الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY

Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**

Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Régions invariantes et solutions globales de quelques types de systèmes de réaction-diffusion

Réalisé par : **KECHICHE Raihane hibet-errahmane**
ZERROUD Iness

Dirigé par : **Dr. SANDEL Saida**

Membres de jury :

Dr. BAHRI Boubakeur **Président**
Dr. BOUSSADA Mourad **Examinateur**

Remerciement

♢

Tout d'abord, nous remercions **Allah** le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience nécessaires à mener ce travail à son terme , Nous tenons à remercier tout particulièrement notre encadreur **Dr.Sandel Saida** pour son aide immense, son suivie ainsi que pour tous les conseils et les informations qu'il nous avons prodigués , Nous ne pourraions jamais oublier son esprit de recherche et ses commentaires éficaces. Un grand merci de nous avoir donné la chance de réaliser ce modeste travail . Nous tenons à remercier **Les membres du jury** d'avoir accepté de juger notre travail , Nous remercions tous Nos **Enseignants** pour leur enseignement , Nos **Parents** pour leur soutien constant et leurs encouragements , Pour finir, Nous souhaitons remercier toute personne ayant contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

♢

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mon premier professeur qui je porte son nom
avec fierté Mon cher père ,
A l'etre le plus cher de ma vie ,
la source de mes efforts ,
Ma chère mére,

C'est grâce à leurs amours infinis ,

A Mes soeurs et Mon petit Frère,
que dieu les protége,

A Tous Ma famille et Mes amis pour l'appui moral,

Merci.

❖ *Kechiche raihane hibet-errahmane*

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

Au premier homme de ma vie, À la chose la plus précieuse de l'univers, à mon cher père, aujourd'hui je te donne cette joie ,

À celle qui a éclairé mon chemin et m'a soutenue dans mon parcours universitaire, ma chère maman,

Aux étoiles de mon ciel et mon soutien dans la vie, mes frères et sœurs

A toute ma famille et mes amis qui ont été si gentils avec moi,

Merci du fond du cœur à ceux qui ont illuminé mon chemin ,

A Mon binôme merci pour ton sérieux ,

Merci !

❖ *Zerroud Iness*

Résumé

Le but de cette mémoire est de prouver l'existance globale en temps de solutions pour un système de réaction-diffusion Avec une matrice de diffusion , et non homogène Conditions aux limites et des termes de réaction non linéaires et supossée a croissance polynomiale , Notre techniques sont basées sur des régions invariantes et des méthodes de fonctionnelles de Lyapunov.

Mots clés : Système de réaction-diffusion , Région invariante , Existance globale , Fonction de Lyapunov .

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو إثبات الوجود الكلي لحلول نظام تفاعل-الانتشار بالنسبة للزمن مع مصفوفة انتشار ، و شروط حدود غير متجانسة وشروط التفاعل غير الخطية . تعتمد تقنياتنا على المناطق الثابتة وطرق دالة ليابونوف .

كلمات مفتاحية : نظام التفاعل و الانتشار ، المنطقة الثابتة ، الوجود الكلي ، دالة ليابونوف .

Abstract

The purpose of this thesis is to prove the global existence in time of solutions for a reaction-diffusion system With diffusion matrix , and non-homogeneous Boundary conditions and nonlinear reaction terms and assumed polynomial growth. Our techniques are based on invariant regions and Lyapunov functional methods.

Key words : Reaction-diffusion system , Invariant region , Global existence , Lyapunov function .

Notation

- Ω : Domaine de $\mathbb{R}^n$
- $\overline{\Omega}$: La fermeture de Ω.
- $\partial\Omega$: La frontière du Ω
- Δ : Laplacien.
- ∇ : Le gradient.
- λ_i : une valeur propre associée à une matrice.
- $\frac{\partial}{\partial\eta}$: La dérivée normale extérieure à $\partial\Omega$.
- $.^T$: Transposé de la matrice .
- $\mathcal{M}_n$:Ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $|.|$:Valeur absolue.
- $\|.\|$: La norme associée à l'espace .
- Det : Déterminant d'une matrice.
- Tr : Trace d'une matrice.
- L : Fonction de Lyapunov
- SRD : Système de réaction-diffusion

Table des matières

Introduction

Le système de réaction-diffusion a été initialement formulé par le mathématicien Alan Turing dans les années 1950, dans le but d'expliquer comment les motifs et les structures se forment dans le développement embryonnaire. Turing a montré que des réactions chimiques locales combinées à la diffusion des substances réactives peuvent conduire à la formation de motifs réguliers, tels que des rayures ou des taches, dans un système biologique.

Depuis lors, le concept de réaction-diffusion s'est étendu à d'autres domaines scientifiques et a été utilisé pour expliquer divers phénoménes naturels, tels que la formation de motifs de coquilles d'escargots, les motifs de pigmentation animale et bien d'autres.

Les SRD sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles de type parabolique semi-linéaires qui s'écrivent formellment :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u) \text{ sur } \Omega \times]0, T[,$$

Avec des conditions aux limites et initiales données. Ω est un ouvert de R^n le terme de diffusion $D\Delta u$, $u(x,t)$ est un vecteur à m composantes,D est une matrice diagonal d'order m . $f : R^m \rightarrow R^m$ (terme de réaction) est une application non linéaire. Ces équations modélisent des phénoméns qui apparaissent dans des sécteurs variés, tels que : la Chimie, la Biologie, la Neurophysiologie, la Génétique, des populations,...etc. Depuis longtemps, du côté mathématique, l'existence d'une solution globale positive pour les SRD en temps, était l'objet de plusieurs études.

L'étude de l'exstence globale en temps des solutions des systémes appelés de réaction-diffussion constitue l'une des questions fondamontales de la théorie générale des èquations aux dérivées partielles,et devenues aujourd'hui l'un des thémes important de la compréhension scientifique.

Dans ce mémoire qui se **compose de trois chapitres** , On s' intèresse à l' étude de l' existence globale des solutions pour deux types de SRD :

Dans le premier chapitre , on donne un rappel d'analyse fonctionnelle , d'algebre , des principaux résultats préliminaire et théorèmes utiles pour aborder les chapitres suivants.

Le second chapitre est consacré a l'étude de l'existence globale des solutions d'un systéme de réaction-diffusion a matrice de diffusion diagonale de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = -f(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = f(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases}$$

avec des conditions aux limites (Neuman) homogénes et des conditions initiales proposé par **S.Kouachi et A.Youkana** [18] . Pour ce but on a supposé que les conditions initiales sont positives et bornées et on a montré en utilisant la notion des régions invariantes et la fonctionnelle de Lyapunov que la solution du problème est globale en temps et uniformément bornée .

Dans le troisième chapitre , nous construisons des régions invariantes uniquement en termes de valeurs propres et des eléments de la matrice de coefficients de diffusion associée qui est suposée pleinne , (i.e) de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a_{11} \Delta u - a_{12} \Delta v = f(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - a_{21} \Delta u - a_{22} \Delta v = g(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \end{cases}$$

avec des conditions aux limites de type Robin non homogénes et des conditions initiales , proposé par **S.Kouachi et Eid M. Al-Eid** [19] .

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre contient Quelques rappels d'analyse fonctionnelle et d'algebre , des principaux résultats préliminaires et théorèmes utiles pour aborder les chapitres suivants .

1.1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Les espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions integrables au sens de lebesgue sur Ω a valeurs dans $\mathbb{R}$, On pose :

$$\|u\|_{L^1} = \int_\Omega |u(x)|dx.$$

Définition 1.1.1 .

Soit $p \in \mathbb{R}$ $\quad 1 \leq p < \infty$ *, On pose :*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ mesurable et } |u|^p \in L^1(\Omega)\},$$

Muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.2 .

Soit $p = \infty$ *, on pose :*

$$L^{\infty}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ mesurable et il existe une constante } C > 0 \text{ telle que } |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\},$$

Muni de la semi-norme :

$$\|u\|_{\infty} = \inf\{C > 0, |u(x)| \leq C \quad p.p \text{ sur } \Omega\}.$$

Remarque 1.1.1 Les espaces $L^{p}(\Omega)$ munis de la norme (1.1) sont des espaces de Banach .

En particulier $L^{2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Définition 1.1.3 .

Soit X *un espace de Banach , On désigne par* $L^{p}(0, T, X)$ *l'espace des fonctions mesurables* $u :]0, T[\Rightarrow X$ *, tel que :*

$$L^{p}(0, T, X) = \left\{u \text{ mesurable de } [0, T] : \int_{0}^{T} \|u\|_{X}^{p} dt < \infty, 1 \leq p < \infty\right\},$$

Munis de la norme :

$$\|u\|_{L^{p}(0,T,X)} = \left[\int_{0}^{p} \|u\|_{X}^{p}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.1.4 .

On dit que M est le sup ess de u sur Ω *, Si l'ensemble* $\{x \in \Omega, u(x) > M\}$ *est nulle ,*

On a :

$$L^{\infty}(0, T, X) = \left\{ u \text{ mesurable de } [0, T] \to X, \sup_{t\in[0,T]} \text{ ess } \|u\|_{X} < \infty \right\}.$$

Muni de la norme :

$$\|u\|_{L^{p}(0,T,X)} = \sup_{t\in[0,T]} \text{ ess } \|u\|_{X}.$$

1.1.2 Les espaces de Hilbert

Définition 1.1.5 .

Soit $\mathbf{H}$ *un espace vectoriel , Un produit scalaire (u,v) est une forme bilineaire de* $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ *dans* $\mathbb{R}$ *, symétrique , définie positive .*

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarts :

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{\frac{1}{2}} (v,v)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, u,v \in \mathbf{H}.$$

Rappelons aussi que :

$\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$ *est une norme .*

Définition 1.1.6 .

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel $\mathbf{H}$ *muni d'un produit scalaire* (u,v) *et qui est complet pour la norme* $(u,u)^{\frac{1}{2}}$ *.*

1.1.3 Les espaces de Sobolev

Définition 1.1.7 .

Pour tous $m \in \mathbb{N}$ *, On définit les espaces de Sobolev* $\mathbf{H}^m(\Omega)$ *par :*

Pour $m = 1$

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\},$$

Muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.1.8 .

$\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *est l'adhérence de* $D(\Omega)$ *dans* $\mathbf{H}^1(\Omega)$ *et on écrit :*

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \left\{ u \in \mathbf{H}^1, u|_\Gamma = 0 \right\},$$

De façon générale pour $m \in \mathbb{N}$ *, On définit :*

$$\mathbf{H}^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\right\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathbf{H}^{-m}(\Omega) = \mathscr{L}\left(\mathbf{H}_0^m(\Omega), \mathbb{R}\right)$ *est l'espace dual de* $\mathbf{H}_0^m$.

