

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

ABBES LAGHROUR –KHENCHELA UNIVERSITY
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR –KHENCHELA



جامعة عباس لغرور خنشلة

Faculté de Sciences et Technologie
Département Sciences de la matière

22/01/ 2026



THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de **Doctorat en Science**

**Caractérisation mécanique et modélisation du comportement
anisotrope et hétérogène des tôles métalliques**

Filière de la formation : Physique

Spécialité : Physique des matériaux

Par

BRINIS NAOEL

DIRECTEUR DE THESE: O. CHAHAOUI Professeur U. Khenchela

DEVANT LE JURY

PRESIDENTE	A. MESSAI	Professeur	U. Khenchela
EXAMINATEURS	S. KHEMISSI	MCA	U. Khenchela
	H. DJEBAILI	Professeur	U. Khenchela
	C. REBIAI	Professeur	U. BATNA 2
	Y. ATMANI	MCA	ENSTA-Alger

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus sincère gratitude à Monsieur le Professeur **O. Chahaoui**, directeur de cette thèse, pour la confiance qu'il m'a accordée, pour son accompagnement constant, et pour la rigueur scientifique qu'il m'a transmise au fil de ces années de recherche. Son engagement, sa bienveillance et la richesse de ses conseils ont été des repères précieux tout au long de ce travail. Je le remercie profondément pour sa disponibilité, son exigence intellectuelle, et pour l'autonomie qu'il m'a offerte, tout en me guidant avec clairvoyance.

Je tiens également à adresser mes remerciements les plus respectueux à l'ensemble des membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger cette thèse.

Je remercie Madame la Professeure **A. Messai**, Présidente du jury, pour avoir présidé cette soutenance avec bienveillance, et pour l'attention qu'elle a portée à mon travail.

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur le Professeur **H. Djebaili** et à Monsieur le Professeur **C. Rebiai** d'avoir accepté d'évaluer ce manuscrit. Leurs lectures attentives, leurs remarques pertinentes et leurs suggestions constructives ont grandement contribué à enrichir la portée scientifique de cette étude.

Mes remerciements chaleureux vont également à Monsieur **S. Khemissi**, Maître de Conférences classe A, pour ses commentaires judicieux et son regard critique sur les résultats présentés, ainsi que pour sa bienveillance lors de cette soutenance.

Enfin, je remercie vivement Monsieur **Y. Atmani**, Maître de Conférences classe A à l'École Nationale Supérieure des Technologies Avancées (ENSTA) à Bordj Elkiffan, pour sa disponibilité, l'intérêt qu'il a porté à mes travaux, et pour la qualité de ses échanges lors de l'évaluation.

À chacune et chacun d'entre vous, je suis redevable pour la qualité de vos apports scientifiques, pour l'attention précieuse accordée à ce travail, et pour l'honneur que vous m'avez fait en acceptant de siéger dans ce jury. Vos remarques et vos encouragements continueront d'accompagner ma réflexion au-delà de cette soutenance.

Dédicace

À mes enfants,
Massinissa, Fares, Ines et Anes,

Vous êtes la source de ma force, la lumière qui éclaire mes pas et le sens profond de mon engagement.

À **Massinissa**, mon aîné, que j'ai vu grandir avec sagesse et courage,
À **Fares**, dont la curiosité et la vivacité m'inspirent chaque jour,
À **Ines**, au regard doux et à la sensibilité infinie,
Et à **Anes**, le plus jeune, dont l'innocence et l'énergie me donnent tant d'espoir.

C'est à vous, mes chers enfants, que je dédie ce travail,
Avec tout l'amour d'une mère fière de vous et confiant en vos lendemains.

Résumé : Cette étude propose une comparaison entre les propriétés mécaniques prédites numériquement — à partir de la famille des critères anisotropes BBC — et les résultats expérimentaux mesurés sur des tôles d'acier doux DC04. L'évolution des caractéristiques mécaniques, notamment les contraintes d'écoulement et le coefficient de Lankford, a été analysée durant les premières phases de l'anisotropie plastique ainsi que lors de l'écrouissage mécanique au cours du formage. Les résultats montrent que l'évolution des propriétés mécaniques sous l'effet d'un écrouissage isotrope a été correctement prédite en fonction des niveaux de déformation sélectionnés lors des essais de traction. Un modèle de régression a été proposé pour décrire de manière efficace le comportement de la contrainte d'écoulement et de la valeur r . Le paramètre de Lankford a été déterminé comme une valeur instantanée en utilisant un ajustement polynomial de la courbe reliant les déformations plastiques vraies transversales et longitudinales. La famille des critères BBC (BBC2003_8p, BBC2005_8p, BBC2008_8p et BBC2008_16p), formulée avec 8 et 16 paramètres orthotropes indépendants, a été implémentée dans un cadre de plasticité non associée et testée selon différentes orientations du matériau par rapport à la direction de laminage de la tôle. Deux grandeurs mécaniques clés ont été analysées en fonction de l'orientation :

- (i) le coefficient d'anisotropie de Lankford, $r(\theta)$.
- (ii) la contrainte d'écoulement plastique, $\sigma(\theta)$.

Dans une seconde phase, le comportement mécanique de la tôle a été évalué en intégrant à la fois l'anisotropie initiale et son évolution, selon deux approches de modélisation plastique :

- (i) la théorie de la plasticité associée ;
- (ii) la théorie de la plasticité non associée.

Enfin, une analyse comparative a porté sur le paramètre d'anisotropie $r(\theta)$ et un second paramètre anisotrope $\rho(\theta)$, ce dernier étant dérivé du coefficient de dureté Vickers (H_V). Une relation polynomiale a été établie entre ces deux grandeurs, révélant une corrélation statistiquement significative.

Mots-clés : Acier DC04 · Comportement anisotrope · Loi d'écoulement non associée · Famille de critères BBC · Évolution de l'écrouissage · Corrélation dureté–anisotropie

Abstract : This study compares the mechanical properties of numerically predicted anisotropic parameters (using the BBC family of models) and experimentally measured results for DC04 steel sheets. The evolution of mechanical properties—such as flow stresses and Lankford coefficient—was analysed during initial plastic anisotropy and mechanical strain hardening in material forming. The results show that the evolution of mechanical properties under isotropic work hardening was predicted with respect to the selected strain levels during tensile testing of the steel. A proposed regression model effectively described the yield stress and *r-value* behaviour. The Lankford parameter was determined as an instantaneous value based on polynomial fitting of the transverse versus longitudinal true plastic strain curve. Using 08 and 16 independent orthotropic parameters, the BBC criteria family (2003_8p, 2005_8p, 2008_8p, and 2008_16p) was formulated and tested under a non-associated plasticity framework across different material orientations relative to the sheet's rolling direction. Two key mechanical quantities were analyzed as a function of orientation:

- (i) the Lankford anisotropy coefficient, $r(\theta)$.
- (ii) the plastic flow stress, $\sigma(\theta)$.

In a second phase, the sheet's mechanical behavior was assessed by incorporating both initial anisotropy and its evolution, using two distinct plasticity modeling approaches:

- (i) associated flow rule theory;
- (ii) non-associated flow rule theory.

Finally, a comparative analysis was performed between the anisotropy parameter $r(\theta)$ and a second anisotropic parameter $\rho(\theta)$, the latter derived from Vickers hardness (HV) measurements. A polynomial relationship was established between these two parameters, revealing a statistically significant correlation.

Keywords: DC04 steel · Anisotropic behaviour · Non-associated flow rule · BBC yield criteria · Work hardening evolution · Hardness–anisotropy correlation

الملخص

يظل التنبؤ بالخواص الميكانيكية في ظل تباين الخواص الأولي، الخاضع لمعيار اللدونة، مقيداً بشكل عام بافتراض اللدونة الكاملة. ويُعدّ التوصيف الدقيق لتطور هذه الخصائص خلال مرحلتي التصلب والتماسك - وصولاً إلى عدم الاستقرار اللدوني (التصلب) - أمراً بالغ الأهمية لتحسين عمليات التشكيل. تُركز هذه الدراسة على صفيحة فولاذية DC04 مدلفنة، مُخصصة لتطبيقات السحب العميق، والتي قُيِّمت معاملاتها الميكانيكية بشكل منهجي لتحليل مراحل التشكيل اللاحقة وتحسينها. أُجريت أولاً دراسة مقارنة بين معيارين لللدونة: معيار هيل التربيعي (1948) ومعيار بانابيك وبالان وكومسا غير التربيعي (من عائلة BBC)، تحت تأثير تحميل أحادي المحور في المستوى. تم تحليل كميتين ميكانيكيتين رئيسيتين كدالة للاتجاه:

(i) معامل تباين الخواص لانكفورد، $r(\theta)$.

(ii) إجهاد التدفق اللدن، $\sigma(\theta)$.

في مرحلة ثانية، قُيِّم السلوك الميكانيكي للصفحة من خلال دمج كلٍّ من التباين الأولي وتطوره، باستخدام منهجين مُختلفين لنمذجة اللدونة:

(i) نظرية قاعدة التدفق المُرتبط؛

(ii) نظرية قاعدة التدفق غير المُرتبط.

وأخيراً، أُجري تحليل مُقارن بين معامل التباين $r(\theta)$ ومعامل التباين الثاني $\rho(\theta)$ ، المُشتق من قياسات صلابة فيكرز (HV). وُجدت علاقة متعددة الحدود بين هذين المُعاملين، مما كشف عن ارتباط ذي دلالة إحصائية.

Liste des Figures

Figure	Chapitre 1	Page
Figure 1.1	Champ de déplacement	10
Figure 1.2	Les huit symétries de l'élasticité linéaire	22
Figure 1.3	Rotation par rapport à un plan de symétrie	23
Figure 1.4	Rotation par rapport à deux plans de symétrie	26
Figure 1.5	Corps ayant deux plans de symétrie	28
Figure 1.6	Corps ayant Symétrie isotrope Transverse	30
Figure 1.7	Corps ayant une symétrie cubique	34
Chapitre 2		
Figure 2.1	Modélisation physique et phénoménologique des métaux	50
Figure 2.2	Dessin de la partie cylindrique	51
Figure 2.3	État de contrainte et de déformation de la partie cylindrique	51
Figure 2.4	Trajectoires de déformation pour la partie cylindrique	51
Figure 2.5	Les principales lois d'écrouissage en espace t de contraintes principales	54
Figure 2.6	Schéma de la courbe d'écrouissage pour une condition de charge inversée.	57
Figure 2.7	Essais de traction uniaxiale dans différentes directions	59
Chapitre 3		
Figure 3.1	Défauts de fissuration et de pliage sous forme des cornes sur l'emboutis.	75
Figure 3.2	La forme et les dimensions de nos éprouvettes plates normalisées.	77
Figure 3.3	Echantillon suivant DL	77
Figure 3.4	Echantillon suivant DD	77
Figure 3.5	Echantillon suivant DT	78
Figure 3.6	Machine de traction de marque HOYTOM	79
Figure 3.7	(a) Vue globale d'une tôle, (b) Éprouvettes prismatiques de traction	80
Figure 3.8	Courbe expérimentale uniaxiale contrainte-déformation de la tôle d'acier DC04 pour : (a) Essai de traction conventionnelle, (b) Essai de traction réelle.	83
Figure 3.9	Évolution des paramètres d'anisotropie sous différentes directions de chargement pour (a) la limite d'écoulement normalisée, (b) le coefficient d'anisotropie	85
Figure 3.10	Faces des essais de dureté Vickers	87
Figure 3.11	(a) Corrélation optimale $Hv = f(\sigma_{UTS})$ et (b) Dépendance angulaire de la dureté mécanique Hv correspondante aux plans $(ND-\theta^\circ)$	89
Figure 3.12	Corrélation entre le coefficient de Lankford et le rapport d'aspect dans l'essai de dureté Vickers	90

Figure 3.13	Propriétés de traction normalisées prévues par les critères de la famille BBC suivant différentes directions : (a) contrainte d'écoulement sous AFR, (b) $r(\theta)$ sous l'hypothèse AFR, (c) contrainte d'écoulement sous l'hypothèse non-AFR sauf BBC_16p, et (d) $r(\theta)$ sous l'hypothèse non-AFR sauf pour BBC_16p.	97
Figure 3.14	Comparaison des surfaces des contraintes et de coefficient d'anisotropie prévues avec contrainte de cisaillement nulle (contours pour $\sigma_{12}=0$) dans le plan de la tôle: (a) l'approche AFR, (b) l'approche <i>non-AFR_S</i> , et (c) l'approche <i>non-AFR_r</i> à l'exception du critère BBC 2008_16p	98
Figure 3.15	Ajustement expérimental de la courbe d'écrouissage à l'aide du modèle de Hockett-Sherby : (a) selon la direction du laminage (b) prévision pour différentes orientations et à l'expansion biaxiale.	99
Figure 3.16	Rapports expérimentaux entre les déformations plastiques transversales et longitudinales suivant sept angles de coupe.	102
Figure 3.17	Fig. 3.17 (a) Évolution du coefficient de Lankford en fonction de la déformation plastique suivant les sept directions par rapport à la DL et (b) Coefficient de Lankford equibiaxial déterminé par (Yld96).	104
Figure 3.18	Évolution des surfaces d'écoulement et de potentiel plastique avec l'augmentation de la déformation plastique effective pour : (a) BBC 2003, (b) BBC 2005, (c) BBC 2008_8p, et (d) BBC 2008_16p sous l'approche non-AFR et AFR.	106
Fig. 3.19	Comparaison entre la dépendance angulaire des paramètres anisotropes normalisés $\sigma(\theta)$ dans et $r(\theta)$, prédits par les modèles de la famille BBC dans le cadre de l'hypothèse (associée et non associée), pour différents niveaux globaux de déformation plastique équivalente.	108

Liste des Tableaux

Tableau	Chapitre 3	Page
Tableau 3.1	Composition chimique de l'acier DC04 (% massique).	76
Tableau 3.2	Contrainte d'écoulement uniaxiale.	82
Tableau 3.3	Propriétés Mécaniques de l'acier DC04.	85
Tableau 3.4	Valeurs normalisées des $\sigma(\theta)$ et $r(\theta)$ calibrées par rapport à la direction de référence (RD).	86
Tableau 3.5	Valeurs de dureté mesurées et rapport d'aspect d'anisotropie ρ	89
Tableau 3.6	Coefficients Yld96 pour DC04 (exposant $a = 6$)	95
Tableau 3.7	Coefficients des critères de plasticité pour les stratégies d'identification	96
Tableau 3.8	Constantes ajustées pour l'écrouissage de Hockett-Sherby formulé par l'équation (3.17)	101
Tableau 3.9	Les constantes de la régression linéaire.	104
Tableau 3.10	les constants ajustés selon l' eq. ((3.22))	106

Sommaire de la thèse	Page
Introduction générale	1
Chapitre 1 : Plasticité des milieux continus	5
1. Introduction	6
2. Contexte	6
3. Tenseurs de contraintes et de déformations	6
4. Invariants tensoriels	7
5. Tenseur sphérique et déviatorique	8
6. Diverses mesures de la déformation	10
7. Conditions de compatibilité (Saint Venant)	13
8. la loi de Hooke	15
9. Hypothèse d'incompressibilité	17
10. La loi de Hooke anisotrope	17
11. Notation de Voigt	19
12. Influence des propriétés mécaniques sur la loi de Hooke généralisée	21-37
• Symétrie monoclinique	
• Symétrie orthotrope	
• Symétrie cubique	
• Symétrie isotrope	
13. Relations entre les Constantes élastiques en Ingénierie	38
14. Résolution du problème élastique (Méthodes semi-inverse)	39-47
Chapitre 2 : Plasticité anisotrope	48
1. Introduction	49
2. Influence du mode de déformation	50
3. Modélisation mathématique du comportement élastoplastique	52
4. Identification des coefficients des modèles d'écrouissage isotrope	54
5. Lois d'écrouissage isotrope couramment utilisées	54
6. Effet Bauschinger	56
7. Critères d'écoulement plastique (Hill 48, Hill 79, Yld2000.)	58-67
8. Approches phénoménologiques des lois de comportement plastique : cadres associés (AFR) et non associés (NAFR)	68-72
Chapitre 3 : Caractérisation mécanique	73
1. Introduction	74

2. Motivation et contexte industriel du choix du matériau étudié	74
3. Le procédé d'emboutissage : optimisation et défis industriels	75
4. Corrélation entre l'anisotropie et les caractéristiques mécaniques issues de dureté	78-79
• Observations Microscopiques	
• Quantification de la taille des grains et corrélation avec les propriétés mécaniques	
5. Méthodologie d'essai de traction uniaxiale	80
6. Dépouillement des données expérimentales	81
7. Évaluation de l'anisotropie plastique moyenne et planaire à partir des coefficients de Lankford expérimentaux	85
8. Représentation polaire de l'anisotropie des tôles métalliques	86
9. Essais mécaniques de dureté Vickers	87
10. Corrélation entre les valeurs de dureté et le rapport d'anisotropie	88
11. Relation entre la dureté et la résistance maximale : analyse statistique et influence de l'anisotropie	89
12. Description des critères d'écoulement plastique	91
13. Critères d'écoulement de la famille BBC (2003,2005,2008)	92-94
14. Relations constitutives pour un chargement orienté	94
15. Coefficient d'anisotropie equibiaxial du critère de Barlat 1996 (Yld96)	95
16. Optimisation des paramètres matériaux	95
17. Validation de la famille des critères BBC	97
18. Validation des critères de plasticité sur plusieurs orientations	97
19. Courbes d'écoulement de l'acier DC04	99
20. Evolution du coefficients d'anisotropie $r(\theta)$	101
21. Évolution du comportement plastique en cours d'écrouissage	106
Conclusions Générales	110
Perspectives	111
Références bibliographiques	112

Introduction générale

Introduction générale

Parmi les procédés de transformation des matériaux, le formage constitue une technique incontournable dans le paysage industriel moderne, tant par sa polyvalence opérationnelle que par son efficacité économique. Ce procédé joue un rôle déterminant dans la production de pièces aux géométries complexes, particulièrement dans des secteurs exigeants tels que l'automobile et l'aéronautique. L'efficacité du formage dépend étroitement des propriétés mécaniques des tôles métalliques, elles-mêmes profondément influencées par l'anisotropie induite lors des étapes préalables de laminage. En effet, le laminage confère aux matériaux une texture cristallographique directionnelle, résultant de l'orientation préférentielle des grains. Ce phénomène s'explique par deux mécanismes complémentaires : d'une part, la recristallisation dynamique lors du travail à chaud favorise la stabilisation d'orientations cristallographiques spécifiques ; d'autre part, l'absence de transformation de phase au cours du refroidissement limite toute réorganisation significative de ces orientations. Ainsi, les métaux laminés développent une anisotropie intrinsèque persistante, résistant aux tentatives d'homogénéisation par traitements thermiques ou laminage à froid ultérieur.

Dans ce cadre, cette étude se concentre sur l'acier DC04, un matériau de prédilection pour les applications de formage en raison de son excellent compromis entre formabilité et rentabilité. Son utilisation s'étend des structures automobiles aux composants aéronautiques, où la précision dimensionnelle et la stabilité géométrique sont des impératifs critiques.

D'un point de vue microstructural, les tôles laminées présentent typiquement une symétrie orthotrope, caractérisée par trois plans de symétrie mutuellement perpendiculaires. Cette configuration génère une anisotropie mécanique prononcée, qui régit le comportement plastique et la formabilité du matériau. Cette caractéristique est particulièrement marquée dans certains alliages, comme les aciers ferritiques ou les alliages d'aluminium, où le laminage à chaud induit des textures cristallographiques hautement directionnelles.

Pour modéliser ce comportement anisotrope, de nombreux critères de plasticité ont été développés. Les approches classiques incluent à la fois des fonctions quadratiques et non quadratiques. Parmi les premières, le critère de Hill (1948), qui constitue une extension anisotrope de la théorie isotrope de Von Mises, repose sur l'hypothèse d'une loi de plasticité associée. Par la suite, Hosford a proposé une formulation isotrope alternative, qui fut adaptée au cas planaire anisotrope par plusieurs chercheurs notamment F.Barlat et la famille de critères de BBC (2003_8p, 2005_8p, 2008_8p, and 2008_16p), donnant naissance à une nouvelle classe de critères plus représentatifs du comportement réel des tôles industrielles.

Il convient de souligner qu'au cours des dernières années, plusieurs fonctions d'écoulement plastique anisotrope ont été proposées dans le cadre des hypothèses d'écoulements associées (AFR), chacune visant des objectifs spécifiques avec des niveaux de précision variés. Toutefois, il demeure difficile de caractériser de manière exhaustive les propriétés anisotropes en utilisant un critère de plasticité unique conforme à l'AFR. En s'appuyant sur la célèbre fonction quadratique de Hill (1948), et dans le but de décrire à la fois l'initiation de la plasticité et le comportement d'écoulement, Stoughton a introduit une approche simple et élégante reposant sur la règle d'écoulement non associée (non-AFR). Cette méthode repose sur l'utilisation de deux fonctions distinctes : l'une décrivant le critère d'écoulement et l'autre représentant le potentiel plastique anisotrope. Cette nouvelle approche permet notamment de s'affranchir des limitations imposées par l'ancienne règle associée au critère de plasticité, en séparant clairement la fonction de chargement et la fonction du tenseur de déformation. Sur la base de cette hypothèse non-AFR, plusieurs fonctions de plasticité phénoménologiques ont été développées afin de mieux représenter le comportement anisotrope des matériaux.

Pour l'évaluation locale des propriétés mécaniques, la méthode d'indentation est largement imposée en raison de son caractère quasi non destructif. La dureté d'un matériau, mesurée par cette technique, traduit sa résistance à la déformation plastique localisée sous chargement par pénétration. Dans le régime d'écrouissage des matériaux métalliques, de nombreuses corrélations empiriques ont été établies entre la dureté Vickers et la contrainte d'écoulement.

La présente étude s'intéresse à l'analyse du comportement mécanique anisotrope des tôles d'acier de nuance DC04 laminées à froid, à travers l'examen des tenseurs de contrainte et de déformation, en se plaçant à la fois dans les cadres de la règle d'écoulement associée (AFR) et de la règle non associée (non-AFR). Plusieurs formulations de la famille de critères de plasticité BBC à forme non quadratique (2003_8p, 2005_8p, 2008_8p et 2008_16p) ont été mises en œuvre pour évaluer leur pertinence en modélisant les réponses mécaniques du matériau. L'étude a également approfondi l'analyse de l'écrouissage mécanique et de l'anisotropie plastique initiale, en caractérisant l'évolution simultanée des contraintes d'écoulement et du coefficient de Lankford au cours du formage. Afin d'évaluer la résistance à la déformation plastique, des essais de dureté Vickers (H_v) ont été réalisés.

Ce travail de thèse se répartit en 2 grandes parties constituées de 3 chapitres:

1. Partie bibliographique : La première partie du travail est structurée en deux chapitres distincts :

- **Chapitre 1 :** Ce chapitre introduit les concepts fondamentaux de la plasticité des milieux continus (*Quelques Concepts Fondamentaux*) nécessaires pour une étude approfondie de la modélisation constitutive ultérieure. On y aborde différentes notations pour les tenseurs de contraintes et de déformations, diverses définitions de la déformation, les bases de la cinématique des grandes déformations, ainsi que des notions telles que la contrainte déviatorique et l'hypothèse d'incompressibilité plastique. Une formulation de l'élasticité isotrope pour les cas tridimensionnels et de contraintes planes est également fournie.
 - **Chapitre 2 :** Ce chapitre propose une synthèse approfondie des outils conceptuels et mathématiques mobilisés dans la modélisation phénoménologique du comportement plastique des matériaux, en particulier dans le contexte des procédés de mise en forme appliqués aux tôles métalliques laminées. Il s'agit de poser les bases théoriques nécessaires à la compréhension des différents modèles de plasticité, tout en soulignant les enjeux liés à l'anisotropie induite par le laminage. Une première section est consacrée aux critères de plasticité classiques, tant isotropes qu'anisotropes. Ces derniers sont analysés à travers leurs fondements physiques, leurs hypothèses sous-jacentes, et les contextes dans lesquels ils s'appliquent. Par la suite, l'analyse s'étend aux formulations plus récentes, notamment les critères de plasticité non quadratiques, développés pour mieux représenter les comportements mécaniques directionnels observés expérimentalement. Enfin, différentes expressions fonctionnelles des lois d'écoulement plastique sont discutées, chacune traduisant une approche spécifique de la modélisation du comportement des matériaux anisotropes. Cette diversité théorique reflète la richesse des stratégies disponibles pour rendre compte, de manière réaliste, des phénomènes observés au cours du formage des tôles.
- 2. Partie expérimentale :** La seconde partie de ce travail est consacrée à l'investigation expérimentale du comportement plastique de l'acier laminé, ainsi qu'à sa modélisation mécanique à l'aide de critères avancés. Elle se décline en deux volets complémentaires : la caractérisation expérimentale d'une part, et l'analyse comparative avec des modèles théoriques d'autre part.

- **i) Caractérisation expérimentale :** Une campagne expérimentale méthodique a été mise en œuvre afin de quantifier les propriétés mécaniques du matériau selon différentes directions par rapport à

l'axe de laminage. Des éprouvettes ont été découpées à intervalles angulaires réguliers de 15°, couvrant ainsi une large plage d'orientations. Des essais de traction uniaxiale ont été réalisés jusqu'à un taux de déformation maximal de 30 %, seuil fixé pour rester dans le domaine de déformation homogène et éviter l'amorçage de l'instabilité plastique. Parallèlement, des mesures de dureté Vickers ont été effectuées à différentes profondeurs de la tôle. Ces mesures visent à explorer l'évolution locale des propriétés mécaniques en épaisseur et à identifier d'éventuelles corrélations entre la dureté du matériau et son comportement anisotrope, notamment via le coefficient d'anisotropie plastique.

- **ii) Modélisation mécanique :** Les résultats expérimentaux obtenus sont confrontés aux prédictions théoriques issues de plusieurs critères de plasticité appartenant à la famille des modèles BBC, dans leurs formulations successives (2003, 2005 et 2008). Cette comparaison s'inscrit dans le cadre de la plasticité associée et porte sur deux indicateurs majeurs du comportement plastique des tôles : la contrainte d'écoulement et le coefficient de Lankford $r(\theta)$. L'objectif est d'évaluer la pertinence de ces critères dans la reproduction fidèle de l'anisotropie mécanique observée, et de dégager les apports spécifiques de chaque version du modèle.

Chapitre 1

Elasticité des milieux continus :

Quelques Concepts Fondamentaux

1. Introduction :

L'élasticité des milieux continus constitue l'un des piliers fondamentaux de la mécanique des matériaux et de la modélisation du comportement mécanique des structures. Elle fournit le cadre théorique permettant de décrire la réponse des matériaux soumis à des sollicitations mécaniques, dans le domaine des déformations réversibles, où le matériau retrouve sa configuration initiale après déchargement. Ce chapitre a pour objectif d'introduire les bases conceptuelles et mathématiques nécessaires à la compréhension du comportement élastique des matériaux dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Il aborde les notions essentielles liées aux tenseurs de contraintes et de déformations, aux différentes mesures de la déformation, ainsi qu'à la description cinématique des transformations géométriques. Une attention particulière est portée aux invariants tensoriels, à la décomposition sphérique et déviatorique des contraintes, ainsi qu'aux conditions de compatibilité et aux hypothèses cinématiques fondamentales. La loi de Hooke est présentée dans ses formes isotrope et anisotrope, permettant de relier les champs de contraintes et de déformations dans le domaine élastique. Les notions de symétrie matérielle, de notation de Voigt et de représentation matricielle des lois constitutives sont également introduites afin de faciliter l'analyse et la modélisation des comportements mécaniques complexes. L'ensemble de ces développements constitue un socle théorique indispensable pour l'étude des lois constitutives avancées et des modèles de comportement présentés dans ce premier chapitre.

2. Contexte : Ce chapitre introduit les concepts fondamentaux de la plasticité du continuum nécessaires pour une étude approfondie de la modélisation constitutive présentée dans les chapitres suivants. On y aborde différentes notations pour les tenseurs de contraintes et de déformations, diverses définitions de la déformation avec un exemple de test de cisaillement simple, les bases de la cinématique des grandes déformations, ainsi que des notions telles que la contrainte déviatorique et l'hypothèse d'incompressibilité plastique. Une formulation de l'élasticité isotrope pour les cas tridimensionnels et de contraintes planes est également fournie [1].

3. Tenseurs de contraintes et de déformations

Les contraintes et déformations vraies correspondant à un ensemble arbitraire d'axes cartésiens orthogonaux peuvent être décrites en notation tensorielle ou vectorielle (notation de Voigt). La notation tensorielle permet d'exprimer les états de contraintes et de déformations en (3D) (O, x_1, x_2, x_3).

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Pour les conditions de déformations et contraintes planes ils deviennent

1°/ Déformations planes

On parle de déformation plane lorsqu'un solide est empêché de se déformer suivant une direction donnée, ici l'axe x_3 . Cela signifie que les déformations ε_{33} , ε_{13} et ε_{23} sont nulles. Cependant, même si la déformation est bloquée dans cette direction, des contraintes peuvent apparaître pour maintenir l'équilibre mécanique du matériau, notamment la contrainte σ_{33} . Ce type de situation se rencontre souvent dans des structures très longues ou très épaisses dans une direction donnée.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}}_{\text{Loi élastique}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

2°/ Contraintes planes

Soit une plaque mince d'épaisseur t dont la surface moyenne est située dans le plan (x_1, x_2) et qui n'admet de charges que dans son plan (les plans normaux à l'axe x_3 ne sont pas chargés). La formule de Cauchy implique : $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, alors en utilisant la loi de comportement, écrite en termes de souplesse :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\text{tr}\sigma_{ij}\delta_{ij}}_{\text{Loi de souplesse}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

4. Invariants tensoriels

Les invariants d'un tenseur symétrique sont des caractéristiques qui ne changent pas sous transformation linéaire. Ils sont fondamentaux pour caractériser les matériaux indépendamment du système de coordonnées. On introduit ici les équations de transformation entre bases cartésiennes ainsi que les expressions des invariants principaux pour les contraintes en trois dimensions.

