



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

***Applications d'inégalité de
Gronwall***

Réalisé par : **Sraoui Aicha**
Rouibi Fahima

Dirigé par : **Dr. Aouafi Rabiaa**
Présenté le **../09/2020**

Membres de jury :

Mdm O . Zahi **Président**
Mdm Ch . Laouar **Examineur**

2019-2020

Dédicace

Nous dédions ce travail à :

Nos chers parents qui nous ont toujours soutenue

Nos frères

Nos sœurs

Toute la famille

Nos amies

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions notre Dieu qui nous avoir donnés la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Un grand merci à l'encadreur Dr. Aouafi Rabiaa pour sa suggestion qui fait l'objet de cette mémoire et pour sa soutien, sa compréhension et sa disponibilité.

Nous remercions aussi les membres du jury qui ont acceptés de lire et d'évaluer nos travail.

Nous adressons un grand merci à toute nos familles en particulier nos parents qui a toujours été présente lorsque nous en avons eu besoin, nos professeurs dés la primaire jusqu'à l'université, nos amies, nos proches.

Résumé

Dans ce travail ,nous obtenons l'inégalité de type Gronwall pour les opérateurs fractionnaires généralisés unifiant les opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville.

Nous appliquons cette inégalité pour étudier la dépendance de la solution sur l'ordre et la condition initiale d'une certaine équation différentielle fractionnaire, impliquant des dérivées fractionnaires généralisées ,i.e. Les changements de solution sont causés par de petits changements dans la condition initiale .

Mots Clés : Dérivées fractionnaires ,Inégalité de Gronwall.

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا لمتباينة من نوع غرونويل للمؤثرات الكسرية . معاملات ريمان-ليوفيل الجزئية المعممة الموحدة. حيث نطبق هذه المتباينة لدراسة اعتماد الحل على الترتيب والشرط الأولي لمعادلة تفاضلية كسرية معينة ، تتضمن مشتقات كسرية معممة ، حيث أي تغييرات في الحل ناتجة عن تغييرات بالترتيب والشرط الأولي. الكلمات المفتاحية: مبرهنة غرونويل، مشتق كسري .

Abstract

In this work, we obtain the Gronwall-type inequality for generalized fractional operators unifying the Riemann-Liouville fractional operators.

We apply this inequality to study the dependence of the solution on the order and the initial condition of a certain fractional differential equation, involving generalized fractional derivatives, i.e. Changes in solution are caused by small changes in the order and the initial condition.

Key Words : Gronwall inequality, fractional derivative.

Table des matières

Notations	6
Introduction générale	7
1 Calculs fractionnaire	10
1.1 Fonctions spécifiques	10
1.1.1 La fonction Gamma	10
1.1.2 La fonction Bêta	13
1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler	15
1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires	17
1.2.1 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville	17
1.2.2 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville	18
1.2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	21
1.2.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires	25
2 Inégalités Intégrales de Type Gronwall	26
2.1 Forme standard d'inégalité de Gronwall	26
2.2 Autres Inégalités de Type Gronwall	29
2.3 Généralisation non linéaire	33
2.4 Autres généralisations non linéaires	36
3 Applications d'inégalité de Gronwall à une équation fractionnaire	38

3.1	Une inégalité intégrale	38
3.2	Application à la dépendance de la solution sur les paramètres	40

A**Quelques théorèmes du point fixe**

		45
1.1	Théorème de points fixes	45
1.2	Théorème de point fixe de Banach	47
1.3	Théorème de point fixe de Schaefer	47
1.4	Théorème de point fixe de krasnosselski	47
1.5	Théorème de Arzèla-Ascoli	47

Bibliographie		48
----------------------	--	-----------

Notations

\mathbb{R}_*^+ : Ensemble des nombres réels positifs non nuls .

\mathbb{R}, \mathbb{C} : Ensemble des nombres réels (resp. complexes).

\mathbb{N} : Ensemble des nombres naturels.

$[a, b)$: Intervalle semi-ouvert d'extrémité a et b .

$Re(\cdot)$: Partie réelle d'un nombre complexe.

$Im(\cdot)$: Partie imaginaire d'un nombre complexe .

$[Re(\alpha)]$: Partie entière de $Re(\alpha)$.

$L^p(1 \leq p < \infty)$: L'espace des fonctions réelles f telles que f est mesurable et $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$.

L^∞ : L'espace des fonctions essentiellement bornées.

$L_{loc}^1(\Omega)$: Espace des fonctions localement intégrables tel que f est mesurable et pour tout compact K de Ω : $\int_K |f(t)| dt < \infty$.

$C([a, b])$: Espace des fonctions continues sur $[a, b]$.

$C^1([a, b])$: $f \in C^1([a, b])$ si f est dérivable sur $[a, b]$, et f' est continue sur $[a, b]$.

$C^n([a, b])$: Espace des fonctions n -fois continument différentiables.

$C^\infty([a, b])$: Si f est C^k sur $[a, b]$ pour tout k . Autrement dit, si f est indéfiniment dérivable sur $[a, b]$.

$AC^n([a, b])$: L'espace des fonctions à valeurs complexes $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ continues sur $[a, b]$ telles que $f^{(n-1)}(x) \in AC([a, b])$, c'est-à-dire :

$$AC^n([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ et } (D^{n-1}f)(x) \in AC([a, b]) \quad \left(D = \frac{d}{dx} \right) \right\}.$$

$AC([a, b])$: L'espace des fonctions absolument continue sur $[a, b]$.

$C(J, \mathbb{R})$: L'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans \mathbb{R} .

Introduction

Le calcul fractionnel généralise la différenciation et l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire. Ce calcul a suscité l'intérêt d'un grand nombre de scientifiques car il a été démontré qu'il donne de bons résultats lorsque ce calculs est appliqué pour modéliser des phénomènes du monde réel [33,44,46,36,29]. De plus, il y a eu des tentatives pour trouver de nouveaux opérateurs fractionnaires avec différents noyaux afin de mieux modéliser ces phénomènes [51,16,8,1]. De nombreux auteurs ont discuté des aspects théoriques et d'application des équations différentielles avec des intégrales fractionnaires et des dérivés [31,32,5,9,10].

Les inégalités intégrales jouent un rôle important dans le développement de la théorie des équations différentielles et intégrales [17].

L'une des inégalités les plus répandues est l'inégalité de Gronwall [24] qui a toujours été attirant de nombreux scientifiques en raison de ses applications dans de nombreux domaines des mathématiques. Dans [52], une inégalité de Gronwall généralisée avec application sur une équation différentielle fractionnaire impliquant des dérivées de Riemann-Liouville a été considérée. Alors que dans [45], l'inégalité de Gronwall a été prouvée pour la dérivée fractionnaire de Hadamarad et dans [2] elle a été obtenue pour les opérateurs fractionnaires. D'autres types d'inégalités ont été considérés dans [3,4].

Dans ce travail, nous présentons une légère généralisation de l'inégalité de Gronwall qui peut être utilisée dans une équation différentielle fractionnaire. Utiliser l'inégalité, nous étudions la dépendance de la solution sur l'ordre et la condition initiale d'équation différentielle fractionnaire avec des dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville.

Cette mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la façon suivante :

Chapitre 1 : Le chapitre 1 est consacré pour les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires aux sens de Riemann-Liouville et Caputo et les liens entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés complémentaires ainsi et quelques définitions des fonctions spéciales utiles : la fonction gamma d'Euler, la fonction bêta, la fonction de Mittag-Leffler.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous présentons quelques types d'inégalités de Gronwall.

Chapitre 3 : Le chapitre 3 a pour but, établir une inégalité intégrale qui peut être utilisée dans une équation différentielle fractionnaire.

Chapitre 1

Calculs fractionnaire

Dans ce chapitre, nous présentons des fonctions importantes dans la théorie du calcul fractionnaire, qui permettent en général de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire. Et on définit l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire et leurs propriétés.

1.1 Fonctions spécifiques

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelques propriétés de la fonction Gamma d'Euler, la fonction Bêta et de la fonction de Mittag-Leffler.

1.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(\alpha)$ qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexes à parties réelles positives).

Définition 1.1.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt. \quad (1.1)$$

En utilisant les relations de récursion que nous pouvons obtenir des formules :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha),$$

en particulier

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!, \forall \alpha \in \mathbb{N}.$$

Comme conséquence de cette propriété on a :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!, \forall \alpha \in \mathbb{N}.$$

Ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralise la notion de factoriel.

Exemple 1.1.1 : On a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt = 1,$$

et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \exp(-t) dt,$$

posons : $t = x^2$ alors $dt = 2x dx$. Donc :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx,$$

pour calculer cette intégrale posons

$$A = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx,$$

Prenons

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{+\infty} \exp(-y^2) dy \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx, \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp-(x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Le calcul est plus simple à réaliser qu'on effectue les coordonnées polaires

$$A^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} r \exp(-r^2) dr d\theta = \frac{\pi}{4},$$

alors

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Lemme 1.1.1 *La fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* , (resp holomorphe sur le demi plan $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$*

$$\Gamma^{(k)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{\alpha-1} \exp(-t) dx.$$

Proposition 1.1.1 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $t > 0, n \in \mathbb{N}$, on a :*

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
2. $\Gamma(0) = \infty$.
3. $\Gamma(n + 1) = (n)!$.
4. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Preuve 1 1. Représentons $\Gamma(\alpha + 1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties,

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} t^\alpha \exp(-t) dt, \\ &= [-t^\alpha \exp(-t)]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt, \\ &= \alpha\Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

D'où la relation dite de récurrence.

2. De (1.1) on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha}, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Gamma(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \infty. \end{aligned}$$

3. Il suffit d'appliquer (1.1) pour $\alpha = n$,

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^{+\infty} t^n \exp(-t) dt,$$

intégrons par partie n fois. on obtient :

$$\Gamma(n + 1) = n(n - 1)(n - 2) \dots 1 = n!.$$

4. On va démontrer la formule $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$, par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.