Remarque 1.1.2 Si u est une fonction et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, On note $D^\alpha u$ la dérivé d'ordre α de u :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

1.1.4 Inégalités fondamentales

Lemme 1.1.1 *Inégalité de cauchy*

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Lemme 1.1.2 *Inégalité de Young*

Pour $1 < p, q < \infty$ *, telle que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $a, b > 0$ *, on a :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lemme 1.1.3 *Inégalité de Holder*

Soit $u \in L^p$ *et* $v \in L^q$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$*. alors* $u.v \in L^1$ *et :*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

1.2 Formule de Green

On se donne Ω un ouvert borné de frontière régulière Ω et $\eta^\rightarrow = (\eta_1^\rightarrow, ..., \eta_n^\rightarrow)$ la normale extérieure au point x .

Soient u une fonction de $\mathbf{H}^2(\Omega)$ et v une fonction de $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Alors la formule de Green s'écrit :

$$\int_\Omega \Delta u.vdx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} vd\Omega - \int_\Omega \nabla u \nabla vdx. \tag{1.2}$$

Remarque 1.2.1 La forme vectoriel de la formule de Green est :

$$\int_\Omega \nabla u.v = \int_\Gamma u.vd\Omega - \int_\Omega v.\nabla vdx,$$

Avec :

$$\nabla (u.v) = \nabla u.v + u.\nabla v,$$

et :

$$\nabla (\nabla u) = \Delta u \ .$$

1.3 Semi-groupes

Définition 1.3.1 .

Soit X un espace de Banach. A Une famille à un paramètre T(t), $0 \leq t < \infty$ *, des opérateurs linéaires bornés de X dans X est un semi-groupe de opérateurs linéaires bornés sur X si :*

$$\begin{cases} T(0) = I, \text{ (I est l'opérateur d'identité sur X).} \\ \qquad T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geqslant 0 \end{cases}$$

Définition 1.3.2 .

Le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ *est dit fortement continu à l'origine, ou de classe* C_0 *si de plus*
$\forall x \in X, \lim_{t\to 0} T(t)\, x = x.$

Définition 1.3.3 *semi-groupe Analytique*

soit $\Delta = \{z : \varphi_1 < arg.z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ *et pour* $z \in \Delta$ *soit* $T(z)$ *un opérateur linéaire borné . La famille* $T(z)$ *est un semi-groupe analytique dans A si :*

i) $z \to t(z)$ *est analytique dans* Δ *.*

ii) $T(0) = I$ *et* $\lim_{z\to 0} T(z)x = x$ *pour tout* $x \in X$

iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *pour* $z_1, z_1 \in \Delta$

Définition 1.3.4 .

On appelle générateur infinitésimal d'un C_0*-semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *, un opérateur* A *défini sur l'ensemble :*

$$D(A) = \left\{ \forall x \in \mathbf{H}, \ \lim_{t\to 0} \frac{T(t)\,x - x}{t} \ \textit{existe} \right\},$$

Par :

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)\,x - x}{t}, \ \ \forall x \in D(A).$$

Théorème 1.3.1 **(Hill-Yoshida)** [7]

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A fermé de domaine dense dans X soit un générateur d'un semi-groupe fortement continu est qu'il existe $w \in \mathbb{R}$ tel que :

- $(\lambda I - A)^{-1}$ existe pour tout : $Re\,\lambda > w$,
- $\left\|(\lambda I - A)^{-k}\right\| \leq \dfrac{M}{(\lambda - I)^k}$, $k = 1, 2...$ pour $Re\,\lambda > w$,

1.3.1 Problème de Cauchy non-homogène

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire, $f : X \to X$. Etant donné $u_0 \in X$; considérons le problème non homogène à valeur initiale :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - Au = f(u) \quad t > 0 \\ \quad u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Définition 1.3.5 .

Une fonction $u : [0, T[\to X$ *est une solution (classique) de* (1.3) *sur* $[0, T[$ *si* u *est continue sur* $[0, T[$*, continument dérivable sur* $[0, T[$ *,* $u(t) \in D(A)$ *pour* $0 < t < T$ *et* (1.3) *est satisfaite sur* $[0, T[$.

Théorème 1.3.2 [4] Soit X un espace de Banach réflexif et soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ sur X . Si f est lipschitzienne continue sur [0, T] , alors pour tout $x \in D(A)$ le problème de la valeur initiale (1.3) a une unique solution u sur [0, T] .

1.4 Quelques rappels d'algébre linéaire

1.4.1 Déterminant

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carée et symétrique , on définit les déterminants principaux de A par :

$$\det 1 = a_{11}, \det 2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \det n = \begin{vmatrix} a_{11} & .... & .... & a_{1n} \\ a_{21} & .... & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & .... & .... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.4.2 Valeurs et Vecteurs propres

Définition 1.4.1 .

*Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, Un scalaire λ dans $\mathbb{K}$ est appelé **valeur propre** de A , si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

i) Ker $(A - \lambda \boldsymbol{I}_n) \neq 0$,

ii) det $(A - \lambda \boldsymbol{I}_n) = 0$,

iii) il existe un vecteur non nul x de $\mathbb{K}^n$, solution de l'équation

$$Ax = \lambda x$$

*Le vecteurs x est alors sont appelés **vecteurs propres** de A associés a la valeur propre λ.*

Proposition 1.4.1 .

Un scalaire λ est un valeur propre d'une matrice A si et seulement si, λ est racine de son polynôme caractéristique p_A.

(Le polynôme caractéristique d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme de $\mathbb{K}[x]$ défini par : $p_A = det\ (A - x\boldsymbol{I}_n)$).

Définition 1.4.2 ***(Matrice transposée)***

La matrice transposée d'une matrice $A \in \mathbf{K}^{m\times n}$ est la matrice $A^T \in \mathbf{K}^{m\times n}$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Définition 1.4.3 ***(Matrice symétrique)***

Une matrice symétrique est une matrice qui est égale à sa propre transposée $(A = A^T)$.

Proposition 1.4.2 .

Une matrice a les mêmes valeurs propres que sa transposée .

Démonstration 1.4.1 .

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,On a les équivalences suivantes :

λ est un valeur propre de A

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) non\ inversible$$
$$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)^T\ non\ inversible$$
$$\Leftrightarrow (A^T - \lambda I_n) non\ inversible$$
$$\Leftrightarrow \lambda\ est\ un\ valeur\ propre\ de\ A^T\ .$$

1.4.3 Matrice définie positive.

Définition 1.4.4 .

*Une matrice symétrique A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **définie positive** si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul , on a :*

$$X^T A X > 0.$$

Définition 1.4.5 .

Une matrice symétrique A est définie positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives .

1.4.4 Formes quadratiques

Définition 1.4.6 .

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq ij \leq n}$ *une matrice symétrique , alors une forme quadratique* $T = (u_1, u_2, ...u_n)$ *associé à la matrice A est un polynome homogéne du secend degrèe de n variable , qui se represente sous la forme :*

$$T = (u_1, u_2, ...u_n) = \sum_{i,j=1} a_{ij} u_i u_j \;\; Ou \;\; a_{ij} = a_{ji} \;\; et \;\; i = 1...n. \tag{1.4}$$

Définition 1.4.7 .

Une forme quadratique est dite définie positive $(ie. \;\; A(u,u) > 0, u \neq 0)$

Ssi toute les déterminant principaux successifs de sa matrice des coefficients sont positifs

$$det\ 1 > 0, det\ 2 > 0, ...det\ n > 0\ .$$

Théorème 1.4.1 [15] Une forme quadratique est définie non-négative Si et seulement si tous les déterminants principaux de sa matrice des coefficients sont non-negatives .

1.4.5 Condition de la parabolocité d'une EDP d'ordre 2

Définition 1.4.8 .

L'EDP

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

Ou A, B, C, D, E, F, G *sont des fonctions de* x, y *qui ne s'annulent pas .*

$u(x,y) = u$ *est la solution . est dite parabolique Si :*

$$B(x,y)^2 - 4A(x,y)C(x,y) = 0.$$

1.5 Systèmes de réaction diffusion

Définition 1.5.1 *(SRD)*

Les SRD sont des systèmes d'equations aux dèrivèes partielles de type parabolique semi-linèaires qui s'ecrivent sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u) \text{ sur } \Omega \times]0, T[$$

Avec des conditions aux limites et initiales donnèes.

- Ω *est un ouvert de* R^n *le terme de diffusion* $D\Delta u$ *,*
- $u(x,t)$ *est un vecteur à m composantes,*
- D *est la matrice de diffusion , est une matrice d'order* m *,*
- $f : R^m \to R^m$ *(terme de rèaction) est une application non linèaire.*

1.6 Région invariante

Définition 1.6.1 .

Un sous ensemble fermé $\Sigma \in \mathbb{R}^2$ *est appelé un région invariante pour un systeme de réaction-diffusion , si toute solution* $(u(x,t), v(x,t))$ *ayant ses valeurs initiales et aux limites dans* Σ *, reste dans* Σ *pour tout* $x \in \Omega$ *et pour tout* $x \in [0, T_{max}[$ *.*

Définition 1.6.2 .

On appelle fonctionelle de lyaponov associée à un système de réaction-diffusion formé de m équations toute fonctions : $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \text{ , } t \to L(t)$

Tel que :

$$\frac{\partial L(u_1(t,.), u_2(t,.), ..., u_m(t,.))}{\partial t} \leq 0. \tag{1.5}$$

Pour toute solution $u_1(t,.), u_2(t,.), ..., u_m(t,.)$ *de système .*

Chapitre 2

Existence globale d'un système de réaction-diffusion à matrice diagonale .

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existance et l'unicité des solutions uniformément bornées pour une classe de systémes de réaction-diffusion à matrice de diffusioin diagonale.

