: D'aprés (sec 10.[12]) le polynôme caractéristique associé à la* *matrice A est donné par :*

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda + 1.$$

Les calculs par MAPLE donne les résultats suivants :

• ***Si*** $a = -1.45$

Le polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 1.45\lambda + 1.$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 \simeq -1.46098$, $\lambda_2 \simeq 0.73049 + 0.38839i$, $\lambda_3 \simeq 0.73049 - 0.38839i$.

Les valeurs absolues des arguments sont :

$$|arg(\lambda_1)| = \pi > \alpha\frac{\pi}{2}; \;\; |arg(\lambda_{2,3})| \simeq 0.48868 < \alpha\frac{\pi}{2}$$

D'aprés le théoréme de la stabilité précédente, le point d'équilibre $(0, 0, 0)$ *est instable.*

•***Si*** $a = -1.38672255$

Le polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 1.38672255\lambda + 1.$$

Les valeurs propres sont :

$\lambda_1 \simeq -1.44225$, $\lambda_2 \simeq 0.72112 + 0.41634i$, $\lambda_3 \simeq 0.72112 - 0.4163i$

Les valeurs absolues des arguments sont :

$$|arg(\lambda_1) = \pi > \alpha\frac{\pi}{2}; |arg(\lambda_{2,3})| = 0.523598775 = \frac{\pi}{6}, \;\; (\alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}),$$

Alors d'prés le théoréme 3.2.2, le point (0,0,0) est stable.

•***Si*** $a = 0$

Le polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 1.$$

Les valeurs propres sont :
$\lambda_1 = -1$ *;* $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ *;* $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$
Les valeurs absolues des arguments sont :

$$|arg(\lambda_1) = \pi > \alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}; |arg(\lambda_{2,3})| = \frac{\pi}{3} > \alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

alors d'aprés le théoréme 3.2.2 le point d'équilibre (0,0,0) est asymptotiquement stable.

Conclusion $(\beta = -1.38672255)$

Si $a \in]-\infty, \beta[$ *le point d'équilibre (0,0,0) est instable, et donc la solution zéro de l'équation* (3.7) *est instable.*

Si $a \in]\beta, +\infty[$ *; le point d'équilibre (0,0,0) est asymptotiquement stable, et donc la solution zéro de l'équation* (3.7) *est asymptotiquement stable.*

Si $a = \beta$ *; le point d'équilibre (0,0,0) est stable, et donc la solution zéro de l'équation* (3.7) *est stable.*

Deuxième forme

Considérons maintenant l'équation de Basset sous forme :

$$^{C}D^{3\alpha}_{0+}y(t) + a^{C}D^{2\alpha}_{0+}y(t) + y(t) = 0, \quad (\alpha = \frac{1}{3}), \tag{3.11}$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *:*

D'aprés (le théorème 2.11) l'équation (3.11) *s'écrit sous forme de système suivant :*

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}y_1(t) = y_2(t), \\ D^{\alpha}_{0+}y_2(t) = y_3(t), \\ D^{\alpha}_{0+}y_3(t) = -ay_3(t) - y_1(t), \end{cases}$$

Le seul point d'équilibre de ce système est (0,0,0), Nous suivons les mêmes étapes comme ci-dessus nous obtenons la matrice A définie par :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -a \end{bmatrix} \quad , \quad a \in \mathbb{R},$$

le polyôme caractéristique associé à la matrice A est donné par :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + 1, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Discussion*(en tenant compte que* $\alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} = 0.523598775$*) Les calculs par MAPLE donne les résultats suivants :*

•***Si*** $a = -1.38672255$

Le polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 1.38672255\lambda^2 + 1.$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 \simeq -0.69336$ *;* $\lambda_2 \simeq 1.04004 + 0.60046i$ *;* $\lambda_3 \simeq 1.04004 - 0.60046i$

Les valeurs absolues des arguments sont :

$|arg(\lambda_1)| = \pi > \alpha\frac{\pi}{2}$ *;* $|arg(\lambda_{2,3})| = 0.523598775 = \frac{\pi}{6} = \alpha\frac{\pi}{2}$*, alors d'aprés le théorème 3.2.2 le point d'équilibre (0,0,0) est stable.*