* Pour $n = 0$; on a $\Gamma(0 + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

** Supposons que la formule est vérifiée pour $(n - 1)$ et considérons n . C'est à dire que

$$\Gamma((n - 1) + \frac{1}{2}) = \frac{(2(n - 1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!},$$

est vérifié. Alors :

$$\begin{aligned} \Gamma(n + \frac{1}{2}) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right), \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{(2(n - 1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!}, \\ &= \left(\frac{2n - 1}{2}\right) \frac{(2n - 2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!}, \\ &= \frac{2n}{2n} \frac{(2n - 1)}{2} \frac{(2n - 2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!}, \\ &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n .

Corollaire 1.1.1 La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entiers par la formule :

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1)}, 0 \leq \alpha + n \leq 1.$$

1.1.2 La fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction dite bêta au lieu d'une certaine combinaison de valeurs de la fonction gamma.

La fonction bêta est généralement définie par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1 - \tau)^{\beta-1} d\tau, \quad (Re(\alpha) > 0, \quad Re(\beta) > 0). \quad (1.2)$$

Pour établir la relation entre la fonction Gamma définie par (1.1) et la fonction bêta (1.6), nous utiliserons la transformée de Laplace.

Considérons l'intégrale suivante :

$$h_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^t \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau. \quad (1.3)$$

De toute évidence, $h_{\alpha,\beta}(t)$ est une convolution des fonctions $t^{\alpha-1}$ et $t^{\beta-1}$ et

$$h_{\alpha,\beta}(1) = B(\alpha, \beta).$$

Parce que la transformée de Laplace d'une convolution de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Laplace, on obtient :

$$H_{\alpha,\beta}(s) = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{s^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{s^{\alpha+\beta}}, \quad (1.4)$$

où $H_{\alpha,\beta}(s)$ est la transformée de Laplace de la fonction $h_{\alpha,\beta}(t)$.

D'autre part, puisque $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ est une constante, il est possible de restaurer la fonction originale $h_{\alpha,\beta}(t)$ par la transformée inverse de Laplace du côté droit de (1.4). En raison de l'unicité de la transformation de Laplace, nous obtenons donc :

$$h_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1}, \quad (1.5)$$

et en prenant $t = 1$ on obtient l'expression suivante pour la fonction bêta :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (1.6)$$

d'où il suit que

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha). \quad (1.7)$$

La définition de la fonction bêta (1.6) n'est valide que pour ($Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$). La relation (1.8) fournit la continuation analytique de la fonction bêta pour l'ensemble du plan complexe, si nous avons fonction gamma continuellement analytique.

Avec l'aide de la fonction bêta, nous pouvons établir la relation importante suivante pour la fonction gamma, cette relation est :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}. \quad (1.8)$$

1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler joue un rôle très important. Cette importance est réalisée au cours des dix-huit dernières années en raison de son implication directe dans les problèmes de la physique, de la biologie, de l'ingénierie et des sciences appliquées. La fonction de Mittag-Leffler se produit naturellement comme la solution des équations différentielles d'ordre fractionnaire et des équations intégrales d'ordre fractionnaire.

Définition et relation avec d'autres fonctions

La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 et désignée par la fonction suivante :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0). \quad (1.9)$$

La fonction à deux paramètres du type Mittag-Leffler a en effet été introduite par Agarwal, elle est définie par un développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z, \beta \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0). \quad (1.10)$$

Quand $\beta = 1$, $E_{\alpha,\beta}(z)$ coïncide avec la fonction de Mittag-Leffler (1.9) :

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) \quad (z \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 1).$$

Il résulte de la définition (1.14) que :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (1.11)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}. \quad (1.12)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}. \quad (1.13)$$

Et en général

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right\}. \quad (1.14)$$

Le sinus hyperbolique et le cosinus sont aussi des cas particuliers de la fonction de Mittag-Leffler

(1.14) :

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z. \quad (1.15)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh z}{z}. \quad (1.16)$$

Les fonctions hyperboliques d'ordre n , qui sont des généralisations du sinus hyperbolique et du cosinus, peuvent aussi être exprimées en fonction de la fonction Mittag-Leffler :

$$h_r(z, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(z^n), \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (1.17)$$

ainsi que les fonctions trigonométriques de l'ordre n , qui sont des généralisations des fonctions sinus et cosinus :

$$K_r(z, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(-z^n), \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (1.18)$$

En utilisant [33. formule 1.8.5] nous obtenons :

$$E_{1/2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z), \quad (1.19)$$

où $\operatorname{erfc}(z)$ est le complément de fonction d'erreur défini par :

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (1.20)$$

Dérivées de la fonction de Mittag-Leffler

Quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les formules de différenciation suivantes sont valables pour la fonction

$E_n(\lambda z^n)$:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_n(\lambda z^n) = \lambda E_n(\lambda z^n), \quad (n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}), \quad (1.21)$$

et

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{n-1} E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right) \right] = \frac{(-1)^n \lambda}{z^{n+1}} E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right), \quad (z \neq 0; \quad n \in \mathbb{N}; \quad \lambda \in \mathbb{C}). \quad (1.22)$$

Comme la fonction $E_\alpha(z)$ de Mittag-Leffler, $E_{\alpha,\beta}(z)$ est une fonction entière de z et satisfait les formules de différenciation suivantes généralisant celles de (1.21) et (1.22) :

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda z^n) \right] = z^{\beta-n-1} E_{n,\beta-n}(\lambda z^n), \quad (n \in \mathbb{N}; \quad \lambda \in \mathbb{C}), \quad (1.23)$$

et

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{n-\beta} E_{n,\beta} \left(\frac{\lambda}{z^n} \right) \right] = \frac{(-1)^n \lambda}{z^{n+\beta}} E_{n,\beta} \left(\frac{\lambda}{z^n} \right), \quad (z \neq 0; \quad n \in \mathbb{N}; \quad \lambda \in \mathbb{C}). \quad (1.24)$$

1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous donnons les définitions des intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville et des dérivées fractionnaires sur un intervalle fini de la droite réelle et nous présentons certaines de leurs propriétés dans des espaces de fonctions sommables et continues. Nous allons commencer par :

1.2.1 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1 Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$). Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville $I_{a^+}^\alpha x$ et $I_{b^-}^\alpha x$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$) sont définies par :

$$(I_{a^+}^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad (t > a; \quad Re(\alpha) > 0), \quad (1.25)$$

et

$$(I_{b^-}^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad (t < b; \quad Re(\alpha) > 0), \quad (1.26)$$

respectivement. Ici, $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma (1.1). Ces intégrales sont appelées intégrales fractionnaires à gauche et à droite.

Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les définitions (1.25) et (1.26) coïncident avec les n -ièmes intégrales de la forme :

$$\begin{aligned} (I_{a^+}^{(n)} x)(t) &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} ds_3 \dots \int_a^{s_{n-1}} x(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} x(s) ds, \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned} \quad (1.27)$$

et

$$\begin{aligned} (I_{b^-}^{(n)} x)(t) &= \int_t^b ds_1 \int_{s_1}^b ds_2 \int_{s_2}^b ds_3 \dots \int_{s_{n-1}}^b x(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (s-t)^{n-1} x(s) ds, \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

L'intégrale fractionnaire de la fonction $(t-a)^{\beta-1}$

On peut vérifier directement que les opérateurs d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville (1.25) et (1.26) des fonctions de puissance $(t-a)^{\beta-1}$ et $(b-t)^{\beta-1}$ donnent des fonctions de puissance de même forme.

Propriété 1.2.1 *Si $Re(\alpha) > 0$ et $\beta \in \mathbb{C}$ ($Re(\beta) > 0$), alors :*

$$\left(I_{a^+}^\alpha (s-a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}, \quad (1.29)$$

et

$$\left(I_{a^+}^\alpha (b-s)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}. \quad (1.30)$$

La propriété de semi-groupe des opérateurs d'intégration fractionnaires $I_{a^+}^\alpha$ et $I_{b^-}^\alpha$ est donnée par le résultat suivant.

Lemme 1.2.1 *Si $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$, alors les équations :*

$$\left(I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta x \right) (t) = \left(I_{a^+}^{\alpha+\beta} x \right) (t), \quad \text{et} \quad \left(I_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\beta x \right) (t) = \left(I_{b^-}^{\alpha+\beta} x \right) (t), \quad (1.31)$$

sont satisfaites pour presque tous les points $t \in [a, b]$ pour $x(t) \in L^p(]a, b[)$, ($1 \leq p \leq \infty$). Si $\alpha + \beta > 1$, alors les relations dans (1.31) sont valables pour tout point de $[a, b]$.

1.2.2 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.2.2 *Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche ($D_{a^+}^\alpha x$) et à droite ($D_{b^-}^\alpha x$) d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$) d'une fonction intégrable x sont définies par :*

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^\alpha x)(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left[\left(I_{a^+}^{n-\alpha} x \right) (t) \right], \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} x(s) ds, \end{aligned} \quad (1.32)$$

et

$$\begin{aligned} (D_{b-}^{\alpha} x)(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \left[(I_{b-}^{n-\alpha} f)(t) \right], \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} x(s) ds, \end{aligned} \quad (1.33)$$

où $n = [Re(\alpha)] + 1$, et $[Re(\alpha)]$ désigne la partie entière du nombre réel $Re(\alpha)$.

En particulier, quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} (D_{a+}^0 x)(t) &= (D_{b-}^0 x)(t) = x(t), \quad D_{a+}^n x(t) = x^{(n)}(t) \\ \text{et} \quad (D_{b-}^n x)(t) &= (-1)^n x^{(n)}(t), \end{aligned} \quad (1.34)$$

où $x^{(n)}(t)$ est la dérivée habituelle de $x(t)$ d'ordre n . Si $Re(\alpha) = 0$ ($\alpha \neq 0$).

Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

On peut vérifier directement que les opérateurs de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville (1.32) des fonctions de puissance $(t-a)^{\beta-1}$ donne des fonctions de puissance de même forme.

