الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عباس لغرور خنشلة
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR- KHENCHELA

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département : Mathématiques & Informatique

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme deMaster

Filière:Mathématiques
Spécialité: Mathématiques Appliquées

Optimisation d'un Problème EDP

Réalisé par : BOUNISSEN Ibtissam
MAHDI Malika

Dirigé par :SAOUDI Khaled
MCA Université de Khenchela

Membre de jury :

Président :ADJEROUD Nacer MCA Université de Khenchela
Examinateur :BRAHIMI Saadoune MAA Université de Khenchela

Présenté le : 01 Juillet 2019

- **Session 2018/2019** -

Dédicace

” Nous dédions ce modeste travail :
A nos chers parents.
A nos adorables soeurs et nos chers frères.
Aucune dédicace ne saurait exprimer
l’amour, l’estime, le dévouement et le respect
que nous avons eu pour vous.
Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit
pour notre éducation et notre bien être.
Ce travail est le fruit des sacrifices que vous avez consentis pour notre éducation et notre formation. A nos chers amis.
A tout nos collègue de promotion 2018/2019

Malika *et* **Ibtissam**

Remerciements

Au terme de ce travail, nous tenons à remercier Allah qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.
Nos plus vifs remerciements vont aussi à notre encadreur : **Dr. Saoudi Khaled**,qui nous a fourni un sujet intéressant de ce mémoire et de nous a guidé et conseillé.
Nous adressons également un grand merci à **Mr. Soudani Abdelkadir** , pour ses précieux conseils, son aide et son encouragement.
Nous remercions aussi :
Dr. Adjeroud Nacer et **Dr. Brahimi Saadoune** membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.
Enfin, merci à les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Notation

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres.
$\mathbb{N}^*$: ensemble des entiers naturrelle non nules.

Ω : un ouvert de $\mathbb{R}^n$

EDP : équations Aux Dérivées Partielle.

$\partial\Omega$: frontière de Ω.

$\overrightarrow{n}$: est un normale extérieure.

U_{ex} : solution exacte.

U_{inv} : solution approchée par la méthode de l'inverse.

U_{New} : solution approchée par la méthode de Newton.

$U_{éf}$: solution approchée par la Méthode des élément fini-Newton.

$Er.ab$: L'erreur absolue.

$\|Er_{inv}\| = \|U_{ex} - U_{inv}\|_\infty$.

$\|Er_{New}\| = \|U_{ex} - U_{New}\|_\infty$.

$\|Er_{é.f}\| = \|U_{ex} - U_{éf}\|_\infty$.

Table des matières

Introduction

La plupart des phénomènes mécaniques, physiques, biologiques ou économiques sont modélisées à l'aide d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires et le développement de ces sciences passe en partie par une meilleure compréhension des propriétés des solutions de ces EDP.

Trouver la solution d'une EDP ou d'un système d'EDP est ainsi un problème courant, souvent difficile ou impossible à résoudre de façon analytique. À cet effet, il est alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques.

Les notions d'infini et de continu sont couramment utilisées. La solution exacte d'un problème d'équations aux dérivées partielles est une fonction continue. Les ordinateurs ne connaissent que le fini et le discret. Les solutions approchées seront calculées en définitive comme des collections de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel.

En vue du passage d'un problème exact (continu) au problème approché (discret), on dispose de plusieurs méthodes concurrentes : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis.

Notre modeste travail porte une étude générale d'un problème différentiel d'évolution, présenté par une EDP hyperbolique, faisant impliquer quelques méthodes d'optimisations, telles que la méthode de minimisation d'énergie dans la partie théorique, existence et unicité de la solution et la méthode de Galerkin-Newton, dans la partie numérique, dans le but d'améliorer l'approximation et la précision de la solution par rapport à d'autres méthodes, telle que celle des éléments finis.

Dans le premier chapitre sont donnés, à titre de rappel, quelques résultats préliminaires particulièrement d'analyse fonctionnelle et numérique, de définitions, de propositions et de théorèmes utiles pour aborder les chapitres suivants et Pour en savoir plus voir

Comme on va s'intéresser à résoudre un type EDP hyperbolique, le deuxième chapitre va nous amener à introduire des techniques basées sur la discrétisation temporelle et la formulation variationnelle pour répondre à la question des problèmes différentiels bien posés, disposés à l'approximation.

L'objet du troisième chapitre sera en première partie, application de la méthode choisie de Galarekin-Newton, qui s'appuie sur la combinaison de quelques méthodes d'optimisation avec un traitement des erreurs justifiant l'amélioration inspirée et dans la deuxième partie, on a essayé de présenter un exemple d'application sur un problème de Poissons à titre de compréhension.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion ainsi que quelques remarques d'ordre perspectif.

Enfin, il convient de signaler que notre travail est essentiellement basé sur une combinaison de méthodes déjà vues (étudiées).

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce premier chapitre sont donnés, à titre de rappel, quelques résultats préliminaires particulièrement d'analyse fonctionnelle et numérique, de définitions, de propositions et de théorèmes utiles pour aborder les chapitres suivants et Pour en savoir plus, voir [1], [2], [3] et [14].

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. (**Produit scalaire**)
Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On dit que $(.,.)$ est un produit scalaire sur H, si les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout $u, v, w \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda u, v) = \lambda(u, v).$$
$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w).$$
$$(u, v) = (u, v).$$
$$(u, u) \geq 0.$$
$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Définition 1.1.2. (**Espace préhilbertien**)
Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

(**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)
Soit H un espace préhilbertien, alors pour tout $u, v \in H$ on a :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}}.$$

$\| u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ est la norme induite par le produit scalaire $(.,.)$sur H.

Définition 1.1.3. Soit H un espace vectoriel normé,

1. Une suite $(u_n)_{n\in N}$ de H est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \;\; tel\ que \;\; \forall n, m \geq N, \| u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

2. On dit que une suite $(u_n)_{n\in N}$ de H converge vers $u \in H$ si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \| u_n - u\| = 0.$$

3. On dit que H est complet si toute suite de Cauchy de H est convergente.

Définition 1.1.4. (**Espace de Hilbert**)
Soit H un espace préhilbertien. On dit que H est un espace de Hilbert si il est complet par rapport à la norme associée.

1.2 Espace de Sobolev

Définition 1.2.1. (**Espace H$^1(\Omega)$Espace H$^1(\Omega)$Espace H$^1(\Omega)$Espace H$^1(\Omega)$)Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par : H$^1(\Omega) = \Big\{ v \in L^2(\Omega)$**

Proposition 1.2.1. *On muni $H^1(\Omega)$ du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x)\nabla v(x))\, dx,$$

et de la norme

$$\| u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Plus généralement on introduit les espaces suivants :

Définition 1.2.2. (**Espace** $H^m(\Omega)$)
Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, un multi-indice, on note $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ i.e $|\alpha| = \alpha_1 + ...\alpha_n$.
Pour un entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \ \ telque, \ \ \forall \alpha \ \ avec \ \ |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \right\},$$

où la dérivée partielle $\partial^\alpha v(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}} v(x)$: est la dérivée d'ordre $|\alpha|$ de v au sens des distributions.

Proposition 1.2.2. *On muni $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :*

$$(u, v) = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx,$$

et la norme associée à ce produit scalaire est

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = (u, u)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Remarque 1. Pour $m = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, et pour $m = 1$, on retrouve l'espace introduit dans la définition(1.6)

Définition 1.2.3. (**Espace** $H_0^1(\Omega)$)
L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, est un sous-espace de $H^1(\Omega)$, il constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$, il défini par

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ \ tel \ que, \ \ v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, est un espace de Hilbert.

Définition 1.2.4. (**Inégalité de Poincaré**)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

1.3 Approche Variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite Variationnelle, obtenu en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite "test". Comme il nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle.

1.3.1 Formulation variationnelle

Définition 1.3.1. En mathématiques, la formulation variationnelle d'un problème régi par des équations aux dérivées partielles correspond à une **formulation faible** de ces équations qui s'exprime en termes d'algèbre linéaire dans le cadre **d'un espace de Hilbert**. A l'aide du **théorème de Lax-Milgram**, elle permet de discuter l'existence et de l'unicité de solutions. On peut dire que la formulation variationnelle est une autre manière d'énoncer un problème physique régi par des équations différentielles ou aux dérivées partielles.

1.3.2 Formule de Green

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 si u,v $\in H^1(\Omega)$, alors elle vérifie la formule :

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)ds.$$

Où n_i est la i-ème composante de la normale extérieure unité à $\partial\Omega$.

1.4 Théorème de Lax-Milgram

Nous décrivons une théorie abstraire pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert réel V, nous considérons une formulation variationnelle du type :

$$\begin{cases} trouver \quad u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = L(v) \quad \text{pour tout fonction } v \in V \end{cases} \tag{1}$$

Les hypothèses sur a et L sont :

a) $L(.)$ est une forme linéaire continue sur V c'est-à-dire que $v \longrightarrow L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe C tel que :

$$|L(v)| \leq C\|v\|, \quad pour\ tout\ v \in V$$

b) $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur V c'est-à-dire que : $w \longrightarrow a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$ et $v \longrightarrow a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in V$.

c) $a(.,.)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\| \quad pour\ tout\ u,v \in V$$

d) $a(.,.)$ est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2, \quad pour\ toute\ u \in V$$

Théorém 1.1. Soit V un espace de Hilbert réel, L(.) une forme linéaire continue sur V, a(.,.) une forme bilinéaire continue coercive sur V. Alors la formulation variationnelle (1). admet une unique solution.

Proposition 1.4.1. *On se place sous les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique $a(u,v) = a(v,u)$ pour tout $u, v \in V$.*
Soit $j(v)$ l'énergie défini pour $v \in V$ par

$$j(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v). \tag{1.1}$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle (1). *Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que*

$$j(u) = \min_{v \in V} j(v).$$

Réciproquement, si $u \in V$ est point de minimum de l'énergie $j(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (1).

1.5 Équations Aux Dérivées Partielle

Dans cette partie, nous présenter le concept des équations aux Dérivées Partielles, et quelque condition aux limites.