Pour les problèmes de contraintes tridimensionnelles et planes, les invariants principaux (I_1 , I_2 et I_3) peuvent être encapsulés dans l'équation caractéristique décrite dans l'Equation. (1.4). Les racines des équations caractéristiques cubiques et quadratiques, respectivement pour les problèmes de contraintes planes en 3D et en 2D, définissent les valeurs propres (contraintes principales). L'équation caractéristique est décrite par :

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma_i \cdot I) = 0 \quad (1.4)$$

Avec σ_i sont les contraintes principales et $i=1,2,3$ pour un problème de 3D. Le tenseur ' I ' est le tenseur d'identité du second ordre.

$$\delta_{ij} = I = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Le symbole de Kronecker δ_{ij} est :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc: $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$ & $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$

5. Tenseur sphérique et tenseur déviatorique

Selon les essais expérimentaux réalisés par Bridgman (1947, 1952) [2,3] , la contrainte hydrostatique n'a pas d'impact sur la déformation plastique et la limite d'écoulement du matériau. C'est pourquoi de nombreux critères de plasticité utilisent la contrainte déviatorique au lieu de la contrainte de Cauchy. Cela se fait soit en introduisant directement la contrainte déviatorique au lieu de la contrainte de Cauchy, soit en utilisant la contrainte de Cauchy comme entrée et en la transformant en contrainte déviatorique dans la fonction d'écoulement comme. C'est le cas pour les modèles d'écoulement bien connus proposés par Barlat et al. (1997 ; 2003 ; 2005 ;2007) [4-7].

Le tenseur des contraintes permet de décrire l'état de contrainte en un point donné. Conformément aux propriétés fondamentales des tenseurs, ces deux principales parties sont:

- une composante sphérique $\sigma_{ij}^S = \sigma_m \delta_{ij}$ (ou hydrostatique), proportionnelle au tenseur unité, représentant l'effet moyen de la pression ;
- une composante déviatorique, caractérisée par une trace nulle, traduisant les écarts par rapport à l'état purement sphérique.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij}^S + \sigma_{ij}^d \quad (1.6)$$

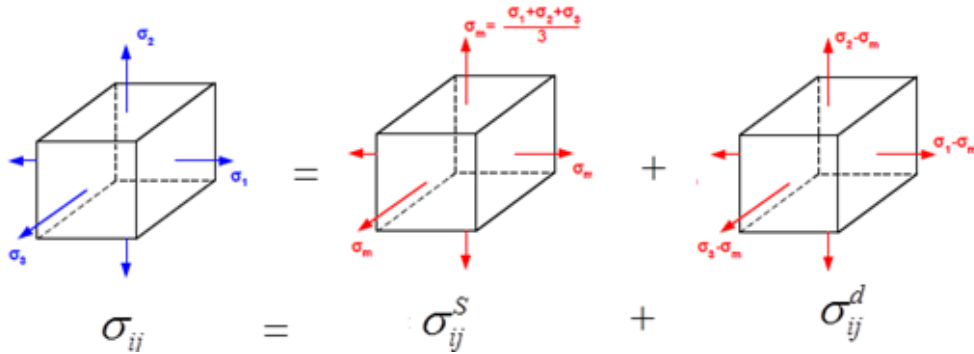
les contraintes de cisaillement sont nulles en tenseur sphérique ($\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$) :

$$\sigma_{ij}^S = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Avec : $p = -\frac{\text{Trace } \sigma_{ij}}{3} = -\sigma_m = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$

La partie du déviateur est : $\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^S$

$$\sigma^d_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} S_{11} = \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} \\ S_{22} = \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3} \\ S_{33} = \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} \\ S_{12} = \sigma_{12} \\ S_{13} = \sigma_{13} \\ S_{23} = \sigma_{23} \end{cases} \Rightarrow \text{trace } S_{ij} = 0 \Rightarrow S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0 \quad (1.8)$$



Les 3 propriétés d'invariance sont donc :

$$\begin{cases} J_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0 \\ J_2 = [S_{11} S_{22} + S_{22} S_{33} + S_{33} S_{11} - (S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{23}^2)] \\ J_3 = \det(\sigma^d_{ij}) = S_{11} S_{22} S_{33} - (S_{13}^2 S_{11} + S_{12}^2 S_{33} + S_{23}^2 S_{33}) \end{cases} \quad (1.9)$$

Une autre façon de déterminer la contrainte déviatorique à partir de la contrainte de Cauchy en utilisant l'opération matricielle dans la notation de Voigt est la suivante :

$$\sigma_i^d = T \sigma_j$$

La matrice T représentative des constantes deviatorique sont :

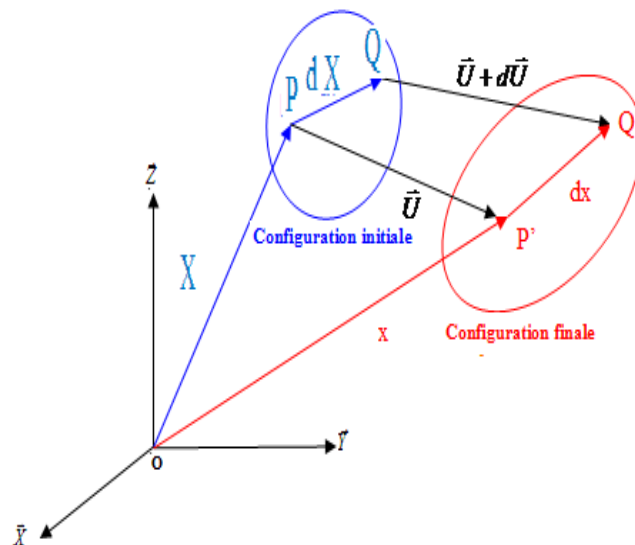
$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{13} \\ S_{23} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Avec :

$$\Rightarrow T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Plan}}{=} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

6. Diverses mesures de la déformation

En mécanique des milieux continus, plusieurs formulations des déformations coexistent, chacune adaptée à des contextes physiques ou numériques spécifiques. La description cinématique repose fondamentalement sur le gradient de déformation, un outil essentiel pour caractériser les transformations géométriques subies par le matériau. Considérons tout d'abord un corps continu imaginaire composé de particules continuellement réparties dans l'espace. La [figure 1.1](#) présente ce corps continu à l'état non déformé (initial) et à l'état déformé (actuel). À l'état déformé, le matériau a subi un mouvement de corps rigide, une rotation de corps rigide et un étirement dû à une force extérieure. Comme le montre la [figure 1.1](#), le vecteur infinitésimal PQ incorporé dans l'état non déformé est transformé en P'Q' dans l'état déformé.



[figure 1.1](#). Champ de déplacement

Les variations de longueur ainsi que les rotations d'un corps rigide peuvent être représentées à l'aide du gradient de déformation d'ordre deux, noté \mathbf{F} . Ce tenseur établit la relation entre les positions relatives de deux particules infiniment proches, avant et après déformation, entre la configuration initiale et la configuration actuelle. Il constitue ainsi une grandeur tensorielle essentielle pour caractériser la déformation d'un corps.

Nous examinons l'évolution d'un vecteur infiniment petit $d\bar{\mathbf{X}} \rightarrow d\bar{\mathbf{x}}$ appartenant à la configuration de référence.

- \mathbf{X} : Position d'une particule dans la configuration initiale (non déformée) à l'instant t_0 .
- $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$: Position de la même particule dans la configuration déformée (actuelle) à l'instant t , où $\boldsymbol{\varphi}$ est l'application de déformation.

Puisque $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$, il vient $dx_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j$. Dans le repère de référence :

$$\Rightarrow \begin{cases} dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 \\ dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3 \\ dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3 \end{cases} \quad \Rightarrow dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = \overline{\overline{F}} dX_j \quad (1.12)$$

Le tenseur gradient de déformation $\overline{\overline{F}}$ dont les composantes sont :

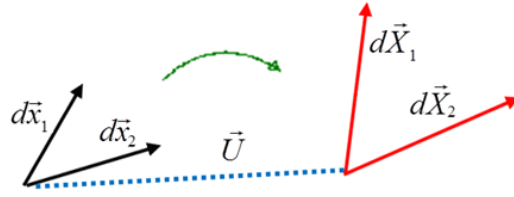
$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \Rightarrow \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{\text{grad } \bar{\mathbf{x}}}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{F}}_{\text{élastique}} + \overline{\overline{F}}_{\text{plastique}}$$

$$d\bar{\mathbf{x}} = \overline{\overline{F}} d\bar{\mathbf{X}} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \partial x_1 \\ \partial x_2 \\ \partial x_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \partial X_1 \\ \partial X_2 \\ \partial X_3 \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

Et donc : $d\bar{\mathbf{X}} = \overline{\overline{F}}^{-1} d\bar{\mathbf{x}}$

Puisque le tenseur de transformation F assure la transformation d'une quantité vectorielle de la configuration initiale $d\bar{\mathbf{X}}$ en une autre quantité $d\bar{\mathbf{x}}$ de la configuration finale. Notons que les deux vecteurs $d\bar{\mathbf{X}}$ et $d\bar{\mathbf{x}}$ sont infinitésimaux..

Etant donné que les vecteurs de position $d\bar{\mathbf{x}}_1$ et $d\bar{\mathbf{x}}_2$ et après rotation entre les 2 configurations, on aura les vecteurs $d\bar{\mathbf{x}}_1$ et $d\bar{\mathbf{x}}_2$.



On peut examiner le produit scalaire des deux vecteurs représentatifs des deux configurations :

$$\begin{aligned}
 d\vec{x}_1 &= \overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X}_1 \\
 d\vec{x}_2 &= \overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X}_2 \\
 d\vec{x}_1^T \cdot d\vec{x}_2 &= (\overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X}_1)^T \cdot (\overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X}_2) = d\vec{X}_1^T \overline{\overline{F}}^T \overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X}_2 = d\vec{X}_1^T \overline{\overline{C}} d\vec{X}_2, \text{ ainsi : } d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{X}_1 \cdot \overline{\overline{C}} d\vec{X}_2
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Le Tenseur $\overline{\overline{C}} = C_{ik} = F_{ij} F_{ik} = F_{ji}^T F_{ik} = \overline{\overline{F}}^T \overline{\overline{F}}$ connu sous l'appellation de tenseur de Cauchy-Green droit. Le tenseur de dilatation $\overline{\overline{C}}$ est un tenseur lagrangien car il s'exprime dans la configuration de référence. Il dépend de la configuration de référence et permet de déterminer le produit scalaire entre le tenseur de transformation F et son transposé. Le tenseur de dilatation $\overline{\overline{C}}$ est adimensionnel. Le tenseur gradient, F , se déduit dans repère de référence.

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{\text{grad } \vec{x}}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \Rightarrow x_i = X_i + U_i \Rightarrow \overline{\overline{F}} = \frac{\partial (X_i + U_i)}{\partial X_j} = \overline{\overline{I}} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_1} & \frac{\partial U_1}{\partial X_2} & \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} & \frac{\partial U_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial X_1} & \frac{\partial U_3}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

EN vertu de cette propriété : $[A + B]^T = A^T + B^T$

$$\overline{\overline{F}}^T = \left[\overline{\overline{I}} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right]^T = \overline{\overline{I}}^T + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^T = \overline{\overline{I}} + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^T \tag{1.16}$$

Le produit scalaire sera donc :

$$\begin{aligned}
 d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 &= d\vec{X}_1 \cdot \overline{\overline{C}} d\vec{X}_2 \Rightarrow d\vec{X}_1 \cdot \overline{\overline{F}}^T \overline{\overline{F}} d\vec{X}_2 = d\vec{X}_1 \cdot \left[\left(\overline{\overline{I}} + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^T \right) \cdot \left(\overline{\overline{I}} + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) \right) \right] d\vec{X}_2 \\
 \Rightarrow d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 &= d\vec{X}_1 \cdot \left[\overline{\overline{I}} + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^T + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^T \right] d\vec{X}_2
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\bar{x}_1 \cdot d\bar{x}_2 = d\bar{X}_1 d\bar{X}_2 + 2\bar{L} d\bar{X}_1 d\bar{X}_2 \Rightarrow d\bar{x}_1 \cdot d\bar{x}_2 - d\bar{X}_1 d\bar{X}_2 = 2\bar{L} d\bar{X}_1 d\bar{X}_2$$

Telle que :

$$2L_{ij} = \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^T + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^T \right] = \left[\bar{F}^T \bar{F} - \bar{I} \right]$$

Donc de nouveau on trouve le tenseur de **Lagrange -Green**.

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left[\bar{F}^T \bar{F} - \bar{I} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^T + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^T \right] \quad (1.18)$$

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left[\bar{F}^T \bar{F} - \bar{I} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) + \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_i} \frac{\partial U_1}{\partial X_j} + \frac{\partial U_2}{\partial X_i} \frac{\partial U_2}{\partial X_j} + \frac{\partial U_3}{\partial X_i} \frac{\partial U_3}{\partial X_j} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \bar{C} = \bar{F}^T \bar{F} = \bar{I} + 2L_{ij}$$

Et le tenseur **d'Euler-Almansi** par :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\bar{I} - \bar{G} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_i} \frac{\partial U_1}{\partial x_j} + \frac{\partial U_2}{\partial x_i} \frac{\partial U_2}{\partial x_j} + \frac{\partial U_3}{\partial x_i} \frac{\partial U_3}{\partial x_j} \right) \right] \quad (1.19)$$

Avec : $\bar{G} = \bar{F}^{-T} \bar{F}^{-1}$

Le gradient du champ de déplacement, noté généralement $H_{ij} = \text{grad}(\vec{U})$, peut être décomposé en deux composantes — l'une symétrique, l'autre antisymétrique — en supposant que les déformations restent dans le régime des petites perturbations.

-La composante symétrique est associée au tenseur de déformation proprement dite, représentant les modifications de forme et de taille du matériau.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \quad (1.20)$$

-Une partie antisymétrique qui correspond au tenseur de rotation :

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \quad (1.21)$$

7. Conditions de compatibilité (Equations de Saint Venant)

La condition de compatibilité peut être définie en considérant le champ de déplacement continu est à valeur unique. Physiquement, cela signifie qu'il n'y a pas de rupture, pas de fissure dans la déformation, pas de pli dans la flexion et aucune partie ne se chevauche lorsqu'un corps est déformé. Supposons dans un milieu

continu qui physiquement discrétisé par des éléments juxtaposés les uns à côté aux autres, tout en assurant la continuité de la matière. Si on impose maintenant à ce milieu des déformations arbitraires, on constate une déformation qui perturbe la cohésion de ces éléments et ne pourront pas être juxtaposés. D'autre part, il est à noter que les 06 composantes indépendantes du tenseur de déformation ε_{ij} sont complètement exprimées en fonction des dérivées des trois composantes de déplacement U_1, U_2, U_3 moyennant les équations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.22)$$

Inversement la réponse n'est pas évidente, si on veut exprimer les valeurs des composantes de déplacements $U_1(x_1, x_2, x_3)$, $U_2(x_1, x_2, x_3)$, $U_3(x_1, x_2, x_3)$ à partir des composantes de déformations, car on est devant un système de 06 équations pour uniquement 03 inconnues. Ces relations s'appellent les conditions de compatibilité.

En déformation infinitésimales, il existe deux types de relations :

1) Premier type : Dans le plan Ox_1x_2 , les dérivés seconde sont calculés, par rapport à x_2 et par rapport à x_1 .

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

A partir :

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \text{ avec } \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (i)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \quad (ii)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} \quad (iii)$$

2) Deuxième type :

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right] \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right] \quad (a)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right] \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2 \partial x_1} \right] \quad (\text{b})$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right] \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \quad (\text{c})$$

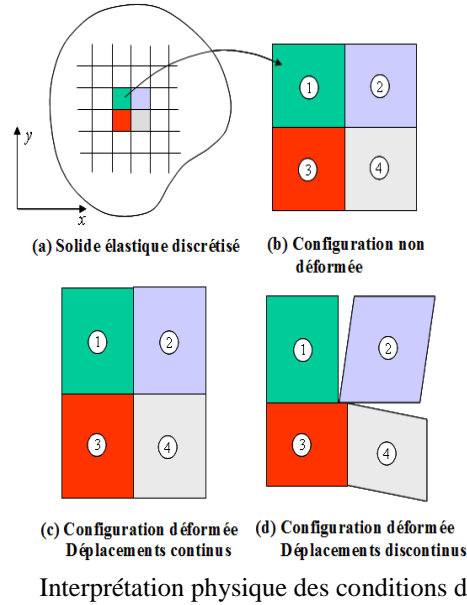
Pour : (a + c - b) et $\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right)$ (iv)

Pour : (a + b - c) et $\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right)$ (v)

Pour : (b + c - a) et $\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right)$ (vi)

Donc les formules constitutives des conditions d'intégralité des équations $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} \end{array} \right.$$



Qui se résume en : $\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} \Rightarrow \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$

8. la loi de Hooke

Dans le domaine des déformations infinitésimales, les métaux présentent un comportement contrainte-déformation quasi réversible et linéaire, caractéristique du régime élastique. Ce comportement obéit à la loi de Hooke jusqu'à un seuil critique appelé limite d'élasticité. Au-delà de cette limite, le matériau entre dans

un régime élasto-plastique où apparaissent des déformations permanentes irréversibles, marquant l'initiation de la plasticité.

D'un point de vue cinématique, cette transition peut être décrite rigoureusement par la décomposition additive des taux de déformation, postulat fondamental en mécanique des milieux continus. Plus précisément, l'incrément total de déformation ($d\epsilon$) se décompose en une partie élastique réversible ($d\epsilon^e$) et une partie plastique irréversible ($d\epsilon^p$) :

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (1.23)$$

où $d\epsilon$, $d\epsilon^e$ et $d\epsilon^p$ sont des incréments respectivement de la déformation totale, de la déformation élastique et de la déformation plastique. Cette décomposition, introduite initialement par Kröner (1960) [8] et développée par les travaux de Hill (1967) [9], permet de modéliser séparément les contributions élastiques (gouvernées par les constantes élastiques du matériau) et plastiques (décrites par les critères d'écoulement plastique et les lois d'évolution des variables internes). La loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.24)$$

La matrice de quatrième ordre des constantes élastiques C_{ijkl} est en fonction du coefficient de Young E et le paramètre de Poisson ν et elle s'écrit :

$$C_{ijkl} = G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$C_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.25)$$

La généralisation de la loi de Hooke en 3D $\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon})$ sera écrite sous cette forme indicelle :

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (1.26)$$

La transcription tensorielle de la loi de Hooke en 3D sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2G & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Sym} \quad (1.27)$$

Avec λ et G étant respectivement la constante de Lamé et le module de cisaillement. Le tenseur est le tenseur d'identité de quatrième ordre (Simo et Hughes, 1998) [10] .

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.28)$$

où E et ν sont la constante de rigidité et le coefficient de Poisson.

9. Hypothèse d'incompressibilité

L'hypothèse d'incompressibilité plastique, étayée par les expériences de Bridgman (1947, 1952) [2] et formalisée dans les théories modernes (Khan & Huang, 1995) [11], reste une approximation valide pour les métaux ductiles, bien que des extensions existent pour les matériaux endommagés (Gurson, 1977) [12]. Cette hypothèse d'incompressibilité plastique, formulée mathématiquement par :

$$\text{trace}(\varepsilon^p) = \varepsilon_{kk}^p = 0 \quad (1.29)$$

Elle implique que le changement de volume permanent est principalement attribuable à la composante élastique des déformations, tandis que la déformation plastique ne modifie que la forme du matériau (déviateur des déformations).

10. La loi de Hooke anisotrope

- **Convention d'écriture**

Le tenseur des constantes élastiques, de quatrième ordre, comporte 81 composantes, ce qui rend son expression explicite particulièrement complexe et peu maniable. Les formulations complètes sont souvent lourdes et peu pratiques à utiliser. Afin d'alléger cette écriture, une méthode de simplification fondée sur des applications linéaires est adoptée. L'idée consiste à transformer l'espace vectoriel associé aux tenseurs d'ordre deux (de dimension 2 ou 3 selon le contexte) en un espace vectoriel de plus faible dimension, souvent de dimension 1 dans un cadre matriciel réduit (cf. 1.30), où les tenseurs sont représentés sous forme de vecteurs d'ordre un.

Dans le cas des tenseurs de contraintes et de déformations, cette opération se traduit par la transformation suivante :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix} \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

La relation biunivoque entre les deux tenseurs d'ordre 2 ($\sigma_{ij} \equiv \varepsilon_{kl}$) est assurée par cette transformation.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Le nombre globale et finale est de 81 constantes du tenseur C_{ijkl} pour un comportement anisotrope général (1.31):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1131} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2231} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3331} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2331} & C_{2321} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1331} & C_{1321} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1231} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3213} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3231} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3113} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3131} & C_{3121} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2113} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2131} & C_{2121} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

En raison des propriétés de la loi de Hooke, les matrices des contraintes et des déformations présentent une symétrie particulière $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$. Cette symétrie permet de simplifier l'écriture des équations constitutives $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$.

La notation utilisée est valable de manière générale ; cependant, elle présente la limite de ne pas pouvoir être directement exprimée dans un repère arbitraire. Pour contourner cette difficulté, il devient nécessaire

de recourir à une représentation spécifique de la matrice de rigidité, souvent appelée représentation réduite ou forme condensée.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} \\ C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} \\ C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \end{matrix} & \begin{matrix} C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} \\ C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} \\ C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \end{matrix} & \begin{matrix} C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} \\ C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} \\ C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} \\ C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} \\ C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \end{matrix} & \begin{matrix} C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} \\ C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} \\ C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \end{matrix} & \begin{matrix} C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} \\ C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} \\ C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} \\ C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} \\ C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \end{matrix} & \begin{matrix} C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} \\ C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} \\ C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \end{matrix} & \begin{matrix} C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} \\ C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} \\ C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$



La relation inverse de la loi de Hook anisotrope est :

$$\varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl}$$

M_{ijkl} : Tenseur de compliances de 4^{-ème} ordre telle que $M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{ijlk} = M_{jilk}$

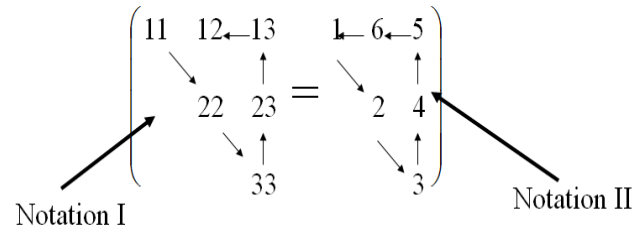
Et aussi : $C_{ijkl} M_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = I_{ijkl}$

I_{ijkl} : Tenseur d'identité de 4^{-ème} ordre.

- **Notation de Voigt**

La représentation dite de Voigt adopte une convention particulière pour réécrire les composantes des tenseurs de contraintes, de déformations, ainsi que les constantes élastiques. Elle repose sur une simplification des indices tensoriels en indices simples, permettant une transcription matricielle plus compacte de ces grandeurs.

$$11 \rightarrow 1 \quad 22 \rightarrow 2 \quad 33 \rightarrow 3 \quad 13 \rightarrow 4 \quad 31 \rightarrow 5 \quad 12 \rightarrow 6$$



Donc, il suffit de réécrire sous forme d'une matrice colonne :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} \\ \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

On réadapte la formulation de Hooke anisotrope par cette matrice de (6,6) tout en respectant que :

$$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \quad \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Cette convention permet de ramener la matrice de rigidité à une forme réduite comportant uniquement 36 constantes indépendantes, organisées dans une matrice de dimension 6x6.

$$\sigma_{ij} = C_{ij} \varepsilon_{kl} \rightarrow \sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta$$

L'inversion de cette relation matricielle permet d'exprimer les déformations en fonction des contraintes σ_{ij} , conformément à la loi de comportement en formulation inverse.

$$\varepsilon_{ij} = S_{ij} \sigma_j$$

Notant que la matrice S_{ij} représente un tenseur souplesse ou complaisance

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

En tenant compte des conditions d'intégrabilité de Cauchy appliquées au travail de déformation, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} c_{12} &= c_{21} & c_{14} &= 2c_{41} & c_{24} &= 2c_{42} & c_{34} &= 2c_{43} & c_{45} &= c_{54} \\ c_{13} &= c_{31} & c_{15} &= 2c_{51} & c_{25} &= 2c_{52} & c_{35} &= 2c_{53} & c_{46} &= c_{64} \\ c_{23} &= c_{32} & c_{16} &= 2c_{61} & c_{26} &= 2c_{62} & c_{36} &= 2c_{63} & c_{56} &= c_{65} \end{aligned}$$

Ces conditions d'intégrabilité fournissent 15 relations de symétrie, ce qui ramène le nombre de constantes indépendantes à 21. La structure de la matrice C_{ij} s'en trouve ainsi simplifiée et s'organise comme suit :

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} X_{ij} & \vdots & 2Z_{ij} \\ \dots & \dots & \dots \\ Z_{ij} & \vdots & Y_{ij} \end{pmatrix}$$

Les blocs X , Y et Z sont des sous-matrices de dimension (3,3), parmi lesquelles X et Y présentent une symétrie.

L'introduction d'hypothèses supplémentaires concernant le degré d'anisotropie du matériau permet de réduire davantage le nombre de coefficients indépendants.

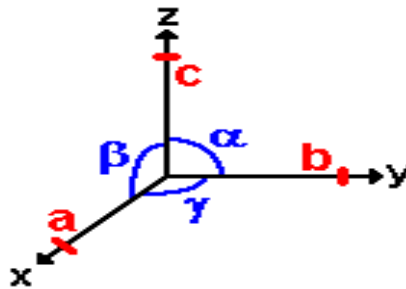
11. Influence des propriétés mécaniques sur la loi de Hooke généralisée

Les caractéristiques mécaniques du matériau étudié influencent de manière significative la structure de sa matrice de rigidité. En effet, certains matériaux présentent des propriétés directionnelles qui varient selon leurs axes ou plans de symétrie.

12.1. Les huit classes de symétrie des tenseurs d'élasticité

Les propriétés mécaniques à l'échelle macroscopique sont étroitement liées à la microstructure du matériau. En raison de sa nature tensorielle, le tenseur d'élasticité ne peut appartenir qu'à l'un des huit groupes de symétrie distincts, tels que présentés dans le tableau ci-après.

Système	Nombre des plans de symétrie	Côte de la maille	Angles	C_{ij}
Triclinique	0	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	21
Monoclinique	1	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$	13
Orthorhombique/ Orthotrope	2-3	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	9
Rhomboédrique (Trigonale)	3	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	6-7
Tétraгонаle	5	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	6-7
Hexagonale (Isotropie transverse)	7	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$	5
Cubique	9	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	3
Isotrope	∞	-	-	2



12.2 Les différentes symétries matérielles élastiques

On Considère les 4 symétries élastiques suivantes :

- Symétrie **monoclinique**
- Symétrie **orthotrope**
- Symétrie **cubique**.
- Symétrie **isotrope** ;

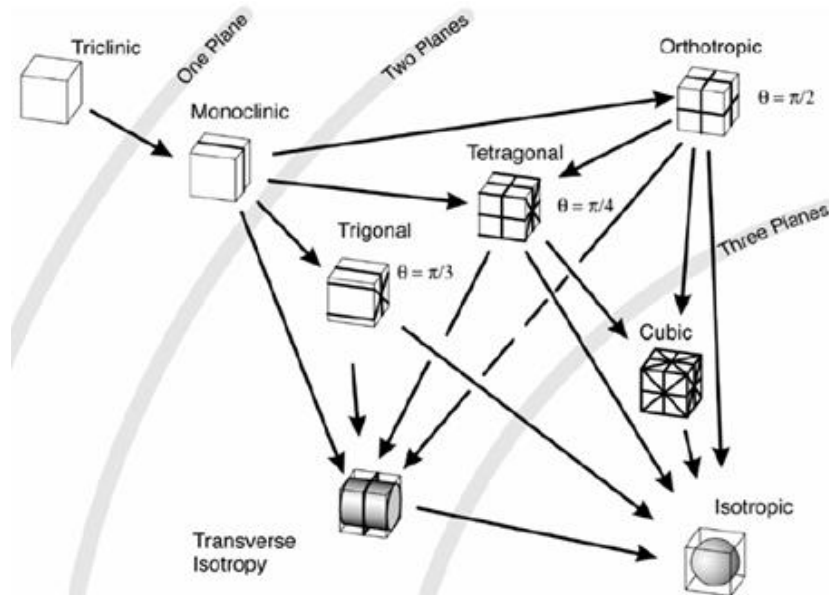


Fig.1.2 : Les huit symétries de l'élasticité linéaire

12.2. a. Symétrie monoclinique par rapport à un plan

On définit un matériau monoclinique, celui qui possède un unique plan de symétrie matériel. Les coefficients élastiques sont invariants dans un changement de repère de sorte que le nouveau repère soit symétrique de l'ancien.