Propriété 1.2.2 Si $Re(\alpha) \geq 0$ et $\beta \in \mathbb{C}$ ($Re(\beta) > 0$), alors :

$$\left(D_{a+}^{\alpha} (s-a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \quad (1.35)$$

En particulier, si $\beta = 1$ et $Re(\alpha) \geq 0$, alors les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'une constante ne sont en général pas égal à zéro :

$$(D_{a+}^{\alpha} 1)(t) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (0 < Re(\alpha) < 1). \quad (1.36)$$

Composition avec les intégrales fractionnaires

Lemme 1.2.2 Si $Re(\alpha) > 0$ et $x \in L^p([a, b])$ ($1 \leq p \leq \infty$), alors :

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} x)(t) = x(t) \quad \text{et} \quad (D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} x)(t) = x(t), \quad (1.37)$$

presque partout dans $[a, b]$.

Ce qui signifie que l'opérateur de différenciation fractionnaire de Riemann-Liouville est à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville du même ordre α .

Propriété 1.2.3 *Si $Re(\alpha) > Re(\beta) > 0$, alors, pour $x(t) \in L^p([a, b])$ ($1 \leq p \leq \infty$),*

$$\left(D_{a^+}^\beta I_{a^+}^\alpha x\right)(t) = \left(I_{a^+}^{\alpha-\beta} x\right)(t) \quad \text{et} \quad \left(D_{b^-}^\beta I_{b^-}^\alpha x\right)(t) = \left(I_{b^-}^{\alpha-\beta} x\right)(t). \quad (1.38)$$

En particulier, quand $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $Re(\alpha) > k$, alors :

$$\left(D_{a^+}^k I_{a^+}^\alpha x\right)(t) = \left(I_{a^+}^{\alpha-k} x\right)(t) \quad \text{et} \quad \left(D_{b^-}^k I_{b^-}^\alpha x\right)(t) = (-1)^k \left(I_{b^-}^{\alpha-k} x\right)(t). \quad (1.39)$$

La composition de l'opérateur d'intégration fractionnaire $I_{a^+}^\alpha$ avec l'opérateur de différenciation fractionnaire $D_{a^+}^\alpha$ est donnée par le résultat suivant.

Lemme 1.2.3 *Soit $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$,*

$$\left(I_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\alpha x\right)(t) = x(t) - \sum_{j=1}^n \frac{\left(I_{a^+}^{n-\alpha} x\right)^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (t - a)^{\alpha-j}, \quad (1.40)$$

est vérifiée presque partout dans $[a, b]$.

La propriété (1.40) est un cas particulier d'une propriété plus générale :

$$I_{a^+}^\alpha \left(D_{a^+}^\beta x(t)\right) = D_{a^+}^{\beta-\alpha} x(t) - \sum_{j=1}^m \left[D^{\beta-j} x(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha - j + 1)}, \quad (0 \leq k-1 \leq \beta < k). \quad (1.41)$$

Composition avec des dérivés d'ordre entier

La composition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec des dérivées d'ordre entier apparaît dans plusieurs problèmes appliqués.

Propriété 1.2.4 *Soit $Re(\alpha) \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ et $D = \frac{d}{dt}$.*

Si les dérivées fractionnaires $(D_{a^+}^\alpha x)(t)$ et $(D_{a^+}^{\alpha+m} x)(t)$ existent, alors :

$$\left(D^m D_{a^+}^\alpha x\right)(t) = \left(D_{a^+}^{\alpha+m} x\right)(t), \quad (1.42)$$

et

$$D_{a^+}^\alpha \left(D^m x(t)\right) = D_{a^+}^{\alpha+m} x(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{x^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha-k}}{\Gamma(j-\alpha-k+1)}. \quad (1.43)$$

Composition avec des dérivés fractionnaires

Propriété 1.2.5 Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que : $n - 1 < \alpha \leq n$, $m - 1 < \beta \leq m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) et $\alpha + \beta < n$, et soit $x \in L^1([a, b])$. Alors nous avons :

$$\left(D_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\beta x\right)(t) = \left(D_{a^+}^{\alpha+\beta} x\right)(t) - \sum_{j=1}^m \left(D_{a^+}^{\beta-j} x\right)(a) \frac{(t-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}. \quad (1.44)$$

1.2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, à cause de ses applications dans les Mathématiques pures et appliquées. Cependant, étant donnée que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle et que les conditions initiales du problème de Cauchy sont exprimées par des dérivées d'ordre fractionnaire, Caputo propose une autre approche où la dérivée de la constante est nulle et que les conditions initiales sont exprimées comme dans le cas classique par des dérivées d'ordre entier.

Définition 1.2.3 Les dérivées fractionnaires $({}^C D_{a^+}^\alpha x)(t)$ et $({}^C D_{b^-}^\alpha x)(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) \geq 0$) sur $[a, b]$ sont définies via les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (1.32), (1.33) par :

$$({}^C D_{a^+}^\alpha x)(t) := \left(D_{a^+}^\alpha \left[x(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k \right] \right)(t), \quad (1.45)$$

et

$$({}^C D_{b^-}^\alpha x)(t) := \left(D_{b^-}^\alpha \left[x(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(b)}{k!} (b-s)^k \right] \right)(t), \quad (1.46)$$

respectivement, où

$$n = \alpha \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n = [\text{Re}(\alpha)] + 1 \quad \text{si } \alpha \notin \mathbb{N}. \quad (1.47)$$

Ces dérivées sont appelées dérivées fractionnaires de Caputo à gauche et à droite d'ordre α .

Définition 1.2.4 Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $x(t)$ est une fonction pour laquelle existent les dérivées fractionnaires de Caputo $({}^C D_{a^+}^\alpha x)(t)$ et $({}^C D_{b^-}^\alpha x)(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) \geq 0$) ainsi que les dérivées

fractionnaires de Riemann-Liouville $(D_{a+}^\alpha x)(t)$ et $(D_{b-}^\alpha x)(t)$, alors :

$$({}^C D_{a+}^\alpha x)(t) = (D_{a+}^\alpha x)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1), \quad (1.48)$$

et

$$({}^C D_{b-}^\alpha x)(t) = (D_{b-}^\alpha x)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b - t)^{k-\alpha}, \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1). \quad (1.49)$$

En particulier, lorsque $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, les relations (1.48) et (1.49) prennent les formes suivantes :

$$({}^C D_{a+}^\alpha x)(t) = (D_{a+}^\alpha x)(t) - \frac{x(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}, \quad (1.50)$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha x)(t) = (D_{b-}^\alpha x)(t) - \frac{x(b)}{\Gamma(1 - \alpha)} (b - t)^{-\alpha}. \quad (1.51)$$

Propriété 1.2.6 Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors les dérivées fractionnaires de Caputo (1.48) et (1.49) coïncident avec les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (1.32) et (1.33) dans les cas suivants :

$$({}^C D_{a+}^\alpha x)(t) = (D_{a+}^\alpha x)(t), \quad (1.52)$$

si $x(a) = x'(a) = \dots = x^{(n-1)}(a) = 0$, $(n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1)$; et

$$({}^C D_{b-}^\alpha x)(t) = (D_{b-}^\alpha x)(t), \quad (1.53)$$

si $x(b) = x'(b) = \dots = x^{(n-1)}(b) = 0$, $(n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1)$.

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et la dérivée usuel $x^{(n)}(t)$ d'ordre n existe, alors $({}^C D_{a+}^\alpha x)(t)$ coïncide avec $x^{(n)}(t)$, tandis que $({}^C D_{b-}^\alpha x)(t)$ coïncide avec $x^{(n)}(t)$ avec l'exactitude au multiplicateur constant $(-1)^n$:

$$({}^C D_{a+}^n x)(t) = x^{(n)}(t), \quad ({}^C D_{b-}^n x)(t) = (-1)^n x^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (1.54)$$

Les dérivées fractionnaires de Caputo $({}^C D_{a+}^\alpha x)(t)$ et $({}^C D_{b-}^\alpha x)(t)$ sont définies pour les fonctions $x(t)$ pour lesquelles les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville des côtés droits de (1.48) et (1.49) existent. En particulier, elles sont définies pour $x(t)$ appartenant à l'espace $AC^n([a, b])$ des fonctions absolument continues.

Théorème 1.2.1 Soit $Re(\alpha) \geq 0$ et soit n donnée par (1.47). Si $x \in AC^n([a, b])$, alors les dérivés fractionnaires de Caputo $({}^C D_{a^+}^\alpha x)(t)$ et $({}^C D_{b^-}^\alpha x)(t)$ existent presque partout sur $[a, b]$.

a) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, $({}^C D_{a^+}^\alpha x)(t)$ et $({}^C D_{b^-}^\alpha x)(t)$ sont représentés par :

$$({}^C D_{a^+}^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{x^{(n)}(s)}{(t - s)^{\alpha - n + 1}} ds = I_{a^+}^{n - \alpha} D^n x(t), \quad (1.55)$$

et

$$({}^C D_{b^-}^\alpha x)(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^b \frac{x^{(n)}(s)}{(s - t)^{\alpha - n + 1}} ds = (-1)^n I_{b^-}^{n - \alpha} D^n x(t), \quad (1.56)$$

respectivement, où $D = d/dx$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$. En particulier, quand $0 < Re(\alpha) < 1$ et $x(t) \in AC([a, b])$,

$$({}^C D_{a^+}^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t \frac{x'(s)}{(t - s)^\alpha} ds = \left(I_{a^+}^{1 - \alpha} Dx \right) (t), \quad (1.57)$$

et

$$({}^C D_{b^-}^\alpha x)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_t^b \frac{x'(s)}{(s - t)^\alpha} ds = -\left(I_{b^-}^{1 - \alpha} Dx \right) (t). \quad (1.58)$$

b) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors $({}^C D_{a^+}^n x)(t)$ et $({}^C D_{b^-}^n x)(t)$ sont représentés par (1.54). En particulier,

$$\left({}^C D_{a^+}^0 x \right) (t) = \left({}^C D_{b^-}^0 x \right) (t) = x(t). \quad (1.59)$$

Remarque 1.2.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]m - 1, m[$ s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre m suivit d'une dérivation classique d'ordre m , alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