2.1 Position du problème

On considère le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = -f(u,v) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = f(u,v) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec des conditions aux bords (**Neuman**) :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Et des données initiales :

$$\begin{cases} u\left(0,x\right)=u_0\left(x\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega \\ v\left(0,x\right)=v_0\left(x\right) \end{cases} \tag{2.3}$$

Ω est un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\Gamma\left(\partial\Omega\right)$ suffisamment régulière ; $\dfrac{\partial}{\partial\eta}$ désigne la dérivée normale extérieur à $\partial\Omega$; d_1 et d_2 sont deux constantes strictement positives ; les données initiales sont supposées dans une région Σ définie par :

$$\Sigma = \left\{(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad u_0 \geq 0; v_0 \geq 0\right\}$$

f est une fonction continument différentiable dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, non négative avec $f(0,s) = 0$ pour tout $s \geq 0$, et

$$\lim_{s\to+\infty}\left[\frac{ln\left(1+f\left(r,s\right)\right)}{s}\right] < \alpha^* \quad \forall r \geq 0 \tag{2.4}$$

Où

$$\alpha^* = \frac{8d_1d_2}{n\left\|u_0\right\|_\infty\left(d_1-d_2\right)^2} \tag{2.5}$$

Notre but est d'établir l'existance globale en temps d'une solution du système (2.1)-(2.3) ou on utilise la technique de la fonctionnelle de Lyapunov (voir [15] , [18]).

En génerale pour démontrer l'existance globale en temps des solutions d'un système de réaction diffusion , il suffit de montrer que les termes de réaction sont dans $L^\infty([0,T_{max}[,L^p(\Omega))$ pour certain $p > \frac{n}{2}$ (**D.Henry**[6]).

2.1.1 Exemples des systèmes de réaction-diffusion :

Exemples

le transfert oxygéne et dioxyde de carbone par l'hémoglobine dans les poumons est décrit par les deux réactions chimique suivantes :

$$\begin{cases} Hb + O_2 \leftrightarrow HbO_2 \\ Hb + C0_2 \leftrightarrow HbCO_2 \end{cases}$$

La modélisation de ces deux réaction conduit au systèmes de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial [Hb]}{\partial t} = d_1 \Delta [Hb] - k_1 [Hb] [O_2] + k_2 [HbO_2] - k_3 [Hb] [CO_2] + k_4 [HbCO_2] \\ \frac{\partial [O_2]}{\partial t} = d_1 \Delta [O_2] - k_1 [Hb] [O_2] + k_2 [HbO_2] \\ \frac{\partial [HbO_2]}{\partial t} = d_3 \Delta [HbO_2] + k_1 [Hb] [O_2] - k_2 [HbO_2] \\ \frac{\partial [CO_2]}{\partial t} = d_4 \Delta [CO_2] - k_3 [Hb] [CO_2] + k_4 [HbCO_2] \\ \frac{\partial [HbCO_2]}{\partial t} = d_5 \Delta [HbCO_2] + k_3 [Hb] [CO_2] - k_4 [HbCO_2] \end{cases}$$

sur $\Omega \times [0, +\infty[$, ou $[Hb]$, $[O_2]$, $[HbO_2]$, $[CO_2]$ et $[HbCO_2]$ désignent réspectivement les concentrations en hémoglobine , oxygéne , oxyhémoglobine , dioxyde de carbone de carboxy-hémoglobine , avec conditions aux bords appropriées et données initiales positives (voir [15] **K.Saoudi**).

Le modèle de propagation des pulsations éléctrique a travers l'axe nerveux d'un animal marin de grande taille (a Squid) , conduit a une équation de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$$

ou u désigne le voltage , [15] **K.Saoudi** .

Théorème 2.1.1 Soit l'equation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f\,(t, x, u) & \text{sur} \quad [0, T[\times\Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \quad [0, T[\times\partial\Omega \\ \\ u(0, x) = u_0(x) & sur\Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

Si $f(t, x, u)$ est dans $L^\infty([0, T[, L^p\,(\Omega))$ pour certain $p > \frac{n}{2}$ ou , alors la solutions de (2.6) est globale (voir [6] **D.Henry**) .

Remarque 2.1.1

$$f(t, x, u) \in L^\infty([0, T[, L^p\,(\Omega)) \tag{2.7}$$

Alors

$$\sup_{0 \le t < T, x \in \Omega} \|f(t, x, u)\|_{L^p(\Omega)} < +\infty \tag{2.8}$$

d' où

$$\int_\Omega |f(t, x, u)|^p \le c \quad \forall t \in [0, T]$$

Ce qui montre que la solution est globale (voir [6] **D.Henry**) .

2.2 Existence locale et Positivité

2.2.1 Existence locale

On transforme le système (2.1)-(2.3) en une equation différentielle abstraite du premier ordre dans l'espace de Banach $\mathbb{X} = C(\Omega) \times C(\Omega)$, muni de la norme :

$$\|Z\|_{\mathbb{X}} = \|u\|_{C(\Omega)} + \|v\|_{C(\Omega)} \tag{2.9}$$

Ou $Z = (u, v)$ et

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \tag{2.10}$$

De la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial t} = \mathbf{T}Z(t) + F\left(Z(t)\right) \quad t > 0 \\ \\ Z(0) = Z_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

$Z_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{X}$, et

$$Z : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{X}$$
$$t \to Z\left(t\right) = \left(u\left(t\right), v(t)\right)$$

Et

$$\mathbf{T} : D(A) \times D(A) \to \mathbb{X}$$

Un operateur linéaire définit par :

$$\mathbf{T}Z(t) = (d_1 Au(t), d_2 Av(t))$$

Avec

$$Au = \Delta u \quad sur \ D(A)$$

Ou

$$D\left(A\right) = \left\{u \in C\left(\Omega\right); \Delta u \in C(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0\right\} \tag{2.12}$$

Et

$$F(Z(t)) = (-f(u,v), f(u,v))$$

Il est clair que la fonction abstraite (vectorielle) F est localment lipschittzienne en Z , et l'opérateur linéaire **T** engendre un semi groupe analytique d'opérateur linéaire sur $\mathbb{X}$,Alors d'aprés le **théorème 1.3.2** le système admet une unique solution locale forte .

Théorème 2.2.1 Pour toute donné initiale $Z_0 \in \mathbb{X}$ le problème (2.11) admet une solution locale unique forte définit sur $[0, T_{max}[$ (voir [4] **A.Pazy**) .

2.2.2 Positivité

Pour la positivité des solutions du système (2.1)-(2.3) , on va utiliser la technique du régions invariantes et du principe du maximum . on a besoin des résultats suivants :

Théorème 2.2.2 Considèrons le système de réaction diffusion suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = f(u,v) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta u = g(u,v) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

$$f(0,v) \geq 0, \forall v \geq 0 \quad \text{et } g(u,0 \geq 0, \forall u \geq 0,$$

Alors la région Σ définie par Def (**1.6.1**) est invariante pour ce système .

Preuve (voir **J.Smoller** [13])

Application au système étudié :

Pour la première équation du système (2.1)-(2.3) , on a :

$$-f(0,v) = 0 \geq 0, \forall v \geq 0 \,,$$

Pour la deuxième :

$$f(u,0) \geq 0, \forall u \geq 0 \,,$$

Puisque f est par définition positive .

Alors si $u_0(x) \geq 0$ et $v_0(x) \geq 0$ sur Ω , on déduit que $u(t,x) \geq 0$ et

$v(t,x) \geq 0$ sur $[0, T_{max}[\times \Omega$.

2.3 Existence globale

Quand on utilise les méthodes classique , la preuve de l'existence globale des solutions du (2.1)-(2.3) n'est pas évident ,telle que la méthode des région invariantes qui vu la complexité et la difficulté des termes de réaction de certain système de réaction- diffusion.

Pour cela , nous sous appliquons une méthode basé sur la fonctionelle de **"lyaponov"** qui a donné des résultats satisfaisants pour l'existence globale des solutios du système (2.1)-(2.3) a l'alternative .

Théorème 2.3.1 Pour toute solution $(u(t,x), v(t,x))$ du problème (2.1)-(2.3) , on a :

i) Soit $\|u(t,0) + v(t,0)\|_\infty$ est bornée sur $[0, T_{max}[$ et la solution est globale (i.e $T_{max} = +\infty$) .

ii) Soit $\lim\limits_{t \to T_{max}} \|u(t,0) + v(t,0)\|_\infty = +\infty$ et la solution n'est pas globale où on dit qu'elle explose en temps fini T_{max} ou bien qu'elle cesse d'exister .

Dans tout ce qui suit on suppose que $\mathbf{u_0} \in \mathbf{L}^\infty(\boldsymbol{\Omega})$,

Pour la bornitude de u on va utiliser le principe du maximum dont l'une des formes les plus simplifiées est la suivantes :

Théorème 2.3.2 [15] (Principe du maximum)

Si $u(t,x)$ vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u \leq 0 & \text{sur } [0, T_{max}[\times\Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \leq 0 & \text{sur } [0, T_{max}[\times\partial\Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

Alors

$$u(t,x) \leq \max_{x\in\Omega} u_0(x)$$

Alors le problème qui reste à aborder est la bornitude de v par la technique basée sur la fonctionnelle de **"lyaponov"** (**définition 1.7.1**), , il suffit d'estimer uniformément $\|f(u,v)\|_p$ sur $[0, T_{max}[$ pour $p > \frac{n}{2}$ (voir [6] **D.Henry**) .

La résultat principale suivant répond a cette préoccupation :

Théorème 2.3.3 Soit $(u(t,.), v(t,.))$ solutions du problème (2.1)-(2.3) , alors :

La fonctionnelle :

$$t \to L(t) = \int_\Omega (M - u(t,x))^{-\gamma} \exp(\beta . v(t,x))\, dx \tag{2.15}$$

est décroissante sur $[0, T_{max}[$, pour toutes constantes positives β et γ , telles que

$$\beta M < \gamma < \frac{4d_1 d_2}{(d_1 - d_2)} \tag{2.16}$$

et tout M satisfaisant :

$$\|u_0\|_\infty < M \tag{2.17}$$

Démonstration

La continuité de la solution $u(t,x)$ et la condition (2.17) argumentent le fait que la fonctionnelle de Lyapunov est bien définie pour tout $t > 0$ et pour des raisons convenables, on peut supposer qu'elle est bien définie pour tout $t \geq 0$ Pour que **L** soit décroissante, il faut et il suffit qu'elle admet une dérivée négative :

$$\begin{aligned}
L'(t) &= \frac{\partial \mathbf{L}(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (M-u)^{-\gamma} e^{\beta v} \\
&= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left[(M-u)^{-\gamma} e^{\beta v}\right] dx \\
&= \int_\Omega \left[-\gamma(-u_t)(M-u)^{-\gamma-1} e^{\beta v} + \beta (M-u)^{-\gamma}(v_t) e^{\beta v}\right] dx \\
&= \int_\Omega \left[\gamma (d_1 \Delta u - f)(M-u)^{-\gamma-1} e^{\beta v} + \beta (d_2 \Delta v + f)(M-u)^{-\gamma} e^{\beta v}\right] dx \\
&= \int_\Omega \left[\gamma d_1 (M-u)^{-\gamma-1} e^{\beta v}\Delta u + \beta d_2 (M-u)^{-\gamma} e^{\beta v}\Delta v\right] dx \\
&+ \int_\Omega \left[\beta (M-u)^{-\gamma} - \gamma (M-u)^{-\gamma-1}\right] f.e^{\beta v} dx \\
&= \mathbf{I} + \mathbf{J}
\end{aligned}$$

