



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIC ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MIISTERE DE ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
جامعة عباس لغرور خنشلة  
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR- KHENCHELA



Faculté de Sciences et Technologie

Département de Math et informatique

N° de série :.....

**Mémoire de fin d'études**  
Pour l'obtention du diplôme de **Master**  
Filière: **Mathématiques**  
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

**Problème Non Linéaire pour Equation  
Différentielle Fractionnaire et La  
Stabilité d'Ulam**

Réalisé par :  
**CHEKHAB LYLYA**

Dirigé par : Dr. **CHERGUI DJAMILA**

Membres de jury :

Dr. B . Bahri           Président  
Dr. L. Djebara        Examineur

2021-2022

# Problème Non Linéaire pour Equation Différentielle Fractionnaire et La Stabilité d'Ulam

**Chekhab Lylya**

liliachekhab25@gmail.com

**Master en Mathématiques Appliquées**

Deuxième Année

**Université Abbes Laghrour-Khenchela**

26 Juin 2022



# Dédicace



*Je dédie ce travail :*

*A ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et reconnaissance*

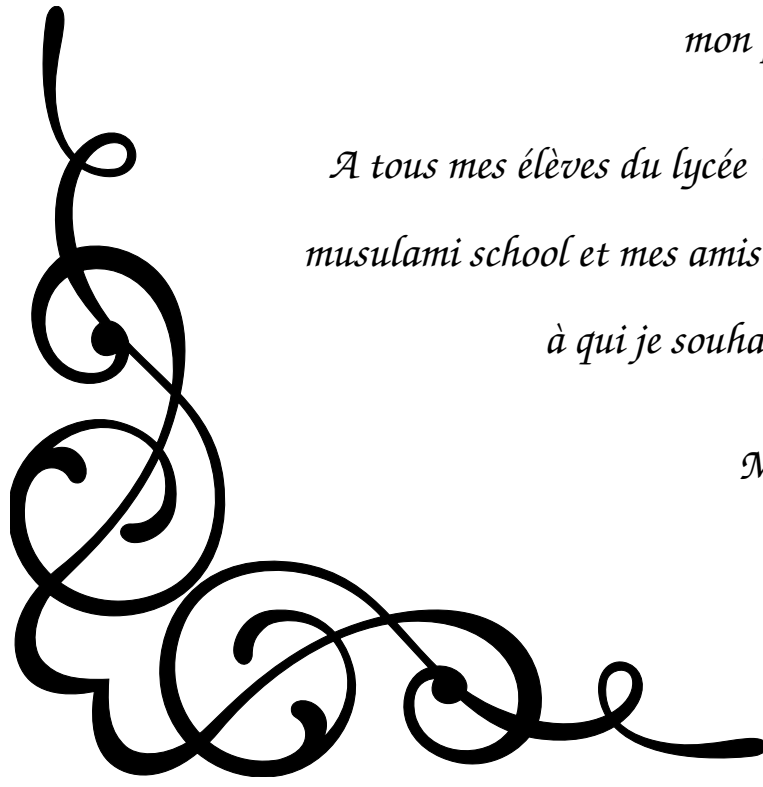
*A mes frères ABD ELBASSET et AKRAM qui me donnent de l'amour et de la vivacité.*

*A qui m'a aidé - de près et de loin - et partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'a chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.*

*A tous mes élèves du lycée "Segni el-sadek", mon groupe du musulami school et mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.*

*Merci !*

*Chekhav Lylyya*





## Remerciement

*Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma  
profonde gratitude à notre chère docteur et encadrante CHERGUI  
DJAMILA pour son suivi et pour son énorme soutien, quelle na cessé de nous prodiguer  
tout au long de la période du projet pour le temps quelle a consacré et pour les précieuses  
informations qu'elle ma prodiguées avec intérêt et compréhension. J'adresse aussi mes vifs  
remerciements aux membres des jurys pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail.  
Mes remerciements vont à tout le personnel que j'ai contacté durant mon travail, au-  
près desquelles j'ai trouvé l'accueil chaleureux, laide et l'assistance dont j'ai besoin. Je  
ne laisserai pas cette occasion passer, sans remercier tous les enseignants et le  
personnel de département de math et informatique , pour leur aide et  
leurs précieux conseils et pour l'intérêt qu'ils portent à ma forma-  
tion. Enfin, mes remerciements à tous ceux qui ont  
contribué de près ou de loin au bon dé-  
roulement de ce projet.*



---

## Problème Non Linéaire pour Équation Différentielle et Stabilité d'Ulam

---

### Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence, l'unicité et la stabilité au sens d'Ulam des solutions pour équations différentielles fractionnaires de Caputo d'ordre  $\alpha$ . Présentons théorème de point fixe de Banach pour démontrer l'existence et l'unicité. Puis nous étudions quatre types de résultats de stabilité d'Ulam dans le cas où  $0 < \alpha < 1$  et  $b = +\infty$ . Enfin, nous donnons des exemples pour illustrer nos résultats théoriques.

### Mots clés :

Équations différentielles fractionnaires ; Dérivée Caputo ; Théorème de Banach ; Existence et Unicité ; Stabilité d'Ulam .

---

## Nonlinear Linear Problem For Fractional Differential Equation and Ulam Stability

---

### Abstract

The objective of this memory is to study the existence, uniqueness and stability in the sense of Ulam of the solutions for fractional differential equations of Caputo order  $\alpha$ . Presenting Banach fixed point theorem to prove existence and uniqueness. Then we study four types of Ulam stability results in the case where  $0 < \alpha < 1$  and  $b = +\infty$ . Finally, we give examples to illustrate our theoretical results.

**Key words :** Fractional differential equations ; Caputo derivative ; Banach Theorem ; Existence and Uniqueness ; Ulam stability .

---

## المسألة غير الخطية للمعادلة التفاضلية الكسرية واستقرار أولام

---

### ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة الوجود، الوحدانية والاستقرار في معنى أولام لحلول المعادلات التفاضلية الكسرية لكابيتو. أولاً نقدم نظرية النقطة الثابتة لباناخ لإثبات الوجود والوحدانية. ثم ندرس أربعة أنواع من نتائج استقرار أولام في الحالة التي يكون فيها  $0 < \alpha < 1$  و  $b = +\infty$ . أخيراً، نقدم أمثلة لتوضيح نتائجنا النظرية.

### الكلمات المفتاحية :

المعادلات التفاضلية الكسرية؛ مشتق كابيتو؛ نظرية باناخ؛ الوجود والوحدانية؛ استقرار أولام .

---

# Notations

Pour faciliter la lecture, on commence par introduire les différentes notations utilisées tout au long de ce travail.