Définition 1.5.1. Une EDP est une équation dont l'inconnue est une fonction et fait intervenir les dérivées partielles de cette fonction. L'ordre de l'EDP est l'ordre maximal de dérivation de la fonction. Cette équation est ainsi de la forme :

$$F(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ...) = 0 \tag{1.2}$$

Exemple 1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

est une EDP du 2^{er} ordre

Définition 1.5.2. Une solution de l'équation (1.2) est une fonction $u = u(x, y, ...)$ des variables indépendantes $x, y...$ dont les dérivées partielles apparaissant dans l'équation existent aux points de D et telle qu'après avoir substitué cette fonction et ses dérivées partielle dans l'équation (1.2), celle-ci est satisfait.

Exemple 2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.3}$$

est un exemple d'EDP pour le domaine $D = \mathbb{R}^2$ et $u(x,y) = 2x + y^2, u(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\sin(y)$, sont deux solution de cette EDP (1.3)
En effet si $u(x,y) = 2x + y^2$ alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2,$$

et nous obtenons que

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0,$$

Si $u(x, y) = \mathrm{e}^{-x}\sin(y)$ *nous avons :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\mathrm{e}^{-x}\sin(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{e}^{-x}\cos(y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{-x}\sin(y), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\mathrm{e}^{-x}\sin(y),$$

et nous obtenons que

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\mathrm{e}^{-x}\sin(y) + \mathrm{e}^{-x}\sin(y) = 0.$$

1.6 Classification des EDP

On distingue trois grandes catégories d'EDP :

— Les équations de type elliptique qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est-à-dire n'évoluant pas au cours du temps).Le prototype d'équation elliptique est l'équation de Laplace
$$-\Delta u = f,$$
d'inconnue $u(x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et de donnéef.

— Les équations de type parabolique, qui modélisent souvent l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles associes à des processus de diffusion. L'équation de la chaleur en est un prototype :
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \tag{1.4}$$
d'inconnue $u(t, x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \geqslant 0$ et de donnéef

— Les équations de type hyperbolique qui modélisent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation d'ondes. On identifie deux prototypes pour cette classe d'EDP :

i) L'équation de transport
$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.5}$$
d'inconnue $u(t, x), x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0$

ii) L'équation des ondes
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, \tag{1.6}$$
d'inconnue $u(t, x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \geqslant 0$, et de donnée f

Remarque 2. D'où vient le nom "elliptique", "parabolique", "hyperbolique" Plaçons-nous dans le cas particulier des équations de deuxième ordre . L'inconnue est la fonction $u(x, y)$, qui satisfait l'équation

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=g \tag{1.7}$$

Pour simplifier, on suppose les coefficients a, b, ..., g constants.
On dit que (1.7) est :

— Elliptique si $b^2-4ac<0$,

— Paraboliques si $b^2-4ac=0$,

— Hyperbolique si $b^2-4ac>0$.

Exemple 3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{1.8}$$

Avec $c>0$.*On* $b^2-4ac>0$. *Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique.*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1.9}$$

Avec $d>0$. *On* $b^2-4ac>0$. *Ainsi l'équation de la diffusion est parabolique.*

1.7 Condition aux limites classiques

Nous nous plaçons dans le cas où une EDP est définie sur un domaine $\Omega\in\mathbb{R}^n$ de frontière. $\partial\Omega$ suffisamment régulière.

1.7.1 Condition aux bords de Dirichlet

Définition 1.7.1. La condition de Dirichlet aux bords peut se définir comme la donnée d'une fonction $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sur la frontière de Ω, ce qui peut se noter

$$u(t,x)=f(x),\forall x\in\partial\Omega.$$

La fonction f est une donnée du problème .

1.7.2 Condition aux bords de Neumann

Définition 1.7.2. La condition de Neumann aux bords peut se définir comme la donnée de la dérivée de la fonction $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ par rapport à $\overrightarrow{n}$ sur la frontière de Ω, ce qui peut se noter

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial\overrightarrow{n}}=g(x),\forall x\in\partial\Omega.$$

La fonction g est une donnée du problème.

1.8 Principe des Méthode de Discrétisation

On considéré un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, où d est la dimension de l'espace. Le principe consiste à se donner un certain nombre de points du domaine, qu'on notera$(x_1...x_n) \subset \mathbb{R}^d$, on approche l'operateur différentielle en espace en chacun des x_i par des quotients différentiels. Il faut alors discrétiser la dérivée en temps, la méthode de discrétisation en temps et en espace a été présenté comme un outil théorique efface pour la résolution du problème étudie.

1.9 Méthode des Éléments Finis

La méthode des éléments finis est une méthode pour résoudre des problèmes de physique ou plus généralement des équations différentielles avec conditions aux limites. De façon générale, on part donc d'un problème (P) et on introduit sa formulation variationnelle (p_v). On montre l'existence et l'unicité d'une solution par le théorème de Lax-Milgram. On travaille dans des espaces de Hilbert : on peut donc faire de l'approximation interne.

1.9.1 Principe des Éléments Finis

a) Comment les obtient-on à partir d'un système continu pour arriver à un système discret ?

Soit Ω le ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ et sur lequel on cherche à résoudre un problème (P) ramené à une équation aux dérivées partielles, munie de conditions aux limites. On écrit la formulation variationnelle et on obtient (p_v) suivant :

$$trouver\ \ u \in V\ \ tel\ que : a(u,v) = L(v), \forall v \in V$$

Où V est un espace de Hilbert. Sous réserve que l'équation de départ ait les bonnes propriétés (hypothèses du théorème de Lax-Milgram), (p_v) admet une unique solution u. Pour obtenir une approximation numérique de u, on va remplacer l'espace V de dimension infinie par un sous espace V_h de dimensions finies, et on va résoudre le problème approché (p_h)

$$trouver\ \ u_h \in V_h\ \ tel\ que : a(u_h,v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h$$

On sait que V_h est de dimension finie, c'est donc un fermé de V. Où V est un espace de Hilbert :V_h aussi donc. On applique donc encore une fois le théorème de Lax-Milgram :
u_h existe et est unique.
En pratique l'espace V_h sera construit à partir d'un maillage du domaine Ω, l'indice h désignant la taille typique de mailles.
Puis on cherche une solution comme combinaison linéaire de fonctions données sur chaque élément .
b) Comment passe-t-on du système discrétisé aux fonctions de forme ?
Nous avions une EDP à résoudre sur un domaine Ω. Nous avons écrit la formulation variationnelle (p_v) et on s'est ramené au problème :

$$trouver\ \ u \in V\ \ tel\ que : a(u,v) = L(v), \forall v \in V$$

On va chercher une approximation u. Pour cela, on définit un maillage du domaine Ω grâce auquel on va définir un espace d'approximation V_h (sous espace vectoriel de V et de dimension finie N_h). Le problème approché est donc :

$$trouver\ \ u_h \in V_h\ \ tel\ que : a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h$$

On définit alors une base de V_h : $(\varphi_1, ..., \varphi_{N_h})$. On peut donc décomposer notre solution approchée u_h en une combinaison linéaire des fonctions de base :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i$$

et donc le problème devient :

$$trouver\ \ (u_1, ..., u_{N_h}) \in V_h\ \ tel\ que : \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h$$

Où a et L sont linéaires donc on peut écrire :

$$trouver\ \ (u_1, ..., u_{N_h}) \in V_h\ \ tel\ que : \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \forall j \in [1, ..., N_h]$$

Cela revient à résoudre le système suivant : $AU = B$

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_1) & \dots & a(\varphi_{N_h},\varphi_1) \\ a(\varphi_1,\varphi_2) & a(\varphi_2,\varphi_2) & \dots & a(\varphi_{N_h},\varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1,\varphi_{N_h}) & a(\varphi_2,\varphi_{N_h}) & \dots & a(\varphi_{N_h},\varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ \dots \\ L(\varphi_{N_h}) \end{pmatrix}$$

1.10 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procédé d'abord une approximation dans une suite croissante de sous-espace de dimension finie engendré par des fonctions de base, Ces fonction en général **des polynômes orthogonaux (Tchebychev, Legendre,...)** ou **fonctions trigonométriques (séries de Fourier)**.
On résout ensuite le problème approché, ce qui est en générale plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construis une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

1.11 Méthode de Newton

La méthode de Newton est attribuée au mathématicien, physicien et astronome anglais Issac Newton (1642-1727). L'algorithme de Newton est appliquée à la recherche des racines de $\nabla f(x) = 0$.

La méthode de Newton est une méthode de recherche des zéros d'une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ selon $g(x) = 0$.
L'idée de cette méthode ici est de résoudre l'équation de $\nabla f(x) = 0$, condition nécessaire de premier ordre pour la détection d'extrema d'une fonction. L'équation $\nabla f(x) = 0$ est donnée par un système $n \times n$ d'équation non linéaire. On donne aujourd'hui le nom de la méthode de Newton à toute approche algorithmique par linéarisation des fonctions définissant le système dont on cherche une solution. Le terme système est pris ici un sens très large puisqu'il peut s'agir des équations, des inégalités, des équations différentielles ou dérivées partielles, des équations variationnelle, etc. Et aussi la méthode de Newton est appliquée à la recherche de minimisation d'un système d'équations non linéaires.

1.12 Algorithme d'optimisation

Un Algorithme d'optimisation est procédure mathématique qui permet d'obtenir les minimums(ou maximums) d'une fonction réelle f (que l'on appelle fonction objective)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Les algorithmes d'optimisation sont des processus itératifs que génèrent génère une séquence de valeurs x_{n+1} à partir d'un point de départ x_0.
Un algorithme est convergent quand pour n'importe quel point de départ, la séquence arrive à la solution (maximum ou minimum).