Montrons que **I** et **J** sont négatives :

$$\begin{aligned}
I &= \int_\Omega \left[\gamma d_1 (M-u)^{-\gamma-1} e^{\beta v}\Delta u + \beta d_2 (M-u)^{-\gamma} e^{\beta v}\Delta v\right] dx \\
&= -\int_\Omega \left[\nabla\left(\gamma d_1 \left((M-u)^{-\gamma-1}\right) e^{\beta v}\right)\nabla u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\gamma d_1 \left((M-u)^{-\gamma-1}\right) e^{\beta v}\right) d\Gamma\right] \\
&- \int_\Omega \left[\nabla\left(\beta d_2 \left((M-u)^{-\gamma-1}\right) e^{\beta v}\right)\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\beta d_2 \left((M-u)^{-\gamma-1}\right) e^{\beta v}\right) d\Gamma\right]
\end{aligned}$$

On a

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\gamma d_1 \left((M-u)^{-\gamma-1}\right) e^{\beta v}\right) d\Gamma = 0$$

Et

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\left[\nabla\left(\beta d_2 \left((M-u)^{-\gamma}\right) e^{\beta v}\right)\right] d\Gamma = 0$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&= -\int_\Omega [\nabla\left(\gamma d_1\left((M-u)^{-\gamma-1}\right)e^{\beta v}\right)\nabla u + \nabla\left(\beta d_2\left((M-u)^{-\gamma}\right)e^{\beta v}\right)\nabla v\,]dx \\
&= -\int_\Omega [\gamma d_1\left(\nabla\,(M-u)^{-\gamma-1}\,e^{\beta v}\right) + (M-u)^{-\gamma-1}\,\nabla\left(e^{\beta v}\right)\nabla u]dx \\
&-\int_\Omega [\beta d_2\left(\nabla\,(M-u)^{-\gamma}\,e^{\beta v}\right) + (M-u)^{-\gamma}\,\nabla\left(e^{\beta v}\right)\nabla v)]dx \\
&= -\int_\Omega [\gamma d_1\left((\gamma-1)\,(-\nabla u)\right)(M-u)^{-\gamma-2}\,e^{\beta v} + (M-u)^{-\gamma-1}\,\beta e^{\beta v}(\nabla v)\nabla v]dx \\
&-\int_\Omega [\beta d_2\left((-\gamma)\,(-\nabla u)\right)(M-u)^{-\gamma-1}\,e^{\beta v} + \beta\,(M-u)^{-\gamma}\,e^{\beta v}\,(\nabla v))\nabla v]dx \\
&= -\int_\Omega [\gamma d_1\,(\gamma+1)\,(M-u)^{-\gamma-2}\,e^{\beta v}\,|\nabla u|^{\ 2} + \beta(M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}.\nabla u.\nabla v)]dx \\
&-\int_\Omega [\beta d_2\left(\gamma\,(M-u)^{-\gamma-1}\right)e^{\beta v}\nabla u.\nabla v + \beta(M-u)^{-\gamma}e^{\beta v|\nabla v|^{\ 2}}]dx \\
&= -\int_\Omega [\gamma d_1\,(\gamma+1)\,|\nabla v|^{\ 2} + \beta(M-u)\nabla u\nabla v + \beta y\gamma(M-u)\nabla u\nabla v \\
&+\beta^2 d_2(M-u)^2\,|\nabla v|^{\ 2}](M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}dx. \\
&I = -\int_\Omega T(\nabla u,\nabla v)(M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}dx,
\end{aligned}
$$

Où

$$T(\nabla u,\nabla v) = \gamma d_1(\gamma+1)\,|\nabla v|^{\ 2} + \beta\gamma(d_1+d_2)(M-u)\nabla u.\nabla v + \beta^2 d_2(M-u)^2\,|\ \nabla v|^{\ 2}.$$

T est une forme quadratique en∇u et ∇v , c-à-d :

$$\left[T(x,y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2\right]$$

Pour confirmer que I est négative , nous devons assurer que la forme quadratique T est non négative, ce qui entraine , compte tendu du théorème (**1.4.1**) que tous ces déterminants principaux de sa matrice des coefficients doivent être non négative , c'est à dire :

$$\det 1 \geq 0 \text{ et } \det 2 \geq 0$$

en effet :

$$\det 1 = d_1(\gamma+1) \geq 0$$

Et par suite , on a :

$$\det 2 = \begin{vmatrix} d_1\gamma(\gamma+1) & \dfrac{\beta\gamma(d_1+d_2)(M-u)}{2} \\ \dfrac{\beta\gamma(d_1+d_2)(M-u)}{2} & \beta^2 d_2(M-u)^2 \end{vmatrix}$$
$$= d_1\gamma(\gamma+1)\beta^2 d_2(M-u)^2 - \frac{\beta^2\gamma^2(d_1+d_2)^2(M-u)^2}{4}$$
$$= \frac{4(d_1\gamma(\gamma+1)\beta^2 d_2(M-u)^2)}{4} - \frac{\beta^2\gamma^2(d_1+d_2)^2(M-u)^2}{4}$$
$$= \frac{4(d_1\gamma(\gamma+1)\beta^2 d_2(M-u)^2) - \beta^2\gamma^2(d_1+d_2)^2(M-u)^2}{4}$$

D'ou :

$$\det 2 \geq 0 \Rightarrow \beta^2(M-u)^2(4\gamma d_1(\gamma+1)d_2 - \gamma^2(d_1+d_2))^2$$

Ce qui entraine

$$4d_1d_2\gamma(\gamma+1) - \gamma^2(d_1+d_2)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 4d_1d_2\gamma^2 + 4d_1d_2\gamma - \gamma^2(d_1^2+d_2^2+2d_1d_2) \geq 0$$

$$\Rightarrow 4d_1d_2\gamma^2 + 4d_1d_2\gamma - (\gamma^2d_1^2+\gamma^2d_2^2+2\gamma^2d_1d_2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (2\gamma^2d_1d_2 - \gamma^2d_1^2 - \gamma^2d_2^2 + 4d_1d_2\gamma) \geq 0$$

$$\Rightarrow -\gamma^2(-2d_1d_2+d_1^2+d_2^2) + 4d_1d_2\gamma \geq 0$$

il vient :

$$4d_1d_2\gamma - \gamma^2(d_1+d_2)^2 \geq 0$$

Ce qui donne :

$$4d_1d_2\gamma \geq \gamma^2(d_1-d_2)^2$$
$$\Rightarrow \gamma \leq \frac{4d_1d_2(\gamma+1)}{(d_1-d_2)^2}$$

Et pour que

$$J = \int_\Omega [\beta(M-u)^{-\gamma} - \gamma(M-u)^{-\gamma-1}].f.e^{\beta v}dx$$

soit aussi négative , il faut et il suffit que :

$$\beta(M-u)^{-\gamma} - \gamma(M-u)^{-\gamma-1} \leq 0$$

$$(M-u)^{-\gamma-1}(\beta(M-u)-\gamma) \leq 0$$

$$\Rightarrow \beta(M-u)-\gamma \leq 0$$

comme

$$\forall u, 0 < u < M$$

Alors

$$(M-u)^{-\gamma-1} > 0$$

Si $\gamma > \beta M$

On a : $\beta M - \beta u - \gamma < \gamma - \beta u - \gamma = -\beta u < 0$

Ainsi pour pour tout γ et β positives ,telle que :

$$\beta M < \gamma < \frac{4d_1 d_2}{(4d_1 - d_2)^2}$$

on a $I \leq 0$ et $J \leq 0$. et donc sous les condition (2.15) et (2.16) L′(t) $\leq$ 0 .

corollaire 2.3.1 .

Supposons que la fonction $f(r,s)$ est différentiablement continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ non négative , avec $f(0,s) = 0$ pour tout $s \geq 0$ et vérifie la condition (2.4)*, alors :*

Toutes solutions de (2.1)-(2.3) *avec les données initiales dans la régions Σ, sont globales en temps et uniformément bornées sur $]+\infty, -\infty[\times \Omega$.*

Preuve

Il est visiblement clair que la région Σ est invariante pour le système (2.1)-(2.3) (thèoreme $(\mathbf{2.3.1})$),ce qui assure une couverture théorique permettant d'étudier l'évolution des solutions positives quelque soit le temps.
Comme la réaction f est continue dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $0 < u \leq M$, alors on peut justifier que la limite de (2.4) est uniforme pour tout r dans $[0, M]$ et dans ce cas , on peut choisir une constante α positive telle que :

$$\lim_{s \to \infty} \left[\frac{ln\left(1 + f\left(r, s\right)\right)}{s} \right] < \alpha < \alpha^* \quad \forall r \geq 0$$

rèste uniforme pour r dans $[0, M]$, alors

$$\forall \varepsilon < 0, \exists \beta > 0 : \forall s > 0, pour \;\; s > \beta,$$

On a :

$$\left| \frac{ln\left(1 + f\left(r, s\right)\right) - \alpha}{s} \right| \leq \varepsilon$$

D'où :

$$ln(1 + f(r, s)) \leq \alpha.s$$

$$ln(1 + f(r, s)) \leq \beta + \alpha.s \Leftrightarrow ln(1 + f(r, s)) \leq \ln(c) + \alpha.s. \ln(e); \ln(c) = \beta$$

$$\Leftrightarrow ln\left(1 + f\left(r, s\right)\right) \leq \ln .c.e^{\alpha.s}$$

$$\left(1 + f\left(r, s\right) \leq ce^{\alpha.s} \text{ pour tout } s \geq 0 \text{ et tout } r \in [0, M]\right.$$