$\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels.

$\|\cdot\|_\infty$  : Norme infini.

$C([a, b])$  : Espace de fonctions continues sur  $[a, b]$ .

$AC([a, b])$  : Espace de fonctions absolument continues sur  $[a, b]$ .

$L^p([a, b])$  : L'espace des fonctions p-intégrables sur  $[a, b]$ .

$\Gamma(\alpha)$  : Fonction Gamma.

$B(\alpha, \beta)$  : Fonction Beta.

$I_{a+}^\alpha$  : Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha$ .

$I_{b-}^\alpha$  : Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha$ .

$D_{a+}^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha$ .

$D_{b-}^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha$ .

${}^c D_{a+}^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre  $\alpha$ .

${}^c D_{b-}^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre  $\alpha$ .

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Notions générale . . . . .	3
1.1.1 Espace normés . . . . .	3
1.1.2 Espace de Banach . . . . .	4
1.1.3 Espace de Hilbert . . . . .	4
1.1.4 Espaces des fonctions intégrables . . . . .	5
1.1.5 Quelques résultats de la théorie du point fixe . . . . .	5
1.2 Dérivées fractionnaires . . . . .	5
1.2.1 Les fonctions utiles . . . . .	6
1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	7
1.2.3 Dérivée Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	9
1.2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	10
<b>2 Existence, Unicité et Stabilité au sens d’Ulam de la Solution de Problème Fractionnaire</b>	<b>15</b>
2.1 Résultats d’existence et d’unicité . . . . .	16
2.2 Résultat de Stabilité d’Ulam . . . . .	18
<b>Annexe A</b>	<b>23</b>
<b>Annexe B</b>	<b>25</b>

# Introduction Générale

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) sont le sujet du siècle. Ses théories sont considérablement développées au cours du 19<sup>ème</sup> et 20<sup>ème</sup> siècles et ont été largement utilisées par des mathématiciens ainsi que des chimistes, des ingénieurs, des économistes, des biologistes et des physiciens.

Parce que le calcul fractionnaire a une bonne performance de corrélation globale pour refléter l'historique processus de dépendance du développement des fonctions du système, et peut également décrire les attributs de la système dynamique lui-même, il devient un puissant outil mathématique pour décrire certains mouvements complexes, phénomènes irréguliers, caractéristiques de la mémoire et autres aspects. (voir [12]).

La stabilité de l'équation fonctionnelle a été soulevée à l'origine par Ulam en 1940 dans une conférence donnée à l'Université du Wisconsin. Le problème posé par Ulam était la suivante : Dans quelles conditions existe-t-il une cartographie additive près d'une application approximativement additive [18]. La première réponse à la question d'Ulam question a été posée par Hyers en 1941 dans le cas des espaces de Banach en [7]. Par la suite, ce type de stabilité est appelé la stabilité d'Ulam-Hyers dans 1978, Rassias a fourni une remarquable généralisation d'Ulam-Hyers stabilité des applications en considérant des variables. Le concept de stabilité pour une équation fonctionnelle apparaît lorsque nous remplaçons l'équation fonctionnelle par une inégalité qui agit comme une perturbation de l'équation voir les monographies de Kilbas [2] et Podlubny [12].

L'objectif de notre mémoire est de démontrer l'existence et l'unicité de la solutions pour le problème de Cauchy d'une équation différentielle non linéaire avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo et la stabilité d'Ulam, par introduction les quatre types de définitions de stabilité d'Ulam pour les équations différentielles fractionnaires : stabilité d'Ulam-Hyers, stabilité d'Ulam-Hyers généralisée, stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias et stabilité généralisée. Stabilité Ulam-Hyers-Rassias et on présentons les quatre types de résultats de stabilité d'Ulam pour une équation différentielle fractionnaire dans le cas  $0 < \alpha < 1$  et  $b = +\infty$ . Les résultats pré-

sentés dans ce mémoire sont les résultats de l'article sous le titre : "Ulam Stability and Data Dependence For Fractional Differential Equation With Caputo Derivative".[10]

1. Le premier chapitre est réservé à des définitions et notions de base qui seront utiles dans l'étude de problème.
2. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions de problème de Cauchy d'une équation différentielle non linéaire avec dérivée fractionnaire au sens Caputo et la stabilité d'Ulam.

À la fin de ce mémoire, pour la commodité des lecteurs intéressés par une autre investigation sur ces et d'autres sujets étroitement liés, on inclut une Bibliographie.



# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions spécifiques qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie de calcul fractionnaire ce chapitre constitue une partie préliminaire dans la quelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie danalyse fonctionnelle qui représentent un outils indispensable dans notre étude.

### 1.1 Notions générale

#### 1.1.1 Espace normés

Dans la suite  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Définition 1.1.** [9] Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Une norme sur  $E$  est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui satisfait les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $x \in E$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a  $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$  (la norme est dite positivement homogène).
2. Inégalité triangulaire : si  $x, y \in E$ , alors  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .
3. Propriété de séparation : si  $x \in E$ ,  $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

► Une application qui satisfait les propriétés 1 et 2 mais pas forcément 3 est appelé une semi-norme sur  $E$ .

Habituellement une norme est notée par  $N(x) = \|x\|$  ou  $N(x) = |x|$ .

Il est important de retenir l'inégalité suivante, conséquence immédiate de l'inégalité triangu-

laire : si  $\|\cdot\|$  est une semi-norme sur  $E$ , alors :

$$\forall x, y \in E, \quad |||x| - |y|| \leq \|x - y\|.$$

Un espace vectoriel normé est la donnée d'un espace vectoriel  $E$  et d'une norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$ .

### 1.1.2 Espace de Banach

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On dit que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon : n, m \leq n_\epsilon \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Une suite de Cauchy est convergente si pour  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n_1, n_2 \geq N, \|x_{n_1} - x_{n_2}\| \leq \epsilon.$$

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire toute suite de Cauchy dans  $E$  est convergente (par rapport à la topologie définie par la distance associée à la norme),

### 1.1.3 Espace de Hilbert

Ce chapitre est consacré à une classe d'espaces normés particulièrement importante, tant du point de vue théorique que de celui des applications. On considère  $E$  espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.2.** [9](produit scalaire) On appelle produit scalaire sur  $E$  toute application  $\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  telle que :

1. Pour tout  $y \in E$ , l'application  $\langle \cdot | y \rangle : \rightarrow \mathbb{K}$  définie par  $x \rightarrow \langle x | y \rangle$  est linéaire.
2. (a) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\forall x, y \in E$ ,  $\langle y | x \rangle = \langle x | y \rangle$  (propriété de symétrie).  
(b) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\forall x, y \in E$ ,  $\langle y | x \rangle = \overline{\langle x | y \rangle}$  (propriété de antisymétrie).
3. Pour tout  $x \in E$ ,  $\langle x | x \rangle \geq 0$  (positivité).
4. Pour tout  $x \in E$ ,  $\langle x | x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (définie positive).