Dans cette section, il est démontré que la présence de symétries matérielles permet de réduire le nombre de composantes nécessaires pour décrire le comportement élastique linéaire, le ramenant à moins de 21. Considérons, par exemple, un matériau possédant un plan de symétrie tel que : $x_1 // x_1'$; $x_2 // x_2'$ et $x_3 = -x_3'$ (voir figure .1.3). Dans le plan initial ($x_1x_2x_3$), on observe alors :

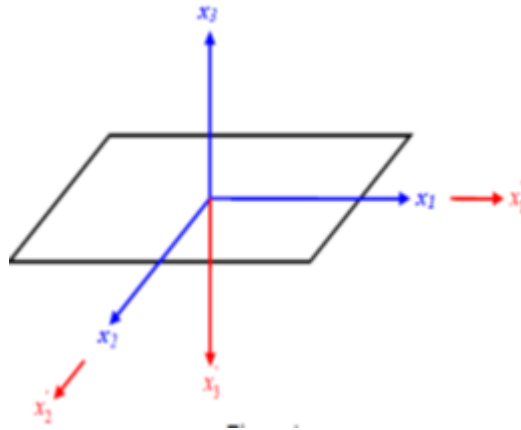


Fig. 1.3 –Rotation par rapport à un plan de symétrie

Dans la nouvelle base les deux tenseurs peuvent être :

$$[\sigma'] = [\alpha]^T [\sigma] [\alpha]$$

$$[\varepsilon'] = [\alpha]^T [\varepsilon] [\alpha]$$

Avec la matrice de passage α correspond à cet état de symétrie :

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \cos(x'_1x_1) & \cos(x'_1x_2) & \cos(x'_1x_3) \\ \cos(x'_2x_1) & \cos(x'_2x_2) & \cos(x'_2x_3) \\ \cos(x'_3x_1) & \cos(x'_3x_2) & \cos(x'_3x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \cos 90^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 0^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc pour } [\sigma'] = [\alpha]^T [\sigma] [\alpha]$$

$$\begin{aligned}
[\sigma'] &= \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
[\sigma'] &= \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{1.34}
\end{aligned}$$

Et pour $[\varepsilon'] = [\alpha]^T [\varepsilon] [\alpha]$

$$\begin{aligned}
[\varepsilon'] &= \begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
[\varepsilon'] &= \begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{1.35}
\end{aligned}$$

On adopte la notation de **Voigt** :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_1 \\ \sigma_{22} = \sigma_2 \\ \sigma_{33} = \sigma_3 \\ \sigma_{23} = \sigma_4 \\ \sigma_{13} = \sigma_5 \\ \sigma_{12} = \sigma_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_1 \\ \sigma_{22} = \sigma_2 \\ \sigma_{33} = \sigma_3 \\ \sigma_{23} = -\sigma_4 \\ \sigma_{13} = -\sigma_5 \\ \sigma_{12} = \sigma_6 \end{cases} ; \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_4 \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_5 \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{23} = -\varepsilon_4 \\ \varepsilon_{13} = -\varepsilon_5 \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_6 \end{cases}$$

Dans le système initial ($O x_1 x_2 x_3$) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

Dans le nouveau système ($O x'_1, x'_2, x'_3$) :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & C'_{14} & C'_{15} & C'_{16} \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & C'_{24} & C'_{25} & C'_{26} \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} & C'_{34} & C'_{35} & C'_{36} \\ C'_{41} & C'_{42} & C'_{43} & C'_{44} & C'_{45} & C'_{46} \\ C'_{51} & C'_{52} & C'_{53} & C'_{54} & C'_{55} & C'_{56} \\ C'_{61} & C'_{62} & C'_{63} & C'_{64} & C'_{65} & C'_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}$$

A partir de (1.34) et (1.35) on aura :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & -C'_{14} & -C'_{15} & C'_{16} \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & -C'_{24} & -C'_{25} & C'_{26} \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} & -C'_{34} & -C'_{35} & C'_{36} \\ -C'_{41} & -C'_{42} & -C'_{43} & C'_{44} & C'_{45} & -C'_{46} \\ -C'_{51} & -C'_{52} & -C'_{53} & C'_{54} & C'_{55} & -C'_{56} \\ C'_{61} & C'_{62} & C'_{63} & -C'_{64} & -C'_{65} & C'_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

On suppose que le matériau est insensible à la rotation par rapport au plan (x_1, x_2) , ce qui signifie que les matrices des composantes élastiques conservent la même forme dans la base initiale et dans la base transformée $C_{ijkl} = C'_{ijkl}$. Pour l'invariance (l'isotropie) de la matrice de rigidité, on impose $-x = x$, ce qui mathématiquement est vérifié seulement quand $x = 0 \rightarrow -0 = 0$, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

les relations suivantes sont évidentes:

Symétrie par rapport au plan x_3 :

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{64} = C_{65} = 0$$

Symétrie par rapport au plan x_2 :

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{54} = C_{56} = 0$$

Symétrie par rapport au plan x_1 :

$$C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = C_{56} = 0$$

Ainsi, la présence d'une symétrie par rapport à un seul plan entraîne l'annulation de 8 des 21 composantes indépendantes du tenseur d'élasticité. Il ne reste alors que 13 constantes non nulles à déterminer pour décrire le comportement élastique d'un matériau dit monoclinique.

12.2.b. Matériau orthotrope.

Un matériau orthotrope se caractérise par la présence d'au moins deux plans de symétrie mutuellement orthogonaux. Le troisième plan de symétrie résulte automatiquement de la combinaison des deux premiers. Autrement dit, tout point repéré dans le système de coordonnées $(O x_1 x_2 x_3)$ conserve sa position dans le système transformé (x'_1, x'_2, x'_3) , avec $x // x'_1$; $x_2 // x'_2$ et $x_3 // x'_3$ (voir figure ci-dessous).

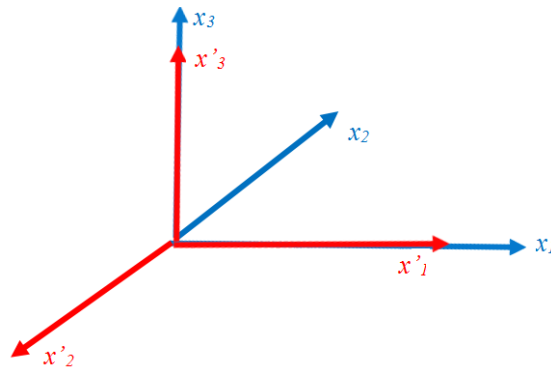


Fig. 1.4 - Rotation par rapport à deux plans de symétrie

Méthode1 :

Considérant la matrice de rigidité (des constantes élastiques) de départ est celle de symétrie monoclinique prismatique trouvé précédemment et rajoutant dans la matrice de passage α la symétrie du deuxième plan et selon les mêmes démarches.

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \cos(x'_1 x_1) & \cos(x'_1 x_2) & \cos(x'_1 x_3) \\ \cos(x'_2 x_1) & \cos(x'_2 x_2) & \cos(x'_2 x_3) \\ \cos(x'_3 x_1) & \cos(x'_3 x_2) & \cos(x'_3 x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \cos 90^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 180^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Donc pour $[\sigma'] = [\alpha]^T [\sigma] [\alpha]$

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_6 & \sigma'_5 \\ \sigma'_4 & \sigma'_2 & \sigma'_4 \\ \sigma'_5 & \sigma'_6 & \sigma'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_6 & \sigma'_5 \\ \sigma'_6 & \sigma'_2 & \sigma'_4 \\ \sigma'_5 & \sigma'_4 & \sigma'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & -\sigma_6 & \sigma_5 \\ -\sigma_6 & \sigma_2 & -\sigma_4 \\ \sigma_5 & -\sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Et pour $[\varepsilon'] = [\alpha]^T [\varepsilon] [\alpha]$

$$[\varepsilon'] = \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 & \varepsilon'_6 & \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_4 & \varepsilon'_2 & \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 & \varepsilon'_6 & \varepsilon'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_4 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_6 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon'] = \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 & \varepsilon'_6 & \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 & \varepsilon'_2 & \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 & \varepsilon'_4 & \varepsilon'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ -\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & -\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Dans le repère initial ($O x_1 x_2 x_3$), on considère le cas monoclinique comme point de départ, auquel on ajoute un second plan de symétrie. Cette hypothèse supplémentaire permet d'imposer de nouvelles conditions de symétrie sur le tenseur d'élasticité.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

Dans le nouveau système ($O x'_1, x'_2, x'_3$) :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{54} & C'_{55} & 0 \\ C'_{61} & C'_{62} & C'_{63} & 0 & 0 & C'_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & -C'_{16} \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & -C'_{26} \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} & 0 & 0 & -C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & -C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C'_{54} & C'_{55} & 0 \\ -C'_{61} & -C'_{62} & -C'_{63} & 0 & 0 & C'_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

En identifiant les matrices de rigidité avant et après l'introduction du second plan de symétrie, on déduit que $[C] \equiv [C']$, en plus des huit constantes conservées dans le cas monoclinique, quatre nouvelles composantes s'annulent:

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{54} = 0$$

$$[C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Méthode2 :

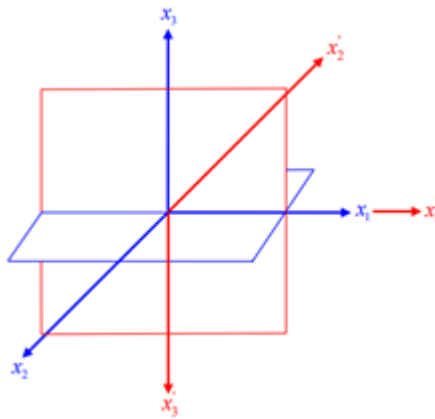


Fig. 1.5 -Corps ayant deux plans de symétrie

A partir du cas général triclinique qui contient 21 constantes élastiques :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

Avec une matrice de passage α explicitée en deux plans de symétrie orthotropes comme suit :

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Les lois classiques de transformation des coordonnées $[\sigma'] = [\alpha]^T [\sigma] [\alpha]$ et $[\varepsilon'] = [\alpha]^T [\varepsilon] [\alpha]$ on a :

$$[C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

A partir de la matrice de rigidité orthotrope $[C]$, en déterminant son inverse $[C]^{-1}$, donc le tenseur de déformation ε_{ij} sera:

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} \quad \Rightarrow \quad \{\varepsilon\} = [C]^{-1} \cdot \{\sigma\}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Les relations de symétrie sont assurées par :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

Les 9 coefficients indépendants du matériau seront fournis par:

* les 3 constantes de rigidité longitudinal E_1, E_2 et E_3 .

* les 3 constantes de glissement G_{12}, G_{23} et G_{31} .

* les 3 constantes de Poisson ν_{12}, ν_{23} et ν_{31} .

12.2. c. Symétrie isotrope Transverse (Hexagonale)

Les milieux isotropes, et en élasticité, sont définis comme des milieux dont le comportement élastique reste identique quelle que soit la direction considérée. Les constantes élastiques associées à ces matériaux peuvent être obtenues à partir de celles des matériaux cubiques, en imposant l'invariance du comportement élastique vis-à-vis de toute rotation du repère.

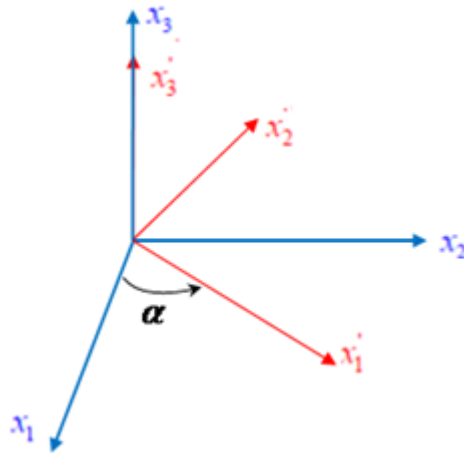


Fig. 1.6 -Corps ayant Symétrie isotrope Transverse

La matrice de passage α autour de l'axe x_3 .

$$[\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc pour $[\sigma'] = [\alpha]^T [\sigma] [\alpha]$

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_6 & \sigma'_5 \\ \sigma'_6 & \sigma'_2 & \sigma'_4 \\ \sigma'_5 & \sigma'_4 & \sigma'_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_1 = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha + 2\sigma_6 \sin 2\alpha \\ \sigma'_2 = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha - 2\sigma_6 \sin 2\alpha \\ \sigma'_3 = \sigma_3 \\ \sigma'_4 = \sigma_4 \cos \alpha - \sigma_5 \sin \alpha \\ \sigma'_5 = \sigma_4 \sin \alpha + \sigma_5 \cos \alpha \\ \sigma'_6 = (\sigma_2 - \sigma_1) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_6 \cos 2\alpha \end{array} \right.$$

Avec : $2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha$; $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$

Le tenseur de déformation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_1 = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha + \varepsilon_6 \sin 2\alpha \\ \varepsilon'_2 = \varepsilon_1 \sin^2 \alpha + \varepsilon_2 \cos^2 \alpha - \varepsilon_6 \sin 2\alpha \\ \varepsilon'_3 = \varepsilon_3 \\ \varepsilon'_4 = 2\varepsilon'_{23} = \varepsilon_4 \cos \alpha - \varepsilon_5 \sin \alpha \\ \varepsilon'_5 = 2\varepsilon'_{13} = \varepsilon_4 \sin \alpha + \varepsilon_5 \cos \alpha \\ \varepsilon'_6 = 2\varepsilon'_{12} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cos \alpha \sin \alpha + \varepsilon_6 \cos 2\alpha \end{array} \right.$$

On comprend aisément qu'au-delà des relations propres au cas cubique, des relations supplémentaires entre les coefficients du tenseur de raideur émergent. Ces relations traduisent les effets des symétries cristallines plus élevées sur le comportement élastique.

A partir du tenseur des constantes élastique orthotropes :

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

Dans le plan d'isotropie transverse (x-y), les propriétés élastiques d'anisotropie suivantes sont identiques :

$$E_1 = E_2, G_{23} = G_{13}, \nu_{23} = \nu_{13} \Rightarrow C_{11} = C_{22}, C_{13} = C_{23}, C_{44} = C_{55}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}$$

Or ;

$$\begin{cases} \sigma'_1 = \sigma'_{11} = C_{11}\varepsilon'_1 + C_{12}(\varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) \\ \sigma'_2 = \sigma'_{22} = C_{12}(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_3) + C_{11}\varepsilon'_2 \\ \sigma'_3 = \sigma'_{33} = C_{11}\varepsilon'_3 + C_{12}(\varepsilon'_2 + \varepsilon'_2) \\ \sigma'_4 = \sigma'_{23} = C_{44}\varepsilon'_4 \\ \sigma'_5 = \sigma'_{13} = C_{55}\varepsilon'_5 \\ \sigma'_6 = \sigma'_{12} = C_{66}\varepsilon'_6 \end{cases}$$

Et d'autre part :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

Aussi que;

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \sigma_2 = \sigma_{22} = C_{12}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + C_{11}\varepsilon_2 \\ \sigma_3 = \sigma_{33} = C_{11}\varepsilon_3 + C_{12}(\varepsilon_2 + \varepsilon_2) \\ \sigma_4 = \sigma_{23} = C_{44}\varepsilon_4 \\ \sigma_5 = \sigma_{13} = C_{55}\varepsilon_5 \\ \sigma_6 = \sigma_{12} = C_{66}\varepsilon_6 \end{cases} \Rightarrow (\sigma_2 - \sigma_1) = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) = (C_{11} - C_{12})(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

Si on considère : $\sigma'_6 = \sigma'_{12} = (\sigma_2 - \sigma_1) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_6 \cos 2\alpha$

Avec : $(\sigma_2 - \sigma_1) = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) = (C_{11} - C_{12})(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$

$$\text{et } \sigma'_6 = \sigma'_{12} = (C_{11} - C_{12})(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cos \alpha \sin \alpha + C_{66} \varepsilon_6 \cos 2\alpha \quad (1.42):$$

$$\varepsilon'_6 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cos \alpha \sin \alpha + \varepsilon_6 \cos 2\alpha$$

Mais :

$$\sigma'_6 = \sigma'_{12} = C_{66} \varepsilon'_6 = 2C_{66} \varepsilon'_{12} \quad (\text{Voir la notation de Voigt } \varepsilon'_6 = 2\varepsilon'_{12})$$

$$\sigma'_6 = \sigma'_{12} = C_{66} \varepsilon'_6 = 2C_{66} \varepsilon'_{12} = 2C_{66} \left[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cos \alpha \sin \alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_6 \cos 2\alpha \right] \quad (1.43)$$

Si les formules (1.42) et (1.43) de σ'_6 se coïncident donc :

$$2C_{66} = C_{11} - C_{12}$$

Le tenseur des constantes est donc sous la forme :

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{12} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_{11} = C_{22} \\ C_{23} = C_{13} \\ C_{44} = C_{54} \end{cases} \quad C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$$

Les propriétés physiques sont symétriques par rapport à un axe normale au plan d'isotropie (plan x-y) dans notre cas. Les trois plans mutuellement orthogonaux et un axe (z) de symétrie. Le nombre des constantes élastiques indépendants à déterminer est de cinq (05).

12.2.d. Matériaux cubiques

Les matériaux cubiques constituent une catégorie particulière d'orthotropes, dans laquelle les directions ($O_{x_1x_2x_3}$) sont équivalentes sur le plan mécanique. Ainsi, le comportement élastique d'un cristal cubique reste inchangé lorsqu'un effort est appliqué selon n'importe quelle arête du cube — toutes les directions principales sont mécaniquement équivalentes. Cette symétrie se manifeste par l'invariance des coefficients élastiques lors de permutations cycliques des

axes de référence. Prenons, par exemple, un nouveau repère tel que l'axe $O x_1$ coïncide avec $O x'_1$, et que $O x'_2$ et $O x'_3$ soient obtenus par une rotation d'un quart de tour autour de $O x_1$, à partir des axes $O x_2$ et $O x_3$.

La matrice de passage alors :

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \cos(x'_1 x_1) & \cos(x'_1 x_2) & \cos(x'_1 x_3) \\ \cos(x'_2 x_1) & \cos(x'_2 x_2) & \cos(x'_2 x_3) \\ \cos(x'_3 x_1) & \cos(x'_3 x_2) & \cos(x'_3 x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \cos 90^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 180^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 0^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

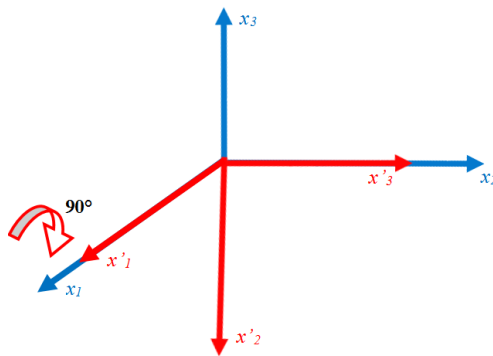


Fig. 1.7 -Corps ayant une symétrie cubique

Dans la nouvelle base: $[\sigma'] = [\alpha]^T [\sigma] [\alpha]$

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_6 & \sigma'_5 \\ \sigma'_4 & \sigma'_2 & \sigma'_4 \\ \sigma'_5 & \sigma'_6 & \sigma'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_4 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_6 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qui conduit à :

$$\begin{cases} \sigma'_1 = \sigma_1 \\ \sigma'_2 = \sigma_3 \\ \sigma'_3 = \sigma_2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \sigma'_4 = -\sigma_4 \\ \sigma'_5 = -\sigma_6 \\ \sigma'_6 = \sigma_5 \end{cases}$$

Le tenseur de déformation :

$$[\varepsilon'] = \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 & \varepsilon'_6 & \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_4 & \varepsilon'_2 & \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 & \varepsilon'_6 & \varepsilon'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_4 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_6 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \varepsilon'_1 = \varepsilon_1 \\ \varepsilon'_2 = \varepsilon_3 \\ \varepsilon'_3 = \varepsilon_2 \end{cases} ; \begin{cases} \varepsilon'_4 = -\varepsilon_4 \\ \varepsilon'_5 = -\varepsilon_6 \\ \varepsilon'_6 = \varepsilon_5 \end{cases}$$

On voit qu'il y'avait une permutation entre la 2^{ieme} et la 3^{ieme} ligne, ainsi que la 5^{ieme} avec la 6^{ieme}.

Donc la matrice de rigidité de départ est orthotrope :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \sigma_2 \\ -\sigma_4 \\ -\sigma_6 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_4 \\ -\varepsilon_6 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix}$$

La comparaison miroir de symétrie permet d'annuler le signe (-) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_6 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix}$$

L'invariance du tenseur des constantes élastique $[C'] = [C]$ donne.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

la permutation des 2 lignes ($2^{ime} \leftrightarrow 3^{ime}$ et $5^{ime} \leftrightarrow 6^{ime}$), en parallèle il faut permuter de la même manière les 2 colonnes correspondantes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{33} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Après permutation des axes, on procède à l'identification de la relation (1.44) avec l'expression correspondante ((1.45)) retranscrite dans la base initiale. Cela conduit alors à l'égalité suivante :

$$\begin{cases} C_{12} = C_{13} \\ C_{22} = C_{33} \\ C_{55} = C_{66} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C_{11} = C_{22} \\ C_{23} = C_{13} \\ C_{44} = C_{55} \end{cases}$$

Les relations établies entre les neuf coefficients indépendants mentionnés précédemment montrent que les propriétés élastiques d'un matériau cubique peuvent finalement être décrites à l'aide de seulement trois constantes indépendantes. Le tenseur des constantes élastiques prend alors la forme suivante :

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

On est passé de 9 (cas orthotrope) à 3 termes indépendants. Allons un peu plus loin encore.

$$[C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2G & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad \text{Sym} \quad (1.47)$$

Dans la matrice C_{ij} , les 2 coefficients élastiques indépendants, non nuls sont :

$$\boxed{\begin{matrix} C_{12} = \lambda \\ C_{44} = G \end{matrix}}$$

Les constantes de Lamé (1795-1870) sont λ et G .

$$C_{11} = \lambda + 2G$$

Et :

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) ; \quad \varepsilon_{kk} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

Donc :

$$\sigma_1 = (C_{11} - C_{12})\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_{kk} = 2G\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon$$

D'autre part :

$$\sigma_6 = C_{44}\varepsilon_6 = G\varepsilon_6$$

Moyennant les notations indicielles :

$$\sigma_{11} = 2G\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{kk}$$

Et

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}$$

la loi de Hooke pour les corps isotropes :

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (1.48)$$

13. Relations entre les Constantes élastiques en Ingénierie

En ingénierie, lorsqu'il s'agit d'un matériau isotrope, on utilise généralement quatre (parfois cinq) constantes élastiques fondamentales

- :
- le module de cisaillement (G),
 - le second coefficient de Lamé (λ),
 - le module de Young (E),
 - le coefficient de Poisson (ν),
 - ainsi que le module de compressibilité (ou module volumique, K).

Ces constantes peuvent être déterminées expérimentalement et sont liées entre elles par les relations théoriques suivantes :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{Constante de cisaillement (de Lamé)}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{Constante de Lamé}$$

$$E = \frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G} \quad \text{Module d'Young}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \quad \text{Coefficient de Poisson}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{3\lambda+2G}{3} \quad \text{Coefficient de compressibilité}$$

Donc :

$$\lambda = \frac{2G}{1+2G} = \frac{G(E-2G)}{3G-E} = K - \frac{2}{3}G$$

14. Résolution du problème élastique (Méthodes semi-inverse)

Enoncé du problème

En mécanique des milieux continus, plus précisément en élasticité linéaire avec l'hypothèse des petites déformations, le nombre d'inconnues dans un problème est égal à 15. En tout point matériau homogène, il s'agit d'explicitier, tous les paramètres mécaniques inconnus caractérisant le comportement élastique de la pièce. Les inconnues sont énumérées selon la façon suivante :

- ✓ 6 éléments du tenseur des contraintes : σ_{ij}
- ✓ 6 éléments du tenseur des déformations : ε_{ij}
- ✓ 3 éléments du vecteur de déplacement : U_i

Pour résoudre un tel problème, nous devons donc disposer de 15 équations. Ces équations sont les trois équations d'équilibre :

15. A. Résolution en déplacements

Equations Navier (Claude Louis Marie Henri Navier de 1785 à 1836) [13]

On exprime les équations d'équilibre en remplaçant les σ_{ij} par les ε_{ij} puis les ε_{ij} par les U_i .

$$Div(\sigma_{ij}) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \end{cases}$$

Le tenseur de déformation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right] & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right] & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right] & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right] & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

La loi de Hooke généralisée s'écrit :

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2G & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Sym

La relation de Lamé-Clapeyron se donne comme suit :

$$2G \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) + G \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) + G \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) + f_1 = 0$$

Ou bien :

$$G \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + G \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) + G \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) + G \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) + f_1 = 0$$

Qui s'écrit :

$$G \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} \right) + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) + f_1 = 0$$

$$G \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) U_1 + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) + f_1 = 0$$

Avec :

Le laplacien :
$$\operatorname{div}(\vec{grad}) = \Delta . = \nabla(\nabla .) = \nabla^2 . = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

La divergence :
$$\operatorname{div} \vec{U} = \nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}$$

Pour n'importe quelle composante x_i

$$\boxed{G \nabla^2 U_i + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} (\operatorname{div} \vec{U}) + f_i = 0}$$

$$\boxed{G \Delta U_i + (G + \lambda) \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) + f_i = 0}$$

Avec : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ comme on peut utiliser les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{g}rad) &= \text{laplacien} = \nabla^2 \\
\operatorname{div}(\vec{r}ot) &= 0 \\
\vec{r}ot(\vec{r}ot) &= \vec{g}rad(\operatorname{div}) - \text{laplacien} \\
\vec{r}ot(\vec{g}rad) &= 0
\end{aligned}$$

15. B. Résolution en contraintes

Equations de Beltrami (1892) - Mitchell (1900) [14]

Lorsqu'on désire résoudre le problème en contrainte, donc sans vouloir a priori connaître le champ de déplacements, la méthode utilisée est appelée méthode inverse et elle consiste à résoudre les équations en termes de contraintes. A partir des σ_{ij} , on trouvera les ε_{ij} , puis les U_i . Les fonctions introduites par les intégrations seront déterminées en identifiant les contraintes calculées à la surface du solide avec celle données par la distribution des forces appliquées.

En remplaçant les équations de déformations ε_{ij} obtenues par la loi de comportement de **Hooke** respectent les équations de compatibilité par leur valeur en fonction des σ_{ij} .

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \sigma_{ij} \delta_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1 \delta_{ij}$$

Les équations de compatibilités de saint venant s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} \Rightarrow \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij,kl} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij,kl} - \frac{\nu}{E} I_1 \delta_{ij,kl} \\
\varepsilon_{kl,ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{kl,ij} - \frac{\nu}{E} I_1 \delta_{kl,ij} \\
\varepsilon_{ik,jl} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ik,jl} - \frac{\nu}{E} I_1 \delta_{ik,jl} \\
\varepsilon_{jl,ik} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{jl,ik} - \frac{\nu}{E} I_1 \delta_{jl,ik}
\end{aligned}$$

Remplaçant dans les équations de compatibilités on aura :

$$\begin{aligned}
\frac{1+\nu}{E} [\sigma_{ij,kl} + \sigma_{kl,ij} - \sigma_{ik,jl} - \sigma_{jl,ik}] &= \frac{\nu}{E} [\delta_{ij} I_{1,kl} + \delta_{kl} I_{1,ij} - \delta_{ik} I_{1,jl} - \delta_{jl} I_{1,ik}] \\
[\sigma_{ij,kl} + \sigma_{kl,ij} - \sigma_{ik,jl} - \sigma_{jl,ik}] &= \frac{\nu}{1+\nu} [\delta_{ij} I_{1,kl} + \delta_{kl} I_{1,ij} - \delta_{ik} I_{1,jl} - \delta_{jl} I_{1,ik}] \quad (a)
\end{aligned}$$

Ce sont des équations de compatibilité dans les composants de contrainte. Ceux-ci sont de nombre de 81 (= 3⁴) de quatre indices (i, j, k et l) mais tous ne sont pas indépendants. Sur les 81 équations de compatibilité, 6 seulement sont différentes, on les obtient en faisant ($k = l$).