Conséquence du théorème 2.3.3

L'estimation utilisées dans ce théorème par le biais de la fonctionnelle de "Lyapunov " , nous permet d'en déduire des résultats importants considéres comme le pierre angulaire de la théorie d'existence globale des solutions des systèmes de réaction-diffusion, auquel on a montré que :

$$L'(t) \leq 0$$

Ce qui signifie que cette fonctionnelle :

$$L(t) \leq c\,cte\,,$$

Et par suite , en vertu de la définition de celle-ci , on déduit le résultat suivant :

$$\int_{\Omega}(M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}dx < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \left\|(M-u)^{-v}e^{\beta\gamma}\right\|_{L^1(\Omega)} < +\infty \quad \forall 0 \leq t \leq T_{max}$$

$$\Leftrightarrow sup\left\|(M-u)^{-v}e^{\beta\gamma}\right\| < +\infty$$

On aboutit au résultat suivant

$$(M-u)^{-v}e^{\beta\gamma} \in L^{\infty}(]0, T_{max}[\,, L^1(\Omega)) \tag{2.18}$$

Maintenant , par une démarche analogue à celle introduisant (2.18), tenant compte du fait que :

$$(M-u)^{-v} \geq M^{-\gamma}$$

On aboutit au résultat suivant :

$$(M-u)^{-v}e^{\beta\gamma} \in L^{\infty}(]0, T_{max}[\,, L^1(\Omega))$$

$$\Rightarrow M^{-\gamma}e^{\beta v} \in ([0, T_{max}[\,, L^1(\Omega))$$

$$\Rightarrow M^{-\gamma}\int_{\Omega}e^{\beta v}dx < +\infty, \forall \quad 0 \leq t \leq T_{max}$$

$$\Rightarrow e^{\beta v} \in L^{\infty}([0, T_{max}[\,, L^1(\Omega))$$

qui entraine que

$$\int_{\Omega}e^{\beta v}dx < +\infty \tag{2.19}$$

Conséquence du théorème 2.2.1

Ici , aussi , une autre estimation utilisée par le biais de la condition (2.4) qui découle immédia- tement du fait que pour tout s ≥ 0 et pour tout r $\in [0, M]$ on a

$$(1 + f(r,s)) \leq ce^{\alpha.s}$$

D'où :

$$f(r,s) \leq ce^{\alpha.s}$$

Par suite :

$$f(u,v) \leq ce^{\alpha.v} \tag{2.20}$$

De plus

$$\alpha < \frac{8d_1d_2}{n\,\|u_0\|_\infty\,(d_1 - d_1)^2}$$

D'où

$$\frac{n}{2}\alpha < \frac{4d_1d_2}{\|u_0\|_\infty\,(d_1 - d_1)^2}$$

On peut choisir pour $p > \frac{n}{2}$, tel que :

$$p\alpha < \frac{4d_1d_2}{\|u_0\|_\infty\,(d_1 - d_1)^2}$$

et posons β=pα, d'où

$$\beta\,\|u_0\|_\infty < \frac{4d_1d_2}{(d_1d_2)^2}$$

Alors nous pouvons choisir γ et M tel que (2.16)-(2.17) soient satisfies et utilisons les conséquences du théorème $(\mathbf{2.3.3})$ et du corollaire $(\mathbf{2.3.1})$, nous déduisons que :

$$e^{\beta v} = e^{(p\alpha)v} = e$$

$$e^{\beta v} = e^{(p\alpha)v} = (e^{\alpha v})^p \in L^\infty([0, T^*[\,, L^1(\Omega))$$

Par conséquent

$$e^{\beta v} \in L^\infty([0, T^*[\,, L^p(\Omega))$$

et de (2.19), nous obtenons :

$$f(u,v) \in L^{\infty}([0,T^*[\,,L^p(\Omega))p > \frac{n}{2}$$

Par les remarques préliminaires , nous pouvons conclure que la solution de (2.1)-(2.3) est globale en temps et uniformément bornée sur $R^+ \times \Omega$, et ainsi la démonstration du corollaire se trouve achevée.

Chapitre 3

Existence globale d'un système de réaction-diffusion à matrice pleinne .

Dans ce chapitre , nous allons étudier le problème de l'éxistence globale en construisant des régions invariantes uniquement en termes de valeurs propres et des éléments de la matrice de diffusion associée à une classe de systèmes de réaction diffusion avec une matrice de diffusion pleinne et des conditions aux limites non homogènes .

3.1 Position du problème

On considère le système de réaction-diffusion suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_{11}\Delta u - a_{12}\Delta v = f\left(u, v\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+} \times \Omega \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a_{21}\Delta u - a_{22}\Delta v = g\left(u, v\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+} \times \Omega \tag{3.2}$$

Avec des conditions aux limites :

$$\begin{cases} \lambda u + (1-\lambda)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \beta_1 \\ & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \lambda v + (1-\lambda)\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \beta_2, \end{cases} \tag{3.3}$$

où (3.3) sont des conditions de type Robin non homogènes ($0 < \lambda < 1$ et $\beta_i \in \mathbb{R}, i = 1$ et 2) Ou des conditions aux limites de Neumann homogènes ($\lambda = \beta_i = 0, i = 1$ et 2) Ou des conditions aux limites de Dirichlet homogènes ($1 - \lambda = \beta_i = 0, i = 1$ et 2) ,

Et les données initiales :

$$\begin{cases} u(0,x) = u_0(x) \\ & \text{sur} \quad \Omega \\ v(0,x) = v_0(x), \end{cases} \tag{3.4}$$

où Ω est un ouvert (domaine) borné de classe $\mathbb{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$ à frontière $\Gamma(\partial\Omega)$ suffisamment régulière , $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale exterieur à $\partial\Omega$,Les constantes $a_{ij}, (i,j = 1,2)$ sont supposées positives et satisfaisant :

$$(a_{12} + a_{21})^2 \leq (4a_{11}a_{22}) \tag{3.5}$$

qui reflète la parabolicité du système et implique en même temps que la matrice de diffusion

$$\text{A=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

est définie positive (Définition **1.5.2**) , Alors les valeurs propres λ_1 et λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ de sa transposée sont positifs. Les données initiales et (β_1, β_2) sont supposées dans la région suivante :

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{c} \{(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \lambda_1 v_0 \leq a_{21}u_0 + a_{22}v_0 \leq \lambda_2 v_0\}, \\ \text{ou} \\ \{(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \lambda_1 u_0 \leq a_{11}u_0 + a_{12}v_0 \leq \lambda_2 u_0\}. \end{array} \right\} \tag{3.6}$$

On traitera le premier cas, le second sera discuté à la dernière section. Nous supposons que les termes de réaction f et g sont continûment dérivables, polynomialement bornés sur Σ , $(f(r,s), g(r,s))$ est dans Σ pour tout (r,s) dans $\partial\Sigma$ (on dit que (f,g) pointent dans Σ sur $\partial\Sigma$) , c'est-à-dire

$$\begin{cases} \lambda_1 g(r,s) \leq a_{21} f(r,s) + a_{22} g(r,s) \text{ pour tout } r \text{ et } s \text{ tels que } \lambda_1 s = a_{12} r + a_{22} s \\ \text{et} \\ a_{21} f(r,s) + a_{22} g(r,s) \leq \lambda_2 g(r,s) \text{ pour tout } r \text{ and } s \text{ telle que } a_{21} r + a_{22} s = \lambda_2 s \end{cases} \tag{3.7}$$

et pour des constantes positives C et $\alpha > a_{22} - \lambda_1$ suffisamment proches à $a_{22} - \lambda_1$, on a

$$a_{21} f(u,v) + Cg(u,v) \leq C_1 (a_{21} u + \alpha v + 1) \text{ Pour tout } u \text{ et } v \text{ dans } \Sigma \tag{3.8}$$

où C_1 est une constante positive .

Remarque 3.1.1 Les composantes $u(t,x)$ et $v(t,x)$ représentent soit les concentrations chimiques ou les densités de populations biologiques et le système (3.1)-(3.2) est un modèle décrivant divers phénomènes chimiques et biologiques

3.1.1 Historique

Le cas trivial où $a_{12} = a_{21} = a_{11} - a_{22} = 0$, des solutions non négatives existent globalement dans le temps. Toujours dans ce cas avec des conditions aux bords (**Neuman**) mais quand $a_{11} \neq a_{22}$ (cas diagonal), **N.Alikakos** [17] a établi l'existence globale et L^∞ -bornitude des solutions pour des données initiales positives lorsque

$$g(u,v) = -f(u,v) = uv^\beta, \tag{3.9}$$

et

$$1 < \beta < \frac{(n+2)}{n}$$

Les réactions données par (3.8) vérifient en fait une condition analogue à (3.7) et forment un cas particulier puisque (f, g) pointent dans Σ sur $\partial\Sigma$ en prenant $\Sigma = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ **K.Masuda** [14] a montré que les solutions de ce système existent globalement pour tout $\beta > 1$ et convergent vers un vecteur constant lorsque $t \to \infty$. **A.Haraux**, **A.Youkana** [3] ont généralisé la méthode de **K.Masuda** en traitant les non-linéarités $uF(v)$ qui forment un cas particulier du nôtre ; ils ont aussi pris $\Sigma = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
Récemment **S.Kouachi**, **A.Youkana** [18] ont généralisé la méthode de **A.Haraux** et **A.Youkana** au cas triangulaire $(a_{12} = 0)$ et en prenant des non-linéarités $f(u, v)$ de croissance exponentielle faible. **J.I.Kanel**, **M.Kirane** [10] ont prouvé l'existence globale, dans le cas $g(u, v) = -f(u, v) = uv^n$ et n est un entier impair, sous la condition

$$|a_{12} - a_{21}| < C_p, \tag{3.10}$$

où C_p contient une constante issue d'une estimation de Solonnikov. Puis ils ont amélioré leurs résultats dans [11] pour obtenir l'existence globale sous les conditions restrictif

$$a_{12} < \varepsilon_0 \equiv \begin{cases} a_{22} < a_{11} + a_{21} \\ \left(\frac{a_{11}a_{22}(a_{11}+a_{21}-a_{22})}{a_{11}a_{22}+(a_{11}+a_{21}-a_{22})}\right) \text{ Si } a_{11} \leq a_{22} < a_{11} + a_{21} \\ a_{12} < min\left\{\frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}, \varepsilon_0)\right\} \end{cases} \tag{3.11}$$

Et

$$|F(v)| \leq C_F\left(1 + |v|^{1+v}\right), \tag{3.12}$$

Où ε et C_F sont des constantes positives avec $\varepsilon < 1$ suffisamment petit et $g(u, v) = -f(u, v) = uF(v)$.

Toutes les techniques utilisées par les auteurs cités ci-dessus sont limités car certaines sont basées sur le théorème d'enchâssement (embedding theorem) de Sobolev comme **Alikakos** [5], **Hollis** − **Martin** − **Pierre** [22], , ... un autre comme **Kanel** − **Kirane** [10] ont utilisé une propriété de la fonction de Neumann pour l'équation de la chaleur pour laquelle l'une de ses restrictions , le coefficient de $-\Delta u$ dans l'équation (3.1) doit être plus grand que celui de $-\Delta v$ dans l'équation (3.2) alors que ce n'est pas le cas du problème (3.1)-(3.4).