Maintenant nous donnons quelques résultats concernant la stabilité du point (0,0,0) sur le tableau suivant :

valeurs de a	*valeurs propres* (λ)	$\mid arg(\lambda) \mid$	*nature*
-70.1	λ_1 = 70.0997 λ_2= 0.11953 λ_3 = -0.011933	$\mid arg(\lambda_{1,2}) \mid = 0$ $\mid arg(\lambda_3) \mid = \pi$	*instable*
-40.1	λ_1 =40.09937 λ_2= 0.15823 λ_3 = -0.15360	$\mid arg(\lambda_3) \mid = 0$ $\mid arg(\lambda_3) \mid = \pi$	*instable*
-10.1	λ_1 =10.09017 λ_2= 0.31976 λ_3 = -0.30993	$\mid arg(\lambda_3) \mid = 0$ $\mid arg(\lambda_3) \mid = \pi$	*instable*
-1.38672255	...	...	*stable*
+10.1	λ_1 = -10.10978 $\lambda_{2,3}$ = 0.00489 $\pm 0.31446i$	$\mid arg(\lambda_1) \mid = \pi$ $\mid arg(\lambda_{2,3}) \mid = 1.55241$	*asym.st*
+40.1	λ_1 = -40.10062 $\lambda_{2,3}$ = 0.00031 $\pm 0.15792i$	$\mid arg(\lambda_1) \mid = \pi$ $\mid arg(\lambda_{2,3}) \mid = 1.56882$	*asym.st*
+70.1	λ_1 = -70.10020 $\lambda_{2,3}$ = 0.00010 $\pm 0.11944i$	$\mid arg(\lambda_1) \mid = \pi$ $\mid arg(\lambda_{2,3}) \mid = 1.56994$	*asym.st*

conclusion

$(\gamma = -1.38672255)$

Si $a \in]-\infty, \gamma[$ *, ; le point d'équilibre* $(0;0;0)$ *est instable, et donc la solution zéro de l'équation* (3.6) *est instable.*

Si $a = \gamma$, *le point d'équilibre* $(0;0;0)$ *est stable, et donc la solution zéro de* *l'équation* (3.6)*est stable.*

Si $a \in]\gamma, \infty[$, *le point d'équilibre* $(0;0;0)$ *est asymptotiquement stable, et donc la solution zéro de l'équation* (3.6) *est asymptotiquement stable.*

Deuxième cas $\alpha = \frac{1}{4}$

1. Première forme

Considérons l'équation de Basset sous forme

$$^cD_{0+}^{4\alpha}y(t) + a\,^cD_{0+}^{\alpha}y(t) = 0, \quad (\alpha = \frac{1}{4}), \tag{3.12}$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *D'aprés le (théorème 2.11) l'équation* (3.12) *s'écrit sous forme de système comme suit :*

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}y_1(t) & = y_2(t), \\ D_{0+}^{\alpha}y_2(t) & = y_3(t), \\ D_{0+}^{\alpha}y_3(t) & = y_4(t), \qquad\qquad a \in \mathbb{R} \\ D_{0+}^{\alpha}y_4(t) & = -ay_2(t) - y_1(t), \end{cases} \tag{3.13}$$

Le seul point d'équilibre de ce système est $(0,0,0,0)$ *:*

Ce système prend la forme :

$$D_{0+}^{\alpha}Y(t) = AY(t), \tag{3.14}$$

tels que :

$C_{0+}^{D\ \alpha}Y(t) = (C_{0+}^{D\ \alpha}y_1(t), C_{0+}^{D\ \alpha}y_2(t), C_{0+}^{D\ \alpha}y_3(t), C_{0+}^{D\ \alpha}y_4(t))^T; Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t$

et la matrice associé au système (3.11) *donnée par :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \, a \in \mathbb{R}.$$

le polynôme caractéristique associé à la matrice A est donné par :

$$p(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda + 1.$$

Discussion

(en tenant compte que $\alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} = 0.39269908$*)*
On va discuter la stabilité du point d'équilibre $(0; 0; 0; 0)$ *selon les valeurs de a ; ($a \in \mathbb{R}$)*

- *Si* $a = -1.40$

Le polynôme caractéristique est :

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 1.40\lambda + 1.$$

Les valeurs propres sont :

$\lambda_{1,2} \simeq -0.74340 \pm 1.01166i$, $\lambda_{3,4} \simeq -0.74340 \pm 0.28607i$ *Les valeurs absolues des arguments sont :*
$\mid arg(\lambda_{1,2}) \mid \simeq 2.20451 > \alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$, $\mid arg(\lambda_{3,4}) \mid \simeq 0.36734 > \alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$ *Alors le point d'équilibre* $(0; 0; 0; 0)$ *est instable.*

- *Si* $a = -1.34920697$

Le polynôme caractéristique est :

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 1.34920697\lambda + 1.$$

Les valeurs propres sont :

$\lambda_{1,2} \simeq -0.74117 \pm 0.30700i$, $\lambda_{3,4} \simeq -0.74117 \pm 1.00221i$ *Les valeurs absolues des arguments sont :*

$\mid arg(\lambda_{1,2}) \mid \simeq 0.39269908 = \alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$, $\mid arg(\lambda_{3,4}) \mid \simeq 2.20757 > \alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$