Si i & j ou k & l sont interchangés (par permutation circulaire), nous obtenons les mêmes équations. De même pour $i = j = k = l$, équations sont identiquement satisfaites. En fait, l'ensemble des équations précédentes ne contient que six (06) équations indépendantes obtenues en posant :

$$\begin{aligned}
 k = l = 1 & \quad , & \quad i = j = 2 \\
 k = l = 2 & \quad , & \quad i = j = 3 \\
 k = l = 3 & \quad , & \quad i = j = 1 \\
 k = l = 1 & \quad , & \quad i = 2, j = 3 \\
 k = l = 2 & \quad , & \quad i = 3, j = 1 \\
 k = l = 3 & \quad , & \quad i = 1, j = 2
 \end{aligned}$$

En définissant $k = l$ dans (a) et en prenant la sommation sur l'indice répété on obtient :

$$\left[\sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} - \sigma_{ik,jk} - \sigma_{jk,ik} \right] = \frac{\nu}{1+\nu} \left[\delta_{ij} I_{1,kk} + \delta_{kk} I_{1,ij} - \delta_{ik} I_{1,jk} - \delta_{jk} I_{1,ik} \right] \quad (b)$$

Par définition :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{kk} &= I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\
 \sigma_{ij,kk} &= \nabla^2 \sigma_{ij} & \delta_{kk} &= 3 \\
 \sigma_{kk,ij} &= I_{1,ij} & \delta_{ik} I_{1,jk} &= I_{1,ij} \\
 I_{1,kk} &= \nabla^2 I_1 & \delta_{jk} I_{1,ik} &= I_{1,ij}
 \end{aligned}$$

L'opérateur :

$$\text{En 3D, } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

$$\text{En 2D, } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$$\text{En 1D, } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$$

$$\text{Ce qui donne : } \left[\nabla^2 \sigma_{ij} + I_{1,ij} - \sigma_{ik,jk} - \sigma_{jk,ik} \right] = \frac{\nu}{1+\nu} \left[\delta_{ij} \nabla^2 I_1 + 3I_{1,ij} - I_{1,ij} - I_{1,ij} \right]$$

$$\left[\nabla^2 \sigma_{ij} + I_{1,ij} \left(1 - \frac{\nu}{1+\nu} \right) - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \nabla^2 I_1 \right] = \sigma_{ik,jk} + \sigma_{jk,ik}$$

$$\left[\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \nabla^2 I_1 \right] = \sigma_{ik,jk} + \sigma_{jk,ik} \quad (c)$$

Or, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$Div(\sigma_{ij}) = \sigma_{ik,k} + f_i = 0$$

En dérivant par rapport à x_j , elles donnent :

$$Div(\sigma_{ij}) = \sigma_{ik,jk} + f_{i,j} = 0$$

L'équation (c) devient donc :

$$\left[\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \nabla^2 I_1 \right] = -(f_{i,j} + f_{j,i}) \quad (d)$$

En posant $j = i$ dans (d) et il vient :

$$\left[\nabla^2 \sigma_{ii} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,ii} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ii} \nabla^2 I_1 \right] = -(f_{i,i} + f_{i,i}) \quad (e)$$

Avec

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= I_1 \\ I_{1,ii} &= \nabla^2 I_1 \\ \delta_{ii} I_1 &= 3\nabla^2 I_1 \end{aligned}$$

Les équations (e) s'écrivent

$$\begin{aligned} \nabla^2 I_1 + \frac{\nu}{1+\nu} \nabla^2 I_1 - \frac{3\nu}{1+\nu} \nabla^2 I_1 &= -2f_{i,i} \\ 2\frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla^2 I_1 &= -2f_{i,i} = -2div\vec{f} \\ \nabla^2 I_1 &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} div\vec{f} \end{aligned} \quad (f)$$

En reportant (f) dans (d) :

$$\left[\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{1+\nu}{1-\nu} div\vec{f} \right] = -(f_{i,j} + f_{j,i}) \quad (g)$$

Que nous devons écrire :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} I_1 &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) - 2\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \nabla^2 \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} I_1 &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) - 2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} I_1 = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) - 2 \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

$$\nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} I_1 = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\nabla^2 \sigma_{13} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} I_1 = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right)$$

$$\nabla^2 \sigma_{32} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} I_1 = -\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right)$$

Ce sont les équations de Beltrami-Mitchell

Cas particulier important : Quand les forces massiques sont constantes, l'équation (f) devient :

$$\boxed{\nabla^2 I_1 = 0} \quad (h)$$

I_1 : est une fonction harmonique ($I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$)

La même chose (g) sera :

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,ij} = 0 \quad (i)$$

En appliquant l'opérateur ∇^2 à (i) ;

$$\nabla^2 \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \nabla^2 I_{1,ij} = 0 \quad (k)$$

En tenant compte de (h), il vient :

$$\nabla^4 \sigma_{ij} = 0$$

Les fonctions σ_{ij} sont des fonctions bi-harmonique

15. C. Equations de Lamé-Navier et de Beltrami-Mitchell en déformation plane

- **Equations de Lamé-Navier**

On dit qu'un corps est dans un état de déformation plane (plan x_1, x_2) si le champ de déplacement et le champ de déformation sont tels que :

$$\begin{cases} U_1 = U_1(x_1, x_2) \\ U_2 = U_2(x_1, x_2) \\ U_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right] \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \end{cases}$$

Loi de Hooke :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}I_1\delta_{ij} \end{aligned}$$

Avec : $\varepsilon_{kk} = \text{trace } \varepsilon_{ij}$ et $I_1 = \text{trace } \sigma_{ij}$

On remarque que $\varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} \neq 0$, mais $\sigma_{33} = \sigma_{33}(x_1, x_2)$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Les équations d'équilibre

$$\text{Div}(\sigma_{ij}) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \\ 0 + 0 + f_3 = 0 \end{cases}$$

La seule équation de compatibilité qui n'est pas identiquement vérifiée est :

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$

Dans les équations d'équilibre, on exprime les σ_{ij} en fonction des ε_{ij} puis par les $\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ qui donne les équations de Navier :

$$G \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} \right) + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) + f_1 = 0$$

Pour n'importe quelle composante x_i

$$\boxed{G \nabla^2 U_i + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div} \vec{U}) + f_i = 0}$$

- **Equation de Beltrami-Mitchell**

On utilise la seule équation de compatibilité non identiquement vérifiée dans laquelle on remplacera les ε_{ij} par les σ_{ij} (loi de Hooke)

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_2^2}$$

Les équations en déformation plane sont de la forme

$$\left[\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{1+\nu}{1-\nu} \text{div} \vec{f} \right] = - (f_{i,j} + f_{j,i})$$

$$\nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} I_1 = - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) - 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

$$\nabla^2 \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} I_1 = - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) - 2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

$$\nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} I_1 = - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)$$

Conclusion

Ce premier chapitre a permis d'établir les bases théoriques essentielles de la théorie de l'élasticité des milieux continus, nécessaires à la compréhension du comportement mécanique des matériaux soumis à des sollicitations modérées. Les notions fondamentales relatives aux champs de déplacements, de déformations et de contraintes ont été introduites à travers une formulation tensorielle rigoureuse, mettant en évidence le rôle des invariants et des symétries matérielles. La loi de Hooke, présentée dans ses formes isotrope et anisotrope, a permis de relier ces grandeurs mécaniques au moyen de relations constitutives adaptées, tout en soulignant l'influence des hypothèses cinématiques et mécaniques telles que la contrainte plane et la déformation plane.

L'utilisation de notations matricielles, notamment la notation de Voigt, a contribué à simplifier l'écriture des équations constitutives et à faciliter leur exploitation analytique et numérique. L'ensemble de ces

développements fournit ainsi un cadre théorique cohérent et indispensable à l'étude des phénomènes de plasticité abordés dans le chapitre suivant, ainsi qu'à la modélisation du comportement élastoplastique dans les simulations numériques présentées ultérieurement.

Chapitre 2

Plasticité anisotrope

1. Introduction

Les procédés de formage des tôles jouent un rôle essentiel dans de nombreux secteurs industriels de pointe, tels que l'automobile, l'aéronautique et l'électroménager, où ils permettent la fabrication de composants variés comme les panneaux de carrosserie, les tubes structurels ou encore les pièces profilées [15]. Ces procédés reposent sur l'exploitation de la plasticité des matériaux métalliques, c'est-à-dire leur capacité à subir des déformations permanentes sous l'action de charges mécaniques, afin d'obtenir des géométries complexes sans rupture. Toutefois, le formage des tôles est souvent confronté à l'apparition de défauts altérant la qualité des pièces produites. Parmi les principaux défauts rencontrés figurent les fissures, les plis, le retour élastique après déchargement, ainsi que les irrégularités de surface [16, 17]. La maîtrise de ces phénomènes est un enjeu majeur pour l'optimisation des procédés, ce qui a conduit au développement de la simulation numérique comme alternative fiable aux méthodes expérimentales classiques basées sur l'approche essai-erreur. Cette substitution permet une réduction significative des coûts et des délais de mise au point industrielle [18]. La précision des simulations par éléments finis dépend toutefois fortement de la fidélité du modèle de comportement du matériau utilisé. Celui-ci doit être capable de décrire avec rigueur la réponse mécanique du métal dans un large spectre de conditions de sollicitation, couvrant aussi bien des niveaux de déformation modérés que des taux de déformation élevés. D'un point de vue physique, la plasticité des métaux est étroitement liée à la génération, au glissement et à la multiplication des dislocations au sein des structures cristallines. Ces mécanismes microscopiques gouvernent l'évolution de la microstructure du matériau au cours de l'écoulement plastique [19]. À l'heure actuelle, la théorie du glissement des dislocations constitue le cadre conceptuel le plus largement admis pour la description de la déformation plastique dans les métaux [20] Comme le montre la [figure 2.1](#) . Bien que la modélisation à l'échelle microstructurale offre une compréhension fine des phénomènes physiques en jeu, elle présente des limitations pratiques importantes. En effet, sa mise en œuvre exige une puissance de calcul considérable et des temps de simulation très élevés, ce qui la rend inadaptée aux besoins de la simulation industrielle à grande échelle, comme c'est le cas pour le formage des tôles [21]. C'est pourquoi les approches phénoménologiques — qui visent à reproduire le comportement global du matériau sans modéliser explicitement les mécanismes microscopiques — demeurent largement privilégiées dans le contexte de la simulation numérique des procédés de formage [22]. La mise en œuvre de ces modèles nécessite des campagnes d'essais expérimentaux spécifiques, conçues pour caractériser le comportement élasto-plastique du matériau dans des conditions représentatives des sollicitations rencontrées lors du formage : états de contrainte complexes, gradients de déformation, vitesse de sollicitation, etc.

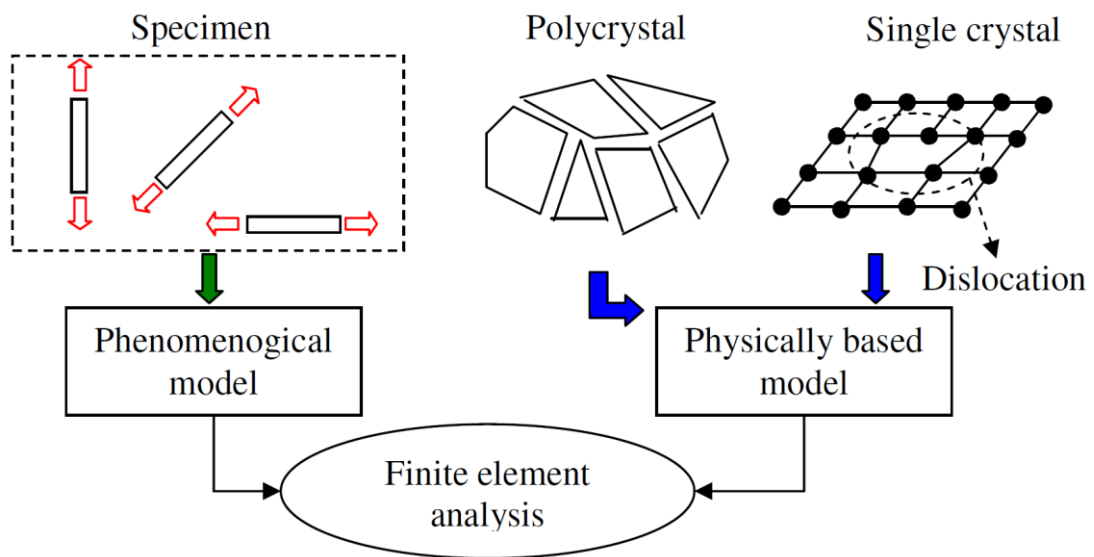


Fig. 2.1 Modélisation physique et phénoménologique des métaux [1]

2. Influence du mode de déformation

2.1 État de déformation et trajectoire

Dans l'espace des déformations principales ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$) et en supposant l'ordre $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$ les composantes ϵ_2 et ϵ_1 représentent respectivement les déformations principales majeure et mineure dans le plan de la tôle. La composante ϵ_3 , associée à l'épaisseur, est généralement très faible en raison du rapport géométrique défavorable (épaisseur très inférieure à la longueur et à la largeur), et peut donc être négligée dans la plupart des cas pratiques.

Dans le même esprit, dans l'espace des contraintes principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) il est courant d'adopter l'hypothèse de contrainte plane, en posant $\sigma_3 = 0$, pour modéliser le comportement mécanique des tôles minces. Cette simplification est justifiée par le fait que la composante normale à la surface (selon l'épaisseur) est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan, compte tenu de la faible épaisseur du matériau.

Au cours du processus de déformation, l'état de déformation peut être caractérisé par le rapport ϵ_2/ϵ_1 , représentant la relation entre les déformations principales dans le plan. Cet état peut rester constant (déformation proportionnelle) ou évoluer (déformation non proportionnelle) au fur et à mesure de l'application des charges. Afin de rendre compte de cette évolution, on introduit la notion de trajectoire de déformation, qui décrit la manière dont l'état de déformation se modifie au cours du chargement.

Dans les procédés de formage des tôles, les conditions aux limites complexes et les contraintes géométriques locales induisent des états de déformation variés dans les différentes zones de la tôle. Par

conséquent, les régions distinctes de l'ébauche peuvent suivre des trajectoires de déformation différenciées, ce qui complique la prédiction du comportement global [23 , 24].

À titre d'exemple, la figure 2.2 illustre un processus d'emboutissage d'une pièce de forme cylindrique. Les figures 2.3 et 2.4 détaillent respectivement les états de contrainte et de déformation, ainsi que les trajectoires de déformation observées dans plusieurs zones typiques (A, B, C) de la pièce. Ces représentations permettent de visualiser concrètement la diversité des régimes mécaniques rencontrés au sein d'un même processus de formage.

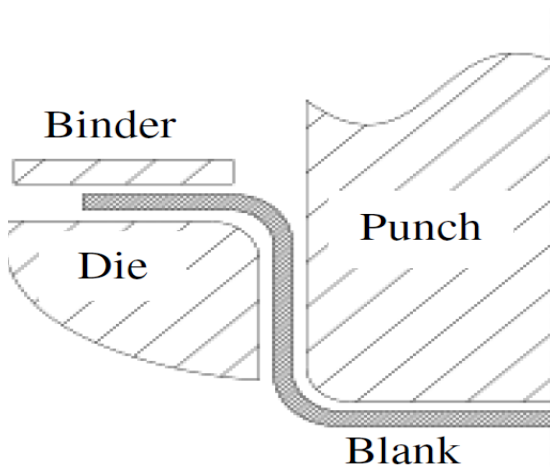


Fig. 2.2 Dessin de la partie cylindrique

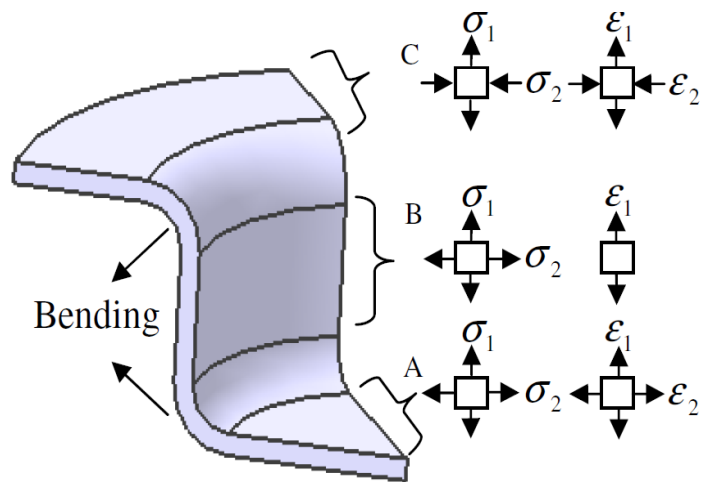


Fig. 2.3 État de contrainte et de déformation de la partie cylindrique

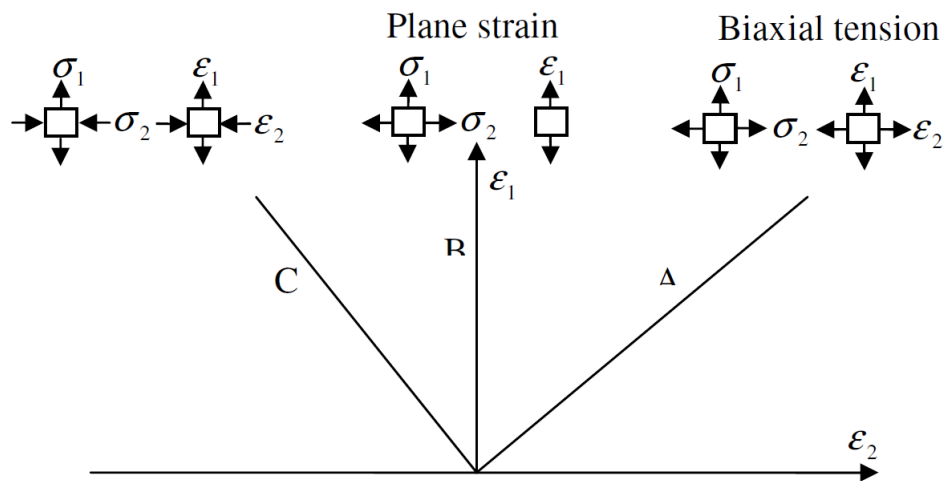


Fig. 2.4 Trajectoires de déformation pour la partie cylindrique

3. Modélisation mathématique du comportement élastoplastique

3.1 Relations constitutives

La modélisation phénoménologique du comportement élastoplastique repose sur les principes de la thermodynamique des processus irréversibles. En effet, la déformation plastique des matériaux métalliques est par nature dissipative et irréversible, impliquant une perte d'énergie mécanique convertie en chaleur ou en énergie interne. Pour décrire fidèlement l'évolution de l'état du matériau sous sollicitation, il est nécessaire d'introduire des variables internes pertinentes, représentant par exemple l'écrouissage isotrope ou cinématique, ou encore la réorientation de la texture cristallographique.

Ces variables internes permettent de capturer l'histoire du chargement et les effets irréversibles associés à l'évolution microstructurale du matériau au cours de la plasticité. De manière générale, les relations constitutives en élastoplasticité s'articulent autour de plusieurs éléments fondamentaux, à savoir :

- une relation de comportement (liant contraintes et déformations élastiques),
- une fonction de plasticité (ou critère de plasticité),
- une règle d'écoulement (décrivant la direction de la déformation plastique),
- et une ou plusieurs lois d'évolution des variables internes.

3.2 Écrouissage des métaux

L'écrouissage des métaux est un phénomène fondamental en plasticité, résultant principalement du mouvement et de l'interaction des dislocations dans la structure cristalline. À basse température, ce mécanisme est dominé par le glissement des dislocations le long des plans et directions cristallographiques, qui engendre une augmentation progressive de la résistance du matériau à la déformation plastique (Kocks et al., 2000) [25]. Mécanismes microscopiques de l'écrouissage : Au cours de la déformation plastique, plusieurs phénomènes se produisent :

1. Rotation du réseau cristallin : Sous sollicitation mécanique, les plans atomiques subissent une rotation progressive, modifiant l'orientation cristallographique.
2. Accumulation des dislocations : Les dislocations mobiles rencontrent des obstacles microstructuraux (joints de grains, précipités, autres dislocations), entraînant leur accumulation et une augmentation de la résistance au glissement.

3. Évolution de la contrainte d'écoulement : Cette résistance accrue se traduit par une élévation de la contrainte nécessaire pour poursuivre la déformation plastique, phénomène caractérisé comme l'écrouissage (Cardoso et Yoon, 2009) [26].

La courbe contrainte-déformation plastique (ou courbe d'écoulement) illustre cette évolution : la contrainte d'écoulement croît avec la déformation plastique accumulée, reflétant la dissipation énergétique associée aux mécanismes de durcissement. Lors d'un déchargement, la contrainte d'écoulement instantanée devient la nouvelle limite d'élasticité (Barlat, 2007) [27], marquant l'évolution irréversible des propriétés mécaniques.

Typologie de l'écrouissage. Le comportement d'écrouissage peut être décomposé en deux contributions principales, gouvernant respectivement :

- La translation de la surface d'écoulement (écrouissage cinématique), liée aux effets directionnels comme l'effet Bauschinger.
- L'expansion de la surface d'écoulement (écrouissage isotrope), traduisant une augmentation homogène de la résistance plastique.

3.3 Les modèles d'écrouissage en comportement plastique

La loi d'écrouissage est généralement identifiée à partir d'essais de traction uniaxiale. Pour des sollicitations multiaxiales plus complexes, cette loi relie l'évolution de la contrainte équivalente ($\bar{\sigma}$) à la déformation plastique équivalente ($\bar{\varepsilon}$) sous la forme $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$.

3.3.1. Modèle d'écrouissage isotrope

L'écrouissage isotrope est particulièrement adapté à la modélisation de chargements monotones, tels que les essais de traction, où la direction de la sollicitation reste constante. Une des formulations les plus utilisées est la loi exponentielle de Hollomon, qui décrit de manière simplifiée le comportement plastique des métaux en traction :

$$\sigma = K \cdot \varepsilon^n \tag{2.1}$$

où, K : est le coefficient de résistance, n : est l'exposant d'écrouissage.

Cette approche a été enrichie par les travaux de Song et al. [28-30], qui ont approfondi la caractérisation mécanique et la normalisation des mesures d'écrouissage.

3.3.2. Évolution du critère plastique

Le comportement plastique induit une modification de la surface de charge (ou surface d'écoulement). Dans le cas d'un écrouissage purement isotrope, cette surface se dilate de manière homogène, entraînant une augmentation progressive de la limite élastique (ou contrainte d'écoulement plastique) en fonction de la déformation accumulée. Les principales lois d'écrouissage sont présentées dans la [figure 2.5](#).

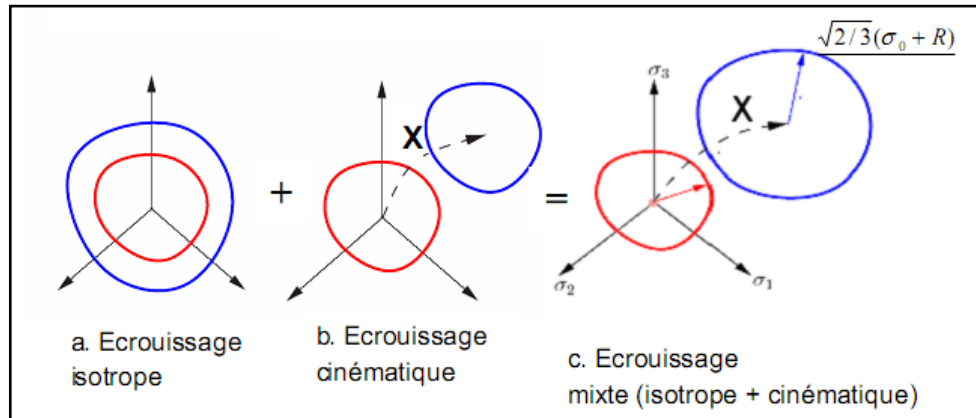


Figure 2.5 Les principales lois d'écrouissage en espace t de contraintes principales.

4. Identification des coefficients des modèles d'écrouissage isotrope

Les essais de traction uniaxiale et de compression constituent des méthodes fondamentales pour caractériser le comportement plastique des matériaux, grâce à l'état de contrainte uniaxiale qu'ils génèrent dans la partie utile de l'éprouvette. Cependant, la courbe de traction présente une limitation majeure : au-delà d'un certain seuil (généralement ~20 % pour les alliages d'aluminium et d'aciers), le phénomène de striction entraîne une localisation des déformations, rendant difficile l'extraction de données fiables à forts taux de déformation.

L'objectif de cette étude est de prolonger la modélisation du comportement plastique au-delà de 20 % de déformation, afin d'enrichir la description de la plasticité anisotrope. Pour cela, plusieurs modèles phénoménologiques d'écrouissage isotrope $\sigma = f(\epsilon)$ sont analysés, reliant la contrainte équivalente à la déformation plastique équivalente

5. Lois d'érouissage isotrope couramment utilisées

Les modèles suivants, classés par complexité croissante, sont couramment employés pour décrire l'évolution de la contrainte d'écoulement :

a. **Loi d'Hollomon** (1945) [31]: $\sigma_r = K \varepsilon_r^n$ (2.1)

- *Avantage* : Simplicité (2 paramètres : K = coefficient de résistance, n = exposant d'érouissage).
- *Limite* : Sous-estime souvent l'érouissage aux grandes déformations.

b. **Loi de Ludwick** (1909) [32]: $\sigma_r = \sigma_e + K \varepsilon_r^n$ (2.2)

- *Amélioration* : Ajout d'une contrainte initiale σ_e pour mieux coller aux données expérimentales.

c. **Loi de Swift** (ou Krupkowsky, 1952) [33]: $\sigma_r = K(\varepsilon_0 + \varepsilon_r)^n$ (2.3)

- *Utilité* : Paramètre ε_0 affine la courbure initiale, adapté aux pré-déformations.

d. **Loi de Voce** (1948) [34]: $\sigma_r = \sigma_{sat} - (\sigma_{sat} - \sigma_e) \exp(-c \varepsilon_p)$ (2.4)

- *Spécificité* : Modèle à saturation (σ_{sat}), idéal pour décrire le plateau de contrainte à haute déformation.

e. **Loi de Hockett-Sherby** (1975) [35]: $\sigma_r = \sigma_{sat} - (\sigma_{sat} - \sigma_e) \exp(-c \varepsilon_p^m)$ (2.5)

- *Flexibilité* : Exposant additionnel m pour ajuster la cinétique de saturation.

f. **Combinaison de modèles** :

Des formulations hybrides (ex. : Swift-Voce) sont souvent utilisées pour couvrir une plage étendue de déformations.

5.1. Méthodologie d'identification des paramètres

- **Décomposition des déformations** : La déformation totale ε doit être décomposée en parties élastique (ε_e) et plastique (ε_p), notamment en utilisant les mesures en contraintes vraies/déformations vraies pour les grandes déformations.

- Optimisation numérique : Les coefficients sont identifiés par régression non linéaire sur les données expérimentales, en minimisant l'écart entre modèle et essais.

5.2. Applications et implications

Ces lois permettent de :

- Prédire la réponse matériau sous chargements complexes (emboutissage, crash).
- Améliorer les simulations numériques (éléments finis) en étendant la plage de validité des modèles.

6. Effet Bauschinger

6.1. Origines microstructurales du phénomène

L'effet Bauschinger est un comportement caractéristique observé dans de nombreux métaux et alliages, résultant principalement des contraintes internes micro-résiduelles générées lors de la déformation plastique. Ces contraintes proviennent des incompatibilités de déformation entre grains voisins, liées à l'hétérogénéité des glissements de dislocations et à leur interaction avec les obstacles microstructuraux (Barlat, 2007).

6.2. Manifestation macroscopique

Macroscopiquement, cet effet se traduit par une réduction significative de la limite d'élasticité lors d'une inversion de charge (par exemple, après une pré-déformation en traction suivie d'une compression). Comme illustré sur la [Figure 2.6](#), la limite d'élasticité en compression après inversion (σ_c') devient inférieure à celle mesurée sans pré-déformation (σ_c).

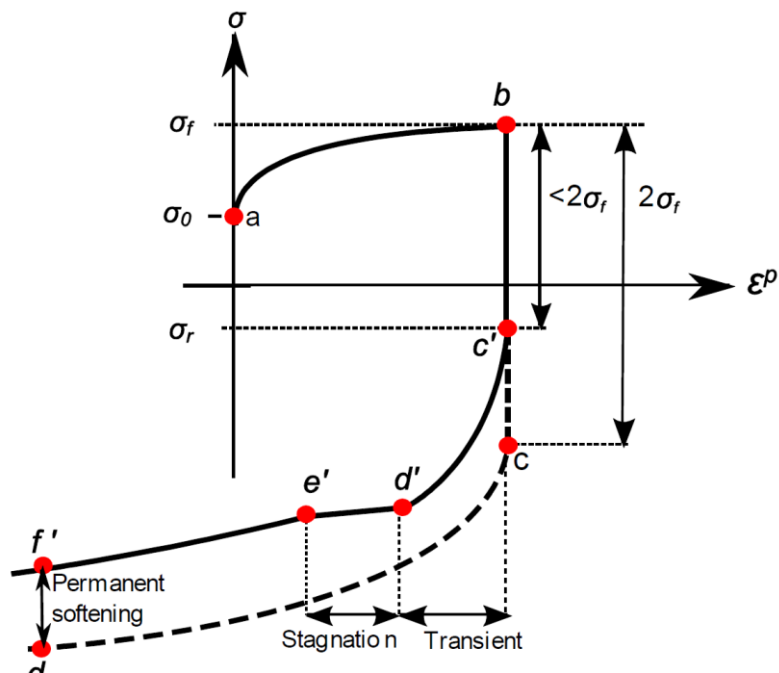


Fig 2.6 Schéma de la courbe d'écroutissage pour une condition de charge inversée.

6.3 Implications mécaniques :

- L'effet Bauschinger influence drastiquement le retour élastique (*springback*) lors de la mise en forme des tôles, pouvant en modifier l'ampleur jusqu'à un facteur 2 (Wagoner et al., 2012) [35].
- Il joue un rôle clé dans la fatigue des matériaux soumis à des chargements cycliques.

6.3. Modélisation par l'écroutissage cinématique

Pour capturer cet effet dans les simulations, deux approches sont couramment utilisées :

1. Modèle linéaire (ex. : Prager) :
 - Simple mais souvent insuffisant pour décrire précisément la courbe de contrainte-déformation.
2. Modèle non linéaire (ex. : Armstrong-Frederick) :
 - Introduit une décroissance exponentielle du durcissement, améliorant la prédiction de la réponse matériau sous inversions de charge (Thuillier et Manach, 2009) [36].

Formulation classique d'Armstrong-Frederick : $\dot{\alpha} = C \cdot \dot{\varepsilon}_p^{-\gamma} \cdot \alpha \cdot |\dot{\varepsilon}_p|$ (2.6)

où α est la variable de tension interne, C et γ sont des paramètres matériau.

6.4. Importance pour les procédés industriels

La prise en compte de l'effet Bauschinger est essentielle pour :

- Optimiser les procédés de formage (réduction des défauts géométriques).
- Prédire la durée de vie en fatigue des composants.
- Améliorer la précision des modèles éléments finis en plasticité cyclique.

7. Critère d'écoulement plastique

Dans le cadre de l'hypothèse de contrainte plane, le critère d'écoulement plastique permet de délimiter, dans l'espace des contraintes, les domaines élastique et plastique du comportement du matériau. Il définit une surface d'écoulement au-delà de laquelle le matériau cesse de se comporter de manière réversible, marquant l'entrée dans le régime plastique. Pour garantir la stabilité physique du modèle, il est impératif que cette surface soit convexe, conformément aux principes de la thermodynamique et à la condition de Drucker [37].