Dans ce chapitre en s'interrese au cas considéré par $\mathbf{S.Kouachi\ et\ EidM.Al-Eid}$, [19] .

3.2 L'existence locale

Dans cette section, nous prouvons que si (f, g) pointe dans Σ sur $\partial\Sigma$ alors Σ est une région invariante pour le problème (3.1)-(3.4) .
À ce stade quand les régions invariantes se construisent les problèmes d'existence locale et globale deviennent plus faciles à établir : pour le premier problème, nous démontrons que le système (3.1)-(3.2) avec des conditions aux limites (3.3) et $(u_0, v_0) \in \Sigma, u_0, v_0$ bornés sur Ω est équivalent à un problème pour lequel l'existence locale dans tout l'intervalle $[0, T_{max}[$ peut être obtenu par une procédure connue et pour le deuxième , nous utilisons des techniques usuelles basées sur des les fonctionnelles de Lyapunov qui ne sont pas directement applicable au problème (3.1)-(3.4) et nécessite des régions invariantes .
$\mathbf{S.Kouachi\ et\ EidM.Al-Eid}$, [19]
Le résultat principal de cette section est le suivant
Supposons que (f, g) pointe dans Σ sur $\partial\Sigma$, alors pour tout (u_0, v_0) dans Σ la solution $(u(t, .), v(t, .))$ du problème (3.1)-(3.4) reste dans Σ pour tout t dans $[0, T_{max}[$.
Soit $T^* < T_{max}$ un nombre arbitrairement positif et soit λ_1 et $\lambda_2 (\lambda_1 < \lambda_2)$ les valeurs propres de la matrice A^t associées respectivement aux vecteurs propres $(x_{11} \quad x_{12})^t$ et $(x_{21} \quad x_{22})^t$. Pour $i = 1, 2$ fixé , En multipliant l'équation (3.1) respectivement par x_{i1} $(i = 1, 2)$ et l'équation (3.2) respectivement par x_{i2} $(i = 1, 2)$.
On obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} x_{11} - a_{11} x_{11} \Delta u - a_{12} x_{11} \Delta v = x_{11} f(u, v) \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} x_{21} - a_{21} x_{11} \Delta u - a_{12} x_{21} \Delta v = x_{21} f(u, v) \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}x_{12} - a_{21}x_{12}\Delta u - a_{22}x_{12}\Delta v = x_{12}g\left(u,v\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+} \times \Omega \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}x_{22} - a_{21}x_{22}\Delta u - a_{22}x_{22}\Delta v = x_{22}g\left(u,v\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+} \times \Omega \tag{4}$$

En rassemblant les équations résultantes on obtient :

(1)+(3) *implique* :

$$\frac{\partial}{\partial t}(ux_{11} + vx_{12}) - (a_{11}x_{11} + a_{21}x_{12})\Delta u - (a_{12}x_{11} + a_{22}x_{12})\Delta v = x_{11}f(u,v) + x_{12}g(u,v),$$

(2)+(4)*implique* :

$$\frac{\partial}{\partial t}(ux_{21} + vx_{22}) - (a_{11}x_{21} + a_{21}x_{22})\Delta u - (a_{12}x_{21} + a_{22}x_{22})\Delta v = x_{21}f(u,v) + x_{22}g(u,v),$$

et comme λ_1 est une valeur propre de A^T associée au vecteur propre $(x_{11}, x_{12})^T$

Ona :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} \\ \lambda_1 x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} \\ \lambda_1 x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{12} \\ a_{12}x_{11} + a_{22}X_{12} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Alors :

$$(1) + (3)implique : \frac{\partial(ux_{11} + vx_{12})}{\partial t} - \lambda_1 x_{11}\Delta u - \lambda_1 x_{12}\Delta v = x_{11}f(u,v) + x_{12}g(u,v)$$

$$implique : \frac{\partial(ux_{11} + vx_{12})}{\partial t} - \lambda_1 \Delta(x_{11}u + x_{12}v) = x_{11}f(u,v) + x_{12}g(u,v)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w_1}{\partial t} - \lambda_1 \Delta w_1 = F_1\left(w_1, w_2\right).$$

Avec $w_1 = (x_{11}u + x_{12}v)$.

et comme λ_2 est une valeur propre de A^T associée au vecteur propre $(x_{21}, x_{22})^T$

Ona :

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 x_{21} \\ \lambda_2 x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ & \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 x_{21} \\ \lambda_2 x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_{21} + a_{21}x_{22} \\ \\ a_{12}x_{21} + a_{22}x_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Alors :

$$(2) + (4) implique : \frac{\partial(ux_{21} + vx_{22})}{\partial t} - \lambda_2 x_{21}\Delta u - \lambda_2 x_{22}\Delta v = x_{21}f(u,v) + x_{22}g(u,v)$$

$$implique : \frac{\partial(ux_{21} + vx_{22})}{\partial t} - \lambda_2\Delta(x_{21}u + x_{22}v) = x_{21}f(u,v) + x_{22}g(u,v)$$

$$implique : \frac{\partial w_2}{\partial t} - \lambda_2\Delta w_2 = F_2(w_1, w_2)$$

Avec $w_2 = (x_{21}u + x_{22}v)$.

Finalment on obtient le problème suivant :

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \lambda_1\Delta w_1 = F_1(w_1, w_2) \qquad \text{sur }]0 \quad T^*[\times\Omega \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \lambda_2\Delta w_2 = F_2(w_1, w_2) \qquad \text{sur }]0 \quad T^*[\times\Omega \tag{3.14}$$

Avec des conditions aux limites

$$\lambda w_i + (1-\lambda)\frac{\partial w_i}{\partial \eta} = \rho_i, \quad i = 1, 2 \qquad\qquad \text{sur }]0 \quad T^*[\times\partial\Omega \tag{3.15}$$

Et des donnés initiales :

$$w_i(0,x) = w_i^0(x) \qquad\qquad \text{sur } \Omega \tag{3.16}$$

Où

$$w_i = (x_{i1}u + x_{i2}v)(t,x), \quad i = 1,2 \qquad \text{sur }]0 \quad T^*[\times\Omega \tag{3.17}$$

Pour tout (t,x) dans $]0 \quad T^*[\times\Omega$,

$$\rho_i = (x_{i1}\beta_1 + x_{i2}\beta_2), \quad i = 1,2$$

Et

$$F_i(w_1,w_2) = (x_{i1}f + x_{i2}g), \quad i = 1,2 \quad \text{Pour tout } u \text{ et } v \text{ dans } \Omega. \tag{3.18}$$

Remarque 3.2.1 Notons que la condition (3.5) de parabolicité du système (3.1)-(3.2) implique celle du système (3.13)-(3.14) , puisque ça implique la positivité des déterminants de A qui est avec la positivité de ses éléments qui donne la positivité des valeurs propres λ_1 et λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ de la matrice A^T .

Dans ces conditions on peut conclure que le problème (3.13)-(3.14) avec des coefficients de diffusion λ_1 et λ_2 est équivalent au problème (3.1)-(3.4) et pour prouver que Σ donnée par (3.6) est une région invariante pour le système (3.1)-(3.2) il suffit de prouver que la région :

$$\left\{\left(w_1^0, w_2^0\right) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } w_i^0 \geq 0, i = 1,2\right\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \tag{3.19}$$

est invariante pour le système (3.13)-(3.14) et

$$\Sigma = \left\{(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } w_i^0 = (x_{i1}u_0 + x_{i2}v_0) \geq 0, i = 1,2\right\}. \tag{3.20}$$

Comme $(x_{1i} \quad x_{2i})^t$ est un vecteur propre de A^T associé à la valeur propre λ_i , $i = 1,2$, alors si nous supposons sans perte de généralités que $a_{11} \leq a_{22}$

On a d'après **(5)** :

$$\begin{cases} \lambda_1 x_{11} = a_{11}x_{11} + a_{21}x_{12} \\ \lambda_1 x_{12} = a_{12}x_{11} + a_{22}x_{12} \end{cases}$$

Ce qui implique que :

$$x_{11}(a_{11}-\lambda_1)+a_{21}x_{12}=0 \tag{a}$$

$$x_{12}(a_{22}-\lambda_1)+a_{12}x_{11}=0 \tag{b}$$

Et d'après **(6)** :

$$\begin{cases} \lambda_2 x_{21}=a_{11}x_{21}+a_{21}x_{22} \\ \lambda_2 x_{22}=a_{12}x_{21}+a_{22}x_{22} \end{cases}$$

Ce qui implique que :

$$x_{21}(a_{11}-\lambda_2)+a_{21}x_{22}=0 \tag{c}$$

$$x_{22}(a_{22}-\lambda_2)+a_{12}x_{21}=0 \tag{d}$$

De **(a)** et **(c)** on obtient :

$$(a_{11}-\lambda_i)x_{i1}+a_{21}x_{i2}=0, i=1,2.$$

Et de **(b)** et **(d)** :

$$(a_{22}-\lambda_i)x_{i2}+a_{12}x_{i1}=0, i=1,2$$

Si nous choisissons $x_{12}=a_{11}-\lambda_1$ et $x_{22}=\lambda_2-a_{11}$ dans **(a)** et **(b)** on obtient :

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)(x_{11}+a_{21})=0 \\ (a_{22}-\lambda_2)(x_{21}-a_{21})=0 \end{cases}$$

Donc :

$$x_{11}=-a_{21} \text{ et } x_{21}=a_{21}$$

Alors :

$$(x_{i1}u_0+x_{i2}v_0)\geq 0, i=1,2,$$

$$\Leftrightarrow -a_{21}u_0+(a_{11}-\lambda_1)v_0\geq 0,$$

$$a_{21}u_0+(\lambda_2-a_{11})v_0\geq 0.$$

$$\Leftrightarrow -a_{21}u_0 + (\lambda_2 - a_{22})v_0 \geq 0,$$

$$a_{21}u_0 + (a_{22} - \lambda_1)v_0 \geq 0.$$

Alors (3.20) et prouvée (3.17) s'écrit :

$$w_1 = -a_{21}u + (\lambda_2 - a_{22})v \text{ et } w_2 = a_{21}u + (a_{22} - \lambda_1)v$$