► Une application satisfaisant les propriétés 1, 2, 3 et 4 est appelée un produit scalaire.

Le couple constitué d'un espace vectoriel  $E$  et d'un produit scalaire sur  $E$  est appelée un espace pré-hilbertien réel si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou complexe si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Définition 1.3.** *Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire*

### 1.1.4 Espaces des fonctions intégrables

**Définition 1.4.** [3] *Soit  $\Omega = [a; b]$ ,  $(-\infty < a < b < +\infty)$  un intervalle bornée de  $\mathbb{R}$ .*

1. *Pour  $(1 \leq p \leq +\infty)$ , l'espace  $L^p(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $f$  réelles sur  $\Omega$  telles que  $f$  est mesurable et*

$$\int_a^b |f(x)|^p < \infty.$$

2. *Pour  $p = \infty$ , l'espace  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables  $f$  bornées presque partout sur  $\Omega$ .*

**Théorème 1.1.** *Soit  $\Omega = [a; b]$ ,  $(-\infty < a < b < +\infty)$  un intervalle bornée de  $\mathbb{R}$ .*

1. *Pour  $(1 \leq p \leq +\infty)$ , l'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. *L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = \inf \{ M \geq 0 : |f(t)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega \}$$

### 1.1.5 Quelques résultats de la théorie du point fixe

Dans cette partie, on étudie théorème du point fixe de Banach. Etant donné un ensemble  $X$  et une application  $T : X \rightarrow X$  on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur  $T$  et  $X$  pour que  $T$  ait un point fixe.

**Théorème 1.2.** (**Théorème du point fixe de Banach**) [[1]] *Soient  $X$  un espace de Banach et  $T : X \rightarrow X$  une application contractante. Alors  $T$  admet un point fixe unique, autrement dit :*

$$\exists! x \in X : Tx = x.$$

## 1.2 Dérivées fractionnaires

Dans cette section nous intéressons au calcul intégral fractionnaire et dérivation au sens de Riemann-Liouville et de Caputo, ainsi que les fonctions spéciales.

### 1.2.1 Les fonctions utiles

Dans cette section nous présentons des définitions et quelques propriétés sur les fonctions : Gamma, Bêta et Mettag-Leffler.

#### 1.2.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction de base de calcul fractionnaire. Cette fonction généralise le factoriel  $n!$ , et permet à  $n$  de prendre des valeurs réelles ou même complexe .

**Définition 1.5.** *la fonction Gamma est définie par l'intégrale :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

*qui converge sur le demi-plan  $R(z)$ , en intégrant par partie, nous montrons que :*

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z); \quad R(z) > 0.$$

*en particulier*

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad \Gamma(n + 1) = n!.$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

#### 1.2.1.2 La fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire : **La fonction Bêta**. Cette fonction joue un rôle important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma.

**Définition 1.6.** *La fonction Bêta est définie par*

$$B(z, w) = \int_0^{\infty} t^{z-1} (1-t)^{w-1}; \quad R(z) > 0; \quad R(w) > 0$$

#### ***Lien entre la fonction Gamma et la fonction Bêta***

*Nous pouvons démontrer que :*

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

### 1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$ ; On considère l'intégrale :

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

La primitive second de  $f$  définit comme suite :

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \left( \int_a^u f(t) dt \right) du.$$

Permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \left( \int_t^x du \right) f(t) dt,$$

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x (x - t) f(t) dt.$$

Le  $n^{\text{ime}}$  itéré de l'opérateur  $I$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I_a^n f(t) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

donc

$$I_a^{(n)} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Cette formule a un sens même quand  $n$  prenant une valeur non-entière, on définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

**Définition 1.7.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle *intégrale de Riemann-Liouville de  $f$*  l'intégrale définie par la formule suivante

$$I_a^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

**Exemple 1.2.1.** Considérons la fonction  $f(x) = (x-a)^\delta$ ; on calcule l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

$$I_a^\alpha = (x-a)^\delta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\delta dt.$$

Pour évaluer cette intégrale, on pose le changement de variable :  $t = a + (x - a)z$ ,  
alors  $dt = a + (x - a)dz$ ; d'où

$$I_a^\alpha (x - a)^\delta = \frac{(x - a)^{\alpha+\delta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 z^\delta (1 - z)^{\alpha-1} dz = \frac{(x - a)^{\alpha+\delta}}{\Gamma(\alpha)} B(\delta + 1, \alpha)$$

Après l'utilisation de la relation entre la fonction gamma et bêta on a :

$$I_a^\alpha (x - a)^\delta = \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\alpha + \delta + 1)} (x - a)^{\alpha+\delta}.$$

**Proposition 1.3** (loi de composition). *Soient  $\delta$  et  $\alpha$  deux réels strictement positifs et  $f$  une fonction intégrable, on a :*

$$I_a^\alpha (I_a^\delta f(x)) = I_a^\delta (I_a^\alpha f(x)) = I_a^{\alpha+\delta} f(x).$$

*Preuve.* on a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (I_a^\delta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - y)^{\alpha-1} I_a^\delta f(y) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)} \int_a^x (x - y)^{\alpha-1} \int_a^y (y - t)^{\delta-1} dt dy. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini on a :

$$I_a^\alpha (I_a^\delta f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)} \int_a^x f(t) dt \int_a^y (x - y)^{\alpha-1} (y - t)^{\delta-1} dy$$

Par le changement de variable  $y = t + \tau(x - t)$ ;  $0 \leq \tau \leq 1$

alors,

$$dy = (x - t) d\tau$$

On obtient

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (I_a^\delta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)} \int_a^x (x - t)^{\alpha+\delta-1} f(t) dt \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha-1} \tau^{\delta-1} d\tau \\ &= \frac{B(\alpha, \delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)} \int_a^x (x - t)^{\alpha+\delta-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \delta)} \int_a^x (x - t)^{\alpha+\delta-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Donc :

$$I_a^\alpha (I_a^\delta f(x)) = I_a^{\alpha+\delta} f(x).$$

□

### 1.2.3 Dérivée Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires. Dans cette partie on va présenter la dérivée de Riemann-Liouville, qui est la plus utilisée.