Dérivées fractionnaires au sens de Caputo de quelques fonctions usuelles

Propriété 1.2.7 Soit $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ et soit n donnée par (1.47). Alors :

$${}^C D_{a^+}^\alpha (t - a)^{\beta - 1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha - 1}, \quad (Re(\beta) > n), \quad (1.60)$$

$${}^C D_{b^-}^\alpha (b - t)^{\beta - 1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (b - t)^{\beta - \alpha - 1}, \quad (Re(\beta) > n), \quad (1.61)$$

et

$${}^C D_{a^+}^\alpha (t-a)^k = 0 \quad \text{et} \quad {}^C D_{a^+}^\alpha (b-t)^k = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (1.62)$$

En particulier,

$${}^C D_{a^+}^\alpha 1 = 0 \quad \text{et} \quad {}^C D_{b^-}^\alpha 1 = 0. \quad (1.63)$$

Compositions avec l'intégrale fractionnaire

Lemme 1.2.4 [33] Soit $Re(\alpha) > 0$ et soit $x(t) \in L^\infty([a, b])$ ou $x(t) \in C([a, b])$.

a) Si $Re(\alpha) \notin \mathbb{N}$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$$({}^C D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha x)(t) = x(t) \quad \text{et} \quad ({}^C D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha x)(t) = x(t). \quad (1.64)$$

b) Si $Re(\alpha) \in \mathbb{N}$ et $Im(\alpha) \neq 0$, alors :

$$({}^C D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha x)(t) = x(t) - \frac{(I_{a^+}^\alpha x)(a^+)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{n-\alpha}, \quad (1.65)$$

$$({}^C D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha x)(t) = x(t) - \frac{(I_{b^-}^\alpha x)(b^-)}{\Gamma(n-\alpha)} (b-t)^{n-\alpha}. \quad (1.66)$$

Lemme 1.2.5 [33] Soit $Re(\alpha) > 0$, et soit n donnée par (1.47), si $x(t) \in AC^n([a, b])$ ou $x \in C^n([a, b])$ alors :

$$(I_{a^+}^\alpha {}^C D_{a^+}^\alpha x)(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a) (t-a)^k}{k!}, \quad (1.67)$$

et

$$(I_{b^-}^\alpha {}^C D_{b^-}^\alpha x)(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{(k)}(b) (b-t)^k}{k!}. \quad (1.68)$$

En particulier, si $0 < Re(\alpha) \leq 1$ et $x \in AC([a, b])$ ou $x \in C([a, b])$, alors :

$$(I_{a^+}^\alpha {}^C D_{a^+}^\alpha x)(t) = x(t) - x(a) \quad \text{et} \quad (I_{b^-}^\alpha {}^C D_{b^-}^\alpha x)(t) = x(t) - x(b). \quad (1.69)$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est l'inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, mais il n'est pas un inverse à droite.

1.2.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1. **Linéarité** La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t).$$

2. **La règle de Leibniz** Pour n entier on a :

$$\frac{d^n(fg)}{dt^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t).$$

La généralisation de cette formule nous donne :

$$D^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{\alpha-k} g(t) + R_n^\alpha(t),$$

où $n \geq \alpha + 1$ et

$$R_n^\alpha(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi) (\tau - \xi)^n d\xi,$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^\alpha(t) = 0$. Si f et g sont continues dans $[a, t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{\alpha-k} g(t).$$

D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Chapitre 2

Inégalités Intégrales de Type Gronwall

L'inégalité de Gronwall joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles et intégrales de Volterra.

Dans ce chapitre, nous présentons les différentes généralisations de l'inégalité de Gronwall .

2.1 Forme standard d'inégalité de Gronwall

Dans cette section, nous donnons la forme standard d'inégalité de Gronwall qui est définie dans le théorème suivant.

Théorème 2.1.1 *soient x, h et k sont des fonctions réelles continues définies sur $[a, b]$ $k(t) \geq 0$ pour $t \in [a, b]$. Supposons que sur $[a, b]$ nous avons l'inégalité :*

$$x(t) \leq h(t) + \int_a^t k(s)x(s)ds. \quad (2.1)$$

Alors

$$x(t) \leq h(t) + \int_a^t k(s)h(s) \exp \left[\int_s^t k(u)du \right] ds, \quad (2.2)$$

dans $[a, b]$.

Preuve 2 *Considérons la fonction $y(t) := \int_a^t k(u)x(u)du$, $t \in [a, b]$. Ensuite nous avons $y(a) = 0$ et*

$$\begin{aligned} y'(t) &= k(t)x(t) \leq k(t)h(t) + k(t) \int_a^t k(s)x(s)ds, \\ &= k(t)h(t) + k(t)y(t), \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Par multiplication avec $\exp(-\int_a^t k(s)ds) > 0$, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(y(t) \exp \left(- \int_a^t k(s)ds \right) \right) \leq h(t)k(t) \exp \left(- \int_a^t k(s)ds \right).$$

Par intégration sur $[a, t]$, on obtient :

$$y(t) \exp \left(- \int_a^t k(s)ds \right) \leq \int_a^t h(u)k(u) \exp \left(- \int_a^t k(s)ds \right) du,$$

d'où les résultats

$$y(t) \leq \int_a^t h(u)k(u) \exp \left(\int_u^t k(s)ds \right) du, \quad t \in [a, b].$$

Depuis $x(t) \leq h(t) + y(t)$, le théorème est ainsi prouvé .

Ensuite, nous présenterons quelques corollaires importants résultant du théorème.

Corollaire 2.1.1 si h est différentiable, il s'ensuit de (2.1) que :

$$x(t) \leq h(a) \left(\int_a^t k(u)du \right) + \int_a^t \exp \left(\int_s^t k(u)du \right) h'(s)ds, \quad (2.3)$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Preuve 3 Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} - \int_a^t h(s) \frac{d}{ds} \left(\exp \left(\int_s^t k(u)du \right) \right) ds &= -h(s) \exp \left(\int_s^t k(u)du \right) \Big|_a^t + \int_a^t \exp \left(\int_s^t k(u)du \right) h'(s)ds, \\ &= -h(t) + h(a) \exp \left(\int_a^t k(u)du \right) + \int_a^t \exp \left(\int_s^t k(u)du \right) h'(s)ds, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [a, b]$.

D'où

$$h(t) + \int_a^t h(u)k(u) \exp \left(\int_u^t k(s)ds \right) du = h(a) \exp \left(\int_a^t k(u)du \right) + \int_a^t \exp \left(\int_s^t k(u)du \right) h'(s)ds, \quad t \in [a, b],$$

et le corollaire est prouvé.

Corollaire 2.1.2 *si h est constant, alors de*

$$x(t) \leq h + \int_a^t k(s)x(s)ds, \quad (2.4)$$

il s'ensuit que :

$$x(t) \leq h \exp \left[\int_a^t k(u)du \right]. \quad (2.5)$$

Une autre généralisation bien connue de l'inégalité de Gronwall est le résultat suivant due à I. Bihari ([13], [11, p. 26]).

Théorème 2.1.2 *soit $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue qui satisfait l'inégalité :*

$$x(t) \leq M + \int_a^t h(s)w(x(s))ds, \quad t \in [a, b], \quad (2.6)$$

où $M \geq 0, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^$ est continue et augmentation monotone.*

Puis l'estimation :

$$x(t) \leq \phi^{-1} \left(\phi(M) + \int_a^t h(s)ds \right), \quad t \in [a, b], \quad (2.7)$$

détient, où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donné par :

$$\phi(u) := \int_{u_0}^u \frac{ds}{w(s)}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Preuve 4 *On prendre $y(t) := \int_a^t w(x(s))h(s)ds, t \in [a, b]$, on a $y(a) = 0$, et par la relation (2.6), on obtient :*

$$y'(t) \leq w(M + y(t))h(t), \quad t \in [a, b].$$

Par intégration sur $[a, t]$ on a

$$\int_0^{y(t)} \frac{ds}{w(M + s)} \leq \int_a^t h(s)ds + \phi(M), \quad t \in [a, b],$$

c'est,

$$\phi(y(t) + M) \leq \int_a^t h(s)ds + \phi(M), \quad t \in [a, b],$$

d'où résulte l'estimation (2.7). Enfin, nous présenterons un autre résultat classique qui est important dans la théorie qualitative des équations différentielles pour les opérateurs monotones dans les espaces de Hilbert ([11, p. 27], [14, Appendice]).

Théorème 2.1.3 soit $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui satisfait la relation :

$$\frac{1}{2}x^2(t) \leq \frac{1}{2}x_0^2 + \int_a^t h(s)x(s)ds, t \in [a, b], \quad (2.9)$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et h sont continus positifs dans $[a, b]$. Puis l'estimation

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_a^t h(s)ds, t \in [a, b], \quad (2.10)$$

tient.

Preuve 5 Soit y_ϵ la fonction donnée par :

$$y_\epsilon(t) = \frac{1}{2}(x_0^2 + \epsilon^2) + \int_a^t h(s)x(s)ds, t \in [a, b],$$

où $\epsilon > 0$ Par la relation (2.9), nous avons :

$$x^2(t) \leq y_\epsilon, t \in [a, b], \quad (2.11)$$

depuis $y'_\epsilon(t) = h(t)|x(t)|, t \in [a, b]$,on obtient :

$$y'_\epsilon(t) \leq \sqrt{2y_\epsilon(a)} + \int_a^t h(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Par intégration sur l'intervalle $[a, t]$, on peut déduire que :

$$\sqrt{2y_\epsilon(t)} \leq \sqrt{2y_\epsilon(a)} + \int_a^t h(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Par relation (2.11), on obtient :

$$|x(t)| \leq |x_0| + \epsilon + \int_a^t h(s)ds, t \in [a, b],$$

pour chaque $\epsilon > 0$, ce qui implique (2.10) et le lemme est donc prouvé .

2.2 Autres Inégalités de Type Gronwall

Dans cette section, nous donnons diverses généralisations de l'inégalité de Gronwall impliquant une fonction inconnue d'une seule variable.