Du fait de leur microstructure orientée, résultant des opérations de laminage à froid ou à chaud, les tôles métalliques présentent généralement une anisotropie marquée dans leur réponse mécanique. Cette anisotropie se manifeste par des variations significatives des propriétés mécaniques en fonction de la direction de sollicitation, et doit être prise en compte lors du choix ou de la formulation d'un critère d'écoulement adapté [38].

Dans ce contexte, il est courant de définir un repère orthotrope basé sur les directions principales de la tôle:

- la direction de laminage (DL),
- la direction transverse (TD),
- et la direction normale (DN), perpendiculaire au plan de la tôle.

Ce système de référence permet de formuler des critères anisotropes d'écoulement capables de reproduire avec précision le comportement plastique directionnel des tôles laminées. De tels critères sont indispensables pour améliorer la prédiction des zones à risque de fissuration ou de striction lors des simulations numériques des procédés de formage.

La variation du comportement plastique d'une tôle en fonction de l'orientation de sollicitation, notamment selon un angle θ par rapport à la direction de référence (DL), peut être caractérisée à l'aide d'un paramètre expérimental appelé coefficient du potentiel plastique, ou constantes de Lankford (noté généralement $r(\theta)$). Ce coefficient est défini comme le rapport entre la déformation plastique réelle dans la direction de la

largeur ($\dot{\varepsilon}_{yy}$) et celle dans la direction de l'épaisseur ($\dot{\varepsilon}_{zz}$) d'une éprouvette soumise à un essai de traction uniaxiale, soit :

$$r(\theta) = \frac{\dot{\varepsilon}_{yy}}{\dot{\varepsilon}_{zz}} \quad (2.7)$$

La valeur de ce coefficient, mesurée pour différentes orientations θ , permet d'évaluer le degré d'anisotropie plastique du matériau et d'identifier les directions privilégiées ou défavorables à la déformation homogène. Comme illustré à la figure 2.7, cette mesure est essentielle dans la conception des modèles de formage, notamment pour la prédiction de phénomènes comme la striction localisée ou la fissuration.

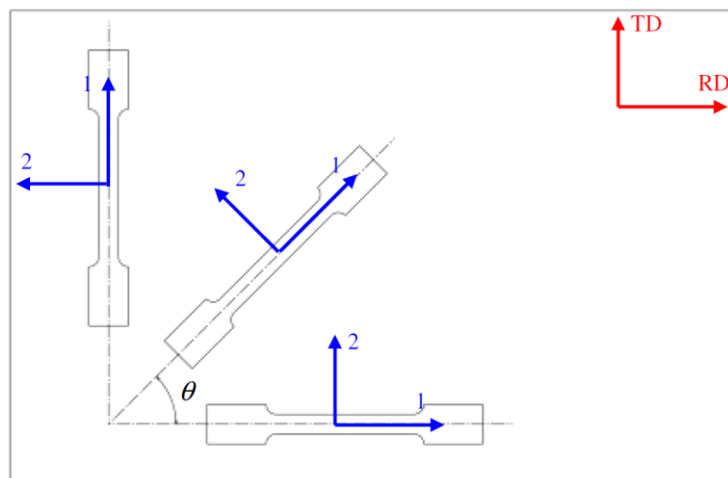


Fig. 2.7 Essais de traction uniaxiale dans différentes directions

7.1. Critère de Hill 48 :

Certains matériaux présentent un comportement mécanique qui varie selon la direction de sollicitation. Ce phénomène, appelé anisotropie, est particulièrement prononcé dans les matériaux métalliques laminés. Une forme spécifique de cette anisotropie, appelée orthotropie, se caractérise par l'existence de trois plans de symétrie mutuellement orthogonaux, définissant ainsi un repère orthotrope constitué de trois axes principaux notés x, y et z. Dans le cas des tôles métalliques issues de procédés de laminage, le comportement du matériau est généralement considéré orthotrope, les axes du repère étant définis comme suit :

- x : direction de laminage (DL) ou Rolling Direction (RD),
- y : direction transverse (DT), perpendiculaire à DL dans le plan de la tôle,
- z : direction normale (DN), perpendiculaire au plan de la tôle.

Dans le but de modéliser le comportement plastique des tôles anisotropes tout en négligeant les effets de type Bauschinger (retour élastique inverse), R. Hill proposa en 1948 un critère de plasticité généralisé. Ce

critère, adapté aux matériaux présentant une anisotropie initiale, constitue une extension du critère de von Mises aux milieux orthotropes. Il repose sur l'hypothèse d'une fonction d'écoulement convexe dans l'espace des contraintes.

Mathématiquement, cette convexité implique que la fonction de chargement $f(\sigma_{ij})$ soit deux fois différentiable et que sa matrice Hessienne H soit semi-définie positive. Autrement dit, les valeurs propres de H doivent être nulles ou strictement positives, assurant ainsi une réponse mécanique stable sous chargement.

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} = C_{ij} \quad (2.8)$$

Dans le repère des axes d'orthotrope peut s'écrire.

$$f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = \sigma_0^2 \quad (2.9)$$

L'écriture indicielle de (2.9) est :

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma : C : \sigma = C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (2.10)$$

Le tenseur C représente le tenseur d'élasticité d'ordre 4 et de dimension 3. Par souci de simplification, notamment dans le cas de matériaux anisotropes, il est courant de représenter ce tenseur sous une forme matricielle équivalente de dimension 6×6 dite notation de Voigt. Cette forme matricielle est particulièrement adaptée aux matériaux orthotropes, pour lesquels la symétrie du matériau permet de réduire considérablement le nombre de constantes indépendantes.

$$f(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F+H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Les coefficients F, G, H, L, M et N introduits dans le critère quadratique de Hill sont appelés paramètres d'anisotropie. Ils jouent un rôle fondamental dans la définition de la forme et de l'orientation de la surface d'écoulement plastique dans l'espace des contraintes. En d'autres termes, ces paramètres traduisent le degré d'anisotropie du matériau en lien avec sa microstructure et son histoire de fabrication (notamment le laminage).

Afin de garantir que le critère reste indépendant de la pression hydrostatique, ce qui est une exigence fondamentale dans le cadre de la plasticité incompressible, il est nécessaire que ces paramètres satisfassent les trois conditions de Karafillis et Boyce (1993) [39], formulées pour chaque direction $C_{1K} + C_{2K} + C_{3K} = 0$ pour $k = 1, 2, 3$. Ces conditions assurent que l'état de contrainte hydrostatique ne produit aucun écoulement plastique, conformément aux principes de la plasticité métallique.

Suivant les 3 directions axiales les contraintes sont : σ_0^1, σ_0^2 et σ_0^3 .

$$G + H = \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0^1)^2}, \quad F + H = \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0^2)^2}, \quad F + G = \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0^3)^2}$$

Si: $\sigma_0^{23}, \sigma_0^{13}$ et σ_0^{12} sont les cissions simples dans les plans d'anisotropie, on obtient :

$$2L = \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0^{23})^2}, \quad 2M = \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0^{13})^2}, \quad 2N = \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0^{12})^2}$$

Les constantes d'anisotropie du critère de Hill sont F, G, H, L, M et N après étude des conditions de convexité du critère par la matrice Hessienne : $H_{ij} = \partial^2 f / \partial \sigma_i \partial \sigma_j$.

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} G + H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F + H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F + G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix}$$

Les constantes semi positives sont calculées par la relation caractéristique :

$$\det (H_{ij} - KI) = 0$$

Dans l'approximation des contraintes planes, les contraintes suivantes sont nulles ($\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$), donc, Hill48 devient :

$$f(\sigma_{ij}) = (G + H)\sigma_{11} - 2H\sigma_{11}\sigma_{22} + (H + F)\sigma_{22}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = \sigma_0^2 \quad (2.12)$$

Pour un cas particulier si $F=G=H=1/2$ et $L=M=N=3/2$, le critère de Hill se transforme à celui de Von Mises isotrope.

La caractérisation complète du critère de plasticité en contraintes planes, pour un matériau orthotrope, nécessite l'identification des constantes anisotropes. Cette identification repose sur l'expression de la contrainte équivalente obtenue à partir d'essais de traction réalisés sur des éprouvettes orientées selon différents angles θ par rapport à la direction de laminage. Ces essais permettent de relier la réponse mécanique du matériau à ses directions principales d'anisotropie, condition indispensable à la calibration du critère.

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_0}{(F \sin^4 \theta + G \cos^4 \theta + H \cos^2 2\theta + 2N \sin^2 \theta \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.13)$$

7.2. Loi d'évolution de Hill :

$$f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = \sigma_0^2$$

La loi d'écoulement de Hill s'écrit : $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\sigma_{ij}}$

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_0} [H(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - G(\sigma_{33} - \sigma_{11})] \times F \\ \dot{\epsilon}_{22} = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_0} [F(\sigma_{22} - \sigma_{33}) - H(\sigma_{11} - \sigma_{22})] \times -G \\ \dot{\epsilon}_{33} = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_0} [G(\sigma_{33} - \sigma_{11}) - F(\sigma_{22} - \sigma_{33})] \times H \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_{23} = 2\dot{\lambda}L\sigma_{23} \\ \dot{\epsilon}_{13} = 2\dot{\lambda}M\sigma_{13} \\ \dot{\epsilon}_{12} = 2\dot{\lambda}N\sigma_{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{F\dot{\epsilon}_{11} - G\dot{\epsilon}_{22}}{2\dot{\lambda}} = (FG + GH + HF)(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \\ \frac{F\dot{\epsilon}_{11} - H\dot{\epsilon}_{33}}{2\dot{\lambda}} = (FG + GH + HF)(\sigma_{11} - \sigma_{33}) \\ \frac{H\dot{\epsilon}_{33} - G\dot{\epsilon}_{22}}{2\dot{\lambda}} = (FG + GH + HF)(\sigma_{33} - \sigma_{22}) \end{cases} \quad (2.14)$$

Les relations inverses sont :

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = \frac{F\dot{\epsilon}_{11} - G\dot{\epsilon}_{22}}{2\dot{\lambda}(FG + GH + HF)} \\ (\sigma_{11} - \sigma_{33}) = \frac{F\dot{\epsilon}_{11} - H\dot{\epsilon}_{33}}{2\dot{\lambda}(FG + GH + HF)} \\ (\sigma_{33} - \sigma_{22}) = \frac{H\dot{\epsilon}_{33} - G\dot{\epsilon}_{22}}{2\dot{\lambda}(FG + GH + HF)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = \frac{\dot{\epsilon}_{23}}{2\dot{\lambda}L} \\ \sigma_{13} = \frac{\dot{\epsilon}_{13}}{2\dot{\lambda}M} \\ \sigma_{12} = \frac{\dot{\epsilon}_{12}}{2\dot{\lambda}N} \end{cases}$$

D'où, en remplaçant par ces quantités dans le critère de Hill, on obtient on aura.

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2\sigma_0} \left[F \left(\frac{H\dot{\epsilon}_{33} - G\dot{\epsilon}_{22}}{FG + GH + HF} \right)^2 + G \left(\frac{F\dot{\epsilon}_{11} - H\dot{\epsilon}_{33}}{FG + GH + HF} \right)^2 + H \left(\frac{F\dot{\epsilon}_{11} - G\dot{\epsilon}_{22}}{FG + GH + HF} \right)^2 + \frac{2\dot{\epsilon}_{23}^2}{L} + \frac{2\dot{\epsilon}_{13}^2}{M} + \frac{2\dot{\epsilon}_{12}^2}{N} \right]^{1/2}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2\sigma_0} \left[\frac{F\dot{\epsilon}_{11}^2 + G\dot{\epsilon}_{22}^2 + H\dot{\epsilon}_{33}^2}{FG + GH + HF} + \frac{2\dot{\epsilon}_{23}^2}{L} + \frac{2\dot{\epsilon}_{13}^2}{M} + \frac{2\dot{\epsilon}_{12}^2}{N} \right]^{1/2} \quad (2.14)$$

Le facteur indéterminé $\dot{\lambda}$ s'identifie à la norme du tenseur Vitesse de déformation $\dot{\epsilon}^P$.

7.3 Critère non-quadratique de Hill (1979) [40]

Le critère quadratique proposé initialement par Hill s'est révélé insuffisant pour décrire avec précision le comportement mécanique de certains alliages d'aluminium, notamment ceux présentant un fort degré

d'anisotropie avec un coefficient $R \leq 1$. Pour remédier à cela, Hill a introduit en 1979 une version plus générale, non-quadratique, de son critère, permettant une meilleure prise en compte de l'anisotropie directionnelle à l'aide de paramètres supplémentaires.

Ce critère, applicable à des matériaux orthotropes, suppose que les directions principales des contraintes coïncident avec les axes d'orthotropie du matériau. Dans ce cadre, l'expression du critère peut être formulée de la manière suivante :

$$f(\sigma_{ij}) = \mathbf{f}|\sigma_2 - \sigma_3|^m + \mathbf{g}|\sigma_3 - \sigma_1|^m + \mathbf{h}|\sigma_1 - \sigma_2|^m + a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^m + b|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^m + c|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^m = 2\sigma_0^m \quad (2.15)$$

Les paramètres f, g, h, a, b , et c reflètent les caractéristiques d'anisotropie propres au matériau étudié. Le modèle comprend également un paramètre additionnel, noté m , dont l'identification exige le recours à des essais mécaniques complexes, tels que la traction équibiaxiale ou des tests multiaxiaux. Ce paramètre m doit impérativement être supérieur à 1 afin de garantir la convexité de la fonction d'écoulement. Tous les paramètres mentionnés sont obtenus par corrélation avec des données expérimentales.

À partir de cette formulation généralisée du critère, il est possible de distinguer cinq cas particuliers. Ces cas, associés à des combinaisons spécifiques des coefficients d'anisotropie, permettent de modéliser avec plus de précision la réponse mécanique anisotrope de différents matériaux. En prenant l'exemple d'un essai de traction uniaxiale, Hill a établi que, dans le cadre d'un matériau à isotropie transverse, le coefficient d'anisotropie R peut être exprimé de manière générale à partir du critère sous la forme suivante :

$$R = \frac{(2^{m-1}+2)a-c+h}{(2^{m-1}-1)a+2c+f} \quad (2.16)$$

L'ensemble de ces cas est formulé sous l'hypothèse d'une isotropie transverse, caractérisée notamment par les égalités ($a = b, f = g$). Ils sont exprimés dans le cadre d'un état de contraintes planes, selon les expressions suivantes :

Cas (1) : $a = b = h = 0, f = g$

$$c|\sigma_1 + \sigma_2|^m + f(|\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m) = \bar{\sigma}^m$$

Cas (2) : $a = b, c = f = g = 0$

$$a(|2\sigma_1 - \sigma_2|^m + |2\sigma_2 - \sigma_1|^m) + h|\sigma_1 - \sigma_2|^m = \bar{\sigma}^m \quad (2.17)$$

Cas (3) : $a = b, f = g, c = h = 0$

$$a(|2\sigma_1 - \sigma_2|^m + |2\sigma_2 - \sigma_1|^m) + f(|\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m) = \bar{\sigma}^m$$

Cas (4) : $a = b = f = g = 0$

$$c|\sigma_1 + \sigma_2|^m + h|\sigma_1 - \sigma_2|^m = \bar{\sigma}^m$$

7.4. Critère de F. Barlat (Yld2000-2D) [5]

Le critère Yld2000-2D, proposé par F. Barlat, est aujourd'hui largement reconnu comme l'un des modèles les plus adaptés à la description du comportement plastique des tôles en aluminium présentant une anisotropie orthotrope. Ce critère introduit l'anisotropie par le biais de deux transformations linéaires distinctes : la première, notée ϕ' , et la seconde ϕ'' , intégrées dans l'expression de la contrainte équivalente. L'équation du critère fait intervenir un exposant k , généralement fixé à 8 pour les métaux à structure cubique à faces centrées (CFC), et à 6 pour ceux à structure cubique centrée (CC).

$$\begin{cases} \Phi = \Phi' + \Phi'' = 2\sigma_0^K \\ \Phi' = |S'_1 - S'_2|^K \\ \Phi'' = |2S''_2 + S''_1|^K + |2S''_1 + S''_2|^K \end{cases} \quad (2.18)$$

Où : $((S'_1, S'_2)$ et (S''_1, S''_2) représentent les valeurs propres principales des tenseurs de contraintes planes obtenus par des transformations linéaires. Ces tenseurs sont dérivés respectivement du déviateur des contraintes S et du tenseur des contraintes de Cauchy σ , selon les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} S'_{11} \\ S'_{22} \\ S'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & 0 \\ C'_{21} & C'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{12} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} S''_{11} \\ S''_{22} \\ S''_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C''_{11} & C''_{12} & 0 \\ C''_{21} & C''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C''_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{12} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

En forme contractée:

$$\begin{cases} S' = C'S = C'T\sigma = L'\sigma \\ S'' = C''S = C''T\sigma = L''\sigma \end{cases}$$

Les contraintes principales deviatorique planes sont :

$$S_{1,2} = \frac{1}{2}(S_{11} + S_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2}$$

Donc pour les deux termes ϕ', ϕ'' on peut donner les contraintes déviatorique principales planes :

$$S'_{1,2} = \frac{1}{2}(S'_{11} + S'_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(S'_{11} - S'_{22})^2 + 4S_{12}'^2} \quad (2.20)$$

$$S''_{1,2} = \frac{1}{2}(S''_{11} + S''_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(S''_{11} - S''_{22})^2 + 4S_{12}''^2}$$

La matrice T des constantes déviatorique est :

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{13} \\ S_{23} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\Rightarrow T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Plan}}{=} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \text{ tenseur isotrope} \quad (2.21)$$

La matrice T permet de transformer le tenseur des contraintes σ en son équivalent déviatorique S . Dans le cas de matériaux orthotropes, la transformation linéaire est assurée par la matrice L , qui s'écrit alors sous la forme suivante :

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & 0 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{66} \end{bmatrix} \stackrel{\text{Plan}}{=} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{66} \end{bmatrix}$$

Avec : $L_{1i} + L_{2i} + L_{3i} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

$$\rightarrow L' = C'T \Rightarrow \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & 0 \\ C'_{21} & C'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C'_{11}/3 & -C'_{11}/3 & 0 \\ -C'_{22}/3 & 2C'_{22}/3 & 0 \\ 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} & 0 \\ L'_{21} & L'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{66} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Et la condition : $C'_{12} = C'_{21} = 0$

$$S' = L'\sigma \rightarrow \begin{bmatrix} S'_{11} \\ S'_{22} \\ S'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} & 0 \\ L'_{21} & L'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow L'' = C''T \Rightarrow \begin{bmatrix} C''_{11} & C''_{12} & 0 \\ C''_{21} & C''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C''_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2C''_{11} - C''_{12}]/3 & [2C''_{12} - C''_{11}]/3 & 0 \\ [2C''_{21} - C''_{22}]/3 & [2C''_{22} - C''_{21}]/3 & 0 \\ 0 & 0 & C''_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L''_{11} & L''_{12} & 0 \\ L''_{21} & L''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L''_{66} \end{bmatrix}$$

$$S'' = L''\sigma \rightarrow \begin{bmatrix} S''_{11} \\ S''_{22} \\ S''_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L''_{11} & L''_{12} & 0 \\ L''_{21} & L''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L''_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

On pose :

$$\begin{cases} \alpha_1 = C'_{11} \\ \alpha_2 = C'_{22} \\ \alpha_3 = 2C''_{21} + C''_{11} \\ 2\alpha_4 = 2C''_{22} + C''_{12} \\ 2\alpha_5 = 2C''_{11} + C''_{21} \\ \alpha_6 = 2C''_{12} + C''_{22} \\ \alpha_7 = C'_{66} \\ \alpha_8 = C''_{66} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'_{11} = \alpha_1 \\ C'_{22} = \alpha_2 \\ C''_{11} = \frac{1}{3}[4\alpha_5 - \alpha_3] \\ C''_{22} = \frac{1}{3}[4\alpha_4 - \alpha_6] \\ C''_{12} = \frac{2}{3}[\alpha_6 - \alpha_4] \\ C''_{21} = \frac{2}{3}[\alpha_3 - \alpha_5] \\ C'_{66} = \alpha_7 \\ C''_{66} = \alpha_8 \end{cases}$$

7.4. Critère de F. Barlat (Yld96) [4]

Le critère de plasticité **Yld96**, proposé par **Barlat et al.**, constitue l'une des fonctions de plasticité anisotropes les plus précises pour les tôles laminées. Il s'exprime sous la forme suivante :

$$f(\sigma_{ij}) = \psi = \alpha_1 |S_2 - S_3|^a + \alpha_2 |S_3 - S_1|^a + \alpha_3 |S_1 - S_2|^a = 2\sigma_0^a \quad (2.24)$$

L'exposant non quadratique « **a** » est une constante caractéristique du matériau, fortement liée à la structure cristalline. Pour les matériaux à structure cubique à faces centrées (CFC), la valeur **a = 8** est généralement recommandée, tandis qu'une valeur **a = 6** est préconisée pour les matériaux à structure cubique centrée (CC).

Dans l'équation ((2.24)), les valeurs propres de l'espace des contraintes équivalentes de la plasticité isotrope sont données par :

$$S = L\sigma$$

où **L** désigne le tenseur symétrique et déviatorique d'ordre quatre, représentant une transformation linéaire des contraintes de Cauchy. Pour les matériaux orthotropes, et en notation **6 × 6**, le tenseur **L** se réduit à la forme suivante, où **C_k** sont des constantes caractéristiques du matériau :

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{c_2 + c_3}{3} & \frac{-c_3}{3} & \frac{-c_2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-c_3}{3} & \frac{c_1 + c_3}{3} & \frac{-c_1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-c_2}{3} & \frac{-c_1}{3} & \frac{c_1 + c_2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Dans le cas d'un état de contrainte plane ($\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$), où la direction **Z** correspond à la troisième direction principale, on a :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_2 + c_3}{3} & \frac{-c_3}{3} & \frac{-c_2}{3} & 0 \\ \frac{-c_3}{3} & \frac{c_1 + c_3}{3} & \frac{-c_1}{3} & 0 \\ \frac{-c_2}{3} & \frac{-c_1}{3} & \frac{c_1 + c_2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

et

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_x & S_{xy} & 0 \\ S_{xy} & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_3(\sigma_x - \sigma_y) - c_2(\sigma_z - \sigma_x)}{3} & c_6\sigma_{xy} & 0 \\ c_6\sigma_{xy} & \frac{c_1\sigma_y - c_3(\sigma_x - \sigma_y)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -S_x - S_y \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Les contraintes déviatoriques principales S_{ij} dans une tôle peuvent être formulées comme suit :

$$S_{1,2} = \frac{S_x + S_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S_x - S_y}{2}\right)^2 + S_{xy}^2}, \quad S_3 = -(S_1 + S_2) \quad (2.28)$$

Les coefficients $\alpha_{i=1,2,3} = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont calculés à l'aide de la transformation suivante :

$$\alpha_i = \alpha_x P_{1i}^2 + \alpha_y P_{2i}^2 + \alpha_z P_{3i}^2$$

P représente la matrice de transformation reliant la direction principale de la contrainte σ aux axes principaux de l'anisotropie.

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les relations entre $\alpha_{i=1,2,3} = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et θ sont données par :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_x \cdot \cos^2 \theta + \alpha_y \cdot \sin^2 \theta \\ \alpha_2 &= \alpha_x \cdot \sin^2 \theta + \alpha_y \cdot \cos^2 \theta \\ \alpha_3 &= \alpha_{z_0} \cdot \cos^2 2\theta + \alpha_{z_1} \sin^2 2\theta \end{aligned} \quad (2.29)$$

In the above equations, $c_1, c_2, c_3, c_6, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_{z_0}, \alpha_{z_1}$ are eight coefficients that describe the anisotropy of the material. The value of α_{z_0} is usually set to **1**. Seven parameters obtained by a numerical identification based on the experimental data $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, r_0, r_{45}, r_{90}$ and σ_b . A nonlinear system of seven equations of the seven unknowns is recommended to be solved using the *Newton-Raphson* method. It should be noted that the function of Yld96 reduces to the simple isotropic case when all the seven anisotropy parameters $c_1, c_2, c_3, c_6, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in the **L** tensor are equal to **1** and finally by setting the exponent **a = 2** and all the anisotropic parameters equal to unit, the standard *von Mises* isotropic criteria is restored.

Dans les équations précédentes, les huit coefficients $c_1, c_2, c_3, c_6, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_{z_0}, \alpha_{z_1}$ décrivent l'anisotropie du matériau. La valeur de α_{z_0} est généralement fixée à **1**. Les sept autres paramètres sont déterminés par une identification numérique à partir des données expérimentales de contrainte d'écoulement et de coefficient d'anisotropie plastique $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, r_0, r_{45}, r_{90}$ et σ_b . Un système non linéaire de sept équations à sept inconnues est alors résolu à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Il est à noter que la fonction de plasticité Yld96 se réduit au cas isotrope lorsque les sept paramètres d'anisotropie $c_1, c_2, c_3, c_6, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ du tenseur **L** sont tous égaux à 1. Enfin, en fixant l'exposant **a=2** et en prenant tous les paramètres d'anisotropie égaux à l'unité, on retrouve le critère isotrope de von Mises.

8. Approches phénoménologiques des lois de comportement plastique : cadres associés (AFR) et non associés (NAFR)

La mise en forme plastique des tôles métalliques, en particulier par transformation rigide, constitue une étape déterminante dans les chaînes de production de l'industrie automobile, aéronautique et de l'emballage. Les procédés de laminage et d'emboutissage, piliers de ces applications, reposent fortement sur les propriétés mécaniques directionnelles des matériaux, notamment leur comportement anisotrope, hérité de leur structure cristalline et des contraintes de fabrication.

Dans ce contexte, la modélisation fidèle du comportement mécanique des tôles laminées devient une exigence incontournable pour la simulation numérique des procédés de mise en forme. Or, les tôles issues du laminage à froid présentent fréquemment une texture cristallographique hétérogène, marquée à la fois dans le plan et à travers l'épaisseur. Ce déséquilibre est particulièrement prononcé dans les aciers ferritiques (FSS), en raison de deux phénomènes clés : d'une part, la recristallisation continue intervenant lors du laminage à chaud limite l'homogénéisation texturale ; d'autre part, la transformation de phase reste marginale lors du refroidissement. Ni les traitements thermiques ultérieurs, ni les opérations de laminage complémentaires ne permettent d'altérer significativement cette configuration cristallographique [41].

Les tôles ainsi obtenues manifestent généralement une symétrie orthotrope, caractérisée par trois plans de symétrie perpendiculaires. Toutefois, l'anisotropie induite par le laminage ne constitue pas une simple imperfection : elle est exploitée pour améliorer certaines propriétés mécaniques, telles que la formabilité ou la résistance à l'amincissement, contribuant ainsi à l'obtention de géométries complexes [42]. Le comportement plastique anisotrope a fait l'objet de diverses modélisations, qu'elles soient fondées sur des critères quadratiques ou non quadratiques. Le modèle initial de Von Mises [43], basé sur le second invariant du tenseur des contraintes déviatoriques (J_2), postulait un comportement isotrope. Hill [45] fut le premier à proposer une extension anisotrope, généralisant l'approche de Von Mises dans un cadre associé fondé sur le postulat de Drucker, et intégrant les coefficients de Lankford $r(\theta)$ dans le processus de calibration. Hosford [46] introduisit plus tard une formulation non quadratique élargissant le champ d'applicabilité des modèles classiques.

Ces dernières décennies ont été marquées par des avancées notables dans la représentation phénoménologique de l'anisotropie plastique, en particulier dans les conditions de déformation plane. Les travaux de Barlat et collaborateurs [4-6] [47,48] ont permis de développer des fonctions de plasticité basées sur des transformations linéaires de l'espace des contraintes, tandis que Banabic et al. [49-57] ont proposé

des fonctions non quadratiques à plus grand potentiel descriptif. Cependant, ces approches nécessitent une base expérimentale étoffée pour assurer une identification robuste, notamment en ce qui concerne l'anisotropie dans le plan.

Parallèlement, Spitzig et al. [58] ont remis en cause la pertinence du postulat de plasticité associée en démontrant que la contrainte moyenne influe peu sur la limite d'élasticité de nombreux alliages ferreux ou légers, ce qui tend à invalider les hypothèses d'une loi d'écoulement strictement associée. En réponse, plusieurs études [59-61] ont mis en lumière le potentiel des formulations non associées pour modéliser indépendamment la surface de charge et la direction d'écoulement, permettant une meilleure reproduction des phénomènes d'écroutissage et des variations des coefficients $r(\theta)$. Ces approches NAFR offrent une flexibilité accrue et une meilleure adéquation aux données expérimentales.

Des écarts notables ont été observés entre les prédictions issues du cadre associé (AFR) et les mesures expérimentales, notamment en ce qui concerne la dépendance à la pression hydrostatique dans les états initiaux de plasticité parfaite. Les lois non associées (NAFR) permettent de lever ces contradictions en dissociant le potentiel plastique de la surface de charge. Stoughton et al. [62] ont proposé une formulation NAFR intégrant la contrainte moyenne dans le cadre du laminage, tout en respectant les conditions de stabilité imposées par le postulat de Drucker [61]. Cette orientation théorique a été approfondie par Safaei et al. [61], qui ont introduit un modèle NAFR avancé fondé sur le critère de Barlat (2003). Lian et al. [62] ont, de leur côté, adapté le critère de Hill-48 à une formalisation non associée, permettant ainsi d'analyser l'évolution de l'écroutissage directionnel et des valeurs r , ainsi que de prédire les limites de formabilité des aciers ferritiques utilisés dans les applications d'emboutissage.

Conclusion

Ce deuxième chapitre a été consacré à l'étude de la plasticité anisotrope des matériaux métalliques, avec un accent particulier sur les tôles laminées utilisées dans les procédés de mise en forme. Après avoir rappelé les fondements physiques de la déformation plastique et mis en évidence le rôle central des dislocations dans l'évolution microstructurale des métaux, l'influence des états et trajectoires de déformation sur la réponse mécanique du matériau a été analysée. La modélisation phénoménologique du comportement élastoplastique a ensuite été présentée dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, en introduisant les notions clés de relations constitutives, de critères de plasticité, de règles d'écoulement et de lois d'évolution des variables internes.