**Définition 1.8.** Soit  $f$  une fonction intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$ ; la dérivée ordre non entier ( $n - 1 < \alpha < n; n \neq 0$ ) au sens de Riemann-Liouville définit par :

$$D_a^\alpha = \frac{d^n}{dx^n} [I^{n-\alpha} f(x)]$$

$$D_a^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

où  $n = [\alpha] + 1$ .

En particulier, si  $\alpha = 0$  on aura

$$D_a^0 f(x) = f(x)$$

De plus si ( $0 < \alpha < 1$ ), alors  $n = 1$  d'où

$$D_a^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt.$$

**Exemple 1.2.2.** On calcul la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(x) = (x-a)^\beta$

$$D_a^\alpha = \frac{d^n}{dx^n} \left[ I^{n-\alpha} (x-a)^\beta \right].$$

L'intégrale a calculé dans l'exemple précédent

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (x-a)^{n-\alpha+\beta} \right].$$

On dérive  $n$  fois, on obtient :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Comme cas particulier  $\alpha = 1$

$$D_a (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (x-a)^{\beta-1}.$$

$$D_a(x-a)^\beta = (x-a)^{\beta-1}.$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 1.2.1.** La dérivée fractionnaire d'une fonction constante n'est pas ni nulle ni constante

$$D_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

**Proposition 1.4.** *L'opérateur de dérivée fractionnaire possède les propriétés suivantes :*

1. *la différentiation est un opérateur linéaire*

$$D_a^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda(D_a^\alpha f)(t) + \mu(D_a^\alpha g)(t).$$

2. *soit  $\alpha > 0$  et  $f \in L^p([a, b])$ ; ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) alors :*

$$I_a^\alpha D_a^\alpha(f(x)) = f(x)$$

*presque partout sur  $[a, b]$*

3. *soient ( $0 < \alpha < 1$ );  $f \in L^1([a, b])$  et  $I^{1-\alpha} \in AC[a, b]$  on a :*

$$I_a^\alpha D_a^\alpha(f(x)) = f(x) - \frac{(I^{1-\alpha} f)(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}.$$

*AC l'espace des fonctions absolument continue sur  $[a, b]$ .*

## 1.2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

### 1.2.4.1 L'opérateur fractionnaire de caputo

**Définition 1.9.** *La dérivée fractionnaire de Caputo  ${}^c D_{a+}^\alpha$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  d'une fonction  $f$  donnée est défini par :*

$${}^c D_{a+}^\alpha = I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx.$$

*avec  $n-1 \leq \alpha \leq n$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$*

### 1.2.4.2 Propriétés fondamentales

**Remarque 1.2.2.** On note l'opérateur  $D^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  différentiation de l'opérateur d'ordre entier i.e :

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

**Proposition 1.5.** [13] *Les deux opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo ne coïncident pas i.e :*

$${}^c D^\alpha f(t) \neq D^\alpha f(t).$$

**Lemme 1.6.** [16, 17] *Soit  $\alpha > 0$ , alors l'équation différentielles*

$${}^c_a D^\alpha h(t) = 0.$$

*admet les solutions  $h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $n = [\alpha] + 1$ .*

Du lemme ci-dessus, nous d'eduisons le lemme suivant :

**Lemme 1.7.** [16, 17] *Soit  $\alpha > 0$ , alors*

$$I_a^{\alpha c} D^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

*pour  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $n = [\alpha] + 1$ .*

### 1.2.4.3 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire de Caputo

#### Linéarité

**Lemme 1.8.** *Soit  $n-1 < \alpha < n$ ;  $n \in \mathbb{N}$  et soient les deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  telles que  ${}^c D^\alpha f(t)$  et  ${}^c D^\alpha g(t)$  existent. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire :*

$${}^c D^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^c D^\alpha f(t) + \mu {}^c D^\alpha g(t)$$

.

*Preuve.* On a :

$${}^c D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} f(t)$$

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= I^{n-\alpha} D^n[\lambda f(t) + \mu g(t)] \\ &= \lambda \mu I^{n-\alpha} D^n[(f + g)(t)]. \end{aligned}$$

Comme la dérivée n-ième et l'intégrale sont linéaires, alors :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \lambda I^{n-\alpha} D^n f(t) + \mu I^{n-\alpha} D^n g(t) \\ &= \lambda({}^c D^\alpha f(t)) + \mu({}^c D^\alpha g(t)). \end{aligned}$$

□

### Non-commutativité

**Lemme 1.9.** Soit  $n - 1 < \alpha < n < n - 2$ ;  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ;  $\alpha \in \mathbb{R}$  et soit la fonction  $f(t)$  telle que  ${}^c D^\alpha f(t)$  existent, alors :

$${}^c D^\alpha D^m f(t) = {}^c D^{\alpha+m} f(t) \neq D^{m\alpha} D^\alpha f(t).$$

**Définition 1.10.** [7] La dérivation du Caputo d'ordre  $\alpha$  pour une fonction  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  peut t'écrire comme suit :

$${}^c D^\alpha f(t) = D_a^\alpha \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) \right), \quad t > 0, \quad n - 1 < \alpha < n.$$

Soit  $\epsilon$  un réel positive,  $f : [a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un opérateur continu et  $\varphi[a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue.

► Pour étudier *la stabilité* de la solution, on doit considérer l'équation différentielle fractionnaire suivante

$${}^c D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \alpha \in (0, 1) \quad (\text{or}(1, 2)), t \in [a, b) \quad (1.1)$$

On obtient les conditions suffisantes pour la stabilité de la solution pour (1.1). En particulier, quatre types des résultats de stabilité de type Ulam sont discutés. C'est la stabilité dUlam-Hyers, la stabilité généralisée dUlam-Hyers, la stabilité dUlam-Hyers-Rassias et la stabilité généralisée dUlam-Hyers-Rassias.