1.13 L'erreur

L'etude des erreurs forme une partie important de l'analyse numérique,en mathématique on défini plusieur type des erreurs par exemple(erreur absolus,relative,erreur d'arrondis,...etc).
Et dans notre travail on utilison l'erreur absolus

Définition 1.13.1. (L'erreure absolue)
Elle est appelée absolue, car elle est le résultat de la valeure absolue de la différence entre la valeur exacte U_{ex} et la valeur approchée U_{app} est notée par :

$$Er.ab = |U_{ex} - U_{app}|$$

Chapitre 2

Approximation d'un Problème Hyperbolique

Comme on va s'intéresser à résoudre un type EDP hyperbolique, le deuxième chapitre va nous amener à introduire des techniques basées sur la discrétisation temporelle et la formulation variationnelle pour répondre à la question des problèmes différentiels bien posés, disposés à l'approximation. Dans la deuxième partie, on a essayé de présenter un exemple d?application sur un problème de poissons à titre de compréhension.

2.1 Problème aux limites

Définition 2.1.1. On appelle problème aux limites une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.

Définition 2.1.2. Problèmes bien posés
Considérons une équation aux dérivées partielles sur un domaine Ω avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution, on dit que le problème est bien posés si on a :

a) Existence d'une solution du problème,
b) Unicité de cette solution,
c) Stabilité par rapport aux données du problème.

2.2 Position de problème :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,de bord Γ suffisamment régulier et
$0 \leq T \leq \infty$. Etant donné une fonction

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

trouve une fonction

$$u : \Omega \times (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

telle que :

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) - \Delta u(t,x) - \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta u(t,x) = f & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \quad (2.1) \\ u(0,x) = 0 & sur \ \ \Omega, \quad (2.2) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(0,x) = 0 & sur \ \ \Omega, \quad (2.3) \\ u \ \ | \ \ \Gamma \times (0,T) = 0, & (2.4) \\ \nabla u \ \ | \ \ \Gamma \times (0,T) = 0, & (2.5) \end{cases}$$

Où f est une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$

2.3 Discrétisation en temps :

Effectuions une discrétisation en temps du problème (P) dans la direction de l'axe-temps en subdivisant uniformément l'intervalle $I = [0,T]$ par les points $t_i = ih = (i = 0,1.....p)$ où $h = T/p$ ($p \in \mathbb{N}^*$ fixé) désigne le pas de temps, et remplaçons à chaque point de la subdivision $t = t_i$ ($i = 0,1...p$)
la dérivée u_t par le quotient aux différences $\dfrac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t}$ où u_i est l'approximation de $u(x,t_i)$.
On a de (2.2)

$$u(0,x) = u_0 = 0, \tag{2.6}$$

et de (2.3) :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(0,x) = \frac{u_0 - u_{-1}}{\Delta t} = 0 \Longrightarrow u_{-1} = 0, \tag{2.7}$$

L'équation discrétisée s'écrit comme suit :

$$\frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta t)^2} + \Delta u_i + \Delta\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} = f, \qquad i = 1,\dots,p \tag{2.8}$$

on a :

$$\begin{aligned} &\frac{u_i}{(\Delta t)^2} + \Delta u_i + \frac{1}{\Delta t}\Delta u_i \\ &= f - \frac{2u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta t)^2} + \frac{1}{\Delta t}\Delta u_{i-1}. \qquad i = 1,\dots,p \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.4 Formulation variationnelle

On multiple(2.9) par une fonction teste v, puis on intègre sur Ω On obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(\Delta t)^2}(u_i, v) - (\Delta u_i, v) - \frac{1}{\Delta t}(\Delta u_i, v) \\ &= (f - \frac{2u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta t)^2} + \frac{1}{\Delta t}\Delta u_{i-1}, v), \end{aligned} \tag{2.10}$$

On utilisée la formule de Green on obtient :

$$\begin{aligned} (\Delta u_i, v) &= \int_\Omega \Delta u_i v dx \\ &= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \eta} u_i v ds - \int_\Omega \nabla u_i \nabla v dx, \end{aligned} \tag{2.11}$$

Comme u doit satisfaire une condition aux limites de Dirichlet, $u = 0$ sur Γ.
Dans ce cas, l'égalité (2.11) devient :

$$(\Delta u_i, v) = -\int_\Omega \nabla u_i \nabla v dx, \tag{2.12}$$

Alors, on aura :

$$(\Delta u_i, v) = -(\nabla u_i, \nabla v). \tag{2.13}$$

Et les identités (2.10) deviennent :

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}(u_i, v) + (\nabla u_i, \nabla v) + \frac{1}{\Delta t}(\nabla u_i, \nabla v)$$

$$= (f - \frac{2u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta t)^2}, v) - \frac{1}{\Delta t}(\nabla u_{i-1}, \nabla v), \tag{2.14}$$

Notons

$$F_i = f - \frac{2u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta t)^2}, \tag{2.15}$$

$$a(u_i, v) = \frac{1}{(\Delta t)^2}(u_i, v) + (\nabla u_i, \nabla v) + \frac{1}{\Delta t}(\nabla u_i, \nabla v), \tag{2.16}$$

et

$$L_i(v) = (F_i, v) - \frac{1}{\Delta t}(\nabla u_{i-1}, \nabla v), \tag{2.17}$$

Pour que le terme de gauche de (2.14) ait un sens il suffit que ∇u_i et ∇v appartiennent à $L^2(\Omega)$, et pour que le terme de droite de (2.14) ait aussi un sens il suffit que v appartienne à $L^2(\Omega)$ (on a supposé que $f \in L^2(\Omega)$
Par conséquent, un choix raisonnable pour l'espace de Hilbert est :$V = H_0^1(\Omega)$, le sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont les éléments s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.
Donc le problème variationnelle de (P).

$$(p_v)\begin{cases} trouver \quad u_i \in H_0^1(\Omega) \\ a(u_i, v) = L_i(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.18}$$

Réciproquement :

soit $u_i \in H_0^1$ tel que

$$j(u) = \min_{v \in H_0^1} j(v)$$

et soit $v \in H_0^1$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$j(u_i + tv) \geq j(u)$$

$$j(u + tv) = \frac{1}{2}a(u_i + tv, u_i + tv) - L(u_i + tv)$$

grâce à la symétrie de $a(.,.)$ et sa expressions dans l'identités (2.16) et d'après la linéarité de $L(.)$ et sa expressions dans l'identités (2.17), on obtient :

$$j(u_i + tv) = j(u) + t\left(\frac{1}{\Delta t}u_i(x)v(x) + (1 + \frac{1}{\Delta t})\nabla u_i(x)\nabla v(x) - F_i(x)v(x) + \frac{1}{\Delta t}\nabla u_{i-1}(x)\nabla v(x)\right)$$

$$+\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\Delta t}(\nabla v)^2 + (1 + \frac{1}{\Delta t})(\nabla v)^2\right)$$

En a donc en particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $v \in H_0^1$

$$t\left(\frac{1}{\Delta t}u_i(x)v(x) + (1 + \frac{1}{\Delta t})\nabla u_i(x)\nabla v(x) - F_i(x)v(x) + \frac{1}{\Delta t}\nabla u_{i-1}(x)\nabla v(x)\right)$$

$$+\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\Delta t}(\nabla v)^2 + (1 + \frac{1}{\Delta t})(\nabla v)^2\right) \geq 0$$

En divisant cette inégalité par $t > 0$ et en faisant tendre $t \longrightarrow 0$, on obtient que :

$$\frac{1}{\Delta t} u_i(x) v(x) + (1 + \frac{1}{\Delta t}) \nabla u_i(x) \nabla v(x) - F_i(x) v(x) + \frac{1}{\Delta t} \nabla u_{i-1}(x) \nabla v(x) \geq 0 \qquad (1)$$

En divisant ensuit la même inégalité mais cette fois par $t < 0$ et en faisant tendre $t \longrightarrow 0$, on obtient que :

$$\frac{1}{\Delta t} u_i(x) v(x) + (1 + \frac{1}{\Delta t}) \nabla u_i(x) \nabla v(x) - F_i(x) v(x) + \frac{1}{\Delta t} \nabla u_{i-1}(x) \nabla v(x) \leq 0 \qquad (2)$$

D'après (1)et (2) on trouve

$$\frac{1}{\Delta t} u_i(x) v(x) + (1 + \frac{1}{\Delta t}) \nabla u_i(x) \nabla v(x) - F_i(x) v(x) + \frac{1}{\Delta t} \nabla u_{i-1}(x) \nabla v(x) = 0$$

danc

$$\frac{1}{\Delta t} u_i v + (1 + \frac{1}{\Delta t}) \nabla u_i \nabla v = F_i v + \frac{1}{\Delta t} \nabla u_{i-1} \nabla v(x)$$

ie.

$$a(u_i, v) = L(v)$$

Ce qui prouve que u_i vérifier la formulation variationnelle (2.18)
Donc d'après la proposition de Lax- Milgram le problème variationnelle(2.18) admet une unique solution $u_i \in H_0^1$.