Une attention particulière a été portée aux mécanismes d'écrouissage, qu'ils soient isotropes ou cinématiques, ainsi qu'à leur identification expérimentale à travers différentes lois couramment utilisées. L'effet Bauschinger, en tant que manifestation majeure de l'écrouissage cinématique, a été analysé tant sur le plan microstructural que macroscopique, soulignant son impact déterminant sur le retour élastique et la précision des simulations numériques. Le chapitre a également mis en évidence l'importance du choix du critère d'écoulement plastique pour décrire correctement l'anisotropie directionnelle des tôles, à travers les critères classiques de Hill et leurs extensions non quadratiques, ainsi que les formulations plus avancées proposées par Barlat.

Enfin, les approches associées et non associées ont été discutées de manière comparative, en montrant les limites du cadre associé pour certains matériaux anisotropes et l'intérêt croissant des formulations non associées pour une meilleure reproduction des comportements expérimentaux. L'ensemble de ces développements constitue une base théorique solide pour la modélisation du comportement plastique anisotrope et justifie le recours à des modèles avancés dans les simulations numériques. Ces concepts seront exploités dans les chapitres suivants afin d'analyser, d'identifier et de valider les lois de comportement adoptées dans le cadre de cette étude.

Chapitre 3

Etude expérimentale et modélisation phénoménologique

1.Introduction

Les nuances de tôles d'acier utilisées dans l'industrie automobile ont connu une évolution constante au cours des dernières décennies. Aujourd'hui, pour répondre aux exigences des constructeurs, les métallurgistes conçoivent des structures automobiles en acier plus légères, mieux adaptées aux contraintes environnementales, tout en garantissant un excellent rapport résistance/poids.

Pour de nombreuses applications industrielles, les tôles laminées en acier ferritique sont largement employées dans le secteur automobile. Ce matériau est utilisé dans divers procédés de fabrication où un compromis optimal entre résistance, rigidité et ductilité est essentiel. Afin de maîtriser les procédés de mise en forme associés à ces matériaux, il est indispensable de définir précisément les intervalles de formabilité. De manière générale, les conditions de température ambiante ainsi que les vitesses de déformation influencent de manière significative le comportement mécanique des matériaux lors de la déformation plastique. Ces effets sont directement liés aux mécanismes microstructuraux tels que le mouvement des dislocations et les phénomènes d'écroutissage.

Pour modéliser correctement le comportement en mise en forme d'un matériau donné, il est nécessaire de disposer de lois de comportement capables de décrire la réponse mécanique sous divers états de contrainte. Pour les métaux, le critère de plasticité permet de définir le seuil d'apparition de la déformation plastique, constituant ainsi un élément fondamental pour prédire les effets de l'anisotropie.

Plusieurs critères d'écoulement ont été proposés dans la littérature pour modéliser l'anisotropie des matériaux métalliques, notamment le critère quadratique classique de Hill et ses différentes extensions. Toutefois, ces formulations se révèlent souvent insuffisantes pour représenter fidèlement l'écoulement plastique de matériaux fortement anisotropes tels que l'aluminium ou les aciers laminés à froid.

2. Motivation et contexte industriel du choix du matériau étudié

Les aciers destinés au pliage et à l'emboutissage sont largement utilisés dans divers secteurs industriels en raison de leur résistance mécanique, leur rigidité et leur ductilité. Leurs principales applications concernent:

- L'industrie automobile (pièces de carrosserie, capots, réservoirs),
- L'électroménager (structures et composants),
- Le mobilier métallique,
- La fabrication de fûts, d'appareils de chauffage et de ventilation,

- Les tubes soudés et les profilés étroits.

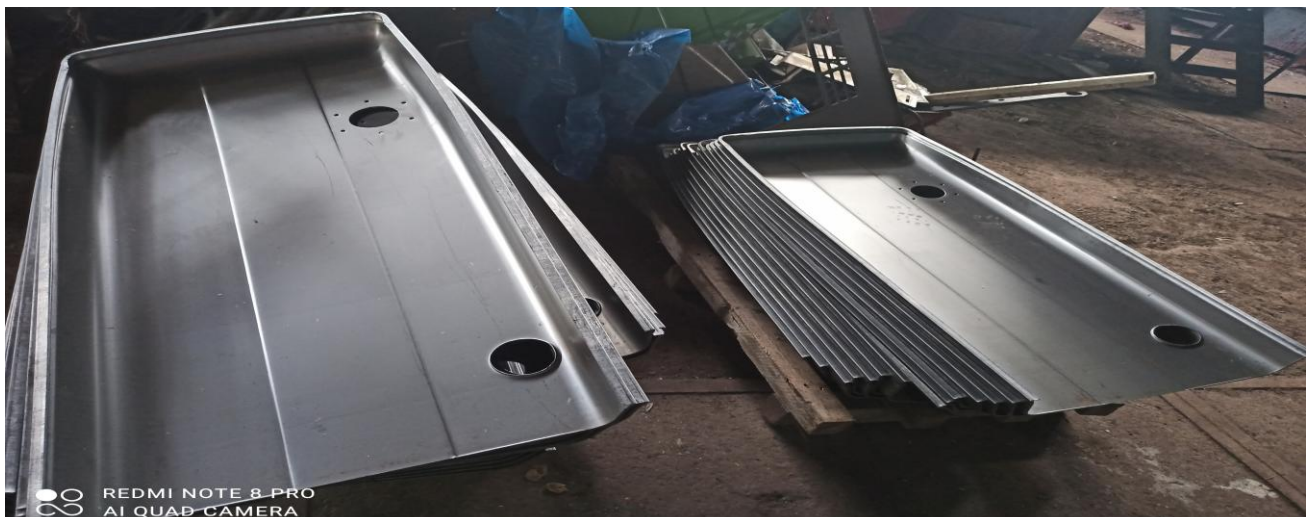
Les critères clés de sélection incluent :

- ✓ Haute résistance (mécanique, thermique et chimique),
- ✓ Durabilité,
- ✓ Facilité d'assemblage et de fabrication.

Parmi les nuances disponibles, les aciers à bas carbone offrent le meilleur compromis entre formabilité et performances mécaniques. C'est pourquoi l'Entreprise Nationale de Fabrication des Tracteurs Agricoles (ETRAG) a choisi la nuance RRST 1405, conforme aux normes DIN 1623 et EN 10130 (DC04), pour optimiser la qualité compétitive de ses produits, notamment dans la fabrication des capots et réservoirs de tracteurs.

3. Le procédé d'emboutissage : optimisation et défis industriels

L'emboutissage vise à équilibrer les modes de déformation en maîtrisant les paramètres contrôlant l'écoulement du métal dans l'outil, tout en évitant les défauts de forme (plis, déchirures) ou de surface (rugosité, marquage). Ce compromis est essentiel pour garantir la qualité des pièces produites. À l'échelle industrielle, l'anisotropie plastique peut engendrer des défauts critiques, comme illustré dans [la Figure 3.1](#). Cet exemple, observé chez ETRAG, met en évidence les distorsions de géométrie causées par une répartition inégale des déformations, impactant directement la conformité des pièces embouties.



Les différents défauts en emboutissage sont :

1. La rupture
2. La striction
3. Les plis et le flambage (ou voilage)
4. Les défauts de forme



Les défauts en emboutissage dépendent de :

- La géométrie et la position du flan.
- La géométrie de l'outil (correction du retour élastique).
- La position et la géométrie des joncs de retenue.
- La force de serrage exercée par le serre-flan.
- L'élasticité du matériau de la tôle, sa ductilité et son anisotropie.
- Lubrifiant, sa nature et sa quantité.
- L'usure des outils (fatigue).



Figure 3.1. Défauts de fissuration et de pliage sous forme des cornes sur l'emboutis.

3.1. Matériaux et méthodes

L'étude porte sur l'acier doux DC04 (ASTM A620 ; NE10130-2006), une nuance à faible teneur en carbone, fournie par L'entreprise nationale de fabrication des Tracteurs Agricoles (ETRAG) spécialisée dans les machines agricoles, sous forme de tôles laminées à l'état recuit. Ce matériau est couramment employé dans l'emboutissage pour des applications industrielles, notamment dans la carrosserie d'automobile et les produits ménagers en général. La composition chimique de la tôle d'acier DC04 a été déterminée par spectrométrie d'émission optique (SPEC-TROMAXx arc/spark OESKleve, Allemagne) et est présentée dans le tableau.3.1.

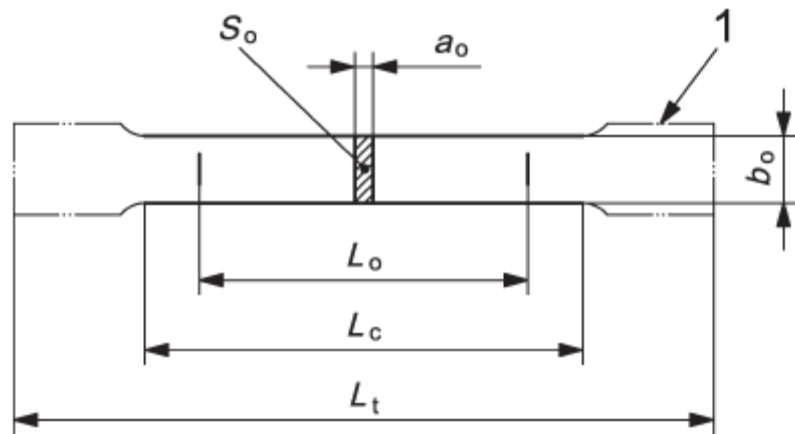
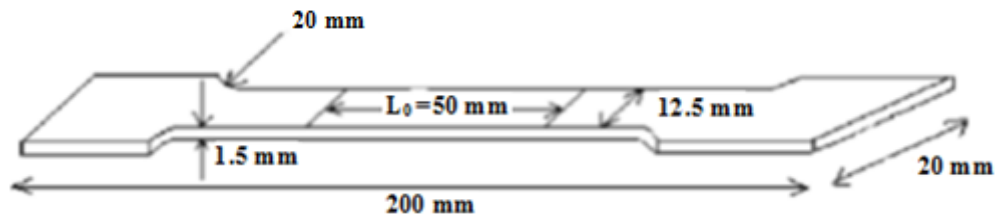
Tableau.3.1. Composition chimique de l'acier DC04 (% massique).

Elements	C	Si	Mn	P	S	Mo	Al	Cu	Ti	Fe
Wt. %	0.06	0.05	0.19	0.012	0.011	0.01	0.039	0.051	0.004	Bal

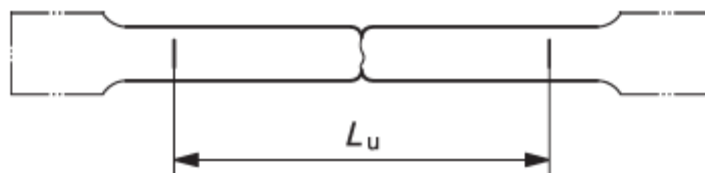
Les tôles en acier doux appartenant à cette gamme sont spécifiquement conçues pour les applications d'emboutissage profond et extra-profond, où une excellente ductilité est requise. Ces matériaux sont

largement exploités dans l'industrie automobile, tant pour la fabrication de pièces d'aspect nécessitant une qualité de surface irréprochable que pour des composants de structure exigeant une bonne tenue mécanique et une formabilité élevée.

Les éprouvettes ont été soigneusement préparées et découpées par Laser pour éviter le passage à l'étape de finissage par usinage mécanique par la suite. La forme et les dimensions de nos éprouvettes plates normalisées sont mentionnées ci-dessous.



a) Avant essai



b) Après essai

Légende

a_0 : épaisseur initiale d'une éprouvette plate ou épaisseur de paroi d'un tube	1.5 mm
b_0 : largeur initiale de la longueur calibrée d'une éprouvette plate	12.5 mm
L_c : longueur calibrée	75 mm
L_0 : longueur initiale entre repères	50 mm
L_t : longueur totale de l'éprouvette	200 mm
L_u : longueur ultime entre repères après rupture	
S_0 : aire initiale de la section transversale de la longueur calibrée	18.75 mm
l : têtes d'amarrage	51.6 mm

Figure 3.2 La forme et les dimensions de nos éprouvettes plates normalisées.

4. Corrélation entre l'anisotropie et les caractéristiques mécaniques issues de dureté

4.1. Observations Microscopiques

Le microscope optique nous fournis les observations métallographiques suivantes :



Figure 3.3. Echantillon suivant DL



Figure 3.4. Echantillon suivant DD



Figure 3.5. Echantillon suivant DT

Les observations microstructurales réalisées sur l'acier DC04 révèlent une microstructure ferrito-perlitique, avec une prédominance de ferrite. Les figures 3.3, 3.4 et 3.5 illustrent respectivement les échantillons prélevés suivant les angles 0° , 45° et 90° par rapport à la direction de laminage. Ces images mettent en évidence une hétérogénéité morphologique des grains de ferrite, dont la taille et la forme varient selon l'orientation considérée.

Les grains de ferrite présentent une distribution irrégulière, avec des traces de perlite localisées principalement aux joints de grains. Une légère anisotropie morphologique est observable : les grains prélevés à 0° apparaissent légèrement allongés dans le sens du laminage, tandis que ceux orientés à 45° et 90° présentent une granulométrie plus fine et une forme plus équiaxée.

4.2 Quantification de la taille des grains et corrélation avec les propriétés mécaniques

Une analyse quantitative a été menée pour déterminer la taille moyenne des grains selon la norme ASTM E112. Les indices de grain (G) obtenus pour les trois orientations (0° , 45° , 90°) sont respectivement de 7.8, 8.2 et 7.9, ce qui correspond à des diamètres moyens de grains de **23,68 μm**, **22,87 μm** et **20,61 μm**. Ces résultats confirment que la granulométrie la plus fine est observée à 0° , suivie de 45° et enfin de 90° .

5.Méthodologie d'essai de traction uniaxiale

Les essais de traction uniaxiale ont été réalisés en conditions contrôlées au sein du laboratoire industriel de l'usine, à l'aide d'une machine de traction-compression HOYTOM (HM-D Lab Series) d'une capacité de 100 kN. Le protocole expérimental a été strictement appliqué conformément à la norme NF EN ISO 6892-1, comme illustré dans la [Figure 3.6](#).

Points clés :

- Équipement utilisé : Machine HOYTOM haute précision (gamme labo, 100 kN)
- Conformité normative : Respect strict de la norme ISO 6892-1 (méthodologie standardisée)
- Cadre expérimental : Essais menés en environnement industriel contrôlé

Cette configuration permet d'obtenir des données fiables et reproductibles pour l'analyse du comportement mécanique des matériaux.



Figure 3.6. Machine de traction de marque HOYTOM

L'essai a été conduit avec une charge initiale $F_0 = 0,2 \text{ kN}$ et une vitesse de déplacement de la traverse fixée à $0,0007 \text{ m/s}$. Le système informatisé de la machine permet :

1. Un contrôle précis des paramètres d'asservissement du moteur

2. Une acquisition automatique des données mécaniques comprenant :

- Le nombre de points de mesure
- Le temps écoulé
- Le déplacement de l'extensomètre
- L'effort axial appliqué

Caractéristiques techniques :

- Précision de charge : 0,2 kN (seuil de démarrage)
- Vitesse constante : 7 mm/s (optimisée pour la déformation progressive)
- Automatisation : Pilotage et enregistrement intégral par ordinateur

Cette configuration expérimentale garantit une mesure fiable du comportement élastoplastique du matériau, avec une trace numérique complète de l'évolution des paramètres mécaniques au cours de l'essai.

Les échantillons ont été extraits de la tôle mince à l'aide d'une machine de découpe laser à fibre haute puissance ; la direction de coupe était orienté à 15° entre la direction de laminage (RD) et la direction transversale (TD).

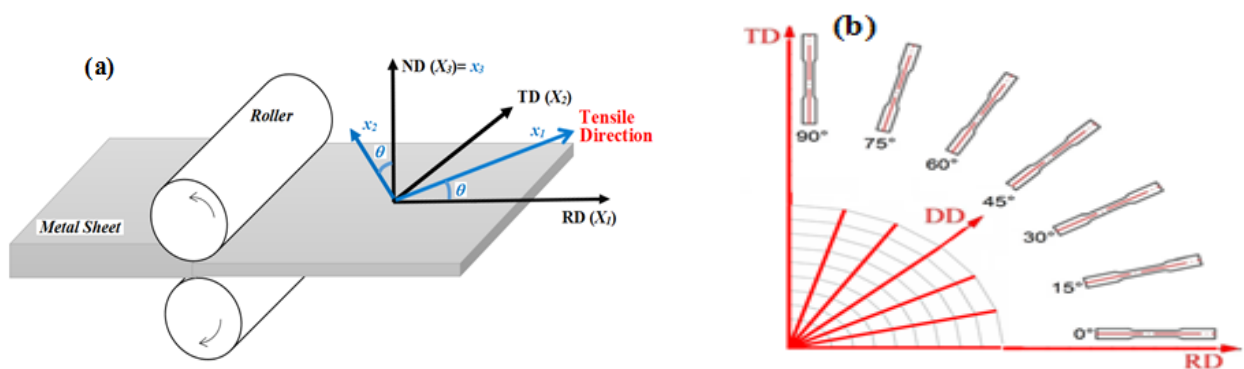


Fig. 3.7 (a) Vue globale d'une tôle, (b) Éprouvettes prismatiques de traction.

6. Dépouillement des données expérimentales

6.1.Limite d'écoulement unidirectionnelle $\sigma(\theta)$

Pour assurer la reproductibilité des résultats de caractérisation mécanique, les essais ont été répétés 03 fois pour une même direction de sollicitation. On ne considère que, la valeur moyenne de contrainte dans notre modèle de calcul (Tableau 3.2).

Tableau 3.2. Contrainte d'écoulement uniaxiale.

θ°	$\sigma_{e0.2}$ (MPa)	$\sigma_{e0.2}$ (MPa)	$\sigma_{e0.2}$ (MPa)	$\sigma_{e0.2}$ (MPa) Moyenne	σ_U (MPa)	σ_U (MPa)	σ_U (MPa)	σ_U (MPa) Moyenne
0°	209.1	207.7	202.3	206.36	308.2	308.1	306.9	307.73
15°	207.8	209.5	207.8	208.36	318.7	321.5	319.9	320.03
30°	213.3	210.9	211.4	211.86	325	323.4	324.8	324.4
45°	221.2	215.7	207.6	214.83	326.8	335.4	328.9	300.37
60°	204.5	207.1	203.5	205.00	324.6	324.6	322.5	323.9
75°	205.2	202.7	201	203.00	316.1	315.4	314.6	315.37
90°	195.3	196.6	217.5	203.13	306.3	308.3	307.9	307.5

6.2. Coefficient de Lankford $r(\theta)$

A partir des taux des déformations cités dans les formules ci-dessous en utilisant les rapports relatifs classiques des longueurs (l), les largeurs (b) et les épaisseurs (e) de l'éprouvette, la constante potentielle ou de Lankford $r(\theta)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{l_f - l_0}{l_0} \\ \varepsilon_2 = \frac{b_f - b_0}{b_0} \\ \varepsilon_3 = \frac{e_f - e_0}{e_0} \\ r(\theta) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = - \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \end{array} \right.$$

Lankford	
θ°	$r(\theta)$
0°	1.91
15°	1.80
30°	1.74
45°	1.69
60°	1.86
75°	2.11
90°	2.36

6.3 Mesure de $\sigma(\theta)$ et $r(\theta)$ par essai de traction uniaxiale :

Dans le but d'évaluer la capacité prédictive des critères de plasticité étudiés, les paramètres matériaux ont été déterminés expérimentalement au moyen d'essais de traction uniaxiale. Les données expérimentales recueillies comprenaient :

- **La contrainte d'écoulement $\sigma(\theta)$** , définie comme la seule composante non nulle du tenseur des contraintes ($\sigma_{xx} = \sigma$) dans le système de coordonnées de l'éprouvette (X_1, X_2, X_3) — voir 3.7-a.
- **Le coefficient d'anisotropie plastique $r(\theta)$** , exprimé comme le rapport des déformations plastiques dans les directions transverse et épaisseur :

$$r(\theta) = \varepsilon_{yy}(\theta)/\varepsilon_{zz}(\theta)$$

Ce coefficient représente le ratio de déformation plastique, couramment utilisé pour caractériser l'anisotropie des tôles métalliques [63].

Ces grandeurs ont été mesurées pour sept orientations angulaires du matériau par rapport à la direction de laminage (RD) : 0° (RD), 15°, 30°, 45° (direction diagonale, DD), 60°, 75°, et 90° (direction transverse, TD).

La contrainte d'écoulement en état d'équibiaxial a été estimée par la moyenne des contraintes dans les directions 0° et 90° :

$$\sigma_b = (\sigma_0 + \sigma_{90})/2 \quad (3.1)$$

Quant au coefficient d'anisotropie équibiaxial r_b , il a été déterminé à partir du critère de plasticité Yld96 [43], en utilisant la relation :

$$r_b = \varepsilon_{yy}/\varepsilon_{xx} \quad (3.2)$$

Les éprouvettes de traction ont été découpées avec précision à partir de la tôle de base, puis testées sur une machine de traction universelle Hoytom d'une capacité de 100 kN. Les essais ont été réalisés à un taux de déformation constant de $1.4 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, dans des conditions ambiantes.

Pour assurer la fiabilité statistique des résultats, trois éprouvettes rectangulaires ont été testées pour chaque orientation. Les dimensions de la zone utile des éprouvettes étaient de 50 mm de longueur, 12,5 mm de largeur, et 1,5 mm d'épaisseur (voir Fig. 3.7 -b).

6.4 Analyse des courbes ($\sigma - \epsilon$) pour différentes orientations : résultats des essais de traction

Les données représentées dans la Figure 3.8 correspondent aux courbes contrainte-déformation en coordonnées d'ingénierie obtenues pour sept orientations différentes du matériau. L'angle de rotation entre la direction de traction uniaxiale et la direction de laminage (RD) varie de 0° à 90°, par incréments de 15°.

Ces courbes révèlent deux régimes de déformation distincts au cours de l'essai de traction :

1. Le régime élastique, identifié par une limite de proportionnalité, où la relation entre la contrainte et la déformation est linéaire. Dans cette phase, le matériau présente un comportement réversible : il tend à retrouver sa forme initiale après l'allongement ou la compression.

- À partir du point d'écoulement, la contrainte entre dans le régime plastique, caractérisé par une déformation irréversible et croissante jusqu'à l'atteinte de la contrainte maximale en ingénierie, appelée résistance ultime à la traction (Ultimate Tensile Strength). Cette phase est communément désignée sous le nom de durcissement par écoulement, durant laquelle le matériau devient plus résistant à mesure qu'il se déforme plastiquement.

La conversion des valeurs d'ingénierie en valeurs réelles de contrainte et de déformation s'effectue selon les formules suivantes, dérivées du tenseur de Cauchy :

- Contrainte vraie (σ_T) :

$$\sigma_T = \frac{F}{A} = \sigma_E (\varepsilon_E + 1) \quad (3.3-a)$$

- Déformation vraie (ε_T) :

$$\varepsilon_T = \int_{L_0}^L \frac{\Delta L}{L} = \ln(\varepsilon_E + 1) \quad (3.3-b)$$

Dans ces équations :

- Les indices E et T désignent respectivement les grandeurs en ingénierie (*Engineering*) et réelles (*True*).
- F représente la force appliquée,
- A est la surface instantanée de la section transversale de l'éprouvette,
- ε_E est la déformation d'ingénierie longitudinale.

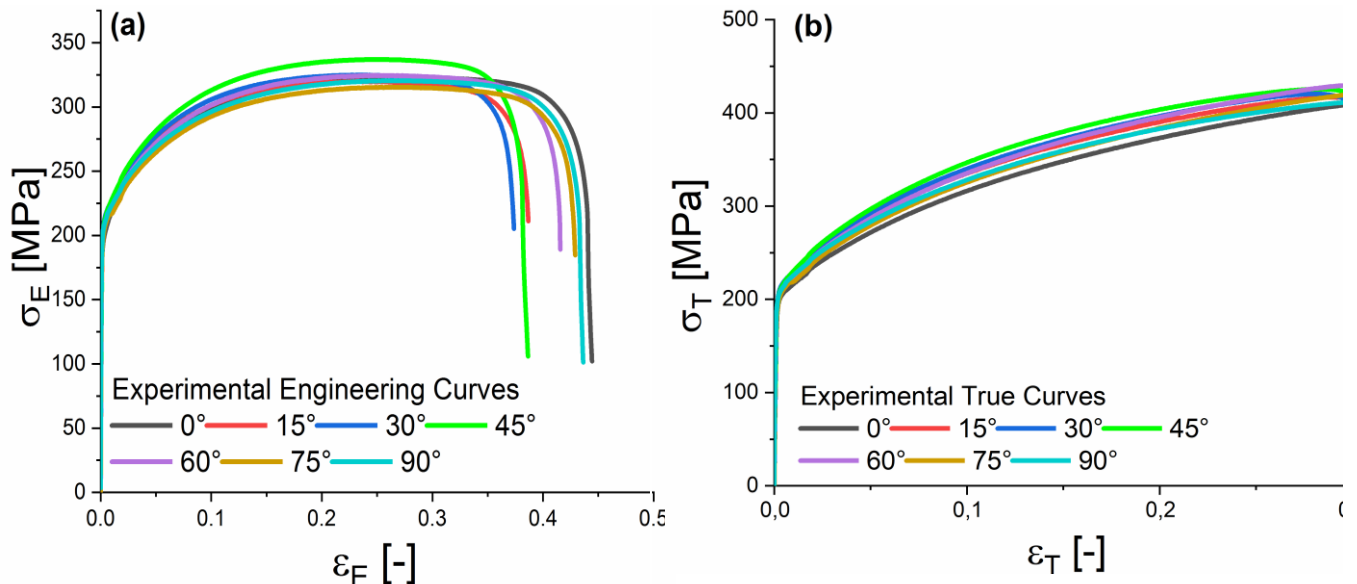


Fig. 3.8 : Courbe expérimentale uniaxiale contrainte-déformation de la tôle d'acier DC04 pour : (a) Essai de traction conventionnelle, (b) Essai de traction réelle.

7.Évaluation de l'anisotropie plastique moyenne et planaire à partir des coefficients de Lankford expérimentaux

Le Tableau 3.3 présente la moyenne pondérée expérimentale du coefficient de Lankford, également désigné sous le nom de paramètre d'anisotropie plastique moyen, et calculée selon la relation suivante :

$$\bar{r} = (r_0 + 2r_{45} + r_{90})/4 = 1.9125 \quad (3.4)$$

Cette valeur, appelée anisotropie normale, permet de quantifier la différence de comportement mécanique entre les directions dans le plan de la tôle et la direction de son épaisseur. Elle constitue un indicateur clé pour caractériser l'aptitude au formage profond. En complément, l'anisotropie planaire Δr , qui influence directement l'amplitude des cornes d'emboutissage (ou *earring*) observé sur les bords des pièces embouties (par exemple les godets emboutis), a été déterminée selon la formule suivante :

$$\Delta r = (r_0 - 2r_{45} + r_{90})/4 = 0.445 \quad (3.5)$$

Il convient de noter que les défauts d'appariation des cornes d'emboutissage ne se manifestent pas lorsque le coefficient d'anisotropie dans le plan, $r(\theta)$, reste constant quelle que soit la direction angulaire considérée lors des essais. Une anisotropie planaire nulle ($\Delta r=0$) traduit ainsi une distribution uniforme des propriétés plastiques dans toutes les directions du plan de la tôle, ce qui est favorable à une bonne formabilité isotrope. Les propriétés mécaniques de toutes procédures expérimentales de caractérisation mécaniques du l'acier DC04 sont illustrées et récapitulées dans le tableau 3.3.

Tableau 3.3 Propriétés Mécaniques de l'acier DC04.

ν	$\theta(^{\circ})$	$\sigma_{e0.2}(MPa)$	$\sigma_b(MPa)$	$r(\theta)$	$(r_b)^b$	\bar{r}	Δr	H_V
	0°	206.36		1.91				134
	15°	208.36		1.80				135
0.3	30°	211.86		1.74				139
	45°	214.83	204.74	1.69	0.778	1.91	0.445	165
	60°	205		1.86				139
	75°	203		2.11				135
	90°	203.13		2.36				130

^a La Contrainte equibiaxiale (EB) est déterminée par: $\sigma_b = (\sigma_0 + \sigma_{90})/2$.

^b- Le coefficient equibiaxial r_b -value est déterminée par Yld96 [4].

Sous l'anisotropie initiale, les paramètres normalisés expérimentaux (contrainte d'écoulement $\sigma(\theta)$ et valeur de $r(\theta)$ en fonction de la direction de laminage (RD) sont énumérés dans le tableau 3.4.

Tableau 3.4 Valeurs normalisées des $\sigma(\theta)$ et $r(\theta)$ calibrées par rapport à la direction de référence (RD).