**Définition 1.11.** [7] L'équation (1.1) est stable au sens de Ulam-Hyers sil existe un nombre réel  $c_f > 0$  tel que pour chaque  $\epsilon > 0$  et pour chaque solution  $y \in C^1([a, b), \mathbb{R})$  ou  $(C^2([a, b), \mathbb{R}))$  de l'inéquation

$$|{}^c D^\alpha y(t) - f(t, y(t))| \leq \epsilon, \quad t \in [a, b] \quad (1.2)$$

il existe une solution  $x \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  ou  $(C^2([a, b], \mathbb{R}))$  de l'équation(1.1) avec :

$$|y(t) - x(t)| \leq c_f \epsilon, \quad t \in [a, b].$$

**Définition 1.12.** [7] L'équation(1.1) est stable au sens de Ulam-Hyers généralisé s'il existe  $\theta_f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ,  $\theta_f(0) = 0$ , tel que pour chaque  $\epsilon > 0$  et pour chaque solution  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  ou  $(C^2([a, b], \mathbb{R}))$  de l'inéquation

$$|{}^c D^\alpha y(t) - f(t, y(t))| \leq \varphi(t), \quad t \in [a, b], \quad (1.3)$$

il existe une solution  $x \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  ou  $(C^2([a, b], \mathbb{R}))$  de l'équation(1.1) avec :

$$|y(t) - x(t)| \leq \theta_f(\epsilon), \quad t \in [a, b].$$

**Définition 1.13.** [7] L'équation(1.1) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias par rapport à  $\varphi \in C([a, b], \mathbb{R}_+)$  s'il existe un nombre réel  $c_{f,\varphi} > 0$ , tel que pour tout  $\epsilon > 0$  et pour chaque solution  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  ou  $(C^2([a, b], \mathbb{R}))$  de l'inéquation

$$|{}^c D^\alpha y(t) - f(t, y(t))| \leq \epsilon \varphi(t), \quad t \in [a, b], \quad (1.4)$$

il existe une solution  $x \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  ou  $(C^2([a, b], \mathbb{R}))$  de l'équation(1.1) avec :

$$|y(t) - x(t)| \leq c_{f,\varphi} \epsilon \varphi(t), \quad t \in [a, b].$$

**Définition 1.14.** [7] L'équation(1.1) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias-généralisé par rapport à  $\varphi \in C([a, b], \mathbb{R}_+)$  s'il existe un nombre réel  $c_{f,\varphi} > 0$ , tel que pour chaque  $\epsilon > 0$  et pour chaque solution  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  ou  $(C^2([a, b], \mathbb{R}))$  de l'inéquation

$$|{}^c D^\alpha y(t) - f(t, y(t))| \leq \varphi(t), \quad t \in [a, b], \quad (1.5)$$

il existe une solution  $x \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  ou  $(C^2([a, b], \mathbb{R}))$  de l'équation(1.1) avec :

$$|y(t) - x(t)| \leq c_{f,\varphi} \varphi(t), \quad t \in [a, b].$$

**Remarque 1.2.3.** il est clair que :

$$(i) \quad (1.11) \Rightarrow (1.12); \quad (ii) \quad (1.13) \Rightarrow (1.14); \quad (iii) \quad (1.13) \Rightarrow (1.11).$$

**Remarque 1.2.4.** Une fonction  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  ou  $(C^2([a, b], \mathbb{R}))$  est une solution de inégalité (1.2) si et seulement s'il existe une fonction  $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  ou  $(C^2([a, b], \mathbb{R}))$  (qu'est dépendante de  $y$ ) tel que :

$$(i) \quad |g(t)| \leq \epsilon, \quad t \in [a, b];$$

$$(ii) \quad {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) + g(t), \quad t \in [a, b].$$

**Lemme 1.10.** (Lemme de Gronwall [2]) Soient  $z, w : [0, T) \rightarrow [0, +\infty)$  deux fonctions continues où  $T \leq \infty$ . Si  $w(\cdot)$  une fonction non négative, localement intégrable sur  $[0, T]$ . Supposons qu'il existent des constantes  $\kappa \geq 0$  et  $q > 0$  tel que :

$$z(t) \leq w(t) + \kappa \int_0^t (t-s)^{q-1} z(s) ds; \quad t \in [0, T),$$

alors

$$z(t) \leq w(t) + \int_0^t \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\kappa \Gamma(q))^n}{\Gamma(nq)} (t-s)^{nq-1} w(s) \right] ds, \quad t \in [0, T).$$

Si  $w(t) = \bar{a}$ , est constante quand  $0 \leq t < T$ , alors l'inégalité ci-dessus réduite à :

$$z(t) \leq \bar{a} E_q(\kappa \Gamma(q) t^q), \quad 0 \leq t < T,$$

où  $E_q$  est un fonction de Mittag-Leffler définie par :

$$E_\beta(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\Gamma(k\beta + 1)}, \quad y \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}(\beta) > 0.$$

**Remarque 1.2.5.** Il existe un constant  $M_\kappa^* > 0$  indépendant de  $\bar{a}$  tel que :

$$z(t) \leq M_\kappa^* \bar{a} \quad \text{pour tout } 0 \leq t < T$$

# Chapitre 2

## Existence, Unicité et Stabilité au sens d'Ulam de la Solution de Problème Fractionnaire

### Introduction

Ce chapitre a été consacré à l'existence, l'unicité et la stabilité au sens d'Ulam des solutions de l'équation différentielle fractionnaire non linéaire muni de la condition aux limites suivante :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & 0 < \alpha < 1, \quad t \in [a, +\infty). \\ x(a) = y(a). \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  ${}^c D^\alpha$  est la dérivée fractionnaire de Caputo,  $0 < \alpha < 1$ .

Maintenant, on transforme le problème aux limites initial sous forme d'une équation intégrale qui est également utilisée dans l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité.

**Lemme 2.1.** *Soit  $h \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  une fonction et  $x \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  est une solution de l'équation intégrale fractionnaire suivante :*

$${}^c D^\alpha x(t) = h(t), \quad t \in [a, +\infty). \quad (2.2)$$

avec condition aux limites admet une solution unique donnée par :

$$x(t) = y(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

*Preuve.* Nous commençons par résoudre l'équation (2.2), on applique l'intégrale fractionnaire  $I_a^\alpha$  des deux cotés, on obtient :

$$I_a^{\alpha c} D_a^\alpha x(t) = I_a^\alpha h(t), \quad t \in [a, +\infty). \quad (2.3)$$

De lemme(1.7) l'équation (2.3) devient :

$$x(t) + c_0 = I_a^\alpha h(t), \quad t \in [a, +\infty). \quad (2.4)$$

Appliquons la condition  $x(a) = y(a)$  on trouve que  $c_0 = -y(a)$  donc on obtient :

$$x(t) - y(a) = I_a^\alpha h(t), \quad t \in [a, +\infty). \quad (2.5)$$

□

## 2.1 Résultats d'existence et d'unicité

Notre résultat d'existence est basée sur le théorème de l'application contractante de Banach. soit  $X = \{x : x(t) \in C(I)\}$  et muni de la norme  $\|x\|_X = \sup_{t \in I} |x(t)|$  où  $C(I)$  est l'espace de suites des fonctions continue à valeurs réelles sur  $I = [a, +\infty)$ , il est connu que  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach.