2.5 Théorème de Lax-Milgram

Insérons dans (2.16), $v = u_i$ il vient

$$a(u_i, u_i) = \frac{1}{(\Delta t)^2}(u_i, u_i) + (\nabla u_i, \nabla u_i) + \frac{1}{\Delta t}(\nabla u_i, \nabla u_i),$$

$$\begin{aligned} a(u_i, u_i) &= \frac{1}{(\Delta t)^2}(u_i, u_i) + (1 + \frac{1}{\Delta t})(\nabla u_i, \nabla u_i), \\ &= \frac{1}{(\Delta t)^2} \| u_i \|^2 + (1 + \frac{1}{\Delta t}) \| \nabla u_i \|^2, \end{aligned} \qquad (2.19)$$

en prenant $\alpha = \min(\frac{1}{(\Delta t)^2}, 1 + \frac{1}{\Delta t})$ on obtient

$$a(u_i, u_i) \geq \alpha \| u_i \|^2_{H^1} \qquad (2.20)$$

d'ou la coercivité de $a(,.,)$
de (2.16), on a

$$|a(u_i, v)| = \frac{1}{(\Delta t)^2}(u_i, v) + (1 + \frac{1}{\Delta t})(\nabla u_i, \nabla v), \qquad (2,21)$$

on utilise l'inégalite de Cauchy-Schwarz, alors

$$a(u_i, v)| \leq \frac{1}{(\Delta t)^2} \| u_i \| \| v \| + (1 + \frac{1}{\Delta t}) \| \nabla u_i \| |\nabla v \|, \qquad (2.22)$$

et par suite

$$|a(u_i,v)|\leq \frac{1}{(\Delta t)^2}\left(\|u_i\|^2+\|\nabla u_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+(1+\frac{1}{\Delta t})\left(\|\nabla u_i\|^2+\|u_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.23)$$

Ce qui donne aprés quelque rérrangement et vertu de la norme de H^1

$$a(u_i,v)\leq \frac{1}{(\Delta t)^2}\|u_i\|_{H^1}+\|v\|_{H^1}+(1+\frac{1}{\Delta t})\|\nabla u_i\|_{H^1}\|\nabla v\|_{H^1}$$

$$\leq (1+\frac{1}{\Delta t}+\frac{1}{(\Delta t)^2})\|u_i\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \qquad (2.24)$$

et avec $M=(1+\frac{1}{\Delta t}+\frac{1}{(\Delta t)^2})$, on aura

$$a(u_i,v)\leq M\|u_i\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \qquad (2.25)$$

ce qui prouve que la forme $a(.,.)$ est continue
De (2.17) on trouve :

$$|L_i(v)|\leq \|F_i\|\|v\|+\frac{1}{\Delta t}\|\nabla u_{i-1}\|\|\nabla v\| \qquad (2,26)$$

où on a utilisé à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en prenant le max$(1,\frac{1}{\Delta t})$ on obtient :

$$|L_i(v)|\leq \max\left(1,\frac{1}{\Delta t}\right)(\|F_i\|+\|\nabla u_{i-1}\|)\|v\|_{H^1} \qquad (2.27)$$

ce qui montre que la forme $L_i(.)$ est continue.
Alors pour tout $i=\overline{1,p}$ et d'après le théorème de Lax-Milgram il existe et uniques $u_i\in H_0^1$ vérifiant l'égalité (2.18)
De plus On a :

$$a(u_i,v)=\frac{1}{(\Delta t)^2}(u_i,v)+(\nabla u_i,\nabla v)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_i,\nabla v)$$

et

$$a(v,u_i)=\frac{1}{(\Delta t)^2}(v,u_i)+(\nabla v,\nabla u_i)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla v,\nabla u_i)$$

Comme $a(.,.)$ est symétrique on va appliquer la proposition de Lax-Milgram Alors u_i est l'unique point qui minimiser la fonction :

$$j(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-l(v)$$

$$j(u)=\min_{v\in H_0^1} j(v)$$

Démonstration :

Soit $u_i \in H_0^1$ la solution unique de la formulation variationnelle (2.17), on développe (grâce à la symétrie et la linéarité de $a(.,.)$ et la linéarité de L) On a :

$$j(u_i+v)=\frac{1}{2}a(u_i+v,u_i+v)-L_i(u_i+v)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}(u_i+v,u_i+v)+(\nabla(u_i+v),\nabla(u_i+v))+\frac{1}{\Delta t}(\nabla(u_i+v),\nabla(u_i+v))\right)$$
$$-\left((F_i,u_i)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_{i-1},\nabla u_i)\right)-\left((F_i,v)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_{i-1},\nabla v)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}u_i^2+\frac{2}{(\Delta t)^2}(u_i,v)+\frac{1}{(\Delta t)^2}v^2+(\nabla u_i)^2+2(\nabla u_i,\nabla v)+(\nabla v)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_i)^2+\frac{2}{\Delta t}(\nabla u_i,\nabla v)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla v)^2\right]$$
$$-\left((F_i,u_i)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_{i-1},\nabla u_i)\right)-\left((F_i,v)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_{i-1},\nabla v)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}u_i^2+(\nabla u_i)^2+\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_i)^2\right)-\left((F_i,u_i)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_{i-1},\nabla u_i)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}v^2+(\nabla v)^2+\frac{1}{\Delta t}(\nabla v)^2\right)$$
$$+\frac{1}{(\Delta t)^2}(u_i,v)+(\nabla u_i,\nabla v)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_i,\nabla v)-\left((F_i,v)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_{i-1},\nabla v)\right)$$
$$=j(u_i)+\frac{1}{2}(\frac{1}{\Delta t^2}v^2+(\nabla v)^2+\frac{1}{\Delta t}(\nabla v)^2)$$

Car :

$$+\frac{1}{(\Delta t)^2}(u_i,v)+(\nabla u_i,\nabla v)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_i,\nabla v)=\left((F_i,v)+\frac{1}{\Delta t}(\nabla u_{i-1},\nabla v)\right)$$

$$\text{i.e : } a(u_i,v)=L_i(v).$$

D'ou

$$j(u_i+v)\geq j(u_i) \qquad \forall i=1,\dots,p$$

Car :

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{\Delta t^2}v^2+(\nabla v)^2+\frac{1}{\Delta t}(\nabla v)^2)=\frac{1}{2}a(v,v)\geq\frac{\alpha}{2}\|v\|^2\geq 0 \qquad (a\ est\ coercive)$$

Comme u_i+v est quelconques dans H_0^1, u_i minimise bien l'énergie j dans H_0^1

Réciproquement :
soit $u_i \in H_0^1$ tel que

$$j(u)=\min_{v\in H_0^1} j(v)$$

et soit $v\in H_0^1$ alors pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a

$$j(u_i+tv)\geq j(u)$$

$$j(u+tv)=\frac{1}{2}a(u_i+tv,u_i+tv)-L(u_i+tv)$$

grâce à la symétrie de $a(.,.)$ et sa expressions dans l'identités (2.19) et d'après la linéarité de $L(.)$ et sa expressions dans l'identités (2.20), on obtient :

$$j(u_i+tv)=j(u)+t\left(\frac{1}{\Delta t}u_i(x)v(x)+(1+\frac{1}{\Delta t})\nabla u_i(x)\nabla v(x)-F_i(x)v(x)+\frac{1}{\Delta t}\nabla u_{i-1}(x)\nabla v(x)\right)$$

$$+\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\Delta t}(\nabla v)^2+(1+\frac{1}{\Delta t})(\nabla v)^2\right)$$

En a donc en particulier, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $v\in H_0^1$

$$t\left(\frac{1}{\Delta t}u_i(x)v(x)+(1+\frac{1}{\Delta t})\nabla u_i(x)\nabla v(x)-F_i(x)v(x)+\frac{1}{\Delta t}\nabla u_{i-1}(x)\nabla v(x)\right)$$

$$+\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\Delta t}(\nabla v)^2+(1+\frac{1}{\Delta t})(\nabla v)^2\right)\geq 0$$

En divisant cette inégalité par $t>0$ et en faisant tendre $t\longrightarrow 0$, on obtient que :

$$\frac{1}{\Delta t}u_i(x)v(x)+(1+\frac{1}{\Delta t})\nabla u_i(x)\nabla v(x)-F_i(x)v(x)+\frac{1}{\Delta t}\nabla u_{i-1}(x)\nabla v(x)\geq 0 \qquad (1)$$

En divisant ensuit la même inégalité mais cette fois par $t<0$ et en faisant tendre $t\longrightarrow 0$, on obtient que :

$$\frac{1}{\Delta t}u_i(x)v(x)+(1+\frac{1}{\Delta t})\nabla u_i(x)\nabla v(x)-F_i(x)v(x)+\frac{1}{\Delta t}\nabla u_{i-1}(x)\nabla v(x)\leq 0 \qquad (2)$$

D'après (1)et (2) on trouve

$$\frac{1}{\Delta t}u_i(x)v(x)+(1+\frac{1}{\Delta t})\nabla u_i(x)\nabla v(x)-F_i(x)v(x)+\frac{1}{\Delta t}\nabla u_{i-1}(x)\nabla v(x)=0$$

danc

$$\frac{1}{\Delta t}u_iv+(1+\frac{1}{\Delta t})\nabla u_i\nabla v=F_iv+\frac{1}{\Delta t}\nabla u_{i-1}\nabla v(x)$$

ie.

$$a(u_i,v)=L(v)$$

Ce qui prouve que u_i vérifier la formulation variationnelle (2.18)
Donc d'après la proposition de Lax- Milgram le problème variationnelle(2.18) admet une unique solution $u_i\in H_0^1$.

2.6 Notions de solution

On appelle la solution $u_i\in H_0^1$ de la formulation variationnelle (p_v) solution du problème aux limites (P). Par un raccourci de langage bien commode, on dira que l'unique solution $u_i\in H$ de la formulation variationnelle (p_v) est l'unique solution du problème aux limites (P). C'est-à-dire qu'il y a une équivalence entre la formulation faible et le problème initial(fort).
Une solution du problème faible est appelée solution faible ou solution généralisée.