	$\frac{\sigma_0}{\sigma_0}$	$\frac{\sigma_{15}}{\sigma_0}$	$\frac{\sigma_{30}}{\sigma_0}$	$\frac{\sigma_{45}}{\sigma_0}$	$\frac{\sigma_{60}}{\sigma_0}$	$\frac{\sigma_{75}}{\sigma_0}$	$\frac{\sigma_{90}}{\sigma_0}$	σ_b
Contraintes $\sigma(\theta)$	1	1	1.02	1.041	0.99	0.983	0.98	0.992 1
	$\frac{r_0}{r_0}$	$\frac{r_{15}}{r_0}$	$\frac{r_{30}}{r_0}$	$\frac{r_{45}}{r_0}$	$\frac{r_{60}}{r_0}$	$\frac{r_{75}}{r_0}$	$\frac{r_{90}}{r_0}$	r_b
r -value $r(\theta)$	1	0.942	0.910	0.884	0.973	1.010	1.235	0.778

8.Représentation polaire de l'anisotropie des tôles métalliques

Pour mieux visualiser le comportement anisotrope des tôles métalliques, les représentations en coordonnées polaires sont couramment utilisées. La [Figure 3.9](#) illustre le comportement anisotrope de la tôle DC04 dans un tel système polaire. Dans le cas d'un matériau isotrope, la contrainte d'écoulement normalisée $\sigma(\theta)$ ainsi que le coefficient de Lankford $r(\theta)$ prendraient une valeur constante égale à **1** pour toutes les orientations angulaires. Le tracé polaire correspondant serait alors un cercle parfait, reflétant l'indépendance des propriétés mécaniques vis-à-vis de la direction de sollicitation. Cependant, les courbes expérimentales de $\sigma(\theta)$ et $r(\theta)$ s'écartent nettement de cette circularité idéale, traduisant une dépendance directionnelle marquée des propriétés mécaniques lorsque l'orientation varie de 0° (direction de laminage, RD) à 90° (direction transverse, TD). La tôle DC04 présente ainsi une symétrie orthotrope, caractérisée par deux plans de symétrie perpendiculaires correspondant aux directions principales du matériau : la direction de laminage (RD = 0°) et la direction transverse (TD = 90°). Cette propriété est mise en évidence par la symétrie miroir du diagramme polaire par rapport à ces deux axes, confirmant la nature orthotrope du comportement plastique du matériau étudié.

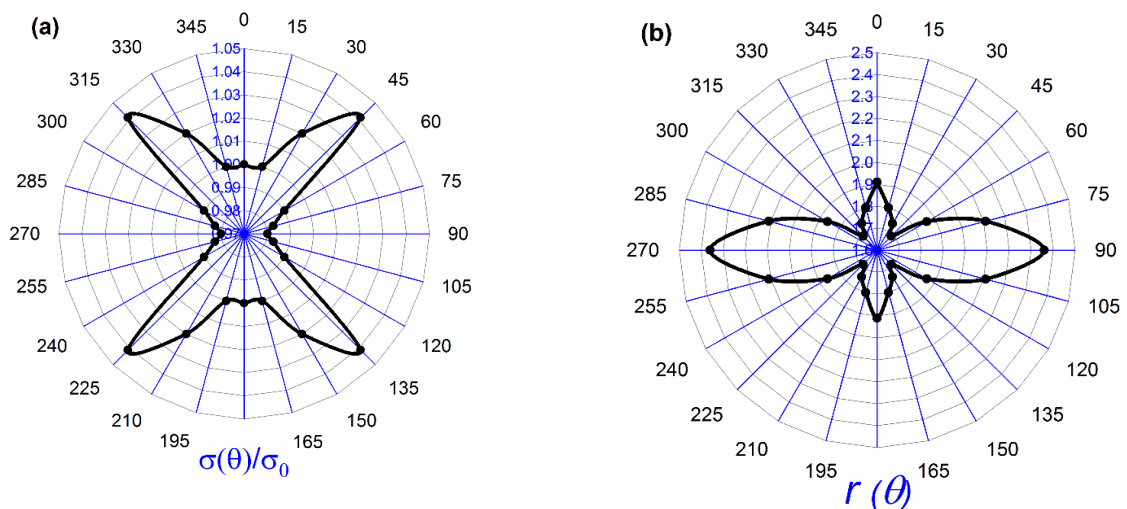


Fig.3.9 Évolution des paramètres d'anisotropie sous différentes directions de chargement pour (a) la limite d'écoulement normalisée, (b) le coefficient d'anisotropie

9. Essais mécaniques de dureté Vickers

Dans ses travaux pionniers, Tabor [62, 63] a établi une relation empirique entre la dureté Vickers (H_v) et la contrainte d'écoulement σ_0 , exprimée selon l'équation suivante :

$$H_v \approx 3\sigma_0 \quad (3.6)$$

Plus récemment, Zhang & Zhang [66] ont approfondi cette relation en analysant les liens entre la dureté Vickers et la résistance ultime à la traction (Ultimate Tensile Strength, UTS). Ils ont montré que, pour un large éventail de matériaux, la dureté Vickers est approximativement trois fois supérieure à la résistance ultime à la traction, avec un rapport H_v/UTS variant généralement entre 2,3 et 3,8.

Pour le matériau en tôle DC04, la dureté Vickers a été mesurée à l'aide d'un duromètre numérique de micro-dureté (INNOVATEST). Avant chaque essai, les surfaces des échantillons ont été soigneusement polies mécaniquement jusqu'à obtention d'un état de surface miroir, à l'aide d'un abrasif métallographique de granulométrie 2000.

Les mesures de dureté ont été réalisées selon le protocole suivant :

1. Application d'une charge de 10 kgf (98,07 N) pendant 20 secondes ;
2. Mesure des deux diagonales de l'empreinte (d_1 et d_2) à l'aide d'un microscope optique ;
3. Répétition de l'opération six fois par échantillon pour assurer la reproductibilité.

La valeur de la dureté Vickers a été calculée selon la formule normalisée suivante :

$$H_v = 1.854 \frac{F}{d^2} \quad [Kgf/mm^2] \quad (3.7)$$

où :

- $d=(d_1+d_2)/2$ est la longueur moyenne des diagonales de l'empreinte, exprimée en millimètres (mm),
- F représente la force appliquée en kilogrammes-force (kgf).

Initialement, les sept éprouvettes ont été préparées avec une orientation selon les plans ($ND-\theta^\circ$), c'est-à-dire dans la direction de l'épaisseur (ND) avec un angle variable θ (voir Fig. 3.10), avant d'être soumises à la caractérisation en dureté Vickers.

Chaque mesure a été effectuée avec une orientation rigoureusement contrôlée de l'empreinte :

- La diagonale principale (d_1) a été systématiquement alignée avec la direction normale (ND) de la tôle ;
- La diagonale secondaire (d_2) a été orientée à des angles croissants de 0° à 90° , par incréments de 15° , par rapport à la direction de laminage (RD).
-

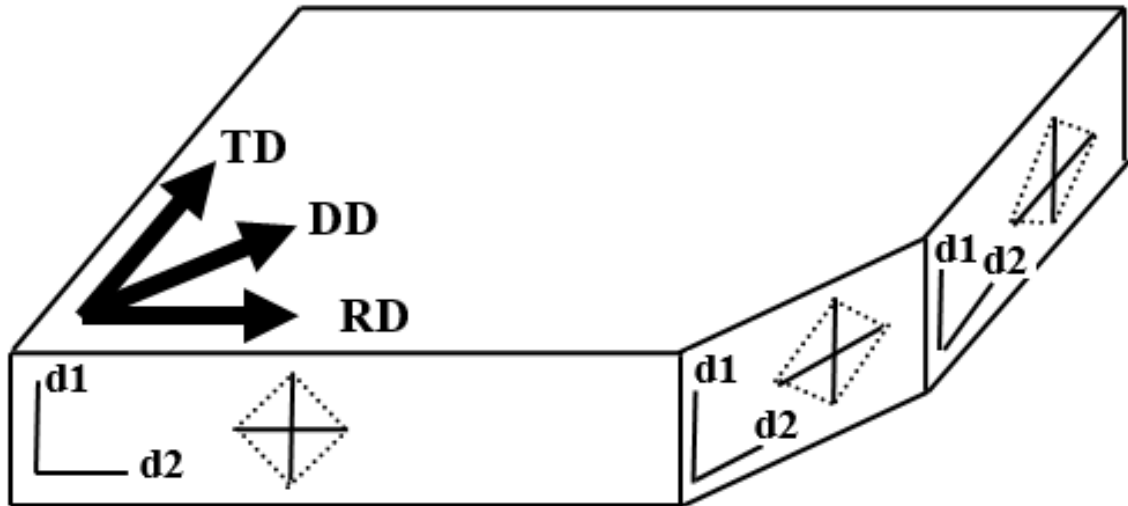


Fig. 3.10 Faces des essais de dureté Vickers

10. Corrélation entre les valeurs de dureté et le rapport d'anisotropie

Le rapport d'anisotropie peut être estimé à partir du rapport dimensionnel $\rho = d_2 / d_1$ représentant respectivement les longueurs des deux diagonales de l'empreinte de dureté. Cette méthode a été proposée par Ohashi et al. [67].

Dans un matériau isotrope, les deux diagonales sont identiques, ce qui donne un rapport ($\rho = 1$). Toute déviation de cette valeur unitaire indique un comportement anisotrope, de manière analogue à la définition du coefficient de Lankford $r(\theta)$, qui quantifie l'anisotropie plastique.

Les résultats expérimentaux — incluant les valeurs de dureté, le rapport d'aspect anisotrope ρ , la contrainte d'écoulement, ainsi que la résistance ultime à la traction (UTS) — sont récapitulés dans le Tableau 3.5. Le rapport dureté/UTS reste proche de la valeur théorique de 3, avec une déviation absolue maximale observée de 0,73. Pour les trois directions principales du matériau — direction de laminage (DL), direction diagonale (DD), et direction transverse (DT) —, la moyenne planaire du rapport d'aspect a été calculée comme suit :

$$\bar{\rho} = (\rho_0 + 2\rho_{45} + \rho_{90})/4 = 1.372 \quad (3.8)$$

Cette valeur moyenne met en évidence le caractère anisotrope du matériau étudié, confirmant une variation directionnelle des propriétés mécaniques, même à l'échelle microscopique des empreintes de dureté.

Tableau 3.5 Valeurs de dureté mesurées et rapport d'aspect d'anisotropie ρ

$\theta(^{\circ})$	$\frac{\sigma_{UTS}}{\sigma_{True}}$ [MPa]	Hv [MPa]	$\frac{Hv}{\sigma_{UTS}}$	d_1 [μm]	d_2 [μm]	ρ [-]	$r(\theta)$
0	413	1340	3.24	35.3	37.1	1.05	1.91
15	416	1350	3.25	35.1	39.0	1.11	1.80
30	425	1390	3.27	33.7	39.4	1.17	1.74
45	425	1650	3.88	28.5	38.5	1.35	1.69
60	430	1390	3.23	30.1	42.7	1.42	1.86
75	422	1350	3.20	29.0	46.4	1.6	2.11
90	412	1300	3.15	27.5	48.0	1.74	2.36

11.Relation entre la dureté et la résistance maximale : analyse statistique et influence de l'anisotropie

Cette étude met en évidence que la réduction de l'erreur dans la caractérisation du comportement mécanique suit une relation linéaire. Une régression linéaire appliquée aux données expérimentales (Figure 3.11 -a) permet d'établir une corrélation robuste entre la dureté Vickers et la résistance maximale à la traction du matériau. Le comportement anisotrope du matériau a été analysé à travers les variations de dureté, déterminées par les différences de longueur des diagonales de l'empreinte sur les sept orientations angulaires des éprouvettes.

Les valeurs de dureté ont ainsi été mesurées pour sept orientations distinctes, en fonction de leur position angulaire dans les plans ($ND-\theta^{\circ}$), c'est-à-dire à partir de la direction normale (DN) selon divers angles d'inclinaison. La dépendance angulaire de la dureté par rapport à la direction de laminage (DL) est illustrée dans la Figure 3.11-b, mettant en évidence les variations de dureté en fonction de l'angle d'orientation de l'empreinte par rapport au plan normal. Ces résultats soulignent l'influence directionnelle du comportement mécanique du matériau et confirment son anisotropie structurale, détectable même à travers des mesures de dureté localisées.

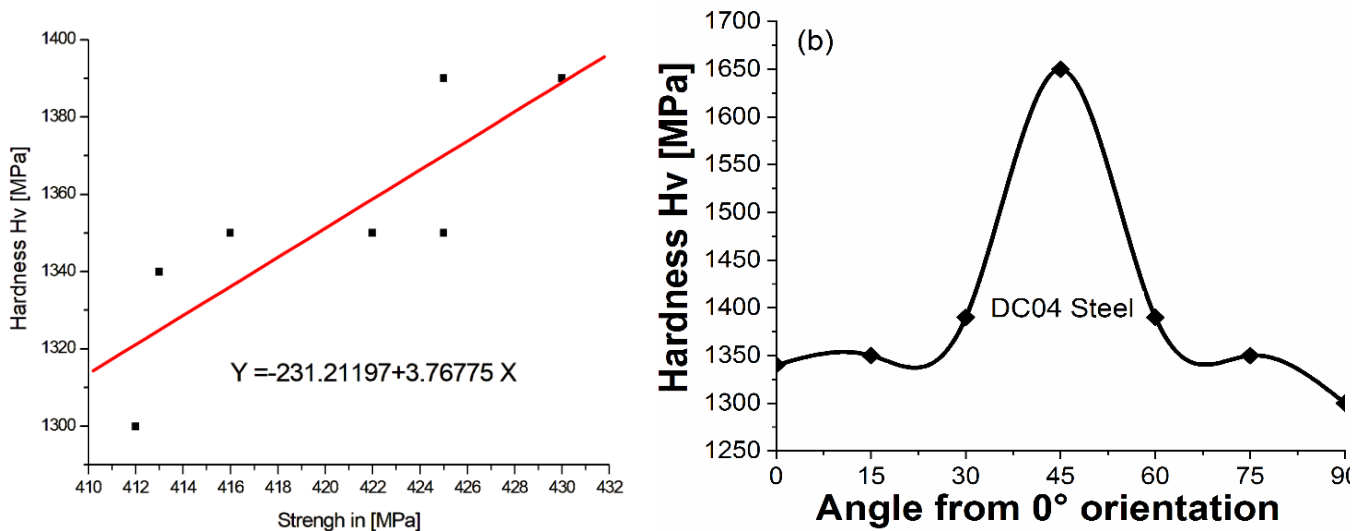


Fig. 3.11 (a) Corrélation optimale $Hv = f(\sigma_{UTS})$ et (b) Dépendance angulaire de la dureté mécanique Hv correspondante aux plans $(ND-\theta^\circ)$

Un coefficient de Lankford élevé est indicatif d'une capacité de déformation dans le plan supérieure, avec une réduction minimale de l'épaisseur. Il constitue ainsi un excellent indicateur de l'aptitude au formage profond des tôles métalliques.

Les résultats expérimentaux ont mis en évidence un paramètre moyen d'anisotropie plastique ($\bar{r} = 1.91$), nettement supérieur à l'unité, ce qui confirme la nature anisotrope marquée du matériau. De manière analogue, le rapport d'aspect moyen mesuré à la surface ($\bar{\rho} = 1.372$) dépasse la valeur de référence isotrope ($\rho = 1$), signalant également un comportement anisotrope. Sur le plan géométrique, cette anisotropie se manifeste par une diagonale d'empreinte parallèle à la direction de laminage ($d_2 \parallel DL$) significativement plus longue que la diagonale perpendiculaire à cette direction ($d_1 \perp DL$).

Afin d'établir une correspondance harmonieuse entre les paramètres d'anisotropie $r(\theta)$ et les rapports d'aspect ρ , un modèle de régression polynomiale a été développé. Ce modèle repose sur un ajustement polynômial de second ordre, proposé spécifiquement pour caractériser la tôle étudiée. La fonction polynomiale retenue est la suivante :

$$r(\theta) = 2.928 \rho^2 - 7.421 \rho + 6.44 \quad (3.9)$$

Sur la base de cette relation polynomiale entre les deux paramètres, le coefficient de corrélation entre $r(\theta)$ et ρ a été évalué à 0,96169, indiquant une très forte corrélation entre la géométrie des empreintes de dureté et l'anisotropie plastique mesurée.

La fonction $r(\theta) = f(\rho)$ est représentée graphiquement par la courbe tracée dans la [Figure 3.12](#), illustrant la pertinence du modèle polynômial pour prédire le comportement anisotrope à partir des mesures de dureté.

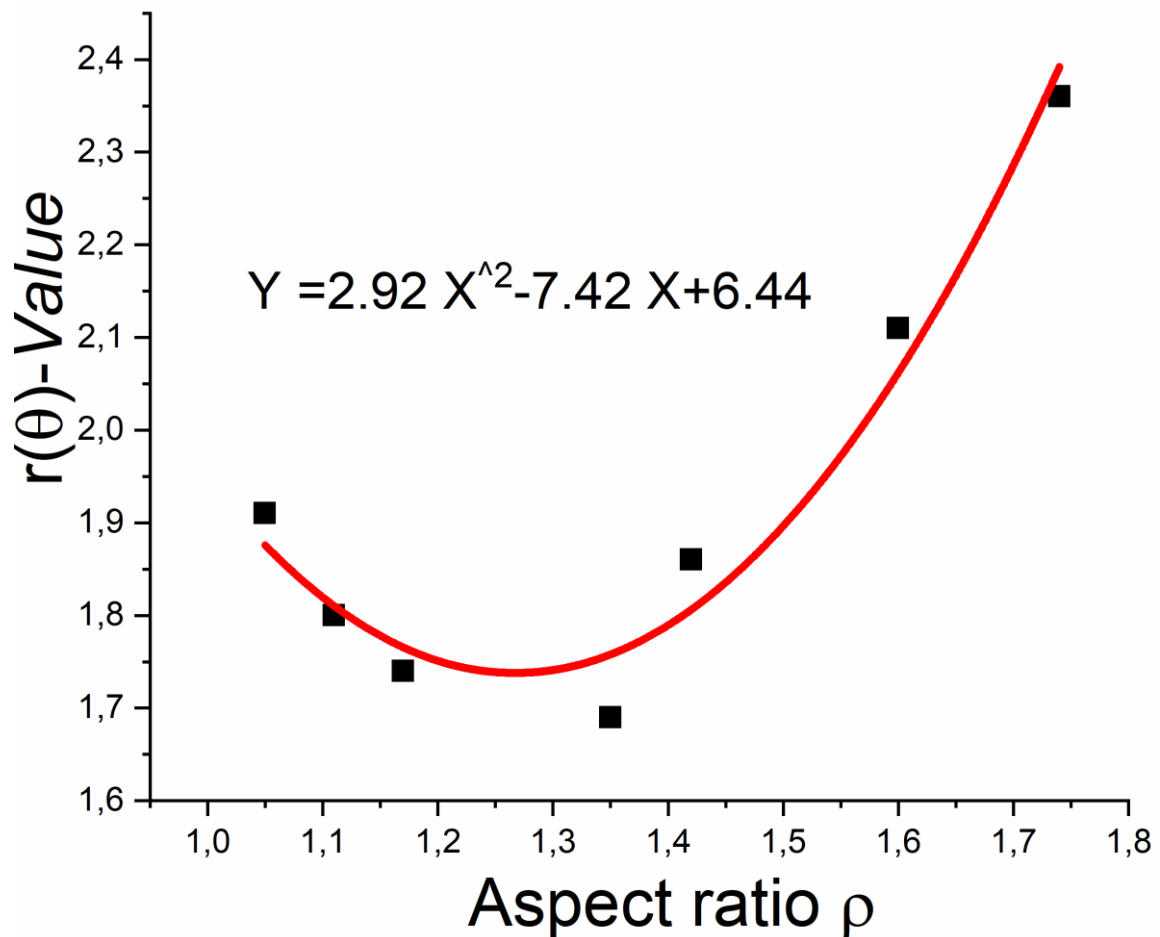


Fig. 3.12 Corrélation entre le coefficient de Lankford et le rapport d'aspect dans l'essai de dureté Vickers

12. Description des critères d'écoulement plastique

Les essais de traction uniaxiale fournissent des informations précieuses sur les limites d'écoulement plastique, en permettant une interprétation claire du comportement du matériau soumis à un chargement unidirectionnel. Les courbes contrainte-déformation obtenues dans ce cadre sont faciles à analyser et à exploiter.

Cependant, la caractérisation du comportement sous sollicitations multiaxiales s'avère nettement plus complexe. Elle implique :

- une augmentation de la complexité mécanique,
- une distribution non uniforme des déformations dans la pièce testée,
- ainsi qu'un temps expérimental considérablement plus long.

Dans ce contexte, le recours à des fonctions d'écoulement plastique (ou critères d'écoulement) constitue une alternative efficace. Ces modèles permettent de prédire avec précision les propriétés mécaniques anisotropes (évolution contrainte/déformation) des matériaux, tout en réduisant de façon significative les besoins expérimentaux.

13.1 Critère d'écoulement BBC2003

En 2003, Banabic et al. [57] ont proposé le critère d'écoulement BBC2003, conçu pour modéliser le comportement d'écoulement plastique anisotrope des tôles métalliques dans des conditions de contrainte plane (*plane stress*).

Ce critère repose sur la notion de contrainte équivalente d'écoulement, exprimée par la relation suivante :

$$\sigma_0 = \left[a(\tau + \psi)^{2\chi} + a(\tau - \psi)^{2\chi} + (1-a)(2\Delta)^{2\chi} \right]^{\frac{1}{2\chi}} \quad (3.10)$$

Où:

$$\begin{cases} \tau = \frac{\sigma_{11} + M\sigma_{22}}{2} \\ \psi = \sqrt{\left(\frac{N\sigma_{11} - P\sigma_{22}}{2} \right)^2 + Q^2\sigma_{12}^2} \\ \Delta = \sqrt{\left(\frac{R\sigma_{11} - S\sigma_{22}}{2} \right)^2 + T^2\sigma_{12}^2} \end{cases}$$

12.2 Critère d'écoulement BBC2003 (Extension du critère d'écoulement BBC2003)

En 2005, Banabic et al. [56] ont proposé une version améliorée du critère d'écoulement BBC2003, dans le but d'accroître sa capacité prédictive. Cette version étendue introduit des coefficients supplémentaires propres au matériau, permettant une meilleure prise en compte des effets d'anisotropie dans des conditions de chargement plus générales.

Dans un système de coordonnées quelconque, la formulation de la contrainte équivalente associée à ce critère généralisé est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_0 = \left[a(\Delta + \Gamma)^{2\chi} + a(\Delta - \Gamma)^{2\chi} + b(\Delta + \psi)^{2\chi} + b(\Delta - \psi)^{2\chi} \right]^{\frac{1}{2\chi}} \quad (3.11)$$

Avec les paramètres du matériau $a, b > 0$, mais les fonctions Γ, Δ et ψ en relation avec les composantes du tenseur des contraintes planaires dans la relation suivante :

$$\begin{cases} \Gamma = L\sigma_{11} + M\sigma_{22} \\ \Delta = \sqrt{(N\sigma_{11} - P\sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2} \\ \psi = \sqrt{(Q\sigma_{11} - R\sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2} \end{cases}$$

12.2.1 Paramètres constitutifs du critère d'écoulement BBC2005

La fonction de plasticité BBC2005 introduit un total de neuf paramètres matériaux fondamentaux notés : $a, b, L, M, N, P, Q, R, \chi$ destinés à décrire de manière détaillée le comportement d'écoulement anisotrope des tôles métalliques. Ces paramètres sont soumis aux contraintes suivantes :

12.2.2. Contraintes sur les paramètres constitutifs :

- Tous les coefficients a, b, L, M, N, P, Q, R doivent impérativement être strictement positifs.
- Le coefficient de pondération a est compris dans l'intervalle borné : $0 \leq a \leq 1$
- L'exposant non quadratique χ est un entier naturel, dépendant de la structure cristalline du matériau:
 - $\chi = 3$ pour les matériaux à structure cubique centrée (BCC) ;
 - $\chi = 4$ pour les matériaux à structure cubique à faces centrées (FCC).

12.2.3. Détermination des paramètres :

- Des études d'optimisation numérique réalisées par les auteurs d'origine [56] ont confirmé que l'identification de ces paramètres permet une représentation optimale de la surface d'écoulement.
- Le choix des paramètres doit être cohérent avec la texture cristallographique spécifique du matériau étudié, afin de refléter fidèlement ses caractéristiques anisotropes.

12.3 Critère d'écoulement BBC2008 [67]

Dans le but d'améliorer la capacité prédictive et la souplesse de représentation du modèle BBC2005, Banabic et al. ont proposé en 2008 une version perfectionnée de ce critère d'écoulement. Le modèle BBC2008 introduit des ajustements permettant une flexibilité accrue dans la description du comportement anisotrope des tôles soumises à un état de contrainte plane (*plane stress*).

La formulation de la contrainte équivalente selon le critère d'écoulement BBC2008, adaptée aux conditions de contrainte plane, est donnée par l'Équation (5) suivante :

$$\frac{\sigma_0^{2\chi}}{w-1} = \sum_{i=1}^s \left[w^{i-1} \left\{ (L^i + M^i)^{2\chi} + (L^i - M^i)^{2\chi} \right\} + w^{s-i} \left\{ (M^i + N^i)^{2\chi} + (M^i - N^i)^{2\chi} \right\} \right] \quad (3.12)$$

$\chi, s \in \mathbb{N}^* \quad w = (3/2)^{1/s} > 1$

$$\begin{cases} L^i = l_1^i \sigma_{11} + l_2^i \sigma_{22} \\ M^i = \sqrt{(m_1^i \sigma_{11} - m_2^i \sigma_{22})^2 + m_3^i (2\sigma_{12})^2} \\ N^i = \sqrt{(n_1^i \sigma_{11} - n_2^i \sigma_{22})^2 + n_3^i (2\sigma_{12})^2} \end{cases}$$

Ces coefficients $l_1^i, l_2^i, m_1^i, m_2^i, m_3^i, n_1^i, n_2^i, n_3^i$ représentent des paramètres de plasticité anisotrope nécessitant une identification expérimentale.

14. Relations constitutives pour un chargement orienté

Lorsque l'axe de l'éprouvette est tourné d'un angle θ par rapport à la direction de laminage (DL), la contrainte de traction uniaxiale résultante, notée $\sigma(\theta)$, dans la direction inclinée θ , peut s'exprimer par la relation suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma(\theta) \cos^2 \theta \\ \sigma_{22} = \sigma(\theta) \sin^2 \theta \\ \sigma_{12} = \sigma(\theta) \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (3.13-a)$$

Cette formulation permet de prendre en compte l'effet de l'orientation sur le comportement mécanique du matériau, en intégrant les variations directionnelles caractéristiques des matériaux anisotropes.

où σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} sont les composantes planes du tenseur des contraintes de Cauchy qui peuvent être déterminées à partir des rotations de coordonnées. Lors d'un essai de traction biaxiale équilibrée, les composantes σ_b de la limite d'élasticité sont :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_b \\ \sigma_{22} = \sigma_b \\ \sigma_{12} = 0 \end{cases} \quad (3.13-b)$$

Prévision du coefficient d'anisotropie théorique :

Le rapport de déformation plastique $r(\theta)$, qui caractérise l'anisotropie du matériau à l'orientation (θ) par rapport à la direction de laminage, est déterminé par [43] :

$$r(\theta) = \frac{\dot{\epsilon}_{yy}}{\dot{\epsilon}_{zz}} = - \frac{\left(\frac{f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{xx}}\right) \cdot \sin^2 \theta - \left(\frac{f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{xy}}\right) \cdot \sin 2\theta + \left(\frac{f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{yy}}\right) \cdot \cos^2 \theta}{\frac{f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{xx}} + \frac{f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{yy}}} \quad (3.14-a)$$

Le coefficient de Lankford equibiaxial r_b

$$r_b = \frac{f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{yy}} / \frac{f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{xx}} \quad (3.14-b)$$

15. Coefficient d'anisotropie equibiaxial du critère de Barlat 1996 (Yld96) [4]

Dans le cas d'une traction equibiaxiale ($\sigma_{11} = \sigma_{22}$), le rapport d'anisotropie plastique $r(\theta)$ est obtenu à partir de l'équation (3.15), en tant que pente $m(\theta) = r_b = \varepsilon_{yy}/\varepsilon_{xx}$. Dans le cadre de cette étude, nous retenons la formulation développée initialement par Barlat et al., connue sous le nom de Yld96 [43], qui propose des expressions spécifiques pour le calcul de ce rapport.

$$r_b = \frac{[-\alpha_x(c_3 + 2c_1)(2c_1 + c_2)|2c_1 + c_2|^{a-2} + \alpha_y(c_3 - c_1)(c_1 + 2c_2)|c_1 + 2c_2|^{a-2} - (2c_3 + c_1)(c_1 - c_2)|c_1 - c_2|^{a-2}]}{[-\alpha_x(c_2 - c_3)(2c_1 + c_2)|2c_1 + c_2|^{a-2} - \alpha_y(2c_2 + c_3)(c_1 + 2c_2)|c_1 + 2c_2|^{a-2} + (c_2 + 2c_3)(c_1 - c_2)|c_1 - c_2|^{a-2}]} \quad (3.15)$$

Le paramètre entier non quadratique a , intervenant dans cette formulation, est une constante caractéristique du matériau, dont la valeur dépend de la structure cristalline : $a=8$ pour les structures cubiques à faces centrées (CFC), et $a=6$ pour les structures cubiques centrées (CC).