A. Filatov [21] a prouvé la généralisation linéaire suivante de Gronwall inégalité.

Théorème 2.2.1 Soit $x(t)$ une fonction positive continue telle que :

$$x(t) \leq a + \int_{t_0}^t [b + cx(s)] ds, \quad \text{pour } t \geq t_0,$$

où $a \geq 0, b \geq 0, c > 0$. Alors pour $t \geq t_0$, $x(t)$ satisfait :

$$x(t) \leq \left(\frac{b}{c}\right) (\exp(c(t - t_0)) - 1) + a \exp(c(t - t_0)).$$

K.V. Zadiraka [53] (voir aussi Filatov et Sarova [22, p. 15]) a démontré ce qui suit :

Théorème 2.2.2 Soit la fonction continue $x(t)$ satisfaite :

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| \exp(-\alpha(t - t_0)) + \int_{t_0}^t (a|x(s)| + b) e^{-\alpha(t-s)} ds,$$

où a, b et α sont des constantes positives. Puis :

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| \exp(-\alpha(t - t_0)) + b(\alpha - a)^{-1} (1 - \exp(-(\alpha - a)(t - t_0))).$$

Théorème 2.2.3 soit $x(t)$ une fonction continue qui satisfait :

$$x(t) \leq x(\tau) + \int_{\tau}^t a(s)x(s) ds,$$

pour tout t et τ dans (a, b) où $a(t) \geq 0$ et continue. Puis :

$$x(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \leq x(t) \leq x(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right),$$

pour tout $t \geq t_0$.

Les deux théorèmes suivants ont été donnés dans le livre de Filatov et Sarova [22, pp. 8-9 et 18-20] et sont dus à G.I. Andircandirov [15] :

Théorème 2.2.4 soit $x(t)$ une fonction continue et positive sur $[0, h]$ et satisfaite :

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t [a_1(s)x(s) + b(s)] ds,$$

où $a_1(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions intégrables positives sur le même intervalle avec $a(t)$ borné là. Ensuite, le $[0, h]$

$$x(t) \leq \int_0^t b(s) ds + \sup_{0 \leq t \leq h} |a(t)| \exp\left(\int_0^t a_1(s) ds\right).$$

Le deuxième résultat est matérialisé par ce qui suit.

Théorème 2.2.5 Soit $x(t)$ une fonction continue positive sur $[0, \infty)$ tel que :

$$x(t) \leq ct^\alpha + mt^\beta \int_0^t \frac{x(s)}{s} ds,$$

où $c > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$. Alors :

$$x(t) \leq ct^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^n t^{n\beta}}{\alpha(\alpha + \beta) + \dots + (\alpha + (n-1)\beta)} \right).$$

Un résultat plus général a été donné dans Willett [48] et Harlamov [26]. Nous donnerons ici une version étendue due à Beesack [12, pp. 3-4].

Théorème 2.2.6 Soient x et k continues et a et b fonctions Riemann intégrables sur $J = [\alpha, \beta]$ avec b et k positives sur J .

(i) Si

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_{\alpha}^t k(s)x(s)ds, t \in J, \quad (2.12)$$

alors

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_{\alpha}^t a(s)k(s) \exp \left(\int_s^t b(r)k(r)dr \right) ds, t \in J. \quad (2.13)$$

De plus, l'égalité vaut en (2.13) pour sous-intervalle $J_1 = [\alpha, \beta_1]$ de J si l'égalité vaut en (2.12) pour $t \in J_1$.

(ii) Le résultat reste valide si \leq est remplacé par \geq dans les deux (2.12) et (2.13).

(iii) (i) et (ii) restent valides si \int_{α}^t elles sont remplacées par \int_t^{β} et \int_s^t par \int_t^s tout au long.

Preuve 6 (voir [38, p. 357])

Cette preuve est typique de celles des inégalités de le type Gronwall. Nous fixons :

$$U(t) = \int_{\alpha}^t k(s)x(s)ds, \text{ pour que } U(\alpha) = 0, \text{ et } U'(t) = k(t)x(t).$$

Par conséquent $U'(s) \leq a(s)k(s) + b(s)k(s)U(s)$. Multiplication par le facteur d'intégration $\exp \left(\int_s^t b(r)k(r)dr \right)$ et l'intégration de α à t donne :

$$U(t) \leq \int_{\alpha}^t a(s)k(s) \exp \left(\int_s^t b(r)k(r)dr \right) ds, t \in J. \quad (2.14)$$

Depuis $b \geq 0$ la substitution de (2.14) en (2.12) donne (2.13). Les conditions d'égalité sont évidentes et la preuve de (ii) est similaire ou peut se faire par le changement des variables $t \rightarrow -t$.

Remarque 2.2.1 B. Pachpatte [40] a démontré un résultat analogue sur \mathbb{R}^+ et $(-\infty, 0]$.

Théorème 2.2.7 Si

$$x(t) \leq a(t) + a_1(t) \int_{t_1}^t b_1(s)x(s)ds + a_2(t) \sum_{i=2}^n c_i \int_{t_1}^{t_i} b_i(s)x(s)ds,$$

pour $t \in [a, b]$, où $a = t_0 < \dots < t_n = b$, c_i sont des constantes et les fonctions apparaissant sont tous réels, continus et positifs, et si

$$\sum_{i=2}^n c_i \int_{t_1}^{t_i} b_i(t) \left[a_2(t) + a_1(t) \int_{t_1}^t b_1(s)a_2(s) \left(\int_{t_1}^t a_1(r)b_1(r)dr \right) ds \right] dt < 1,$$

alors

$$x(t) \leq K_1(t) + MK_2(t),$$

où

$$K_1(t) = a(t) + a_1(t) \int_{t_1}^t b_i(s)a(s) \exp \left(\int_s^t a_1(r)b_1(r)dr \right) ds,$$

$$K_2(t) = a_2(t) + a_1(t) \int_{t_1}^t b_1(s)a_2(s) \exp \left(\int_s^t a_1(r)b_1(r)dr \right) ds,$$

et

$$M = \left(\sum_{i=2}^n c_i \int_{t_1}^{t_i} b_i(s)K_1(s)ds \right) \left(1 - \sum_{i=2}^n c_i \int_{t_1}^{t_i} b_i(s)K_2(s)ds \right)^{-1}.$$

H. Movljankulov et A. Filatov [39] ont démontré le résultat suivant :

Théorème 2.2.8 Soit $x(t)$ réel, continu et positif tel que pour $t > t_0$

$$x(t) \leq c + \int_{t_0}^t k(t, s)x(s)ds, \quad c > 0,$$

où $k(t, s)$ est une fonction continuellement différentiable en t et continue en s avec $k(t, s) \geq 0$

pour $t \geq s \geq t_0$. Alors :

$$x(t) \leq c \exp \left(\int_{t_0}^t \left(k(s, s) + \int_{t_0}^s \frac{\partial k}{\partial s}(s, r)dr \right) ds \right).$$

Théorème 2.2.9 Soit $x(t)$ réel, continu et positif sur $[c, d]$ tel que :

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_c^t k(t, s)x(s)ds,$$

où $a(t) \geq 0, b(t) \geq 0, k(t, s) \geq 0$ et sont des fonctions continues pour $c \leq s \leq t \leq d$. Alors :

$$x(t) \leq A(t) \exp \left(B(t) \int_c^t K(t, s)ds \right),$$

où $A(t) = \sup_{c \leq s \leq t} a(s), B(t) = \sup_{c \leq s \leq t} b(s), K(t, s) = \sup_{s \leq \sigma \leq t} k(\sigma, s)$.

2.3 Généralisation non linéaire

Dans cette section, nous pouvons considérer diverses généralisations non linéaires de l'inégalité de Gronwall.

Le théorème suivant est prouvé dans Perov [43] :

Théorème 2.3.1 Soit $u(t)$ une fonction positive qui satisfait l'inégalité intégrale :

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t (a(s)u(s) + b(s)u^\alpha(s))ds, \quad c \geq 0, \alpha \geq 0, \quad (2.15)$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions positives continues pour $t \geq t_0$. Pour $0 \leq \alpha < 1$, nous avons :

$$u(t) \leq \left\{ c^{1-\alpha} \exp \left[(1-\alpha) \int_{t_0}^t a(s)ds \right] + (1-\alpha) \int_{t_0}^t b(s) \exp \left[(1-\alpha) \int_s^t a(r)dr \right] ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (2.16)$$

pour $\alpha = 1$

$$u(t) \leq c \exp \left\{ \int_{t_0}^t [a(s) + b(s)]ds \right\}, \quad (2.17)$$

et pour $\alpha > 1$ avec l'hypothèse supplémentaire

$$c < \left\{ \exp \left[(1-\alpha) \int_{t_0}^{t_0+h} a(s)ds \right] \right\}^{\frac{1}{\alpha-1}} \left\{ (\alpha-1) \int_{t_0}^{t_0+h} b(s)ds \right\}^{-\frac{1}{\alpha-1}}, \quad (2.18)$$

nous obtenons aussi pour $t_0 \leq t \leq t_0 + h$, pour $h > 0$,

$$u(t) \leq c \left\{ \exp \left[(1-\alpha) \int_{t_0}^t a(s)ds \right] - c^{-1}(\alpha-1) \int_{t_0}^t b(s) \exp \left[(1-\alpha) \int_s^t a(r)dr \right] ds \right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (2.19)$$

Preuve 7 (voir [38, p. 361])

Pour $\alpha = 1$, nous obtenons l'inégalité linéaire habituelle donc que (2.16) est valide. Supposons maintenant que $0 < \alpha < 1$. Notons v une solution de l'équation intégrale :

$$v(t) = c + \int_{t_0}^t [a(s)v(s) + b(s)v^\alpha(s)]ds, \quad t \geq t_0.$$

Sous forme différentielle, c'est l'équation de Bernoulli :

$$v'(t) = a(t)v(t) + b(t)v^\alpha(t), \quad v(t_0) = c.$$

Ceci est linéaire dans la variable $v^{1-\alpha}$ et peut donc être facilement intégré pour produire $v(t) =$ le côté droit de (2.16).

Pour $\alpha > 1$, nous obtenons à nouveau une équation de Bernoulli et une preuve analogue où nous avons besoin de la condition supplémentaire (2.18) si cette condition doit tenir sur l'intervalle borné $t_0 \leq t \leq t_0 + h$.