Chapitre 3

Méthode de Galerkin-Newton

L'objet du troisième chapitre sera en première partie, application de la méthode choisie de Galerkin-Newton, qui s'appuie sur la combinaison de quelques méthodes d'optimisation avec un traitement des erreurs justifiant l'amélioration inspirée

3.1 Méthode de Galerkin

On considère le problème Elliptique suivant :

$$(p_v)\begin{cases} u \in H \\ a(u_i, v) = L(v) \quad \forall v \in H \end{cases}$$

Par le théorème de Lax-Milgram, il Ya l'existence et l'unicité de $u \in H$ solution de (p).
Soit l'espace approcher V_h tell que $V_h \subset H$ et $dimV_h < +\infty$.
La méthode de Galerkin consiste à chercher la solution approchée de (p_h) c'est-à- dire

$$(p_h)\begin{cases} u_h \in V_h \\ a(u_{ih}, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

Comme $dimV_h < \infty$ il existe une base $(\varphi_1,...,\varphi_N)$de V_h et soit $v_h \in V_h$, alors on peut développer sur la base comme suite :

$$u_{ih} = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i \qquad \mu_i \in R$$

$$v_h = \sum_{j=1}^{N_h} \mu_j \varphi_j \qquad \mu_j \in R$$

Et danc le problème (p_h) devient
trouve $(\mu_1, \mu_2, ...\mu_{N_h})$ tel que

$$a(\sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{N_h} \mu_j \varphi_j) = L(\sum_{j=1}^{N_h} \mu_j \varphi_j)$$

Par la linéarité de a et L on à :

$$\sum_{j=1}^{N_h} \mu_j \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{N_h} \mu_j L(\varphi_j)$$

$$\sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j) \qquad j = \overline{1...N_h}$$

On peut écrire cette dernière égalité sous forme d'un système linéaire

$$A_{i,j} U_{ih} = B_j, \forall i, j = \overline{1, N_h}$$

tell que

$$A_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j) \;\; et \;\; U_{ih} = (\mu_i)_{1 \le i \le n} \;\; et \;\; B_j = L(\varphi_j)$$

Nous résolvons ce système par des méthodes numérique (direct) exemple (méthode de l'inverse,Gauss,...), des méthodes d'optimisation (méthode de Newton) qui nous avons consacrée à ce travail,

3.2 Méthode de Newton

Nous utilisons la méthode de Newton pour déterminer le minimum de fonction quadratique suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad tel\ que\ f \in C^2.$$

Ou $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive et inversible et $b \in \mathbb{R}^n$.
Dans ce cas x^* est une solution qui vérifie $f(x^*) = \min f(x) \Longrightarrow Ax^* = b.$
On peut employer la méthode de Newton pour minimiser la fonction f en appliquant l'algorithme de Newton en optimisation pour chercher un zéro de $\nabla f(x_k)$.
On a

$$\nabla^2 f(x_k) = H(x_k),\ o\text{ù}\ H(x_k)\ est\ la\ matrice\ Hessienne\ de\ f\ en\ x_k$$

La méthode de Newton s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} Initialisation \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \\ It\text{é}ration\ k \quad x_{k+1} = x_k - [H(x_k)]^{-1}\nabla f(x_k) \\ Crit\text{é}r\ d'Arr\text{é}e \quad \|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon \end{cases}$$

3.3 Application

Dans la deuxième partie, on a essayé de présenter un exemple d?application sur un problème de poissons à titre de compréhension.

Nous considère le problème de Poissons suivant :

$$(p)\quad \begin{cases} -\Delta u = f, \;\; dans \;\; \Omega \\ u = 0 \quad sur \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Où Ω est un ouvert borné de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,et f est un second membre qui appartient à l'espace $L^2(\Omega)$.
On multiple l'équation (3.1) par une fonction teste v, puis on intègre sur Ω On obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx \tag{3.2}$$

On utilisée la formule de Green on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds = \int_{\Omega} f v dx \tag{3.3}$$

Comme u doit satisfaire une condition aux limites de Dirichlet, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on choisit un espace de Hilbert V tel que toute fonction $v \in V$ vérifie aussi $v = 0$ sur $\partial\Omega$.
Dans ce cas, l'égalité(3.3) devient

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \tag{3.4}$$

Pour que le terme de gauche de (3.4) ait un sens il suffit que ∇u et ∇v appartiennent à $L^2(\Omega)$, et pour que le terme de droite de (3.4) ait aussi un sens il suffit que v appartienne à $L^2(\Omega)$ (on a supposé que $f \in L^2(\Omega)$.
Par conséquent, un choix raisonnable pour l'espace de Hilbert est $V = H_0^1(\Omega)$, le sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont les éléments s'annulent sur le bord $\partial\Omega$, donc le problème variationnelle de (3.1) est :

$$(p_v)\quad \begin{cases} trouver \quad u \in H_0^1(\Omega), \\ a(u,v) = L(v) \end{cases} \tag{3.5}$$

tel que

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

Nous vérifions que la formulation variationnelle (3.5) admet une solution unique. Pour cela nous utilisons le Théorème de Lax-Milgram

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx \;\; et \;\; L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Il est clairement que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire, et $L(.)$ une forme linéaire .
On va utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montre que a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ et que L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.

$$|\int_0^1 f(x)v(x)dx| \leq \left(|f(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(|v(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$|a(u,v)| = |\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx| \leq \int_\Omega |\nabla u(x)\nabla v(x)|dx$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \| u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

En vertu de l'inégalité de Poincaré pour montre que la forme bilinéaire a est coécrive,
C'est-à-dire

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \geq \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Alors d'après le Théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (3.5)
Comme la forme bilinéaire a est symétrique, donc on va appliquer la proposition de Lax-Milgram , Alors u est l'unique point de minimum de l'énergie définie par :

$$j(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Démonstration :
Soit $u \in H_0^1$ la solution unique de la formulation variationnelle (3.5), on développe (grâce à la symétrie de $a(.,.)$) On a :

$$\begin{aligned}
j(u+v) &= \frac{1}{2}a(u+v,u+v) - l(u+v)\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(u+v)(x)\nabla(v+u)(x)dx - \int_\Omega f(x)(v+u)(x)dx.\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla u)^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla v(x)\nabla u(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla v)^2(x)dx\\
&\quad - \int_\Omega f(x)u(x)dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla u)^2(x)dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx + \int_\Omega \nabla v(x)\nabla u(x)dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla v)^2(x)dx\\
&= j(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla v)^2(x)dx
\end{aligned}$$

Donc :

$$j(u+v) \geq j(u)$$

car

$$\int_\Omega (\nabla v)^2(x)dx \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 \geq 0$$

car(a est coércive)
Comme $u+v$ est quelconques donc u est minimiser l'énergie j dans $H_0^1(\Omega)$ i.e :

$$j(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} j(v)$$

Réciproquement :
soit $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimisé l'énergie j, et soit $v \in H_0^1(\Omega)$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$j(u+tv) \geq j(u)$$

$$j(u+tv) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla(u+tv))^2(x)dx - \int_\Omega f(x)(u+tv)(x)dx$$

$$= j(u) + t\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega (\nabla v)^2(x)dx - t\int_\Omega f(x)v(x)dx$$

On a donc en particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$t\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx - \int_\Omega f(x)(v)(x)dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega (\nabla v)^2(x)dx \geq 0$$

En divisant cette inégalité par $t > 0$ et en faisant tendre $t \longrightarrow 0$, on obtient que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx - \int_\Omega f(x)(v)(x)dx \geq 0 \tag{1}$$

En divisant ensuit la même inégalité mais cette fois par $t < 0$ et en faisant tendre $t \longrightarrow 0$, on obtient que :

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx - \int_\Omega f(x)(v)(x)dx \leq 0 \tag{2}$$

d'aprés (1) et (2) on trouve

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx - \int_\Omega f(x)(v)(x)dx = 0$$

i.e

$$a(u,v) = L(v) \qquad \blacksquare$$

Ce qui prouve que u vérifier la formulation variationnelle (3.5)
Donc d'après la proposition de Lax- Milgram le problème variationnelle admet une unique solution.$u \in H_0^1(\Omega)$.
On souhaite maintenant trouver des méthodes pour calculer des solutions approchées d'un problème (p) Comme nous souhaitons également pouvoir traiter des cas où la solution est peu régulière, nous allons en fait résoudre de façon approchée la formulation variationnelle (3.5)
En génale l'espace $V = H_0^1$ est de dimension infini et pour obtenir une approximation de la solution u de (p_v) . on va remplacer l'espace V de dimension infini par une sous-espace $V_h$de dimensions fini, et on va résoudre le problème approché (p_h)

$$(p_h) \quad \begin{cases} trouver \quad u_h \in V_h \subset H_0^1(\Omega), \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{3.6}$$

V_h est de dimension fini, c'est donc un fermé de V. Où V est un espace de Hilbert,V_h aussi donc.
Donc le théorème de Lax-Milgram est applicable sur (p_h) : u_h existe et est unique.

1. **Méthode des Élement Fini**
L'idée de la méthode des élements finis est remplacer (p_v) par un probléme (p_h) posé dans un espace de dimention finie $dim(V_h) = N_h < \infty$. On commence par construire un mailage de l'intervale $[0,1]$

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < x_{n+1} = 1 \ \ , x_i = ih, h = \frac{1}{N+1}$$

On peut définir l'espace V_h sous-espace de $H_0^1(0,1)$ tel que

$$V_h = \left\{ \begin{array}{c} v_h \in C^0(0,1) \ \ telle \ que \ v_h \ est \ affin \ sur \ chaque \ segment \\ [x_j, x_{j+1}] \ \ et \ \ v_h(0) = v_h(1) = 0 \end{array} \right\}$$

Introduisons la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & si \ \ |x| \leq 1 \\ 0 & si \ \ |x| > 1 \end{cases}$$

Si le maillage est uniforme, alors chaque fonction φ_i a pour expression

$$\varphi_i(x) = \varphi\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \tag{3.7}$$

une base de V_h est donnée par :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x - x_i|}{h} & si \ \ |x - x_i| \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Nous cherchons dans V_h une solution approchée

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i$$

Les inconnus sont les μ_i qui soit solution de système

$$\sum_{i=1}^{N_h} a(\varphi_i, \varphi_j)\mu_i = L(\varphi_j), \forall j \in [1, ..., N_h]$$

tq

$$A_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 \varphi_i^{'} \varphi_j^{'} dx \tag{3.2}$$

$$L(\varphi_j) = \int_0^1 f \varphi_j dx$$

si j n'est pas égale à $i-1, i$ ou $i+1$, alors les fonctions φ_i et φ_j ont des supports disjoints et l'intégrale dans (3.2) est nulle.
Les coefficients non nuls se calculent facilement :

$$A_{i,i} = a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi_i^{'}(x)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i^{'}(x)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(-h)^2} dx = \frac{2}{h}$$

$$A_{i-1,i} = a(\varphi_{i-1},\varphi_i) = \int_0^1 \varphi'_{i-1}(x)\varphi'_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{i-1}(x)\varphi'_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h}\frac{1}{h}dx = \frac{-1}{h}$$

$$A_{i+1,i} = a(\varphi_{i+1},\varphi_i) = \int_0^1 \varphi'_{i+1}(x)\varphi'_i(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_{i+1}(x)\varphi'_i(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h}\frac{-1}{h}dx = \frac{-1}{h}$$