**Lemme 2.2.** *Supposons  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $f \in C([a, +\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  une fonction continue, alors le problème (2.1) est équivalent à l'équation intégrale :*

$$x(t) = y(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \quad t \in [a, +\infty). \quad (2.6)$$

**Théorème 2.3.** *Nous supposons :*

(H<sub>1</sub>)  $f \in C([a, +\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

(H<sub>2</sub>)  $\exists m_f > 0$  tel que :  $|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq m_f |u_1 - u_2|, \forall t \in [a, +\infty), \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ .

Alors le problème (2.1) admet une solution unique si :

$$m_f < \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(t-a)^\alpha}.$$

*Preuve.* considérons l'opérateur  $F : X \rightarrow X$  définie par :

$$(Fx)(t) = y(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds.$$

Posons  $M = \sup_{t \in I} |f(t, 0)|$  et montrons que  $F(B_r) \subset B_r$  où  $B_r = \{x \in X, \|x\| < r\}$  et

$$r \geq \frac{|y(a)| + \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}M}{1-K}, \quad \text{où} \quad K = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}m_f.$$

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &= \left| y(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq |y(a)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq |y(a)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s))| ds \\ &\leq |y(a)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)| ds \\ &\leq |y(a)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} [|f(s, x(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|] ds \\ &\leq |y(a)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} [m_f |x(s) - 0| + M] ds \\ &\leq |y(a)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha m_f \cdot r + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha M \\ &\leq r, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $F(B_r) \subset B_r$ .

Supposons maintenant que  $x, y \in X$  et  $t \in [a, +\infty)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |(Fx)(t) - (Fy)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} m_f |x(s) - y(s)| ds \\ &\leq \frac{m_f}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha |x(s) - y(s)| ds \\ &\leq \frac{m_f (t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} |x(s) - y(s)| ds. \end{aligned}$$

Par hypothèse  $\frac{m_f (t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$ , alors  $F$  est une contraction. En appliquant le principe de l'application contractante de Banach, on déduit que le problème (2.1) admet une solution unique.  $\square$

## 2.2 Résultat de Stabilité d'Ulam

Dans cette partie on étudie quatre types de stabilité d'Ulam de l'équation différentielle fractionnaire d'ordre  $\alpha$  (2.1) qui sont d'Ulam-Hyers, Ulam-Hyers généralisée, Ulam-Hyers-Rassias et Ulam-Hyers-Rassias généralisée.

**Lemme 2.4.** *Si  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  est une solution de l'inéquation différentielle fractionnaire pour chaque  $\epsilon > 0$ ,*

$$|{}^c D^\alpha y(t) - f(t, y(t))| \leq \epsilon, \quad (2.7)$$

*alors  $y$  est une solution de l'inégalité intégrale suivante :*

$$|y(t) - y(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds| \leq \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \epsilon. \quad (2.8)$$

*Démonstration.* Soit  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  une solution de l'inéquation (2.7) pour chaque  $\epsilon > 0$ . Ensuite, à partir de remarque 1.2.4 et du lemme 2.2 pour une fonction continue  $g(t)$  telle que  $|g(t)| \leq \epsilon, t \in [a, b]$ , on a :

$${}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) + g(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

on utilise les propriétés de  $I^\alpha$ , ce qui conduit à :

$$y(t) - y(a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} |y(t) - y(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| \quad (2.9) \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} |g(s)| ds \\ &\leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \epsilon. \end{aligned}$$

La preuve est complète. □

**Théorème 2.5.** *On suppose que les hypothèses  $(H_1), (H_2)$  soient vérifiées. Alors le problème (2.1) est stable au sens de Ulam-Hyers.*

*Démonstration.* Sous  $(H_1), (H_2)$ , le problème (2.1) à une solution unique. Soit  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  une solution de l'inéquation (2.7), alors pour chaque  $t \in [a, b)$  :

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= \left| y(t) - y(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^a (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \left| y(t) - y(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^a (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^a (t-s)^{\alpha-1} (f(s, y(s)) - f(s, x(s))) ds \right| \\ &\leq \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \cdot \epsilon + \frac{m_f(t-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \|x - y\|_{C([a,b])}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|y - x\|_{C([a,b])} \leq \frac{(t-a)^\alpha}{(1-k)\Gamma(1+\alpha)} \cdot \epsilon$$

Ensuite, il existe un nombre réel  $c_f = \frac{(t-a)^\alpha}{(1-k)\Gamma(1+\alpha)} > 0$ , tel que

$$|y(t) - x(t)| \leq c_f \cdot \epsilon. \quad (2.10)$$

Ainsi (2.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers est établi, ce qui complète la preuve.  $\square$

**Corollaire 2.6.** *On suppose que toutes les hypothèses du théorème 2.5 sont satisfait. Alors le problème (2.1) est stable au sens de Ulam-Hyers. généralisée.*

*Démonstration.* Soit  $\theta(\epsilon) = \epsilon \cdot c_f = \epsilon \cdot \frac{(t-a)^\alpha}{(1-k)\Gamma(1+\alpha)}$  dans (2.10) alors  $\theta(0) = 0$  et le problème (2.1) est stable au sens de Ulam-Hyers.généralisée.  $\square$

► Dans la prochaine section, on introduit l'hypothèse suivante :

$(H_3)$  Soit  $\varphi \in C([a, b], \mathbb{R})$  une fonction croissante qui satisfait la propriété  $I^\alpha \varphi(t) \leq \lambda_{\varphi, \alpha} \varphi(t)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , pour une constante  $\lambda_{\varphi, \alpha} > 0$ .

**Lemme 2.7.** *On suppose que  $\varphi$  satisfait  $(H_3)$ . Si  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  est une solution de l'inéquation*

$$|{}^c D^\alpha y(t) - f(t, y(t))| \leq \epsilon \cdot \varphi(t), \quad \forall \epsilon > 0. \quad (2.11)$$

alors  $y$  est une solution de l'inégalité intégrale suivante :

$$\left| y(t) - y(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right| \leq \epsilon \cdot \lambda_{\varphi, \alpha} \varphi(t). \quad (2.12)$$

*Démonstration.* Soit  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  une solution de l'inéquation (2.11), pour chaque  $\epsilon > 0$ . de la remarque 1.2.4 et du lemme 2.2, pour une fonction continue  $g(t)$  tel que  $|g(t)| \leq \epsilon\varphi(t)$  et pour chaque  $\epsilon > 0$ ,  $t \in [a, b)$ , on a

$$\begin{aligned} |y(t) - y(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| \quad (2.13) \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} |g(s)| ds \\ &\leq \epsilon \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds, \\ &\leq \epsilon \cdot \lambda_{\varphi, \alpha} \cdot \varphi(t) \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve.  $\square$

**Théorème 2.8.** *On suppose que les hypothèses  $(H_1) - (H_3)$  soient vérifier, alors le problème (2.1) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias par rapport à  $\varphi$ .*