Remarque 2.3.1 L'inégalité (2.15) est également considérée dans Willett [49] et Willet et Wong [50]. Pour un résultat connexe, voir Ho [30].

Le théorème suivant est une version modifiée d'un théorème prouvé dans Gamidov [23] (voir aussi [38, p. 361]) :

Théorème 2.3.2 Si

$$u(t) \leq f(t) + c \int_0^t \phi(s)u^\alpha(s)ds,$$

où toutes les fonctions sont continues et positives sur $[0, h]$, $0 < \alpha < 1, c \geq 0$, alors

$$u(t) \leq f(t) + c\xi_0^\alpha \left(\int_0^t \phi^{\frac{1}{1-\alpha}}(s)ds \right)^{1-\alpha},$$

où ξ_0 est la racine unique de $\xi = a + b\xi^\alpha$.

Gamidov [23] a également démontré le résultat suivant :

Théorème 2.3.3 *Si*

$$u(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \phi(s)u^\alpha(s)ds + c_3 \int_0^h \phi(s)u^\alpha(s)ds,$$

$c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, c_3 > 0$, et les fonctions $u(t)$ et $\phi(t)$ sont continues et positif sur $[0, h]$, alors pour

$0 < \alpha < 1$ on a :

$$u(t) \leq \left(\xi_0^{1-\alpha} + c_2(1-\alpha) \int_0^t \phi(s)ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

où ξ_0 est la racine unique de l'équation :

$$\left[\frac{c_2 + c_3}{c_3} \xi + \frac{c_1 c_2}{c_3} \right]^{1-\alpha} - \xi^{1-\alpha} - c_2(1-\alpha) \int_0^h \phi(s)ds = 0.$$

Si $\alpha > 1$ et $c_2(\alpha - 1) \int_0^t \phi(s)ds < c_1^{1-\alpha}$, il existe un intervalle $[0, \delta] \subset [0, h]$ où

$$u(t) \leq \left(c_1^{1-\alpha} - c_2(\alpha - 1) \int_0^t \phi(s)ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Un résultat connexe a été prouvé par B. Stachurska [47] :

Théorème 2.3.4 *Soit les fonctions x, a, b et k continues et positives de $J = [\alpha, \beta]$, et n soit un entier positif ($n \geq 2$) et $\frac{a}{b}$ une fonction croissante. Si*

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_\alpha^t k(s)x^n(s)ds, t \in J, \quad (2.20)$$

alors

$$x(t) \leq a(t) \left\{ 1 - (n-1) \int_\alpha^t k(s)b(s)a^{n-1}(s)ds \right\}^{\frac{1}{1-n}}, \alpha \leq t \leq \beta_n, \quad (2.21)$$

où

$$\beta_n = \sup \left\{ t \in J : (n-1) \int_\alpha^t kba^{n-1}ds < 1 \right\}.$$

Remarque 2.3.2 (Voir [38, p. 363]) L'inégalité (2.20) a été considérée par P. Maroni [37], mais sans l'hypothèse de la monotonie du rapport $\frac{a}{b}$. Il a obtenu deux estimations, une pour $n = 2$ et une autre pour $n \geq 3$. Les deux sont plus compliquées que (2.21). Pour $n = 2$ et $\frac{a}{b}$ non décroissant, le résultat de Starchurska peut être meilleur que celui de Maroni sur de longs intervalles.

2.4 Autres généralisations non linéaires

Dans cette section, nous pouvons considérer des généralisations non linéaires les plus importantes de l'inégalité de Gronwall est celle bien connue de Bihari [13]. Le résultat avait été prouvé sept ans plus tôt par J.P. Lasalle [34].

Théorème 2.4.1 *Soit $u(t)$ et $k(t)$ des fonctions continues positives sur $[c, d]$ et soit a et b des constantes positives. De plus, soit $g(z)$ une fonction positive croissante pour $z \geq 0$. Si*

$$u(t) \leq a + b \int_c^t k(s)g(u(s))ds, \quad t \in [c, d],$$

alors

$$u(t) \leq G^{-1} \left(G(a) + b \int_c^t k(s)ds \right), \quad c \leq t \leq d_1 \leq d,$$

où

$$G(\lambda) = \int_\xi^\lambda \frac{ds}{g(s)}, \quad (\xi > 0, \lambda > 0),$$

et d_1 est défini de telle sorte que

$$G(a) + b \int_c^t k(s)ds,$$

appartient au domaine de G^{-1} pour $t \in [c, d_1]$.

La généralisation suivante de l'inégalité Bihari-Lasalle a été donnée par I. Gyori [25] :

Théorème 2.4.2 *Supposons que $u(t)$ et $\beta(t)$ soient continus et positifs sur $[t_0, \infty)$. Soit $f(t)$, $g(u)$ et $\alpha(t)$ des fonctions différentiables avec f positive, g positive et croissante, et $g\alpha$ positive et décroissante. Supposer que :*

$$u(t) \leq f(t) + \alpha(t) \int_{t_0}^t \beta(s)g(u(s))ds. \quad (2.22)$$

Si

$$f'(t) \left\{ \frac{1}{g(\eta(t))} - 1 \right\} \leq 0, \quad \text{sur } [t_0, \infty), \quad (2.23)$$

pour chaque fonction continue positive η , alors :

$$u(t) \leq G^{-1} \left\{ G(f(t_0)) + \int_{t_0}^t [\alpha(s)\beta(s) + f'(s)] ds \right\}, \quad (2.24)$$

où

$$G(\delta) = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{ds}{g(s)}, \quad \varepsilon > 0, \delta > 0, \quad (2.25)$$

et (2.24) vaut pour toutes les valeurs de t pour lesquelles la fonction :

$$\delta(t) = G[f(t_0)] + \int_{t_0}^t [\alpha(s)\beta(s) + f'(s)] ds,$$

appartient au domaine de la fonction inverse G^{-1} .

Preuve 8 (voir [38, p. 364])

Soit

$$V(t) = f(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)g[u(s)]ds.$$

Puisque g est croissant et α décroissant, on obtient de (2.22) que $g(u(t)) \leq g(V(t))$. De cela nous obtenons :

$$f'(t) + \alpha(t)\beta(t)g[u(t)] \leq \alpha(t)\beta(t)g[V(t)] + f'(t),$$

qui peut être écrit comme :

$$\frac{V'(t)}{g[V(t)]} \leq \alpha(t)\beta(t) + \frac{f'(t)}{g[V(t)]}.$$

En utilisant (2.23), nous obtenons :

$$\frac{V'(t)}{g[V(t)]} \leq \alpha(t)\beta(t) + f'(t).$$

Lors de l'intégration, nous obtenons :

$$G[V(t)] \leq G[f(t_0)] + \int_{t_0}^t [\alpha(s)\beta(s) + f'(s)] ds.$$

Si nous supposons que $\delta(t)$ est dans le domaine de G^{-1} alors nous obtenons le résultat (2.24) puisque $u(t) \leq V(t)$.

Remarque 2.4.1 Notez que le cas spécial $\alpha(t) \equiv 1$ implique déjà le général résultat puisque nous substituons β au produit $\alpha\beta$ et observons que $\alpha(t)\beta(s) \leq \alpha(s)\beta(s)$ pour $s \leq t$.

Chapitre 3

Applications d'inégalité de Gronwall à une équation fractionnaire

Les inégalités intégrales jouent un rôle important dans l'analyse qualitative des solutions aux équations différentielles et intégrales ; La célèbre inégalité de Gronwall connue sous le nom d'inégalité de Gronwall–Bellman–Raid fourni des limites explicites sur les solutions d'une classe d'inégalités intégrales linéaires. Sur la base de motivations diverses, cette inégalité a été étendue et utilisée dans divers contextes.

Dans ce chapitre, On établit une inégalité intégrale qui peut être utilisée dans une équation différentielle fractionnaire. On parle à la dépendance de la solution d'équations différentielles, à la fois sur l'ordre et les conditions initiales.

3.1 Une inégalité intégrale

Dans cette section, nous voulons établir une inégalité intégrale qui peut être utilisée dans une équation différentielle fractionnaire. La preuve est basée sur un argument d'itération .

Théorème 1 *Supposons que $\beta > 0$, $a(t)$ est une fonction non positive localement intégrable sur $0 \leq t < T$ (certains $T \leq +\infty$), et $g(t)$ est une fonction continue positive et croissante définie sur $0 \leq t < T$, $g(t) \leq M$ (constante), et supposons que $u(t)$ soit positif et localement intégrable sur $0 \leq t < T$ avec*

$$u(t) \leq a(t) + g(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s) ds,$$

sur cet intervalle. Alors

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g(t)\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} (t-s)^{n\beta-1} a(s) \right] ds. \quad 0 \leq t < T.$$

Preuve 9 Soit $B\phi(t) = g(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \phi(s) ds, t \geq 0$, pour les fonctions localement intégrables ϕ . Alors

$$u(t) \leq a(t) + Bu(t),$$

implique

$$u(t) \leq \sum_{k=0}^{n-1} B^k a(t) + B^n u(t).$$

Prouvons que

$$B^n u(t) \leq \int_0^t \frac{(g(t)\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} (t-s)^{n\beta-1} u(s) ds, \quad (1)$$

et $B^n u(t) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ pour chaque t dans $0 \leq t < T$. Nous savons que cette relation (1) est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour certains $n = k$. Si $n = k + 1$, alors l'hypothèse d'induction implique :

$$B^{k+1}u(t) = B(B^k u(t)) \leq g(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \left[\int_0^s \frac{(g(s)\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(k\beta)} (s-\tau)^{k\beta-1} u(\tau) d\tau \right] ds.$$

Puisque $g(t)$ n'est pas décroissante, il s'ensuit que

$$B^{k+1}u(t) \leq (g(t))^{k+1} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \left[\int_0^s \frac{(\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(k\beta)} (s-\tau)^{k\beta-1} u(\tau) d\tau \right] ds.$$

En échangeant l'ordre d'intégration, nous avons :

$$\begin{aligned} B^{k+1}u(t) &\leq (g(t))^{k+1} \int_0^t \left[\int_{\tau}^t \frac{(\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(k\beta)} (t-s)^{\beta-1} (s-\tau)^{k\beta-1} ds \right] u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{(g(t)\Gamma(\beta))^{k+1}}{\Gamma((k+1)\beta)} (t-s)^{(k+1)\beta-1} u(s) ds, \end{aligned}$$

où l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t (t-s)^{\beta-1} (s-\tau)^{k\beta-1} ds &= (t-\tau)^{k\beta+\beta-1} \int_0^1 (1-z)^{\beta-1} z^{k\beta-1} dz, \\ &= (t-\tau)^{(k+1)\beta-1} B(k\beta, \beta), \\ &= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(k\beta)}{\Gamma((k+1)\beta)} (t-\tau)^{(k+1)\beta-1}, \end{aligned}$$

est évalué à l'aide de la substitution $s = \tau + z(t - \tau)$ et la définition de la fonction bêta . La relation (1) est prouvée. Puisque

$$B^n u(T) \leq \int_0^t \frac{(M\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} (t-s)^{n\beta-1} u(s) ds \rightarrow 0$$

comme $n \rightarrow +\infty$ pour $t \in [0, T]$, le théorème est prouvé.