Finalement, la matrice obtient est une matrice tridiagonale

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le second membre

$$B = \int_0^1 f\varphi_i dx$$

Il faut calculer l'intégrale

$$\int_0^1 f\varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\varphi_i dx + = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx$$

En général, cette intégrale ne peut être calculée de façon exacte car la fonction f peut être compliquée. Dans la pratique, on utilise des techniques d'intégration numérique où, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on approche l'intégrale par une formule de quadrature.
Ainsi, si on utilise La Formule de Simpson

$$\int_a^b \theta(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[\theta(a) + 4\theta\left(\frac{a+b}{2}\right) + \theta(b)\right]$$

on

$$B = \int_0^1 f\varphi_i dx$$

Pour $i \neq 1$ et $i \neq n$

$$\int_0^1 f\varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} f\varphi_i dx$$

$$= \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{6}\left[f(x_{i-1})\varphi_i(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i+1}+x_{i-1}}{2}\right)\varphi_i(\frac{x_{i+1}+x_{i-1}}{2}) + f(x_{i+1})\varphi(x_{i+1})\right]$$

$$= \frac{(i+1)h-(i-1)h}{6}\left[f((i-1)h)\varphi_i((i-1)h) + 4f(ih)\varphi(ih) + f((i+1)h)\varphi((i+1)h)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f((i-1)h)*0 + 4f(ih)*1 + f(i+1)h)*0\right] = \frac{h}{3}*4f(ih)$$

Pour $i = 1$

$$\int_0^1 f\varphi_1 dx = \int_0^h f\varphi_1 dx$$

$$= \frac{h-0}{6}\left[f(0)\varphi_1(0) + 4f\left(\frac{h}{2}\right)\varphi_1\left(\frac{h}{2}\right) + f(h)\varphi_1(h)\right] = \frac{h}{6}\left[f(0) + 2f\left(\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(0) + 2f\left(\frac{h}{2}\right)\right]$$

pour $i = n$

$$\int_0^1 f\varphi_n dx = \int_{(n-1)h}^{nh} f\varphi_n dx$$

$$= \frac{nh-(n-1)h}{6}\left[f(n-1)h)\varphi_n((n-1)h) + 4f\left(nh - \frac{h}{2}\right)\varphi_n\left(nh - \frac{h}{2}\right) + f(nh)\varphi_n(nh)\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(nh) + 2f\left((n - \frac{1}{2})h\right)\right]$$

On a donc le système :

$$\begin{pmatrix} 2/h & -1/h & 0 & \dots & 0 \\ -1/h & 2/h & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1/h & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1/h \\ 0 & \dots & 0 & -1/h & 2/h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ \dots \\ u_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{6}[f(0) + 2f\left(\frac{h}{2}\right)] \\ \frac{h}{3} * 4f(ih) \\ \dots \\ \frac{h}{3} * 4f(ih) \\ \frac{h}{6}[f(nh) + 2f\left((n - \frac{1}{2})h\right)] \end{pmatrix}$$

On prands la fonction $f(x) = e^x$ et on divisons l'intervalle $]0,1[$ en trois segments de pas $h = 1/3$

Le second member devient comme suit :

Pour $i = 1$

$$\int_0^1 f\varphi_1 dx = \int_{x_0}^{x_1} f\varphi_1 dx$$

$$\int_0^h f\varphi_1 dx = \frac{h}{6}[f(0) + 2f(\frac{h}{2})] = \frac{h}{6}[1 + 2e^{h/2}]$$

Pour $i = 2$

$$\int_0^1 f\varphi_2 dx = \int_{x_1}^{x_3} f\varphi_2 dx$$

$$\int_h^{3h} f\varphi_2 dx = \frac{h}{3} * 4f(2h) = 4\frac{h}{3}e^{2h}$$

Pour $i = 3$

$$\int_0^1 f\varphi_3 dx = \int_{x_2}^{x_3} f\varphi_3 dx$$

$$\int_{2h}^{3h} f\varphi_3 dx == \frac{h}{6}[e^{3h} + 2e^{5/2h)}]$$

danc

$$B = \begin{pmatrix} \frac{h}{6}[1 + 2e^{h/2}] \\ 4\frac{h}{3}e^{2h} \\ \frac{h}{6}[e^{3h} + 2e^{5h/2)}] \end{pmatrix}$$

d'ou le systéme $AU = B$ par la méthode des éléments fini dans le cas $h = 1/3$ devient :

$$1/h\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{6}[1+2e^{h/2}] \\ 4\frac{h}{3}e^{2h} \\ \frac{h}{6}[e^{3h}+2e^{5h/2)}] \end{pmatrix}$$

d'ou

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1868 \\ 0.8657 \\ 0.4067 \end{pmatrix}$$

On va résoudre le systéme $AU = B$ par des méthode numirique(direct) par exemple **(la méthode de l'inverse,Gauss,..)**, et des méthode d'optimisation par exemple **(méthode de Newton,Gradient conjugé,...)**
Et nous dédions dans cette partie :La méthode de l'inverse et la méthode de Newton
Donc on obtient :

$$U_{inv} = \begin{pmatrix} 0.2249 \\ 0.3875 \\ 0.2615 \end{pmatrix} \qquad U_{New} = \begin{pmatrix} 0.0749 \\ 0.1875 \\ 0.1115 \end{pmatrix}$$

Remarque :
la solution exacte de l'équation (3.1) est donné par :

$$u(x) = -e^x + x(e-1) + 1$$

On fait une comparaison enter les méthode précident,les résulta de comparaison sont reportées dans le tableau (I.1)

Méthode des éléments finies					
x_i	U_{ex}	U_{inv}	Erreur absolus	U_{New}	Erreur absolus
1/3	0.1771	0.2249	0.0478	0.0749	0.1022
2/3	0.1978	0.3875	0.1897	0.1875	0.0103
1	0	0.2615	0.2615	0.1115	0.1115
			$\|E_{inv}\| = 0.2615$		$\|E_{New}\| = 0.1115$

À travers le tableau, nous notons que la méthode de **L'élement finin-Newton** est la meilleur que la méthode de **des élement finin-inverse**

2. **Méthode de Galerkin**
   Introduisons une bas de la méthode de Galerkin par le polynôme de Chebychev, qui définis par : $(\varphi_i(x)) = (\cos(ix))_{1\le i\le n}$
   Et dans ce cas $(h = 1/3)$
   On défini la bas $(\varphi_i(x)) = (\cos(ix))_{1\le i\le 3} = (\cos x, \cos 2x, \cos 3x)$
   on va calculer les éléments de la matrice A et le seconde membre par les formules suivante :
   (a) Les élement de la matrice A

$$A_{i,i} = a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi_i'(x)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)^2 dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (-i\sin(ix))^2 dx = i^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \sin(ix)^2 dx$$

$$= i^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1-\cos 2ix}{2} dx$$

$$= i^2 h - \frac{i}{4}\left[\sin 2ix_{i+1} - \sin 2ix_{i-1}\right]$$

$$A_{i,i-1} = a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_0^1 \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i-1}^{'}(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i-1}^{'}(x)dx$$

donc :

$$a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \frac{-(i^2-i)}{2}\left[\frac{1}{2i-1}\sin(2i-1)h - \sin(2i-1)(i-1)h\right] - [\sin(ih) - \sin(i-1)h]$$

$$= a(\varphi_{i-1}, \varphi_i)$$

et

$a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) =$

$$\frac{-(i^2+i)}{2}\left[\frac{1}{2i+1}(\sin(2i+1)(i+1)h - \sin(2i+1)ih)\right] - [sin(i+1)h - \sin(ih)]$$

aussi

$$a(\varphi_{i-2}, \varphi_i) = a(\varphi_{i-2}, \varphi_i) = -\frac{3}{4}[1/4(\sin 12h - \sin 4) - 1/2(\sin 6h - \sin 2h]$$

(b) Second membre

Pour obtenir le second membre

$$B = \int_0^1 f\varphi_i dx$$

il faut calculer l'intégrales

$$\int_0^1 f\varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\varphi_i dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx$$

Pour $i \neq 1$ et $i \neq n$

$$\int_0^1 f\varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} f\varphi_i dx$$

$$= \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{6}\left[f(x_{i-1})\cos(ix_{i-1}) + 4f(x_i)\cos(ix_i) + f(x_{i+1})\cos(ix_{i+1})\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1})\cos(ix_{i-1}) + 4f(x_i)\cos(ix_i) + f(x_{i+1})\cos(ix_{i+1})\right]$$

Pour $i = 1$

$$\int_0^1 f\varphi_1 dx = \int_0^h f\varphi_1 dx$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(0)\cos(0) + 4f(\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2}) + f(h)\cos(h)\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(0) + 4f(\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2}) + f(h)\cos(h)\right]$$

Pour $i = n$

$$\int_0^1 f\varphi_n dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f\varphi_n dx$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(x_{n-1})\cos(nx_{n-1}) + 4f(nh - \frac{h}{2})\cos(nh - \frac{h}{2}) + f(nh)\cos(n^2 h)\right]$$

danc

$$B = \begin{pmatrix} \frac{h}{6}\left[f(0) + 4f(\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2}) + f(h)\cos(h)\right] \\ \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1})\cos(ix_{i-1}) + 4f(x_i)\cos(ix_i) + f(x_{i+1})\cos(ix_{i+1})\right] \\ \dots \\ \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1})\cos(ix_{i-1}) + 4f(x_i)\cos(ix_i) + f(x_{i+1})\cos(ix_{i+1})\right] \\ \frac{h}{6}\left[f(x_{n-1})\cos(nx_{n-1}) + 4f(nh - \frac{h}{2})\cos(nh - \frac{h}{2}) + f(nh)\cos(n^2 h)\right] \end{pmatrix}$$