D'aprés le théorème 3.2.2 *le point d'équilibre est stable.*

- *Si* $a = -1.20$

Le polynôme caractéristique est :

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 1.20\lambda + 1.$$

Les valeurs propres sont :

$\lambda_{1,2} \simeq -0.73489 \pm 0.97379i$, $\lambda_{3,4} \simeq 0.73489 \pm 0.36309i$ *Les valeurs absolues des arguments sont :*

$\mid arg(\lambda_{1,2}) \mid \simeq 2.22288 > \alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$, $\mid arg(\lambda_{3,4}) \mid \simeq 0.45428 > \alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$

D'aprés le théorème 3.2.2 *le point d'équilibre* $(0; 0; 0; 0)$ *est asymptotiquement stable.*

- *Si* $a = 0$

Le polynôme caractéristique est :

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 1.$$

Les valeurs propres sont :

$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\lambda_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ *Les valeurs absolues des arguments sont :*

$\mid arg(\lambda_{1,2}) \mid \frac{\sqrt{\pi}}{4} > \alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$, $\mid arg(\lambda_{3,4}) \mid \frac{\sqrt{3\pi}}{4} > \alpha\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$ *D'aprés le théorème* 3.2.2 *le point d'équilibre* $(0; 0; 0; 0)$ *est asymptotiquement stable.*

Conclusion

$(\delta = 1.34920697) Si a \in]-\infty, \delta[$, le le point d'équilibre $(0,0,0,0)$ est instable, et donc la solution zéro de l'équation (3.12) est instable.
$a = \delta$, le point d'équilibre est stable, et donc la solution zéro de l'équation (3.12) est stable.

- *Si $a \in]\delta, \infty[$, le point d'équilibre est asymptotiquement stable, et donc la solution zéro de l'équation (3.12) est asymptotiquement stable.*

2. Deuxième forme

Considérons l'équation de Basset sous forme

$$ {}^cD^{4\alpha}_{0+}y(t) + a\,{}^cD^{3\alpha}_{0+}y(t) + y(t) = 0, \quad (\alpha = \frac{1}{4}), \tag{3.15}$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$ et $a \in \mathbb{R}$ Nous suivons les mêmes étapes comme ci-dessus nous obtenons le système et la matrice A déffnies par :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}y_1(t) &= y_2(t), \\ D^{\alpha}_{0+}y_2(t) &= y_3(t), \\ D^{\alpha}_{0+}y_3(t) &= y_4(t), \qquad\qquad a \in \mathbb{R} \\ D^{\alpha}_{0+}y_4(t) &= -ay_4(t) - y_1(t), \end{cases} \tag{3.16}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + 1 \ \ a \in \mathbb{R}.$$

Aprés les calculs par MAPLE, nous avons obtenu les mêmes résultats pour les intervalles des stabilité est l'instabilité comme ci-dessus (première forme), c'est-a-dire :

- *Si* $a \in]-\infty, \delta[$, $(\delta = -1.34920697)$ *le point d'équilibre* $(0,0,0,0)$ *est instable, et donc la solution zéro de l'équation* (3.2.6) *est instable.*

$a = \delta$, *le point d'équilibre est stable, et donc la solution zéro de l'équation* (3.2.6) *est stable .*

- *Si* $a =]\delta, +\infty[$,*le point d'équilibre est asymptotiquement stable, et donc la solution zéro de l'équation* (3.2.6) *est asymptotiquement stable.*

Exemple 18. *Si nous prenons* $a = 0$

Le polynôme caractéristique est :

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 1.$$

Les valeurs propres sont :

$\lambda_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$, $\qquad \lambda_{3,4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$

Les valeurs absolues des arguments sont :

$\mid arg(\lambda_{1,2}) \mid \dfrac{\sqrt{\pi}}{4} > \alpha \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{8}$, $\qquad \mid arg(\lambda_{3,4}) \mid \dfrac{\sqrt{3\pi}}{4} > \alpha \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{8}$

D'aprés le théorème 3.9 *le point d'équilibre* $(0,0,0,0)$ *est asymptotiquement stable.*

Conclusion

Nous avons vu dans ce travail que l'existence et l'unicité des équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire tient compte de la continuité et le caractère Lypschitzien de la fonction donnée. De plus cette existence est comme le cas classique seulement local sur un intervalle borné $[0,T]$*. Nos futurs travaux seront généralisés au cas global dans l'axe réel tout entier. Pour la stabilité des solutions, nous avons vu à travers ce travail que, contrairement au cas classique, la stabilité est liée à léordre fractionnnaire de dérivation. Dans tout le travail, les démonstrations sur la stabilité ont été articulées sur le théorème de Lyapunov et l'argument des valeurs propres.*

Bibliographie

[1] *A.A.Kilbas and S.A.Marzan. Cauchy Problem for Differentieal Equation with caputo Derivative.* Fra.Cal. App. App .ISSN (2004) 1311-0454.