Pour $g(t) \equiv b$ dans le théorème, nous obtenons l'inégalité suivante.

Corollaire 1 Supposons que $b \geq 0, \beta > 0$ et $a(t)$ est une fonction positive localement intégrable sur $0 \leq t < T$ (certains $T \leq +\infty$), et supposons que $u(t)$ soit positif et localement intégrable sur $0 \leq t < T$ avec

$$u(t) \leq a(t) + b \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s) ds,$$

sur cet intervalle ; puis

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} (t-s)^{n\beta-1} a(s) \right] ds, \quad 0 \leq t < T.$$

Corollaire 2 Sous l'hypothèse du théorème 1 , soit $a(t)$ une fonction croissante sur $[0, T]$. Alors

$$u(t) \leq a(t) E_\beta(g(t)\Gamma(\beta)t^\beta),$$

où E_β est la fonction de Mittag-Leffler définie par : $E_\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\beta+1)}$.

Preuve 10 Les hypothèses impliquent

$$\begin{aligned} u(t) &\leq a(t) \left[1 + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g(t)\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} (t-s)^{n\beta-1} ds \right] = a(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g(t)\Gamma(\beta)t^\beta)^n}{\Gamma(n\beta+1)}, \\ &= a(t) E_\beta(g(t)\Gamma(\beta)t^\beta). \end{aligned}$$

La preuve est complète.

3.2 Application à la dépendance de la solution sur les paramètres

Dans cette section, nous montrerons que notre résultat principal est utile pour étudier la dépendance du solution sur l'ordre et la condition initiale à une certaine équation différentielle

fractionnaire avec Dérivés fractionnaires Riemann - Liouville.

Considérons le problème de valeur initiale suivant en termes des dérivés fractionnaires Riemann - Liouville :

$$D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad (2)$$

$$D^{\alpha-1}y(t) |_{t=0} = \eta, \quad (3)$$

où $0 < \alpha < 1, 0 \leq t < T \leq +\infty, f : [0, T] * \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et D^α désigne l'opérateur de dérivé de Riemann - Liouville .

Définition 3.2.1 La dérivée fractionnaire d'ordre $0 < \alpha < 1$ d'une fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par :

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt,$$

à condition que le côté droit soit défini ponctuellement sur \mathbb{R}^+ .

Définition 3.2.2 La primitive fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est donné par :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

à condition que le côté droit soit défini ponctuellement sur \mathbb{R}^+ .

Dans cette partie, Nous présentons la dépendance de la solution à l'ordre et à la condition initial. Nous examinerons les solutions de deux problèmes de valeur initiale avec des ordres voisins et des valeurs initiales voisines. Il est important de noter que nous considérons ici une question qui ne se posent pas dans la solution d'équations différentielles d'ordre entier.

Tout d'abord, réduisons le problème (2)-(3) à une équation intégrale fractionnaire. Nous obtenons :

$$y(t) = \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad (4)$$

Il est clair que l'équation (4) est équivalent au problème de valeur initiale (2)-(3).

Théorème 2 Soit $\alpha > 0$ et $\delta > 0$ tels que $0 < \alpha - \delta < \alpha \leq 1$. Soit la fonction f continue et vérifie une condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable ; c'est à dire :

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|,$$

pour une constante L indépendante de t, y, z dans \mathbb{R} . Pour $0 \leq t \leq h < T$, supposons que y et z sont les solutions aux problèmes de valeur initiale (2) - (3) et :

$$D^{\alpha-\delta} z(t) = f(t, z(t)), \quad (5)$$

$$D^{\alpha-\delta-1} z(t)|_{t=0} = \bar{\eta}, \quad (6)$$

respectivement. Alors, pour $0 < t \leq h$, ce qui suit est valable :

$$|z(t) - y(t)| \leq A(t) + \int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha - \delta) \right)^n \frac{(t-s)^{n(\alpha-\delta)-1}}{\Gamma(n(\alpha-\delta))} A(s) \right] ds,$$

Où

$$A(t) = \left| \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(\alpha - \delta)} t^{\alpha-\delta-1} - \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \right| + \left| \frac{t^{\alpha-\delta}}{(\alpha - \delta)\Gamma(\alpha)} - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right| \cdot \|f\|$$

$$+ \left| \frac{t^{\alpha-\delta}}{\alpha - \delta} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha - \delta)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right] \right| \cdot \|f\|,$$

et

$$\|f\| = \max_{0 \leq t \leq h} |f(t, y)|.$$

Preuve 11 Les solutions du problème de valeur initiale (2), (3) et (5), (6) sont données par :

$$y(t) = \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau,$$

et

$$z(t) = \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(\alpha - \delta)} t^{\alpha-\delta-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha - \delta)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-\delta-1} f(\tau, z(\tau)) d\tau,$$

respectivement. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
|z(t) - y(t)| &\leq \left| \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(\alpha - \delta)} t^{\alpha - \delta - 1} - \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha - 1} \right| \\
&+ \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha - \delta)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - \delta - 1} f(\tau, z(\tau)) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - \delta - 1} f(\tau, z(\tau)) d\tau \right| \\
&+ \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - \delta - 1} f(\tau, z(\tau)) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - \delta - 1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \right| \\
&+ \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - \delta - 1} f(\tau, y(\tau)) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \right| \\
&\leq A(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - \delta - 1} L |z(\tau) - y(\tau)| d\tau,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A(t) &= \left| \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(\alpha - \delta)} t^{\alpha - \delta - 1} - \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha - 1} \right| + \left| \frac{t^{\alpha - \delta}}{(\alpha - \delta)\Gamma(\alpha)} - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right| \cdot \|f\| \\
&+ \left| \frac{t^{\alpha - \delta}}{\alpha - \delta} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha - \delta)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right] \right| \cdot \|f\|.
\end{aligned}$$

Une application du Théorème 2 donne :

$$|z(t) - y(t)| \leq A(t) + \int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha - \delta) \right)^n \frac{(t - s)^{n(\alpha - \delta) - 1}}{\Gamma(n(\alpha - \delta))} A(s) \right] ds,$$

et le théorème est prouvé.

Remarque 1 Il résulte du théorème 2 que pour chaque ϵ entre 0 et h , de petits changements d'ordre et de condition initiale ne provoquent que de petits changements de la solution dans l'intervalle fermé $[\epsilon, h]$ (qui ne contient pas zéro).

Remarque 2 L'existence et l'unicité sont accordées dans le cas autonome, i.e., quand f dépend uniquement sur y .

Un théorème général d'existence et d'unicité pour le cas non autonome $f(t, y)$ se trouve dans [44].

Corollaire 3 Sous l'hypothèse du théorème 2, si $\delta = 0$, alors ;

$$|z(t) - y(t)| \leq |\bar{\eta} - \eta| t^{\alpha - 1} E_{\alpha, \alpha}(Lt^\alpha),$$

pour $0 < t \leq h$, où $E_{\alpha,\alpha}$, est la fonction de Mittag-Leffler définie par : $E_{\alpha,\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)}$ ($\alpha > 0$).

Preuve 12 Si $\delta = 0$, alors :

$$A(t) = \left| \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\bar{\eta} - \eta) \right|,$$

D'après le théorème 2, nous obtenons

$$\begin{aligned} |z(t) - y(t)| &\leq A(t) + \int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} L^n \frac{(t-s)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} A(s) \right] ds = |\bar{\eta} - \eta| t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Lt^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} \\ &= |\bar{\eta} - \eta| t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(Lt^\alpha), \end{aligned}$$

pour $0 < t \leq h$. La preuve est complète.

Annexe A

Quelques théorèmes du point fixe

1.1 Théorème de points fixes

soit $J = [0, T]$, $T > 0$. Notons $C(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans \mathbb{R} , muni de la norme :

$$\|x\|_{\infty} = \sup\{|x(t)|, t \in J\}.$$

On commence par la définition d'un point fixe.

Définition 1.1.1 Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. On appelle point fixe de f tout point $t \in E$ tel que :

$$f(t) = t.$$

Définition 1.1.2 On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r , l'ensemble noté $B(a; r)$ telle que :

$$B(a, r) = \{t \in E / \|x - a\| < r\}.$$

Définition 1.1.3 On appelle boule fermée de centre a et de rayon r , l'ensemble noté $B(a; r)$ telle que :

$$B(a, r) = \{t \in E / \|x - a\| \leq r\}.$$

Définition 1.1.4 On dit qu'un espace vectoriel normé $(E; \|\cdot\|)$ est complet, ou que c'est un espace de Banach, si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Définition 1.1.5 Soit (x_n) une suite de E ; Alors (x_n) converge vers x dans $(E; \|\cdot\|)$ si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_E = 0.$$

Définition 1.1.6 Une partie A de $(E; \|\cdot\|)$ est dite relativement compact si son adhérence est compact .

Définition 1.1.7 Soient E et F deux espace de Banach , et $A : E \rightarrow F$ une application linéaire. On dit que A est borné si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F .