Maintenant, pour prouver que la région $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est invariante pour le système (3.1)-(3.2), il suffit de montrer que $F_1(w_1, w_2) \geq 0$ pour tous (w_1, w_2) tel que $w_1 = 0$ et $w_2 \geq 0$ et $F_2(w_1, w_2) \geq 0$ pour tout (w_1, w_2) tel que $w_1 \geq 0$ et $w_2 = 0$ (voir **Théorème 2.2.2**) , en utilisant les expressions (3.18)
on obtient :

$$F_1(w_1, w_2) = -a_{21}f + (\lambda_2 - a_{22})g \text{ et } F_2(w_1, w_2) = a_{21}f + (a_{22} - \lambda_1)g$$

Pour :

$$F_1(w_1, w_2) = -a_{21}f(u, v) + (\lambda_2 - a_{22})g(u, v).$$

Comme $v_0 \geq 0$ et f,g pointent dans Σ sur $\partial\Sigma$:

$$\text{On a } w_1 = \text{ et } w_2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -a_{21}u + (\lambda_2 - a_{22})v = 0 \\ w_2 = a_{21}u + (a_{22} - \lambda_1)v \geq 0, \end{cases}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{cases} \lambda_2 v = a_{21}u + a_{22}v \\ \quad\quad \text{et} \\ \lambda_1 v \leq a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

Ce qui implique d'après (3.7) que :

$$a_{21}f(u, v) + a_{22}g(u, v) \leq \lambda_2 g(u, v)$$

$$\Rightarrow (\lambda_2 - a_{22})g(u, v) - a_{21}f(u, v) \geq 0$$

$$\Rightarrow F_1(w_1, w_2) \geq 0.$$

La meme chose pour $F_2(w_1, w_2)$, tel que $w_1 \geq 0$, $w_2 = 0$.

Alors $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est invariante pour (3.13)-(3.14) , et donc Σ est invariante pour (3.1)-(3.2). Et comme $T^* < T_{max}$ est arbitraire, alors Σ est un région invariante pour le système (3.1)-(3.3) .

Alors le système (3.1)-(3.2) avec les conditions aux limites (3.3) et les données initiales dans Σ est équivalent au système (3.13)-(3.14) avec les conditions aux limites (3.15) et les données initiales positives (3.16). Comme il a été mentionné au début de cette section et puisque ρ_1 et ρ_2 donnés par :

$$\rho_1 = -a_{21}\beta_1 + (\lambda_2 - a_{22})\beta_2 \text{ et } \rho_2 = a_{21}\beta_1 + (a_{22} - \lambda_1)\beta_2.$$

sont positifs, alors pour toute donnée initiale dans $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ ou $\mathbb{L}^p(\Omega)$, $p \in (1, +\infty)$ l'existence locale et l' unicité des solutions au problème au limite (3.13)-(3.16) et par conséquent ceux du problème (3.1)-(3.4) découlent de la théorie fondamentale de l'existence pour les équations différentielles semi-linéaires abstraites (voir **A.Friedman** [1], **D.Henry** [6] et **Pazy** [4]) , **S.Kouachi et Eid M. Al-Eid** [19] . Les solutions sont classiques sur $]0, T^*[$, où T^* désigne le temps de L'explosion éventuel sur $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$. La solution locale est continue globalment estimations a priori.

La positivité des coefficients de diffusion de la matrice implique que

$$\lambda_1 < a_{11} < a_{22} < \lambda_2.$$

Une fois les régions invariantes sont construites, on peut appliquer la technique de Lyapunov et établir l'existence globale d'une solution unique pour (3.1)-(3.4).

3.3 L'existence globale

Comme le déterminant du système algébrique linéaire (3.17) ,Par rapport aux variables u et v, est différent de zéro , Alors prouver l'existence globale d'une solution de problème (3.1)-(3.4) revient a prouver celle du problème (3.13)-(3.16) , pour ce sujet, il est bien connu (voir **D.Henry** [6]) qu'il suffit de trouver une estimation uniforme de $\|F_1 = (w_1, w_2)\|_p$ et $\|F_2 = (w_1, w_2)\|_p$ sur $[0, T^*[$ pour certains $p > \frac{n}{2}$ où $\|.\|_p$ désignent les normes usuelles dans les espaces $L^p(\Omega)$ défini par :

$$\|u\|_p^p = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u(x)|^p \, dx, 1 \leq P < \infty \text{ et } \|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)| \, .$$

Définissons, pour tout entier positif p, la suite finie :

$$\theta_i = \theta^{(p-i)^2}, i = 0, 1, ..., p \tag{3.21}$$

où θ est une constante positive suffisamment grande pour que :

$$\theta > \frac{Tr A}{2\sqrt{\det A}} \equiv \frac{(a_{11} + a_{22})}{2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}. \tag{3.22}$$

Définissons, pour un entier positif fixé p , la fonctionnelle :

$$t \longrightarrow L(t) = \int_\Omega H_p(w_1(t, x), w_2(t, x))dx, \tag{3.23}$$

Où

$$H_p(w_1, w_2) = \sum_{i=0}^{p} C_p^i \theta_i w_1^i w_2^{p-i}, \tag{3.24}$$

Avec C_p^i désigne le coefficient binomial bien connu. Le principal résultat de cette section est le suivant :

Théorème 3.3.1: . [19] Soit $(w_1(t,.), w_2(t,.))$ une solution positive quelconque du problème (3.13)-(3.16), alors la fonctionnelle L définie par (3.23)-(3.24) est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$, $T^* < T_{max}$.

Démonstration

Dirivons L par rapport à t on trouve :

$$\mathbf{L}'(t) = \int_\Omega \left[\frac{\partial H_p}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial H_p}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial t}\right] dx.$$

$$= \int_\Omega \left(\lambda_1 \frac{\partial H_p}{\partial w_1}\Delta w_1 + \lambda_2 \frac{\partial H_p}{\partial w_2}\Delta w_2\right) dx + \left(F_1 \frac{\partial H_p}{\partial w_1} + F_2 \frac{\partial H_p}{\partial w_2}\right) dx.$$

$$= I + J.$$

Par simple utilisation de la formule de Green (1.2) on a :

$$I = \int_{\partial\Omega} \lambda_1 \frac{\partial H_p}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial \eta} dx - \int_\Omega \lambda_1 \nabla w_1 \nabla \left(\frac{\partial H_p}{\partial w_1}\right) dx +$$

$$\int_{\partial\Omega} \lambda_2 \frac{\partial H_p}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial \eta} dx - \int_\Omega \lambda_2 \nabla w_2 \nabla \left(\frac{\partial H_p}{\partial w_2}\right) dx$$

On écrit :

$$I = I_1 + I_2$$

Où

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \left(\lambda_1 \frac{\partial H_p}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial H_p}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial \eta}\right) dx. \tag{3.25}$$

Et

$$I_2 = -\int_\Omega \left(\lambda_1 \frac{\partial H_p}{\partial w_1^2} |\Delta w_1|^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial^2 H_p}{\partial w_1 \partial w_2}\nabla w_1 \nabla w_2 + \lambda_2 \frac{\partial H_p}{\partial w_2^2} |\Delta w_2|^2\right) dx. \tag{3.26}$$

Commençons par calculer les dérivées partielles premières et secondes de H_p par rapport à w_1 et w_2 . on obtient :

$$\frac{\partial H_p}{\partial w_1} = \sum_{i=1}^{p} (i C_p^i \theta_i w_1^{i-1} w_2^{p-i}).$$

Et

$$\frac{\partial H_p}{\partial w_2} = \sum_{i=0}^{p}((p-i)C_p^i \theta_i w_1^i w_2^{p-i-1}).$$

En utilisant la formule :

$$iC_i^p = pC_{p-i}^{i-1} \text{ pour tous } i = 1, ..., p \tag{3.27}$$

Et en changeant l'indice i par $i-1$, on obtient :

$$\frac{\partial H_p}{\partial w_1} = p\sum_{i=0}^{p-1}(C_{p-1}^i \theta_{i+1} w_1^i w_2^{p-i-1}). \tag{3.28}$$

Pour $\frac{\partial H_p}{\partial w_2}$, en utilisant (3.27) et le fait que :

$$C_i^p = C_i^{p-i}, \text{ pour tous } i = 0, ..., p, \tag{3.29}$$

On obtient :

$$\frac{\partial H_p}{\partial w_2} = p\sum_{i=0}^{p-1}(C_{p-1}^i \theta_i w_1^i w_2^{p-i-1}) \tag{3.30}$$

En utilisant les formules (3.28) et (3.30) , on en déduit par analogie :

$$\frac{\partial^2 H_p}{\partial w_2} = p(p-1)\sum_{i=0}^{p-2}(C_{p-2}^i \theta_{i+2} w_1^i w_2^{p-2-i}) \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial^2 H_p}{\partial w_1 \partial w_2} = p(p-1)\sum_{i=0}^{p-2}(C_{p-2}^i \theta_{i+1} w_1^i w_2^{p-2-i}). \tag{3.32}$$

Et

$$\frac{\partial^2 H_p}{\partial w_2^2} = p(p-1)\sum_{i=0}^{p-2}(C_{p-2}^i \theta_i w_1^i w_2^{p-2-i}). \tag{3.33}$$

maintenant **S.Kouachi**[20] a affirmée qu'il existe une constante positive C_2 indépendante de $t \in [0, T_{max}[$ tel que :

$$I_1 \leq C_2 \text{ pour tous } t \in [0, T_{max}[. \tag{3.34}$$

Pour le vérifier , nous suivons le même raisonnement que chez **S. Kouachi** [20] :

Dans le cas des conditions aux limites non homogènes de Robin, en utilisant la conditions aux limite (3.15) on obtient :

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \left(\lambda_1 \frac{\partial H_p}{\partial w_1}(\gamma_1 - \sigma w_1) + \lambda_2 \frac{\partial H_p}{\partial w_2}(\gamma_2 - \sigma w_2) \right) dx.$$

Où $\quad \sigma = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$ et $\gamma_i = \dfrac{\rho_i}{1-\lambda}, i = 1, 2$.

comme

$$\begin{aligned} H(w_1, w_2) &= a \frac{\partial H_p}{\partial u}(\gamma_1 - \sigma w_1) + b \frac{\partial H_p}{\partial v}(\gamma_2 - \sigma w_2). \\ &= P_{p-1}(w_1, w_2) - Q_q(w_1, w_2), \end{aligned}$$

Où P_{p-1} et Q_p sont des polynômes à coefficients positifs et respectivement degrés $p-1$ et p et puisque la solution est positive, alors :

$$\limsup_{(|w_1|+|w_2|)\to+\infty} H(w_1, w_2) = 0, \tag{3.35}$$

Ce qui prouve que H est uniformément borné sur $\mathbb{R}_+^2$ et par conséquent (3.34).