Danc :

$$A = \begin{pmatrix} 0.3275 & 1.8377\times10^{-6} & 1.5354\times10^{-5} \\ 1.8377\times10^{-6} & 1.3101 & 4.48\times10^{-5} \\ 1.5354\times10^{-5} & 4.48\times10^{-5} & 2.9479 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0.3956 \\ 1.3223 \\ 0.7702 \end{pmatrix}$$

d'ou le système $AU = B$ est :

$$\begin{pmatrix} 0.3275 & 1.8377\times10^{-6} & 1.5354\times10^{-5} \\ 1.8377\times10^{-6} & 1.3101 & 4.48\times10^{-5} \\ 1.5354\times10^{-5} & 4.48\times10^{-5} & 2.9479 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3956 \\ 1.3223 \\ 0.7702 \end{pmatrix}$$

On va résoudre le système par les deux méthodes (inverse et Newton) On obtient :

$$U_{inv} = \begin{pmatrix} 1.2049 \\ 0.9593 \\ 0.2113 \end{pmatrix} \qquad U_{Nwe} = \begin{pmatrix} 1.1579 \\ 1.0093 \\ 0.2612 \end{pmatrix}$$

En comparant les deux méthodes précédentes, nous utilisons le tableau suivant (I.2) :

Méthode de Galerkin					
x_i	U_{ex}	U_{inv}	Erreur absolur	U_{New}	Erreur absolur
1/3	0.1771	1.2079	1.0308	1.1579	0.9808
2/3	0.1978	1.0093	0.8115	0.9593	0.7615
1	0	0.2612	0.2612	0.2113	0.2113
			$\|Er_{inv}\|$= 1.0308		$\|Er_{New}\|$=0.9808

À travers le tableau, nous notons que la méthode de **Galerkin-Newton** est la meilleur que la méthode de **Galerkin-inverse**
D'aprés les deux tableau, nous concluons que la méthode **des Èlément finin-Newton** est la meilleur que la méthode de **Galerkin-Newton**
Mais quand on minimise le pas de sub-divisions on trouver les résultas suivants

Dans la cas $h = 1/5$

1. **Méthode des Élement Finis**
   le systéme $AU = B$ par la méthode des élément finis devient comme suit :

$$\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1070 \\ 0.3978 \\ 0.4859 \\ 0.5935 \\ 0.2546 \end{pmatrix}$$

2. **Galerkin**

   Dans ce cas, la base de la méthode de Galerkin est défini par :
   $(\varphi_i(x))_{1\leq i\leq 5} = (\cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \cos(4x), \cos(5x), \}$,
   donc le systéme il devient comme suit :

$$\begin{pmatrix} 0.1965 & 3.9696\times10^{-7} & 3.3172\times10^{-6} & 1.4286\times10^{-5} & 4.3915\times10^{-5} \\ 3.9696\times10^{-7} & 0.7860 & 9.6957\times10^{-6} & 5.0790\times10^{-5} & 1.6572\times10^{-4} \\ 3.3172\times10^{-6} & 9.6957\times10^{-6} & 1.7686 & 7.5489\times10^{-5} & 3.1223\times10^{-4} \\ 1.4286\times10^{-5} & 5.0790\times10^{-5} & 7.5489\times10^{-5} & 3.1445 & 3.4534\times10^{-4} \\ 4.3915\times10^{-5} & 1.6572\times10^{-4} & 3.1223\times10^{-4} & 3.4534\times10^{-4} & 4.9141 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2214 \\ 0.6007 \\ 0.7333 \\ 0.8947 \\ 0.4922 \end{pmatrix}$$

Nous résolvons les deux systémes et plaçons les résultats dans le tableau suivant (I.3)

x_i	U_{ex}	U_{inv}	$Er.abs$	U_{New}	$Er.abs$	$U_{é.f}$	$Er.ab$
1/5	1.2223	1.1267	1.0044	1.0767	0.9544	-0.5825	0.7048
2/5	0.1955	0.7642	0.5687	0.7142	0.5187	-0.8864	1.0087
3/5	0.2089	0.4146	0.2057	0.3646	0.1557	-0.9698	1.1787
4/5	0.1491	0.2845	0.1354	0.2345	0.0854	-0.0854	0.9995
1	0	01001	0.1001	0.0501	0.0501	-0.5498	0.5498
			$\|Er_{inv}\|$= 1.030		$\|Er_{New}\|$=0.980		$\|Er_{é.f}\|$= 1.178

Le tableau nous assure que la méthode du Newaton est toujours la meilleure méthode pour résoudre les systémes. Et aussi, Notez que chaque fois que nous minimisons le pas, nous constatons que la méthode de **Galerkin-Newton** est meilleure que la méthode **des élément finis-Newton**

B) **Dans le cas** $h = 1/10$

1. **Méthode des Èlements Finis**
   le systéme $AU = B$ par la méthode des élément finis devient comme suit :

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \\ \mu_9 \\ \mu_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.517 \\ 0.1629 \\ 0.1800 \\ 0.1989 \\ 0.2198 \\ 0.2429 \\ 0.2685 \\ 0.2967 \\ 0.3279 \\ 0.1315 \end{pmatrix}$$

2. **Méthode deGalerkin**

   Dans ce cas, $h = 1/10$ on définit la base :
   $(\varphi_i(x)) = \cos(ix)_{1\leq i\leq 10}$

   le systemes $AU = B$ par la méthode de Galerkin devient par :

$$\begin{pmatrix}
0.098 & 4.962\times10^{-8} & 4.146\times10^{-7} & 1.786\times10^{-6} & 5.492\times10^{-6} & 1.371\times10^{-5} & 2.967\times10^{-5} & 0.018 & 1.042\times10-4 & 1.765\times10^{-4}\\
4.962\times10^{-8} & 0.393 & 1.212\times10^{-6} & 6.350\times10^{-6} & 2.073\times10^{-5} & 5.305\times10^{-5} & 1.16\times10^{-4} & 2.28\times10^{-4} & 0.12 & 7.009\times10^{-4}\\
4.146\times10^{-7} & 1.212\times10^{-6} & 0.884 & 9.440\times10^{-6} & 3.906\times10^{-5} & 1.084\times10^{-4} & 2.467\times10^{-4} & 4.943\times10^{-4} & 9.048\times10^{-4} & 0.449\\
1.786\times10^{-6} & 6.350\times10^{-6} & 9.440^{-6} & 1.572 & 4.322\times10^{-5} & 1.550\times10^{-4} & 3.872\times10^{-4} & 8.115\times10^{-4} & 0.001 & 0.002\\
5.492\times10^{-6} & 2.073\times10^{-5} & 3.906\times10^{-5} & 4.322\times10^{-5} & 2.456 & 1.450\times10^{-4} & 4.725\times10^{-4} & 0.001 & 0.002 & 0.003\\
1.371\times10^{-5} & 5.305\times10^{-5} & 1.084\times10^{-4} & 1.550\times10-4 & 1.450\times10^{-4} & 3.537 & 3.962\times10^{-4} & 0.001 & 0.002 & 0.005\\
2.967\times10^{-5} & 1.162\times10^{-4} & 2.467\times10^{-4} & 3.872\times10^{-4} & 4.725\times10^{-4} & 3.962\times10^{-4} & 4.815 & 9.361\times10^{-4} & 0.002 & 0.005\\
5.788\times10^{-5} & 2.283\times10^{-4} & 4.943\times10^{-4} & 8.115\times10^{-4} & 0.001 & 0.001 & 9.361\times10^{-4} & 6.291 & 0.002 & 0.005\\
1.042\times10^{-4} & 4.131\times10^{-4} & 9.048\times10^{-4} & 0.001 & 0.002 & 0.002 & 0.002 & 0.002 & 7.964 & 0.003\\
1.765\times10^{-4} & 7.00\times10^{-4} & 0.001 & 0.002 & 0.003 & 0.005 & 0.005 & 0.0055 & 0.003 & 9.836
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\\ \mu_4\\ \mu_5\\ \mu_6\\ \mu_7\\ \mu_8\\ \mu_9\\ \mu_{10}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.105\\ 0.244\\ 0.270\\ 0.298\\ 0.330\\ 0.364\\ 0.401\\ 0.443\\ 0.487\\ 0.257\end{pmatrix}$$

Nous résolvons les deux systémes et plaçons les résultats dans le tableux suivant :

x_i	U_{ex}	U_{inv}	$E.ab$	U_{New}	$Er.ab$	$U_{é.f}$	$Er.ab$
0.1	0.0667	1.0567	1.05	1.0184	1.0117	-0.3659	0.3723
0.2	0.1223	0.6027	0.4804	0.5716	0.4493	-0.6835	0.8058
0.3	0.1656	0.2925	0.1269	0.2634	0.0978	-0.9173	1.0829
0.4	0.1955	0.1898	0.0057	0.1400	0.0555	-1.0692	0.2647
0.5	0.2104	0.1342	0.0762	0.0843	0.1261	-1.1410	1.3514
0.6	0.2089	0.1028	0.1061	0.0530	0.1559	-1.1347	1.3436
0.7	0.1890	0.0833	0.1057	0.0334	0.1556	-1.0527	1.2417
0.8	0.1491	0.0702	0.1089	0.0188	0.1303	-0.8976	1.046
0.9	0.0869	0.0610	0.0259	0.0065	0.0804	-0.6722	0.7591
1	0	0.0258	0.0258	0.0800	0.0800	-0.3795	0.3795
			$\Vert Er_{inv}\Vert = 1.05$		$\Vert Er_{New}\Vert = 1.0117$		$\Vert Er_{é.f}\Vert = 1.3514$

Remarque :
Les résultats obtenus dans les tableaux précédents montrent clairment que :

- La méthode de Newton est toujours la meilleure pour résoudre les systèmes numériques.
- La méthode de Galerkin-Newton est meilleure que la méthode des éléments finis qand le pas subdivision est très petit

