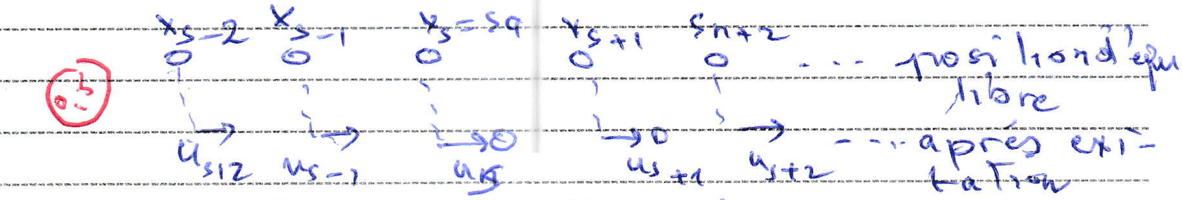
Corrigé d'examen "physique du solide 2"

Exercice N° 01 (10 Pts).

a) - On a un réseau d'atome identique de masse "m" équidistants de "a" (schéma).



Après excitation, la position devient

$$x_s = sa + u_s \,,\quad x_{s+1} = (s+1)a + u_{s+1} \,,\quad x_{s-1} = (s-1)a + u_{s-1}$$

En utilisant le principe fondamental de la dynamique, pour l'atome du rang "s"

$$m\frac{d^2u_s}{dt^2} = \underbrace{c(u_{s+1} - u_s)}_{F_G} + \underbrace{c(u_{s-1} - u_s)}_{F_D} \quad (1)$$

$$m\,\gamma = F_G + F_D$$

$$(1) \Rightarrow \quad m\frac{d^2u_s}{dt^2} = c\left(u_{s+1} + u_{s-1} - 2u_s\right) \quad \ldots (2)$$

(2) est l'équation du mouvement.

b) En utilisant la solution de la forme $u_s = u_0 \exp i(kx_s - \omega t)$, (2) devienne

$$-m\omega^2 \cancel{u_0 \exp i(kx_s - \omega t)} = c\,\cancel{e^{i(kx_s - \omega t)}}\left(e^{ika} + e^{-ika} - 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad -m\omega^2 = c\left(e^{ika} + e^{-ika} - 2\right) \quad \ldots (3)$$

or $e^{ika} + e^{-ika} = 2\cos ka$; l'équation (3) devient

$$-\omega^2 = \frac{2c}{m}\left(\cos ka - 1\right) \quad \ldots (4)$$

avec $1 - \cos ka = 2\sin^2\frac{ka}{2}$

La relation (4) devienne ;

$$\omega^2 = \frac{4c}{m}\sin^2\frac{ka}{2} \iff \omega = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right| \quad (5)$$

c'est la relation de dispersion d'une chaine linéaire monoatomique, dans laquelle l'interaction se limite au premier proche voisin.

* vitesse du groupe : $v_g = \frac{\partial w}{\partial k} = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\frac{\partial}{\partial k}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|$

0,5 $\Rightarrow v_g = \sqrt{\frac{ca^2}{m}}\cos\frac{ka}{2}$ — (6)

* la vitesse du son : $v_s = \frac{\partial w}{\partial k}\Big|_{k\to 0} = \sqrt{\frac{ca^2}{m}} = a\sqrt{\frac{c}{m}}$ — (7) 0,5

c'est la limite du vitesse du son quand $k \to 0$

finalement, $w = \left(\frac{2v_s}{a}\right)\left|\sin\frac{ka}{2}\right|$ — (8) 0,5

Application numerique : $a = 5.10^{-10}$ m, $v_s = 5.10^{3}$ m/s

$w_m = \frac{2v_s}{a} = \frac{2,5 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-10}} = 2.10^{13} \Rightarrow \nu_m = \frac{w}{2\pi}$

$\nu_m = 3,18 \cdot 10^{12}\ s^{-1}$ 0,5

c- Etat de cas limite : $k = \pm\frac{\pi}{a}$

quand $k = \pm\frac{\pi}{a} \Rightarrow w = 2\sqrt{\frac{c}{m}}$

$u_s = u_0 \exp\left(\pm\frac{\pi}{a}\cdot sa - wt\right) = u_0(-1)^s \exp wt$

c'est une onde stationnaire 0,5

$u_s = u_0(-1)^s \exp(-iwt)$ et $u_{s+1} = u_0(-1)^{s+1} e^{-iwt}$

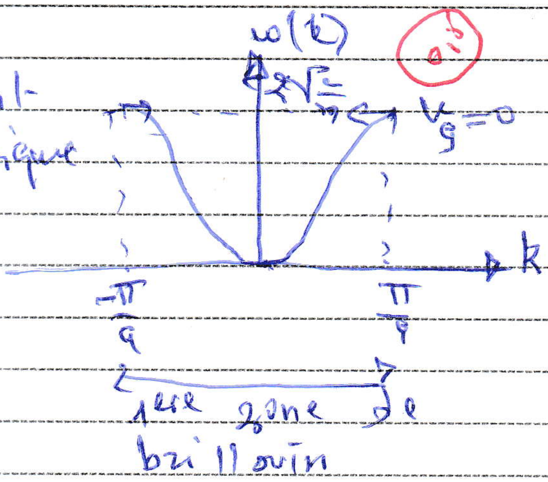
$\Rightarrow \frac{u_s}{u_{s+1}} = (-1) \Rightarrow u_s = -u_{s+1}$ 0,5

les atomes voisins vibrent en opposition de phase (onde longitudinale)