Lorsque les conditions aux limites sont homogènes de type de Neumann, alors $I_1 = 0$ sur $[0, T_{max}[$.

Enfin le cas des conditions de Dirichlet homogènes est trivial, puisque dans ce cas la positivité de la solution sur $[0, T_{max}[\times\Omega$ implique que $\dfrac{\partial w_1}{\partial \eta} \leq 0$ et $\dfrac{\partial w_2}{\partial \eta} \leq 0$ sur $[0, T_{max}[\times\partial\Omega$. Par conséquent on retrouve (3.14) avec $C_2 = 0$.

$$I_2 = -p(p-1) \sum_{i=0}^{p-2} C_{p-2}^i \int_\Omega w_1^i w_2^{p-2-i} T_i(\nabla w_1, \nabla w_2) dx,$$

Où

$$T_i(\nabla w_1, \nabla w_2) = (\lambda_1 \theta_{i+2} |\nabla w_1|^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\theta_{i+1} \nabla w_1 \nabla w_2 + \lambda_2 \theta_i |\nabla w_2|^2),$$

$$i = 0, 1, ..., p-2.$$

En utilisant (3.21) et (3.22) on en déduit que les formes quadratiques (par rapport à ∇w_1 et ∇w_2) sont positifs puisque :

$$((\lambda_1+\lambda_2)\theta_{i+1})^2 - 4\lambda_1\lambda_2\theta_i\theta_{i+2} = \theta_{i+1}^2((\lambda_1+\lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2\theta^2) < 0,\ i = 0, 1, ..., p-2. \tag{3.36}$$

Alors

$$I_2 \leq 0. \tag{3.37}$$

(3.28) et (3.30) impliquent :

$$J = p\sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^i w_1^i w_2^{p-1-i} \int_\Omega G_i(\nabla w_1, \nabla w_2)dx,$$

Où

$$G_i(w_1, w_2) = (\theta_{i+1}F_1(w_1, w_2) + \theta_i F_2(w_1, w_2)).$$

On a

$$G_i(w_1, w_2) = a_{21}(-\theta_{i+1}+\theta_i)f(u,v) + [(\lambda_2 - a_{22})\theta_{i+1} + (a_{22}-\lambda_1)\theta_i]g(u,v),$$

$$= [(\lambda_2 - a_{22})\theta_{i+1} + (a_{22}-\lambda_1)\theta_i]\left[a_{21}\Gamma\left(\frac{\theta_i}{\theta_i - 1}\right)f(u,v) + g(u,v)\right],$$

Où

$$\Gamma\left(\frac{\theta_i}{\theta_i-1}\right) = \frac{\frac{\theta_i}{\theta_i-1} - 1}{[(a_{22}-\lambda_1)\frac{\theta_i}{\theta_{i+1}} + (\lambda_2 - a_{22})]}, i = 0, 1, ..., p-2.$$

Commes la fonction $x \to \dfrac{x-1}{(a_{22}-\lambda_1)x + (\lambda_2 - a_{22})}$

se croit avec

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{(a_{22}-\lambda_1)x + (\lambda_2 - a_{22})} = \frac{1}{(a_{22}-\lambda_1)}.$$

et comme $\dfrac{\theta_i}{\theta_i - 1}$ est suffisamment grand en choisissant θ suffisamment grand, alors en utilisant successivement la condition (3.8) et la relation (3.18) on obtient, pour une constante C_3 appropriée,

$$J \leq C_3 \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{p}(w_1 + w_2 + 1)C_{p-1}^{i-1} w_1^{i-1} w_2^{p-i}\right] dx.$$

suivant le même raisonnement que chez **S.Kouachi**[24] , un simple calcul montre que :

$$L'(t) \leq C_4 L(t) + C_5 L^{(p-1)/p}(t) \text{ sur } [0, T^*] .$$

En mettant

$$Z = L^{1/p},$$

on obtient

$$pZ' \leq C_4 + C_5.$$

La résolution de cette inégalité différentielle linéaire donne la bornitude uniforme de la fonctionnelle L sur l'intervalle $[0, T^*]$, ce qui termine en même temps notre raisonnement et la preuve du théorème.

corollaire 3.3.1 .
Supposons que les fonctions $f(r,s)$ et $g(r,s)$ sont continûments différentiables sur Σ, pointées dans Σ sur $\partial\Sigma$ et vérifies la condition (3.8) *. Alors toutes les solutions de* (3.1)-(3.4) *avec $(u_0, v_0) \in \Sigma$, u_0, v_0 bornées dans Ω sont dans $L^\infty(0, T^*, L^p(\Omega))$ pour tous $p \geq 1$.*

Preuve

La preuve est une conséquence immédiate du théorème 3.3.1, et du fait que

$$(w_1 + w_2)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i w_1^p w_2^{p-i}$$

On peu écrire :

$$\int_\Omega (w_1(t,x) + w_2(t,x))^p dx \leq L(t), \text{ pour tous } p \geq 1.$$

en tenant en compte (3.17) , on obtient le résultat .

corollaire 3.3.2 *sous l'hypothèse du corollaire 3.3.1, si les réactions $f(r,s)$ et $g(r,s)$ sont polynomialement bornée, alors toutes les solutions de* (3.1)-(3.3) *avec $(u_0, v_0) \in \Sigma$, u_0, v_0 bornées sur Ω sont globales en temps.*

Preuve

Comme il a été mentionné ci-dessus , il suffit de trouver une estimation uniforme de $\|F_1(w_1, w_2)\|_p$ et $\|F_2(w_1, w_2)\|_p$ sur $[0, T^*[$ pour certains $p > n/2$. Comme les fonctions $f(u, v)$ et $g(u, v)$ sont polynomialement bornées sur Ω .puis en utilisant les relations (3.17) et (3.18) on obtient que $F_1(w_1, w_2)$ et $F_2(w_1, w_2)$ le sont aussi et la preuve devient une conséquence immédiate du corollaire 3.3.1 .

Bibliographie

[1] *A.Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice Hall Englewood Chiffs. N. J. 1964*

[2] *A.L. Hodgkin et A.F.Huxley , AQuantitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Exctition in Nerve .J.OHysiol. 117 (1925) , 500-544 .*

[3] *A. Haraux and A.Youkana, On a Result of K. Masuda Concerning Reaction-Diffusion Equations.Tohoku. Math. J.40 (1988), 159-163.*

[4] *A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Math. Sciences 44, Springer-Verlag, New York (1983).*

[5] *A. Wiliam .H.Adkins Steven Weintranb ,Algebra , an Approach via module Theory , Sringer Verlag 1999 .*

[6] *D.Henry , Geometric THeory of Semilinear Parabolic Equations lecture notes in mathematics 840 , springer-verlag , New-York , 1984.*

[7] *H.Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications . Masson , Paris, 1983 .*

[8] *H.Cohen Nonlinear Diffusion Problems . Studies in Mathematics 7, Studies in Applied Mathematics , Ed. A. Taub .Math Assoc of America* & *Prent Hall , (Englew-Cliffs, N.J) (1971),27-63 .*

[9] *J. A. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations. Springer Verlag, New York (1983).*

[10] *J. I. Kanel and M. Kirane, Pointwise a priori bounds for a strongly coupled system of Reaction-Diffusion Equations with a balance law, Math. Methods in the applied Sciences, 171 (1999), 227-230.*

[11] *J. I. Kanel and M. Kirane, Pointwise a priori bounds for a strongly coupled system of Reaction-Diffusion Equations, International Journal of Diff. Eq. and Appl., 1, No. 1 (2000), 77-97.*

[12] *J. Morgan , Global Existance for semiliniear Parabolic Systems . SIAM .J.Math.Anal 20 , 1989 ,1128-1144 .*

[13] *J. Smoller , shock Waves and Reaction-Diffusion Equations , Springer-Verlag , New York (1983)*

[14] *K. Masuda, On the Global Existence and Asymptotic Behavior of Solutions of Reaction-Diffusion Equations. Hokkaido. Math. J. 12 (1983), 360-370.*

[15] *K. Saoudi , Existance globale et comportement asymptotique des solutions d'une classe de systeme de reaction-diffusion avec reaction a croissance exponentielle , Memoire de Magister .*

[16] *M. Yahi and K. Saoudi , Asymptotic Behavior for Solution of Reaction-Diffusion Systems . (Journal of Mathematics and Statistics 3 (3) : 88-92, 2007)*

[17] *N. Alikakos, L^p -Bounds of Solutions of Reaction-Diffusion Equations.Comm. P. D. E. 4 (1979). 827-828.*

[18] *S.Kouachi and A.Youkana, Global existance for a class of reaction-diffusion systems . Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics January 2001, 49(3)*

[19] *S.Kouachi and Eid M. Al-Eid , Explicit Invariant Regions and Global Existence of Solutions for Reaction Diffusion Systems With a Full Matrix of Diffusion Coefficients and Nonhomogeneous Boundary Conditions. (Int. J. Open Problems Comput. Math. , Vol. 5, No. 1, March, 2012 ISSN 2074-2827 ; Copyright c ICSRS Publication, 2012 www.i-csrs.org) .*

[20] *S. Kouachi, Invariant regions and global existence of solutions for reaction diffusion systems with a full matrix of diffusion coefficients and no homogeneous boundary conditions, Georgian mathematical journal Vol 11(2004), Number 2, pp 349-359.*

[21] *S. Abdelmalek, Invariant Regions and Global Existence of Solutions for Reaction-Diffusion Systems with a Tridiagonal Matrix of Diffusion Coefficients and Nonhomogeneous Boundary Conditions, Journal of Applied Mathematics, Volume 2007,1-15 .*

[22] *S. L. Hollis, R. H. Martin JR and M. Pierre, Global Existence and bounds in Reaction-Diffusion Systems. Siam. J. Math. Anal, Vol 18, n03, May 1987.*

[23] *S. Kouachi, Uniform boundlessness and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a balance law and a full matrix of diffusion coefficients. E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No. 7. (2001), pp. 1-9.*

[24] *S. Kouachi, Global existence of solutions in invariant regions for reaction diffusion systems with a balance law and a full matrix of diffusion coefficients, E. J. Qual. Theory Diff. Equ., No. 4. (2003), 1-10.*

[25] *Z.Athmani et N.Boutarfi ,L'étude de l'existence locale et globale des solutions pour quelques problèmes de réaction diffusion ,Mémoire de fin d'études Pour l'obtention du diplôme de Master 2022*