Annexe

A.1 Les Eléments de la matrice A

les élement de la martice A donné par les formules suivents :

$$A_{i,i+3} = a(\varphi_i, \varphi_{i+3}) = \int_0^1 \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+3}^{'}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+3}} \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+3}^{'}(x)dx$$

$$= \frac{-(i^2+3i)}{2}\left[\frac{1}{2i+3}(\sin(2i+3)(i+3)h - \sin(2i+3)ih) - \frac{1}{3}(sin(3i+3)h - \sin(3ih))\right]$$

$$A_{i,i+4} = a(\varphi_i, \varphi_{i+4}) = \int_0^1 \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+4}^{'}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+4}} \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+4}^{'}(x)dx$$

$$= \frac{-(i^2+4i)}{2}\left[\frac{1}{2i+4}(\sin(2i+4)(i+4)h - \sin(2i+4)ih) - \frac{1}{4}(sin(4(i+1)h - \sin(4ih))\right]$$

$$A_{i,i+5} = a(\varphi_i, \varphi_{i+5}) = \int_0^1 \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+5}^{'}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+5}} \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+5}^{'}(x)dx$$

$$= \frac{-(i^2+5i)}{2}\left[\frac{1}{2i+5}(\sin(2i+5)(i+5)h - \sin(2i+5)ih) - \frac{1}{5}(sin(5(i+1)h - \sin(5ih))\right]$$

$$A_{i,i+6} = a(\varphi_i, \varphi_{i+6}) = \int_0^1 \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+6}^{'}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+6}} \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+6}^{'}(x)dx$$

$$= \frac{-(i^2+6i)}{2}\left[\frac{1}{2i+6}(\sin(2i+6)(i+6)h - \sin(2i+6)ih) - \frac{1}{6}(sin(6(i+6)h) - \sin(6ih))\right]$$

$$A_{i,i+7} = a(\varphi_i, \varphi_{i+7}) = \int_0^1 \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+7}^{'}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+7}} \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+7}^{'}(x)dx$$

$$= \frac{-(i^2+7i)}{2}\left[\frac{1}{2i+7}(\sin(2i+7)(i+7)h - \sin(2i+7)ih) - \frac{1}{7}(sin(7(i+7)h) - \sin(7ih))\right]$$

$$A_{i,i+8} = a(\varphi_i, \varphi_{i+8}) = \int_0^1 \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+8}^{'}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+8}} \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+8}^{'}(x)dx$$

$$= \frac{-(i^2+8i)}{2}\left[\frac{1}{2i+8}(\sin(2i+8)(i+8)h - \sin(2i+8)ih) - \frac{1}{8}(sin(8(i+8)h) - \sin(8ih))\right]$$

$$A_{i,i+9} = a(\varphi_i, \varphi_{i+9}) = \int_0^1 \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+9}^{'}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+9}} \varphi_i^{'}(x)\varphi_{i+9}^{'}(x)dx$$

$$= \frac{-(i^2+9i)}{2}\left[\frac{1}{2i+9}(\sin(2i+9)(i+9)h - \sin(2i+9)ih) - \frac{1}{9}(sin(9(i+9)h) - \sin(9ih))\right]$$

$$A_{i,i-2} = \frac{-(i-2i)i}{2}\left[\frac{1}{2i-2}(\sin(2i-2)ih - \sin(2i-2)(i-2)h) - \frac{1}{2}(\sin(2ih) - \sin(2(i-2)h)\right]$$

.

.

.

$$A_{i,i-9} = \frac{-(i-9i)i}{2}\left[\frac{1}{2i-9}(\sin(2i-9)ih - \sin(2i-9)(i-9)h) - \frac{1}{2}(\sin(9ih) - \sin(9(i-9)h)\right]$$

A.2 Solution Exacte de problème (3.1)

Nous considére le probléme de Poissons suivant :

$$(p) \quad \begin{cases} -\Delta u = f, \;\; dans \;\; \Omega \\ u = 0 \quad sur \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Remarquons d'emblée qu'il s'agit d'une équation différentielle ordinaire du second ordre que l'on doit résoudre sur]0,1[. la résolution explicite de cette équation différentielle est immédiate puisque l'on a d'abord

$$u^{'}(s) = -\int_0^S f(t)dt + C_1$$

où C^1 est une constante à déterminer. On peut alors réintégrer en

$$u(x) = \int_0^x u^{'}(s)ds = -\int_0^x \left(\int_0^s f(t)dt\right)ds + C_1 x + C_2$$

où C_2 est une nouvelle constante à déterminer
Les deux conditions au bord $(u(0) = u(1) = 0)$ permettent alors de déterminer C_1 et C_2 et l'on obtient

$$u(0) = -\int_0^0 \left(\int_0^s f(t)dt\right)ds + C_1(0) + C_2 = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$$

$$u(1) = -\int_0^1 \left(\int_0^s f(t)dt\right)ds + C_1 \Longrightarrow C_1 = \int_0^1 \left(\int_0^s f(t)dt\right)ds$$

On alors

$$u(x) = -\int_0^1 \left(\int_0^s f(t)dt\right)ds + x\int_0^1 \left(\int_0^s f(t)dt\right)ds$$

Notons enfin, que le calcul précédent a un sens dés que $f \in L^1(0,1)$.

A.3 Algorithme de la Méthode de Newton En Matlab

Matlab est un langage de programation de quatriéme génération émulé par un environnement de développement du méme nom, il est utilisé à la fin de s calcules numirique. Dans un premier temps, nous présentons les Algoritmes mis en place Algorithme de Newton

Algo de gardien
Algo de le hesinne
Algo de Newton
Dans un second temps nous résolvons les systeme.

```
la fonction est:

function ma =f(x)
n=length(x);
b=transp([0.0499167707;0.1281052586;0.0465459552]);
A=diag(-10*ones(n-1,1),1)+ diag(20*ones(n,1),0)+ diag(-10*ones(n-1,1),-1);
ma=(1/2)*((transp(x)*A)*x)-b*x;

end
===================================================================
le gradient est:
function [d]= gradf(x0,h)
n= length(x0);
l= eye(n);
for i=1:n
e=l(1:n,i);
d(i)=(f(x0+(e*h))-f(x0))/h;
end

end
=======================================================================
le hessient est :
function H=hessf(x0,h)
n=length(x0);
l=eye(n);
for i=1:n
for j=1:n
ei=l(1:n,i);
ej=l(1:n,j);
H(i,j)=(f(x0+h*ei+h*ej)-f(x0+h*ei)-f(x0+h*ej)+f(x0))/(h^2);
end
end
end
======================================================================
alhg newoton:
function solopt= AlgoNewton(x0,h,ep)
tic
k=0;

d=gradf(x0,h);
disp('le gradient est :')
d
```

```
D=norm(d);
H=hessf(x0,h);
disp('La matrice  :')
H
F=inv(H);
while (ep<=D)
w=d.';
K=F*w;
x1=x0-K;
d=gradf(x1,h);
D=norm(d);
H=hessf(x1,h);
F=inv(H);
x0=x1;
k=k+1;
end
X=x0;
nlter=k;

disp(['la nomber iteration  est :',num2str(nlter)])
disp('******************************************')
disp('la solution de newton est :')
X
toc
end
==================================================================================
```

Conclusion

La plupart des phénomènes mécaniques, physiques, biologiques ou économiques sont modélisées à l'aide d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires et le développement de ces sciences passe en partie par une meilleure compréhension des propriétés des solutions de ces EDP.

Dans ce mémoire qui a pour objet ce type de synthèse, on s'intéresse à résoudre un type EDP hyperbolique, avec des techniques basées sur la discrétisation temporelle, la formulation variationnelle et l'intervention du théorème de Lax-Milgram, on a bien répondus à la question des problèmes différentiels bien posés, aimables à l'approximation par des méthodes numériques connues, fiables et conformes, telle que celle des éléments finis.

La problématique du choix de notre thème est le résultat d'une réflexion sur l'amélioration de l'approximation et la précision de la solution par rapport aux méthodes citées ci-dessus.

Notre idée est présentée par une simple contribution basée sur une combinaison de méthodes déjà vues à travers notre cursus, où on a impliqué quelques méthodes d'optimisations, telles que la méthode de minimisation d'énergie dans la partie théorique, existence et unicité de la solution et la méthode de Galerkin-Newton, dans la partie numérique et enfin avec une application, on a aboutit à des résultats satisfaisants !

À titre de remarques d'ordre perspectif, ce résultat signalé peut s'améliorer plus, si on pense à optimiser la base hilbertienne de l'espace admissible $V_h = [\{\varphi_i(x)\}] \subset H_0^1(\Omega)$ où $0 \leq i \leq N$ et $N = dimV_h$.

Comme la méthode utilisée est constructive, sa programmation est un domaine important.

La généralisation de cette méthode, nous fait appel à l’étude des problèmes EDP fractionnaires.
où on impliquer quelques méthodes d’optimisations, telle que la méthode de minimisation d'énergie dans la partie théorique, existence et unicité de la solution et la méthode de Galerkin-Newton, dans la partie numérique, dans le but d’améliorer l’approximation et la précision de la solution par rapport à d’autres méthodes, telle que celle des éléments finis

Enfin, il reste de connaître quels résultats attendus pour l’approximation des valeurs propres à d’autres matrices usuelles.

L’objet du troisième chapitre sera en première partie, application de la méthode choisie de Galarekin-Newton, qui s’appuie sur la combinaison de quelques méthodes d’optimisation avec un traitement des erreurs justifiant l’amélioration inspirée et dans la deuxième partie, on a essayé de présenter un exemple d’application sur un problème de transport à titre de compréhension.

Bibliographies :

[1] Brezis, H. (1983), Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications (Masson, Paris),

[2] J. Baranger. Analyse numérique. Hermann, 1988,

[3] P.G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation, Masson 1982,

[4] Ciarlet, P.G. (1978), The Finite Element Method for Elliptic Problems (North-Holland, Amsterdam),

[5] Ciarlet, P.G. (1991), Basic error estimates for elliptic problems in: Handbook of Numerical Analysis II (North-Holland,Amsterdam) 17-352,

[6] J.A. Desideri. Introduction à l'analyse numérique. INRIA, 1998,

[7] P.A. Raviart and JM Thomas. Introduction a' l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.