Définition 1.1.8 Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur borné toute application linéaire continue de E dans F .

Définition 1.1.9 Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F . On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en une ensemble relativement compact dans F . f est dite compact si $f(E)$ est relativement compact dans F .

Définition 1.1.10 Soit A un sous ensemble de $C(J; \mathbb{R})$; l'ensemble A est equicontinue. ie pour tout $\epsilon > 0$; il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies \|f(t_1) - f(t_2)\| < \epsilon \quad \text{pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A.$$

Définition 1.1.11 Soit (E, d) un espace métrique. Une application $f : E \rightarrow E$ est dite Lipschitzienne de constante $L > 0$ si elle vérifie :

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y).$$

1.2 Théorème de point fixe de Banach

Théorème 1.2.1 Soient X un espace de Banach, et $A : X \rightarrow X$ un opérateur contractant.

Alors A admet un point fixe unique ie $\exists! x \in X$ tel que $f(x) = x$.

1.3 Théorème de point fixe de Schaefer

Théorème 1.3.1 Soit X un espace de Banach et $A : X \rightarrow X$ est un opérateur complètement continue. Si l'ensemble :

$$\varepsilon = \{x \in X : \lambda Ax = x \text{ pour certain } \lambda \in]0, 1[\},$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

1.4 Théorème de point fixe de krasnosselski

Théorème 1.4.1 Soit X un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe et fermé de X . On suppose que A et B sont deux opérateur de M dans X satisfaisants :

1. $Ax + By \in M; \quad \forall x, y \in M$.
2. A est une contraction.
3. B est continue et $B(M)$ est contenue dans un ensemble compact.

Alors $\exists x^* \in M$ tel que $Ax^* + Bx^* = x^*$.

1.5 Théorème de Arzèla-Ascoli

Théorème 1.5.1 Soit A un sous ensemble de $C(J, \mathbb{R})$; A est relativement compact dans $C(J, \mathbb{R})$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i : L'ensemble A est uniformément borné ie : il existe une constante $k > 0$ telle que : $\|f(x)\| \leq K$ pour tout $x \in J$ et tout $f \in A$.

ii : L'ensemble A est equicontinue ie : pour tout $\epsilon > 0$; il existe $\delta > 0$ tel que $|t_1 - t_2| < \delta \implies$

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \epsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A.$$

Bibliographie

- [1] T. Abdeljawad, D. Baleanu, Integration by parts and its applications of a new nonlocal fractional derivative with Mittag-Leffler nonsingular kernel, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications* 10(3) (2017), 1098-1107.
- [2] T. Abdeljawad, J. Alzabut, The q-fractional analogue for Gronwall-type inequality, *Journal of Function Spaces and Applications*(2013) Article Id 543839.
- [3] T. Abdeljawad, Q. M. Al-Mdallel, M. A. Hajji, Arbitrary order fractional difference operators with discrete exponential kernels and applications, *Discrete Dynamics in Nature and Society* (2017), Article Id :4149320.
- [4] T. Abdeljawad, A Lyapunov type inequality for fractional operators with nonsingular Mittag-Leer kernel, *Journal of inequality and Applications* (2017), 2017 :130.
- [5] H. Afshari, S. Kalantari, E. Karapınar, Solution of fractional differential equations via coupled fixed point, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015 (286) (2015) 1-12.
- [6] R.P. Agarwal, S. Deng, W. Zhang, Generalization of a retarded Gronwall-like inequality and its applications, *Appl.Math. Comput.* 165 (2005) 599–612.
- [7] R.P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He, Existence of fractional neutral functional differential equations, *Comput. Math. Appl.* 59(3)(2010), 1095-1100.
- [8] A. Atangana, D. Baleanu, New fractional derivative with non-local and non-singular kernel, *Thermal Science* 20(2) (2016) 757-763.

- [9] Y. R. Bai, Hadamard fractional calculus for interval-valued functions, *Journal of Computational Complexity and Applications* 3(1)(2017) 23-43.
- [10] D. Baleanu, G. C.Wu, S. D. Zeng, Chaos analysis and asymptotic stability of generalized Caputo fractional differential equations *Chaos, Solitons and Fractals* 102 (2017) 99-105.
- [11] V. BARBU, Differential equations, (in Romanian), Ed. Junimea, Iasi,1985.
- [12] P.R. BEESACK, Gronwall inequalities, *Carleton Univ. Math. Notes*,11, 1975.
- [13] I. BIHARI, A generalisation of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations, *Acta Math. Acad. Sci.Hungar.*, 7 (1956), 81-94.
- [14] H. BREZIS, Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [15] G.I. CANDIROV, Obodnom obobschenii neravenstva Gronuolla i ego prilozenijah, *Ucen. Zap. Azerb. Univ., Ser. Fiz-Mat., Nauk*, 1970 (2),9-13.
- [16] M. Caputo, M. Fabrizio, A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Progress in Fractional Differentiation and Applications* 1(2)(2015) 73-85.
- [17] C. Corduneanu, Principle of Differential and Integral Equations, Allyn and Bacon, Boston, 1971.
- [18] D. Delbosco, L. Rodino, Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation, *J. Math. Anal.Appl.* 204 (1996) 609–625.
- [19] K.Deng,H.A.Levine,The role of critical exponents in Blow-up theorems :th sequel,J *Math.Anal.Appl.*243(2000),85-126.
- [20] K. Diethelm, N.J. Ford, Analysis of fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 265 (2002) 229–248.
- [21] A. FILATOV, Metody usrednenija v differencial'nyh i integrodifferencial'nyh uravnenijah, Taskent, 1971.

- [22] A. FILATOV and L. SAROVA, Integral'nye neravenstva i teorija nelineinyh kolebanii, Moskva, 1976.
- [23] S. GAMIDOV, Nekotorye integral'nye neravenstva dlja kraevyh zadac differencial'nyh uravnenii, *Differencial'nye Uravnenia*, 5 (1969).
- [24] T. H. Gronwall, Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations *Annals of Mathematics* 20(2) (1919) 293-296.
- [25] I. GYORI, A generalisation of Bellman's inequality for Stieltjes integrals and a uniqueness theorem, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 6 (1971),137-145.
- [26] P. HARLAMOV, Ob ocenke resenii systemy differencial'nyh uravnenii, *Ukrain. Mat. Z.*, (1955), 471-473.
- [27] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math., vol. 840, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1981.
- [28] N. Heymans, I. Podlubny, Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann–Liouville fractional derivatives, *Rheol. Acta* 37 (2005) 1–7.
- [29] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, Word Scientific, Singapore, 2000.
- [30] T.K. HO, A note on Gronwall-Bellman inequality, *Tamkang J. Math.*,11 (1980), 249-255.
- [31] M. Jleli, E. Karapınar, D. O'Regan, B. Samet, Some generalizations of Darbo's theorem and applications to fractional integral equations, *Fixed Point Theory and Applications* (2016), 2016 :11.
- [32] M. Jleli, E. Karapınar, B. Samet, Positive solutions for multi-point boundary value problems for singular fractional differential equations, *Journal of Applied Mathematics* (2014) Article Id : 596123.
- [33] A. Kilbas, H. M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.

- [34] J.P. LASALLE, Uniqueness theorems and successive approximations, *Ann. of Math.*, 50 (1949), 722-730.
- [35] O. Lipovan, A retarded Gronwall-like inequality and its applications, *J. Math. Anal. Appl.* 252 (2000) 389–401.
- [36] R.L. Magin, *Fractional Calculus in Bioengineering*, Begell House Publishers, Chicago, 2006.
- [37] P. MARONI, Une generalisation non lineaire de l'inegalite de Gronwall, *Bull. Acad. Polon. Sc. Ser. Sc. Math. Astr. Phys.*, 16 (1968), 703-709.
- [38] D.S. MITRINOVIC, J.E. PECARIC and A.M. FINK, *Inequalities for Functions and Their Integrals and Derivatives*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [39] H. MOVLJANKULOV and A. FILATOV, Ob odnom priblizennom metode postroeniya resenii integral'nyh uravnenii, *Tr. In'ta Kibern. AN UzSSR*, Taskent, 1972, 12, 11-18.
- [40] B.G. PACHPATTE, A note on some integral inequalities, *Math. Student*, 42 (1974), 409-411.
- [41] B.G. Pachpatte, On some generalizations of Bellman's lemma, *J. Math. Anal. Appl.* 5 (1975) 141–150.
- [42] B.G. Pachpatte, *Inequalities for Differential and Integral Equations*, Academic Press, New York, 1998.
- [43] A.I. PEROV, K voprosu o strukture integral'noi voronki, *Nauc. Dokl. Vyssei Skoly. Ser FMN*, 1959, No. 2.
- [44] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, California, 1999.
- [45] D. Qian, Z. Gong, C. Li, A generalized Gronwall inequality and its application to fractional differential equations with Hadamard derivatives, presented at 3rd conference on Nonlinear Science and Complexity NSC10, C₂, ankaya University, Ankara, Turkey, July 28 - 31, 2010.
- [46] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

- [47] B. STACHURSKA, On a nonlinear integral inequality, *Zeszyty Nauk Univ. Jagiellonskiego* 252, *Prace. Mat.*, 15 (1971), 151-157.
- [48] D. WILLETT, A linear generalisation of Gronwall's inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 (1965), 774-778.
- [49] D. WILLETT, Nonlinear vector integral equations as contraction mappings, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 15 (1964), 79-86.
- [50] D. WILLETT and J. WONG, On the discrete analogues of some generalisations of Gronwall's inequality, *Monatsh. Math.*, 69 (1965), 362-367.
- [51] X. J. Yang, J. A. T. Machado, H. M. Srivastava, A new fractional derivative without singular kernel : Application to the modelling of the steady heat flow, *Thermal Science* 20 (2016) 753-756.
- [52] H. Ye, J. Y. Gao, Ding, A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, *Journal of Mathematical Analysis and Application* 328 (2007) 1075-1081.
- [53] K.V. ZADIRAKA, *Issledoavanie nereguljarnogo vozmuscennyh differencial'nyh uravenii, Voprosy teorii i istorii differencial'nyh uravenii*, Kiev, 1968.