*Démonstration.* Sous  $(H_1) - (H_2)$  le problème (2.1) a une solution unique en  $C([a, b]\mathbb{R})$ . Soit  $y \in C([a, b]\mathbb{R})$  une solution de l'inéquation (2.11), alors pour chaque  $t \in [a, b)$  :

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= \left| y(t) - y(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \left| y(t) - y(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s, y(s)) - f(s, x(s))) ds \right| \\ &\leq \epsilon \cdot \lambda_{\varphi, \alpha} \cdot \varphi(t) + \frac{m_f(t-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \|x - y\|_{C([a, b])}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'il existe un nombre réel  $c_{f, \varphi} = \frac{\lambda_{\varphi, \alpha} \cdot \varphi(t)}{1-k}$ , tel que

$$|y(t) - x(t)| \leq \epsilon \cdot \frac{\lambda_{\varphi, \alpha}}{1-k} \cdot \varphi(t) = \epsilon \cdot c_{f, \varphi} \cdot \varphi(t), \quad t \in [a, b). \quad (2.14)$$

Cela donne le résultat souhaité et complété la preuve.  $\square$

**Corollaire 2.9.** *Sous l'hypothèse de théorème 2.8, le problème (2.1) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisé par rapport à  $\varphi \in C([a, b], \mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Soit  $\epsilon = 1$  et  $c_{f, \varphi} = \frac{\lambda_{\varphi, \alpha}}{1-k}$ , ceci nous permet de déterminer que le problème (2.1) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias.généralisé.  $\square$

**Exemple 2.2.1.** Dans cette section, nous donnons des exemples pour illustrer notre résultats théoriques.

Soit  $0 < \alpha < 1$ , On considère dans ce cas  $B = \mathbb{R}$  l'équation :

$${}^c D^\alpha x(t) = 0, \quad t \in [a, b), \quad (2.15)$$

soit  $y \in C^1([a, b), \mathbb{R})$  est une solution de l'inéquation différentielle fractionnaire pour chaque  $\epsilon > 0$ ,

$$|{}^c D^\alpha y(t)| \leq \epsilon, \quad t \in [a, b), \quad (2.16)$$

pour une fonction  $g(t)$  telle que :

$$i) |g(t)| \leq \epsilon, \quad \forall t \in [a, b).$$

$$ii) {}^c D^\alpha y(t) = g(t), \quad \forall t \in [a, b). \quad (2.17)$$

On utilise les propriétés de  $I^\alpha$ , ce qui donne :

$$y(t) = y(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds; \quad t \in [a, b).$$

pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} |y(t) - c| &= \left| y(a) - c + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| \\ &\leq |y(a) - c| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} |g(s)| ds \\ &\leq |y(a) - c| + \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq |y(a) - c| + \frac{(t-a)^\alpha \epsilon}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad t \in [a, b). \end{aligned}$$

Si on prend  $c = y(a)$ , on obtient

$$|y(t) - c| \leq \frac{(t-a)^\alpha \epsilon}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad t \in [a, b).$$

Si  $b < +\infty$ , alors

$$|y(t) - c| \leq \frac{(b-a)^\alpha \epsilon}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad t \in [a, b).$$

Alors l'équation (2.15) est stable au sens d'Ulam-Hyers .

Soit  $b = +\infty$ , la fonction

$$y(t) = \frac{(t-a)^\alpha \epsilon}{\Gamma(\alpha+1)}$$

est une solution de l'inégalité (2.16) et

$$|y(t) - c| = \left| \frac{(t-a)^\alpha \epsilon}{\Gamma(\alpha+1)} - c \right| \rightarrow +\infty, \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Donc, l'équation (2.15) n'est pas de stabilité d'Ulam-Hyers dans l'intervalle  $[a, +\infty)$ .

Soit  $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  est une solution de l'inéquation différentielle fractionnaire :

$$|{}^c D^\alpha y(t)| \leq \varphi(t), t \in [a, +\infty). \quad (2.18)$$

et  $x(t) = y(a), t \in [a, +\infty)$  une solution unique de l'équation (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= |y(t) - y(a)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds, \\ &\leq \lambda_{\varphi, \alpha} \varphi(t), \quad t \in [a, b], \forall t \in [a, b], \end{aligned}$$

ceci nous permet de déduire que le problème (2.15) est de stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée.

# Annexe A

## Théorème de point fixe de Banach

**Définition 2.1.** [13] Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et l'application  $F : X \rightarrow X$ . On dit que  $F$  est une application lipschitzienne s'il existe une constante positive  $k \geq 0$  telle que pour tout  $x, y \in X$  on'a :

$$\|Fx - Fy\| \leq \|x - y\|.$$

**Théorème 2.10.** [13] Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et l'application  $F : X \rightarrow X$  contractante avec la constante de contraction  $k$  alors  $F$  admet un unique point fixe  $x \in X$

*Preuve. L'existence*

Considérons la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} x_n = F(x_{n-1}), & n \geq 1. \\ x_0 \in X. \end{cases}$$

On doit prouver que est une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de Cauchy dans  $X$ .

Pour  $m < n$  on utilise l'inégalité triangulaire :

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_{m+1} - x_m\| + \|x_{m+2} - x_{m+1}\| + \dots + \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Puisque  $F$  est une contraction, alors

$$\|x_{p+1} - x_p\| = \|F(x_p) - F(x_{p-1})\|.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq (k^m + k^{m+1} + k^{m+2} + \dots + k^{n-1}) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq k^m (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-m-1}) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{k^m}{1 - k} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

On déduit que  $(x_n)_n \in \mathbb{N}$  est de Cauchy dans  $X$  qui est complet, donc  $(x_n)_n \in \mathbb{N}$  converge vers  $x$  dans  $X$ .

Par ailleurs puisque  $F$  est continue alors

$$x = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x_{n-1}) = F(\lim_{x \rightarrow \infty} x_{n-1}) = F(x).$$

Donc  $x$  est un point fixe de  $F$ .