$s-2 \quad s-1 \quad s \quad s+1 \quad u_s$

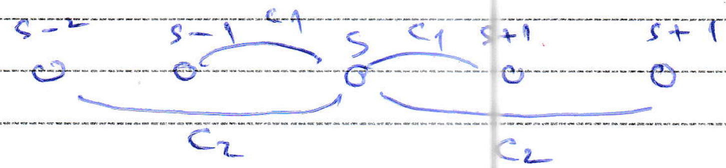
$\ldots\ o\!\to \leftarrow\! o \ldots o\!\to \leftarrow\! o \ldots o\!\to\ \text{-}o \qquad \vec{k} \parallel \vec{u}$

Les valeur de k qui ont une signification physique se trouvent dans la 1ere zone de Brillouin $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$



-2-

d) Cas où les interactions avec les seconds proches voisins sont prises en compte



0,5

L'équation du mouvement de l'atome "s"

$$m\frac{d^2u_s}{dt^2} = C_1\left[u_{s+1}+u_{s-1}-2u_s\right]$$

$$0,5 \quad + C_2\left[u_{s+2}+u_{s-2}-2u_s\right] \quad (9)$$

la solution proposée est :

$$u_s = u_0 \exp i(kx_s-\omega t) \simeq u_0 \exp i(kas-\omega t)$$

En l'introduisant dans (9) 0,5

$$-m\omega^2 = C_1\left[2\cos ka - 2\right] + C_2\left[2\cos 2ka - 2\right] \quad (10)$$

ou encore

$$\omega^2 = \frac{2C_1}{m}\sin^2\frac{ka}{2} + \frac{2C_2}{m}\,2\sin^2 ka \quad 0,5$$

que l'on peut transformer sous la forme

$$\omega^2 = \frac{4C_1}{m}\sin^2\frac{ka}{2}\left[1+\frac{4C_2}{C_1}\cos^2\frac{ka}{2}\right] \quad \ldots (11)$$

nous avons utilisé :

$$\sin^2(ka) = 4\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)\cos^2\frac{ka}{2} \quad 0,5$$

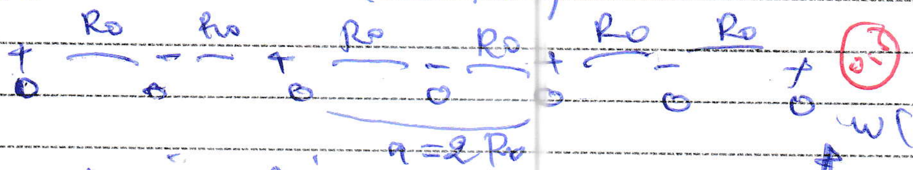
La vitesse du son : $v_s = \frac{\partial\omega}{\partial k}\Big|_{k\to 0} = a\sqrt{\frac{C_1}{m}}\left[1+\frac{4C_2}{C_1}\right]^{1/2}$ (12)

a) quand $C_2=0$, on retrouve les résultats des questions a), b) et c) 0,5

b) quand $C_2>0$: les actions des seconds voisins s'ajoutent aux forces de rappel exercées par les premiers voisins.

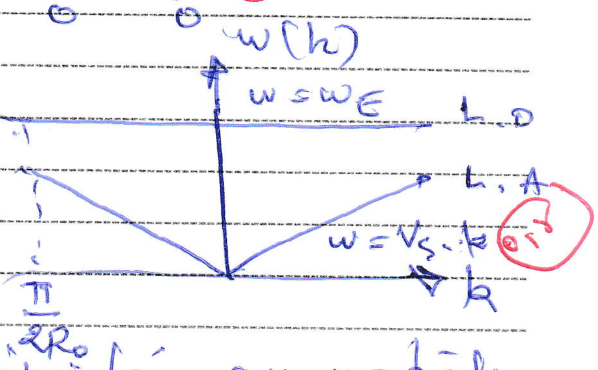
Exercice N° 02 (10 Pts)

$a = 2R_0$



0,5

une chaine linéaire



0,5

biatomique (-q) et (+q)
donc il existe deux
branche dan la
relation de dispertion

branche acoustique assimilé au modèle de Debey ($w = V_s.|k|$) et la branche optique assimilé au modele d'Emstein $w = w_E$

* pour les conditions aux limites cyclique (CLC)

$$k.L = 2\pi n \Rightarrow k = \frac{2\pi}{L}.n \; , \; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow g(k) = \frac{L}{2\pi} = \frac{Na}{2\pi} = \frac{2R_0 N}{2\pi} = \frac{R_0 N}{\pi}$$