[2] *A.A.Kilbas ,H.M.Srivastava,J.J.Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier , Amesterdam (2006)

[3] *A. B. Basset. A Treatise on Hydrodynamics vol. 2, Cambridge University Press., England, 1888*

[4] *A. B. Basset. On the descent of a sphere in a viscous liquid Quart. J. Math., 41, A910) 369-381.*

[5] *A.E.M Salah Les systhémes chootiques à dérivées fractionnaire , mémoire magistére d'Université Mentouri-Constantine(2009)*

[6] *Ali Benlabbes. Problèmes aux conditions aux limites et à dérivées fractionnaires .* Thèse de Doctorat ; Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès

[7] *F.Nier , D.Iftimie. Introduction a la Topologie. Licence de Mathématique Univercité de Rennes 1.*

[8] *Artin , Emile . La fonction Gamma (PDF) page.18-19 . Archivé de l'original (PDF) le 12-11-2016.Récupéré le 11-11-2016*

[9] *I. N'doye. Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires. Thèse de Doctorat Univ. Henri Poincaré-Nancy 1et Univ Hassan II Ain Chock- Casablanca (2011)*

[10] *I. PODLUBNY Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, CA, 1999.*

[11] *Kamel Haouam. Existace et non existance de solution des équations différentielles fractionnaires.* Thèse de Doctorat . Université Mentouri Constantine (2007)

[12] *K. Diethelm , J . F .Neville . Multi-order fractional differential equations and their numerical solution .* Applied Mathematics and Computation 154(2004) 621-640

[13] *K. S. Miller, B. Ross. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley and Sons, New York, 1993.*

[14] *M.Benchohra , S.Hamani, S.K. Ntouyas , Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions. Nonlinear Anal. 71 (2009) , 2391- 2396*

[15] *M.C.Ho,Y.C.Hung,C.H.Chou Phys. Lett. A 296 (1) (2002) 43.*

[16] *R. L. BAGLEY and P.J. TORVIK "On The Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior" Journal of Rheology .*

[17] *Ross B. (1977) The development of Fractional calculus 1695-1900. Historia Mayh 4 :75-89.*

[18] *S. G .Samko ,A. A .Kilbas, O. I. Marichev Fractional Integral and Derivatives (Theary and Applicatins).* Gordon and Breach , Switzerland , 1993.

[19] *T. J. Anastasio The fractional-order dynamics of brainstem vestibuleoculumotorneurons, Biol. Cybern. 72 (1994) 69ó79.*

[20] *T.Menacer. Synchronisation des systèmed Dynamique à dérivées Fractionnaires.* Mémoire Magistère d'Université Mentouri-Constantine.

[21] *Tidjani Menaser Synchronisation des systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires.* Thèse de Doctorat . Université Mentouri - Constantine 01 (2014) .

Notations

$\Gamma(x)$	*La fonction Gamma de la variable x*
$\beta(x, y)$	*La fonction Bêta de variable x et y*
$E_{\alpha,\beta}$	*La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètre*
I_a^α	*Intégration d'ordre α*
${}^{RL}D_a^\alpha$	*La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Rieman-Liouville de la fonc*
${}^{C}D_a^\alpha$	*La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f*
$f(t) * g(t)$	*Convolution des fonctions f et g*
x_e	*Point d'équilibre*
$\mathbb{R}$	*L'ensemble des nombres réel*
$\mathbb{C}$	*L'ensemble des nombres complexes*
$Spec(A)$	*Spectre de la matrice A*
e^A	*exponentielle de A*
$D(p)$	*La discriminant du polynôme $p(\lambda)$*
$L[X]$	*Fonction de Lyapunov*

Résumé

L'analyse fractionnaire est une branche da l'analyse mathématique.

Tout d'abord nous avons rassemblé qulques outils pour notre travail, la fonction Gamma, Mittag-Leffler et nous rappelons les notions des intégrals et dérivées fractionnaires de Rieman-Liouville, Caputo et Grunwald Litnikov.

Puis nous avons étudié l'existance et l'unicité des solutions de quelques problèmes de type de cauchy pou des équations ordinaires d'ordre fractionnaire.

en fin donnerons les définitions et les théorèmes qui concernent la stabilité de la solution zéro pour les équations différentielles d'ordre entier avec quelques exemples .

Ainsi nous étudierons la stabilité de la solution zéro pour l'équation fractionnaire de Basset et de Bagley-Torkiv.