### L'unicité

Supposons que  $Fx = x$  et  $Fy = y$  :

Alors

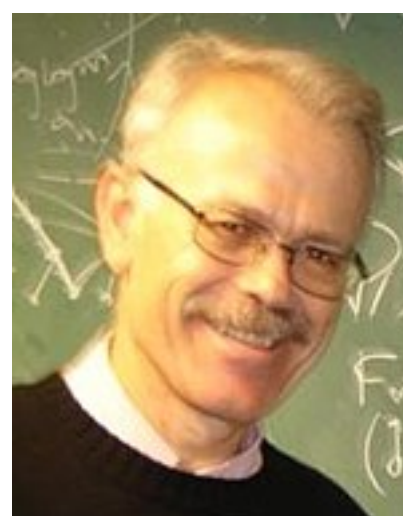
$$\|x - y\| = \|Fx - Fy\| \leq k \|x - y\|.$$

Puisque  $k < 1$  ; on déduit que  $\|x - y\| = 0$  c'est-à-dire  $x = y$  ; d'où l'unicité du point fixe de  $F$ . □

# Annexe B

## Themistocles M. Rassias

**E**ET un mathématicien grec et professeur à l'Université technique nationale d'Athènes, en Grèce. Il a publié plus de 300 articles, 10 livres de recherche et 45 volumes édités en mathématiques de recherche ainsi que 4 manuels de mathématiques (en grec) pour les étudiants universitaires. Ses travaux de recherche ont reçu plus de 18 000 citations selon Google Scholar et plus de 5 500 citations selon MathSciNet. Son indice  $h$  est de 48. Il est membre du comité de rédaction de plusieurs revues mathématiques internationales.



Son travail s'étend sur plusieurs domaines de l'analyse mathématique. Il comprend l'analyse fonctionnelle non linéaire, les équations fonctionnelles, la théorie de l'approximation, l'analyse des variétés, le calcul des variations, les inégalités, la géométrie métrique et leurs applications. Il a contribué à un certain nombre de résultats dans la stabilité des sous-variétés minimales, dans la solution du problème d'Ulam pour les homomorphismes approchés dans les espaces de Banach, dans la théorie des applications isométriques dans les espaces métriques et dans l'analyse complexe (inégalité de Poincaré et applications harmoniques).

Il a obtenu son doctorat. en mathématiques de l'Université de Californie à Berkeley en juin 1976. Le professeur Stephen Smale et le professeur Shiing-Shen Chern ont été respectivement sa thèse et ses conseillers académiques

## Stanislaw Ulam

ÉTAIT un scientifique polono-américain dans les domaines des mathématiques et de la physique nucléaire. Il a participé au projet Manhattan, est à l'origine de la conception Teller-Ulam des armes thermonucléaires, a découvert le concept de l'automate cellulaire, a inventé la méthode de calcul de Monte Carlo et a suggéré la propulsion par impulsions nucléaires. En mathématiques pures et appliquées, il a prouvé quelques théorèmes et proposé plusieurs conjectures.

Né dans une riche famille juive polonaise, Ulam a étudié les mathématiques à l'Institut polytechnique de Lwów, où il a obtenu son doctorat en 1933 sous la direction de Kazimierz Kuratowski et Wodzimierz Stoek.



En 1935, John von Neumann, qu'Ulam avait rencontré à Varsovie, l'invita à venir passer quelques mois à l'Institute for Advanced Study de Princeton, New Jersey. De 1936 à 1939, il passa des étés en Pologne et des années universitaires à l'Université de Harvard à Cambridge, Massachusetts, où il travailla pour établir des résultats importants concernant la théorie ergodique. Le 20 août 1939, il s'embarqua pour les États-Unis pour la dernière fois avec son frère de 17 ans, Adam Ulam. Il est devenu professeur adjoint à l'Université du Wisconsin-Madison en 1940 et citoyen américain en 1941.

Ulam a examiné le problème de la propulsion nucléaire des fusées, qui a été poursuivi par le projet Rover, et a proposé, comme alternative à la fusée thermique nucléaire de Rover, d'exploiter de petites explosions nucléaires pour la propulsion, qui est devenue le projet Orion. Avec Fermi, John Pasta et Mary Tsingou, Ulam a étudié le problème Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou, qui est devenu l'inspiration pour le domaine de la science non linéaire. Il est probablement mieux connu pour avoir réalisé que les ordinateurs électroniques rendaient pratique l'application de méthodes statistiques à des fonctions sans solutions connues, et que les ordinateurs se sont développés, la méthode de Monte Carlo est devenue une approche courante et standard pour de nombreux problèmes.

# Bibliographie

- [1] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory, New York : Springer, 2003.
- [2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo .Theory and applications of fractional differential equations North-Holland Mathematics Studiesvol. 204, Elsevier Science B.V, Amsterdam, 2006.
- [3] A. BEKKA, Calcul numérique des dérivées fractionnaires, mémoire de Master, Université Mohamed Boudiaf De Msila, 2017/2018.
- [4] B.Gauchi, Les équations intégrales dans les espaces d'Orlinz, Thèse de Doctorat, Université de M'sila, 2015
- [5] F.Zaidour, la résolution numérique des Équations différentielles d'ordre fractionnaire, Mémoire de Master, Université de Khemis Miliana., 2015.
- [6] F. BENSIDHOUM, Problèmes aux valeurs propres associés des Équations fractionnaires, Mémoire de Master, Université de Tlemcen, 2011.
- [7] Hyers , D. H . On the Stability of the fonctionl equation Proc. Nat. Acad. Sci. 27(1941),222-224.
- [8] H. Ye, J. Gao, Y. Ding. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl., 328(2007), 1075-1081.
- [9] J. Matos. Analyse Fonctionnelle ; laboratoire de mathématiques et modélisation d'Evry 2014/2015.
- [10] J. Wang, L. Lv Yong Zhou, Ulam Stability and Data Dependence For Fractional Differential Equations with Caputo Derivative, Department of Mathematics, Guizhou University, Guiyang, Guizhou 550025, P.R. China, June 25, 2011.
- [11] J. Wang, L. Lv, Y. Zhou. Boundary value problems for fractional differential equations involving Caputo derivative in Banach spaces, J. Appl. Math. Comput., ,(2011), doi :10.1007/s12190-011-0474-3.

- 
- [12] Podlubny, I. Fractional Differential Equations; Academic Press : San Diego, CA, USA, 1999.
- [13] R.Aouafi . Existence et unicité des solutions de certains problèmes aux limites non linéaires, these de doctorat, Université d'Oum bwaghi, 2015.
- [14] R.Bouaziz. Etude de L'existence, L'unicité et la stabilité au sens d'Ulam des solutions de quelques Problèmes Fractionnaires Non Linéaires, Master en mathématiques, Université 8 Mai 1945 Guelma, 2019-2020.
- [15] R. P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions, Acta. Appl. Math.,109(2010), 973-1033.
- [16] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations, Electron. J. Diff. Equ. 2006, No. 36, pp, 1-12.
- [17] S. Szufra, On the application of measure of noncompactness to existence theorems. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 75 (1986), 1-14.
- [18] Ulam,S. M :A collection of mathematical Problems. Interscience Publishers, new york, 1968 .