0,5

$$2.g(k).dk = g(w).dw$$

$w = V_s|k|$
$dw = V_s.dk$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{R_0 N}{\pi}\right).\cancel{dk} = g(w).V_s.\cancel{dk}$$

$$\Rightarrow g(w) = \frac{1}{V_s}.\frac{2R_0 N}{\pi}$$

0,5

$$\Rightarrow g(w).dw = g(\nu).d\nu$$

$w = 2\pi\nu$
$\Rightarrow dw = 2\pi d\nu$

$$g(w).2\pi.\cancel{d\nu} = g(\nu)\cancel{d\nu}$$

$$\Rightarrow g(\nu) = \frac{4R_0 N}{V_s}$$

0,5

* Frequence de Debey ν

$$\cancel{N} = \int_0^{\nu_D} g(\nu).d\nu = \int_0 \left(\frac{4R_0\cancel{N}}{V_s}\right) d\nu$$

$$\Rightarrow 1 = \left[\frac{4R_0}{V_s}.\nu\right]_0^{\nu_D}$$

$$\Rightarrow \nu_D = \frac{V_s}{4R_0}$$

0,5

* L'energie totale de la chaine

$$U_{tot} = U_A + U_V \quad 0,1$$

$$U_{tot} = N (h\nu_E) \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_E}{k_BT}\right)-1} + \int g(\nu)\cdot(h\nu)\,\bar{n}\,d\nu \quad 0,1$$

$$= \frac{N h \nu_E}{\exp\left(\frac{h\nu_E}{k_BT}\right)-1} + \int \left(\frac{4 R_0 N}{v_s}\right)(h\nu)\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1}\,d\nu$$

$$U_{tot} = \frac{N h \nu_E}{\exp\left(\frac{h\nu_E}{k_BT}\right)-1} + \left(\frac{4 R_0 N}{v_s}\right)\int \frac{h\nu\, d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1} \quad 0,1$$

on pose $\frac{h\nu}{k_BT} = x \Rightarrow dx = \frac{h}{k_BT}\,d\nu$ 0,1

$$\Rightarrow d\nu = \frac{k_BT}{h}\cdot dx$$

$$\Rightarrow U_{tot} = \frac{N h \nu_E}{\exp\left(\frac{h\nu_E}{k_BT}\right)-1} + \left(\frac{4 R_0 N}{v_s}\right)\int \frac{h\nu}{\exp x - 1}\left(\frac{k_BT}{h}\right)dx$$

$$= \frac{N h \nu_E}{\exp\left(\frac{h\nu_E}{k_BT}\right)-1} + \frac{4 N R_0}{v_s \cdot h}(k_BT)^2 \int \frac{x\,dx}{e^x - 1} \quad 0,1$$

* chaleur specifique. $c_V = \frac{\partial U}{\partial T}$ 0,1

cas où T tend vers l'infin ($T \to \infty$).

$$T \to \infty \Rightarrow x \to 0 \Rightarrow e^x = x + 1 \quad 0,1$$

$$\Rightarrow U_{tot} = \frac{N h \nu_E}{\cancel{\frac{h\nu_E}{k_BT}} + \cancel{1} - 1} + \frac{4 N R_0}{v_s \cdot h}(k_BT)^2 \int \frac{\cancel{x}\,dx}{\cancel{x} + 1 - 1}$$

$$= N k_BT + \frac{4 N R_0}{v_s \cdot h}(k_BT)^2 \int_0^{x_D} dx \quad 0,1$$

$$= N k_BT + \frac{4 N R_0}{v_s \cdot h}\cdot k_B^2T^2\left(\frac{h\nu_D}{k_BT}\right)$$

$$= N k_BT + \frac{4 N R_0}{v_s}\cdot \nu_D\,(k_BT)$$

— 5

$$U_{tot} = N k_B T + \frac{4 N R_0}{\cancel{V_S}} \cancel{V_D} k_B T$$

$$U_{tot} = N k_B T + N k_B T = 2 k_B N T \quad \Big/ \; V_D = \frac{V_S}{4R_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = 2 k_B N}$$

$T \to \infty$

⊗ Cas où T tend vers zéro $(T \to 0)$ $\frac{\pi^2}{6}$

$T \to 0$, $x \to \infty$,

$$\Rightarrow U_{tot} = \frac{N h \nu}{e^x} + \frac{4 N R_0}{V_S h} (k_B T)^2 \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1}$$

$$= N h \nu_E e^{-x} + \frac{4 N R_0}{V_S h} k_B^2 T^2 \left(\frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$= N h \nu_E e^{-\frac{h\nu_E}{k_B T}} + \frac{4 N R_0}{V_S \cdot h} \left(\frac{\pi^2}{6}\right) k_B^2 T^2$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = N h^2 \nu_E^2 \frac{1}{k_B T^2} e^{-\frac{h\nu_E}{k_B T}} + \frac{2\pi^2}{3} \cdot \frac{N R_0}{V_S \cdot h} k_B^2 T$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = N \frac{h^2 \nu_E^2}{k_B T^2} e^{-\frac{h\nu_E}{k_B T}} + \frac{2\pi^2}{3} \frac{N R_0}{V_S \cdot h} k_B^2 T$$

$T \to 0$