Par ailleurs, les coefficients $c_1, c_2, c_3, c_6, \alpha_x, \alpha_y$ sont déterminés par calibrage numérique, via une procédure d'optimisation fondée sur la méthode de Newton-Raphson. Les coefficients d'anisotropie calibrés pour l'acier DC04 sont reportés dans le Tableau 3.6.

c_1	c_2	c_3	c_6	α_x	α_y	α_z	r_b
1.0283	0.9874	1.0125	0.8913	0.3969	0.5677	1.3087	0.778

16. Optimisation des paramètres matériaux

• Pour la plasticité associée (AFR)

Les paramètres d'anisotropie associés aux fonctions de plasticité BBC2003, BBC2005, BBC2008_8p et BBC2008_16p ont été déterminés par optimisation non linéaire, en recourant à l'algorithme des moindres carrés de Levenberg-Marquardt [68, 69]. Cette procédure numérique a été implémentée sous MATLAB™, avec une identification des paramètres fondée sur l'équation (3.16_a).

$$Error = \sum_{i=1}^k \left[\frac{\sigma_i^{theo}(\theta)}{\sigma_i^{exp}(\theta)} - 1 \right]^2 + \sum_{i=1}^k \left[\frac{\sigma_i^{theo}(b)}{\sigma_i^{exp}(b)} - 1 \right]^2 + \sum_{i=1}^k \left[\frac{r_i^{theo}(\theta)}{r_i^{exp}(\theta)} - 1 \right]^2 + \sum_{i=1}^k \left[\frac{r_i^{theo}(b)}{r_i^{exp}(b)} - 1 \right]^2 \quad (3.16_a)$$

Le nombre total de points expérimentaux utilisés dans le processus d'identification est noté k . L'indice supérieur « **theo** » désigne les valeurs prédites par les différentes versions de la fonction de plasticité BBC (2003, 2005, 2008_8p et 2008_16p), tandis que l'indice « **exp** » renvoie aux valeurs expérimentales mesurées correspondantes.

- **Pour la plasticité non associée (non-AFR) :** La détermination des paramètres de l'anisotropie s'effectue à partir du découplage du tenseur des contraintes par rapport à celui des déformations. La différence entre les résultats prédits et les résultats expérimentaux, tant pour les contraintes d'écoulement $\sigma(\theta)$ que pour les valeurs du coefficient $r(\theta)$, a été évaluée à l'aide de fonctions d'erreur, définies comme suit selon l'équation (3.16_b) :

$$\begin{cases} Error_{\sigma(\theta)} = \sum_{i=1}^k \left[\frac{\sigma_i^{theo}(\theta)}{\sigma_i^{exp}(\theta)} - 1 \right]^2 + \sum_{i=1}^k \left[\frac{\sigma_i^{theo}(b)}{\sigma_i^{exp}(b)} - 1 \right]^2 \\ Error_{r(\theta)} = \sum_{i=1}^k \left[\frac{r_i^{theo}(\theta)}{r_i^{exp}(\theta)} - 1 \right]^2 + \sum_{i=1}^k \left[\frac{r_i^{theo}(b)}{r_i^{exp}(b)} - 1 \right]^2 \end{cases} \quad (3.16_b)$$

17. Validation de la famille des critères BBC

Pour le matériau tel que reçu, la caractérisation numérique des paramètres anisotropes de la famille des critères plastiques BBC est résumée dans le tableau 3.7 comme suit :

Tableau3.7 Coefficients des critères de plasticité pour les stratégies d'identification

AFR (Plasticité associée)								
	a	M	N	P	Q	R	S	T
BBC2003	0.4811	1.0232	0.8641	0.7959	0.8449	1.0473	1.0628	1.0388
	a	b	L	M	N	P	Q	R
BBC2005	0.4737	0.7990	0.4927	0.5056	0.4319	0.3984	0.5472	0.5621
	I_1^1	I_2^1	m_1^1	m_2^1	m_3^1	n_1^1	n_2^1	n_3^1
BBC2008-8P	0.4994	0.5060	0.4356	0.4035	0.3919	0.6133	0.6880	0.6160
	I_1^1	I_2^1	m_1^1	m_2^1	m_3^1	n_1^1	n_2^1	n_3^1
BBC2008-16P	0.1896	0.2446	0.8352	0.2815	0.3408	0.2385	0.8741	0.4604
	I_1^2	I_2^2	m_1^2	m_2^2	m_3^2	n_1^2	n_2^2	n_3^2
	0.3276	0.2370	0.5798	0.7620	0.3940	0.3697	-0.0598	0.7183
non-AFR_S (Modele basé sur les contraintes)								
	a	M	N	P	Q	R	S	T
BBC2003	0.3849	1.0289	0.9567	0.6970	0.4464	1.0170	1.0691	1.0466
	a	b	L	M	N	P	Q	R
BBC2005	0.2558	0.3790	0.1975	0.9289	0.2972	0.2860	0.8735	0.5743
	I_1^1	I_2^1	m_1^1	m_2^1	m_3^1	n_1^1	n_2^1	n_3^1
BBC2008-8P	0.2707	0.8658	0.3505	0.4106	0.5968	0.8833	0.2528	0.2090

		non-AFR $_r$ (Modele basé sur le coefficient de Lankford)							
BBC2003		a	M	N	P	Q	R	S	T
		0.4313	0.9701	1.0361	1.0036	1.0855	1.1339	1.0301	1.0658
BBC2005	$\chi = 3$	a	b	L	M	N	P	Q	R
		0.7606	0.4013	0.3587	0.3627	0.2831	0.2577	0.5068	0.6127
BBC2008-8P		l_1^1	l_2^1	m_1^1	m_2^1	m_3^1	n_1^1	n_2^1	n_3^1
		0.5274	0.6407	0.3111	0.1506	0.3248	0.6718	0.9582	0.7708

18. Validation des critères de plasticité sur plusieurs orientations

À la suite du calibrage réalisé pour différentes orientations du matériau par rapport à la direction de laminage (DL), la [Figure 3.13](#) présente les distributions des propriétés mécaniques de traction normalisées, ainsi que les contraintes d'écoulement et les fonctions potentielles des critères de plasticité de la famille BBC, évaluées dans le cadre des règles de plasticité associée et non-associée, et comparées aux résultats expérimentaux.

La prévision de la variation des contraintes d'écoulement selon les différentes directions de sollicitation dans le plan de la tôle est illustrée dans les [Figures 3.13 \(a\) et 3.13 \(c\)](#). Une mauvaise concordance a été observée pour le critère BBC2005 lorsqu'il est appliqué sous l'hypothèse de plasticité associée (AFR), ainsi que pour le critère BBC2008-8p en hypothèse non-AFR (modèle basé sur la contrainte équivalente (stress)). L'anisotropie du tenseur de contraintes en sollicitation de traction uniaxiale est globalement bien décrite par l'ensemble des critères de plasticité considérés, ce qui valide avec succès la prévision de toute la famille des critères.

Les valeurs normalisées du coefficient $r(\theta)$ prévues par ces critères ont été comparées aux données expérimentales dans les [Figures 3.13 \(b\) et 3.13 \(d\)](#). Concernant la prévision de la variation directionnelle du coefficient $r(\theta)$, est mentionnées avec une faible différence observée entre les réponses expérimentales et ceux calculés avec le modèle BBC2003, dans le cas de l'hypothèse de plasticité associée (AFR).

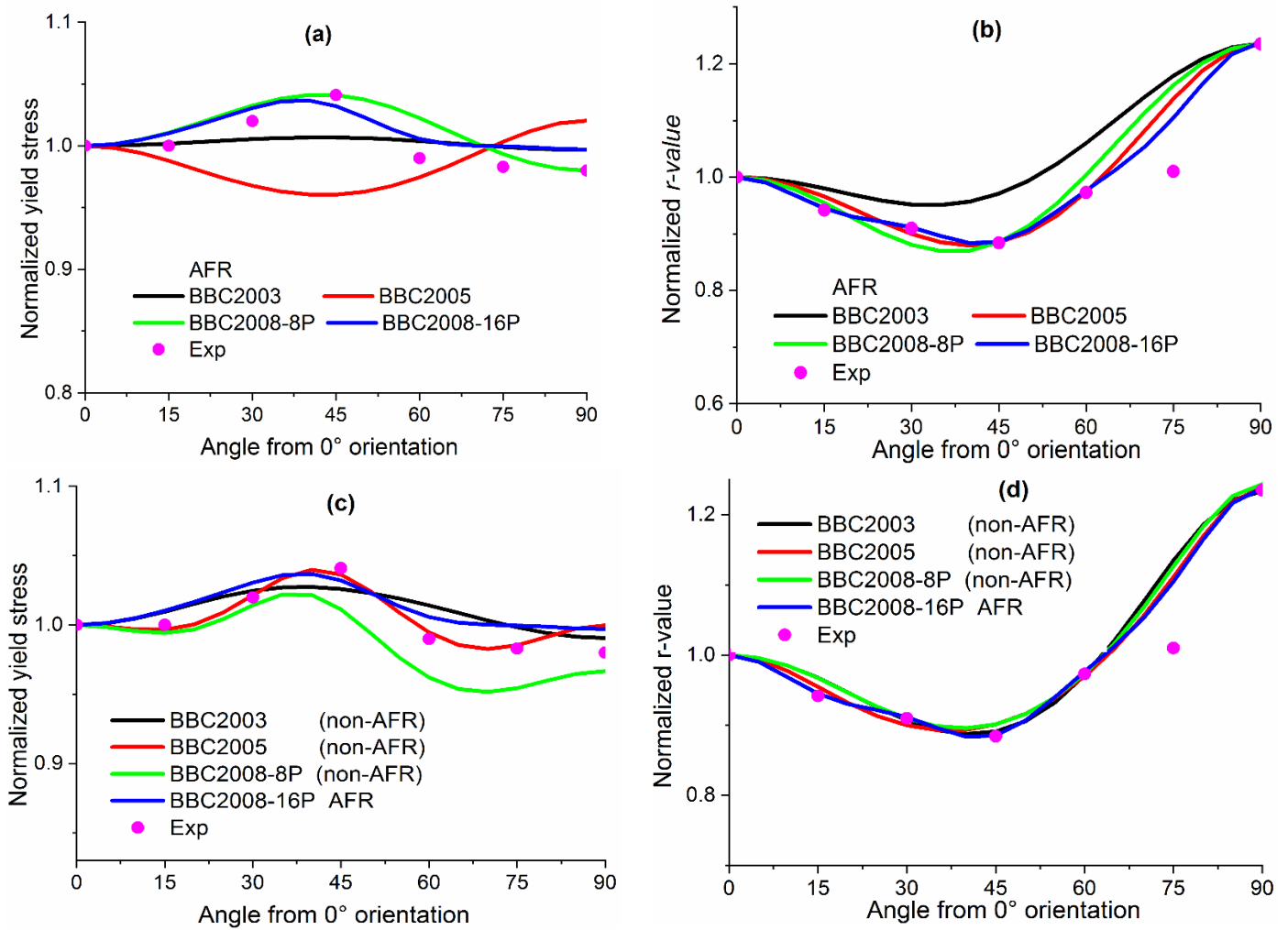


Fig 3.13 Propriétés de traction normalisées prévues par les critères de la famille BBC suivant différentes directions : (a) contrainte d'écoulement sous AFR, (b) $r(\theta)$ sous l'hypothèse AFR, (c) contrainte d'écoulement sous l'hypothèse non-AFR sauf BBC_16p, et (d) $r(\theta)$ sous l'hypothèse non-AFR sauf pour BBC_16p.

Afin de visualiser le comportement à l'écoulement plastique dans l'espace des contraintes tout en négligeant l'impact des contraintes de cisaillement dans le plan de la tôle, la [Figure 3.14](#) illustre une comparaison entre les contraintes induites de toute la famille de BBC et en les comparant avec les fonctions de charge expérimentales. Sous l'hypothèse de plasticité associée (AFR), les critères de plasticité de la famille BBC présentent des surfaces d'écoulement quasiment superposées, ce qui confirme la cohérence de leurs prédictions pour le comportement mécanique anisotrope. En revanche, dans le cadre de l'hypothèse de plasticité non-associée (non-AFR), la fonction de charge est découplée du potentiel plastique, ce qui conduit à une divergence marquée entre les deux formulations : l'une basée sur la contrainte (modèle basé sur les contraintes (Stress)) et l'autre fondée sur l'anisotropie (modèle potentiel basé sur $r(\theta)$). Il est à noter que les modèles non-AFR montrent une précision réduite dans la prévision du comportement plastique

initial, notamment lors des premières phases de la mise en charge. Cette comparaison met en évidence le rôle déterminant du choix l'hypothèse de plasticité dans la modélisation de l'anisotropie plastique.

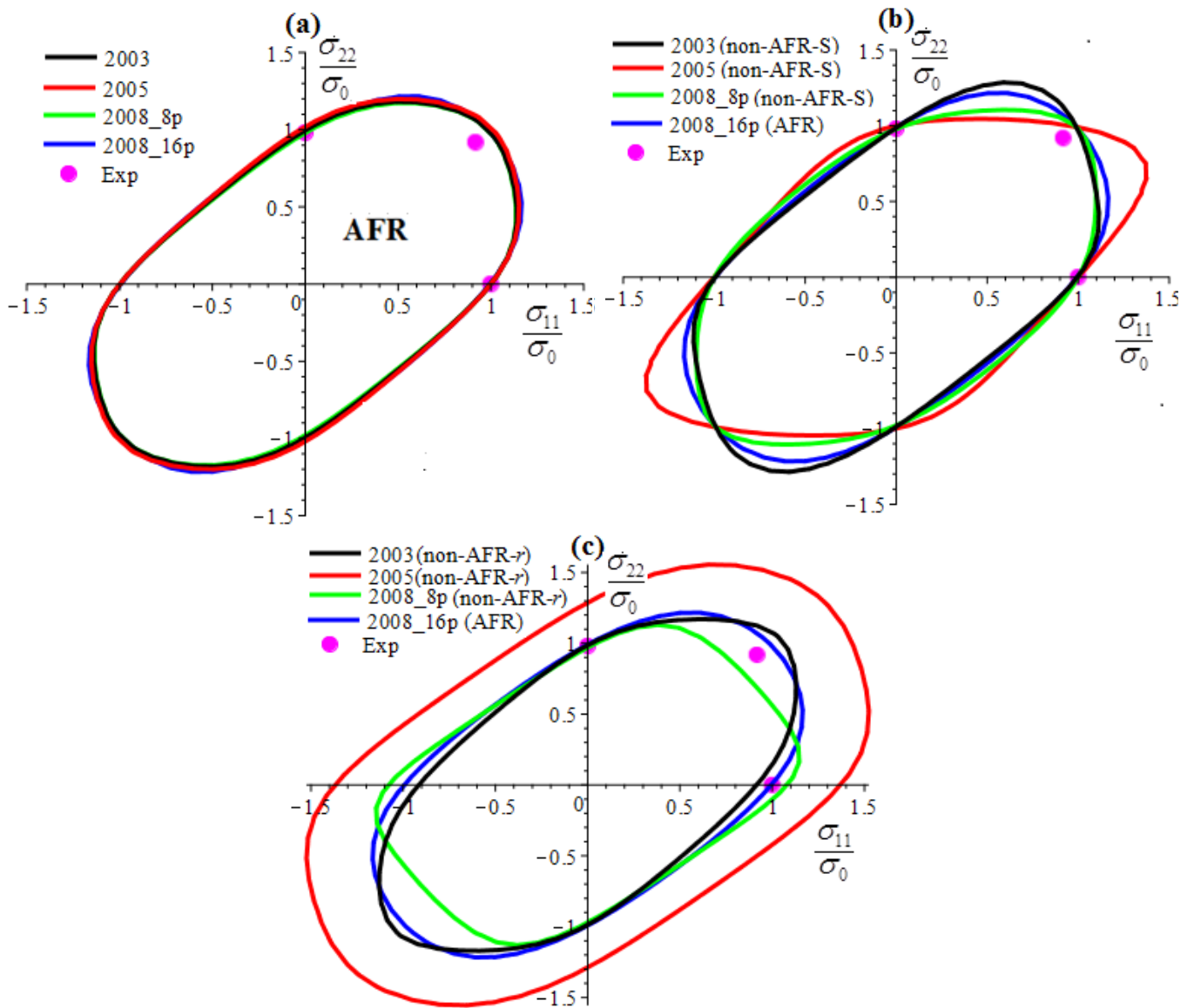


Fig3.14 Comparaison des surfaces des contraintes et de coefficient d'anisotropie prévues avec contrainte de cisaillement nulle (contours pour $\sigma_{12}=0$) dans le plan de la tôle et dans le cadre de l'anisotropie initiale: (a) l'approche AFR, (b) l'approche *non-AFR_S*, et (c) l'approche *non-AFR_r* à l'exception du critère BBC 2008_16p.

19. Courbes d'écoulement de l'acier DC04

Le comportement mécanique de la tôle DC04 a été caractérisé à partir des courbes contrainte-déformation en traction, obtenues selon sept orientations différentes par rapport à la direction de laminage (DL). Les paramètres d'érouissage ont été optimisés dans l'érouissage mécanique isotrope. L'évolution de la

contrainte d'écoulement a été décrite de manière optimale par le modèle de Hockett-Sherby [70] (équation (3.17)), qui a fourni le meilleur ajustement aux données expérimentales d'écroutissage uniaxial. Cette formulation permet de reproduire fidèlement la réponse contrainte-vraie déformation-vraie dans toutes les directions testées, traduisant ainsi sa capacité à modéliser de manière réaliste l'écroutissage isotrope, tout en intégrant les variations directionnelles de la déformation plastique.

$$\begin{cases} \sigma_t(\theta) = \sigma_{sat}(\theta) - (\sigma_{sat}(\theta) - \sigma_0(\theta)) \exp(-c(\theta)\epsilon_t^{h(\theta)}) \\ \sigma_b = \sigma_{sat}(b) - (\sigma_{sat}(b) - \sigma_0(b)) \exp(-c_b\epsilon_t^{h_b}) \end{cases} \quad (3.17)$$

Le modèle d'écroutissage de Hockett-Sherby nécessite le calibrage de quatre paramètres dépendants de l'orientation : la contrainte d'écoulement initiale $\sigma_0(\theta)$, la contrainte de saturation $\sigma_{sat}(\theta)$, ainsi que les coefficients d'écroutissage $c(\theta)/h(\theta)$, pour sept orientations de la tôle ($\theta = 0^\circ-90^\circ$ avec un pas de 15°). De plus, quatre paramètres équivalents sont requis pour l'état equibiaxial ($\sigma_{sat}(b), \sigma_0(b), c_b, h_b$).

L'identification des paramètres a été réalisée par optimisation selon la méthode des moindres carrés, en prenant la courbe uniaxiale de référence dans la direction de laminage (RD) (Figure 3.15-a) comme chemin de référence d'écroutissage isotrope. La Figure 3.15-b présente l'ensemble des paramètres ajustés avec succès pour toutes les orientations, ainsi que la courbe d'écoulement equibiaxiale (σ_b), démontrant la précision constante du modèle dans la reproduction des comportements plastiques uniaxiaux et biaxiaux pour toutes les 7 directions testées.

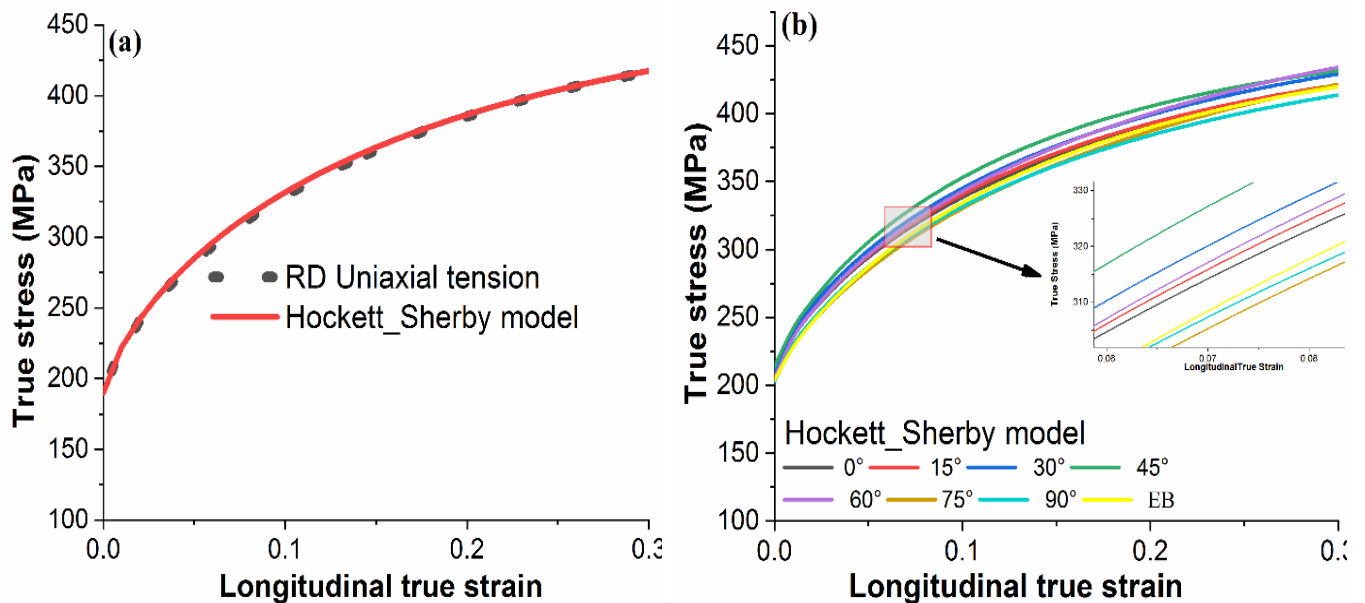


Fig. 3.15. Ajustement expérimental de la courbe d'écroutissage à l'aide du modèle de Hockett-Sherby : (a) selon la direction du laminage (b) prévision pour différentes orientations et à l'expansion biaxiale.

Les données d'ajustement de la loi de d'érouissage de Hockett-Sherby relatives à sept orientations réparties dans le plan et la courbe d'écoulement equibiaxiale σ_b de la feuille sont répertoriées dans le tableau 3.8 ci-dessous :

Tableau 3.8 Constantes ajustées pour l'érouissage de Hockett-Sherby formulé par l'équation (3.17)

Orientation	La loi de <u>Hockett-Sherby</u>			
	$\sigma_{sat}(MPa)$	$\sigma_0(MPa)$	c	h
0°	478	206	3.9	0.767
15°	468	208	4.5	0.8
30°	484	211	4.15	0.788
45°	466	214	5.42	0.83
60°	512	205	3.43	0.76
75°	500	203	3.45	0.79
90°	469	203	4.07	0.79
σ_b	464	204	4.95	0.852

20. Evolution du coefficients d'anisotropie $r(\theta)$

À partir des expressions suivantes, on peut déterminer les déformations vraies totales en traction uniaxiale dans les directions longitudinale $\varepsilon_{xx}^t(\theta)$ et transversale $\varepsilon_{yy}^t(\theta)$:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^t = \ln\left(\frac{L_f}{L_0}\right) \\ \varepsilon_{yy}^t = \ln(b_f/b_0) \end{cases} \quad (3.18)$$

où L et b représentent respectivement la longueur et la largeur de l'éprouvette, mesurées avant et après l'essai. Les déformations plastiques dans les trois directions orthotropes (x, y et z) peuvent alors être calculées comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}(\theta) = \varepsilon_{xx}^t - \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \varepsilon_{yy}(\theta) = \varepsilon_{xx}^t + \frac{\nu\sigma_{xx}}{E} \end{cases} \quad (3.19)$$

Les propriétés élastiques adoptées sont un module de Young $E=200$ GPa et un coefficient de Poisson $\nu=0,3$. Les coefficients de Lankford, plus couramment appelés valeurs $r(\theta)$ constituent des paramètres essentiels pour la caractérisation de l'anisotropie plastique. Ces coefficients sont déterminés à partir d'essais de

traction uniaxiale, en mesurant le rapport de déformations vraies entre les directions épaisseur et transversale.

En raison de la quasi-incompressibilité plastique des matériaux métalliques (résistance élevée aux variations de volume), cette propriété est exploitée pour le calcul des évolutions instantanées de $r(\theta)$, selon la relation suivante :

$$r(\theta)_{instantaneous} = \frac{\varepsilon_w(\theta)}{\varepsilon_t(\theta)} = \frac{\varepsilon_{yy}(\theta)}{\varepsilon_{zz}(\theta)} = \frac{\varepsilon_{yy}(\theta)}{-(\varepsilon_{xx}(\theta) + \varepsilon_{yy}(\theta))} = \frac{-m(\theta)}{(1+m(\theta))} \quad \text{with } \varepsilon_{xx}(\theta) + \varepsilon_{yy}(\theta) + \varepsilon_{zz}(\theta) = 0 \quad (3.20)$$

où ε_{xx} , ε_{yy} et ε_{zz} désignent les déformations plastiques vraies respectivement dans les directions de laminage, transversale et suivant l'épaisseur, mesurées expérimentalement. La pente $m(\theta)$, déterminée par régression linéaire de la courbe de déformation optimisée, quantifie la relation entre les deux déformations plastiques vraies (longitudinales et transversales).

Selon l'équation ((3.20)) et Conformément à la norme britannique ISO 10113:2006, le coefficient d'anisotropie plastique $r(\theta)$ est dérivé du rapport entre le rapport des 2 déformations plastiques vraies (transversale et en épaisseur).

Les résultats expérimentaux obtenus selon cette approche correspondent à la valeur instantanée de $r(\theta)$, qui évolue continuellement à partir du début de la déformation plastique. Une relation linéaire entre les deux composantes de la déformation est généralement observée jusqu'à environ 20 % de déformation, dans le régime de déformation uniforme, comme illustré dans la Figure 3.16.

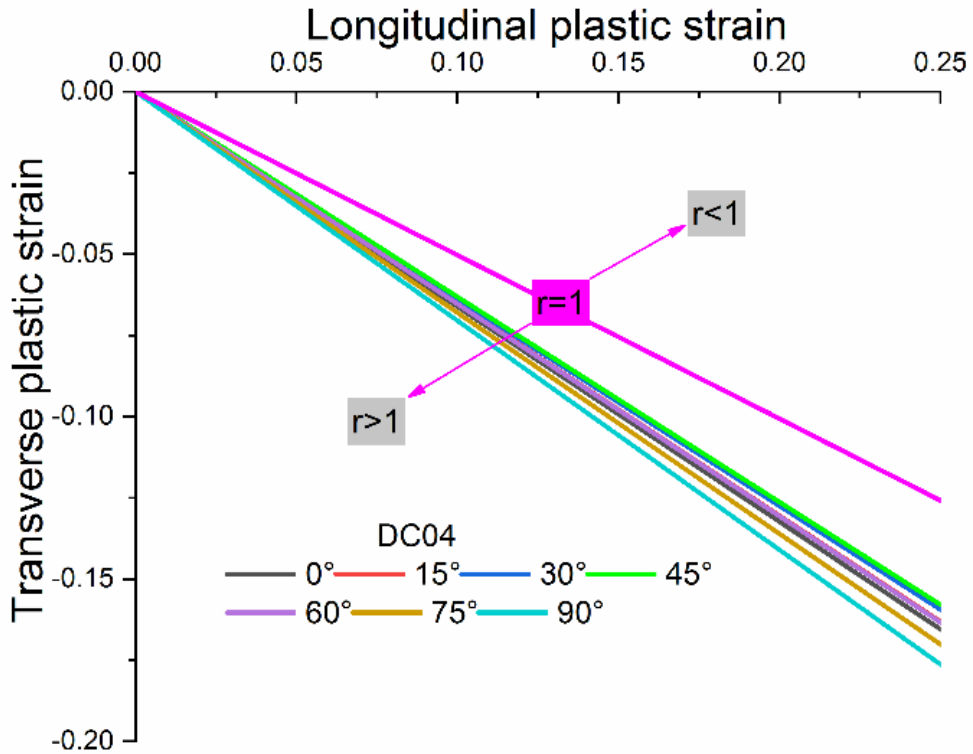


Fig. 3.16 Rapports expérimentaux entre les déformations plastiques transversales et longitudinales suivant sept angles de coupe.

Pour chaque orientation, la relation entre les déformations plastiques transversales et longitudinales a été modélisée à l'aide d'un polynôme du premier degré (Éq. (3.21)). L'évolution du paramètre de Lankford expérimental suit une fonction linéaire, exprimée sous la forme :

$$\varepsilon_{yy}(\theta) = a + m(\theta) \varepsilon_{xx}(\theta) \quad (3.21)$$

Où 'a' représente l'ordonnée à l'origine et $m(\theta)$ la pente en fonction de l'orientation θ . Le **Tableau 3.9** présente les paramètres déterminés expérimentalement pour les sept orientations étudiées, ainsi que les rapports dérivés des déformations plastiques vraies transversales et longitudinales. Ces résultats ont été calculés à partir des relations définies dans les équations ((3.20)) et ((3.21)), permettant ainsi une caractérisation précise du comportement anisotrope du matériau.

Table 3.9 Les constantes de la régression linéaire.

Angle	a	$m(\theta)$
0°	-0.0022	-0.6568
15°	-0.0031	-0.6429
30°	-0.0013	-0.6350
45°	-0.0014	-0.6280
60°	-0.0015	-0.6503
75°	-0.0011	-0.6784
90°	-0.0014	-0.7023

Dans cette section, la déformation plastique longitudinale, notée ε^p , a été évaluée sur un intervalle allant de **0,002 à 0,2**. L'évolution du coefficient de Lankford $r(\theta)$ pour l'acier DC04, prédite par le modèle de régression proposé, a été comparée aux données expérimentales pour différentes directions de chargement, afin de caractériser sa dépendance vis-à-vis de la déformation plastique au cours de la déformation.

L'analyse révèle une influence marquée à la fois de la déformation plastique ε^p et de l'orientation du matériau sur les paramètres d'anisotropie. Plus précisément, les valeurs de $r(\theta)$ mesurées par incréments de **15°** entre **0° et 90°**—ainsi que le coefficient équibiaxial r_b , présentent une dépendance significative à la déformation équivalente longitudinale de référence ε^p .

La **Figure 3.17** illustre la variation de ces paramètres sur l'étendue de déformation considérée, telle que déterminée à partir de trois échantillons répétés. Ces résultats mettent en évidence l'hétérogénéité du comportement mécanique en fonction de la direction de sollicitation, confirmant ainsi la nécessité de prendre en compte l'anisotropie dans la modélisation du matériau.

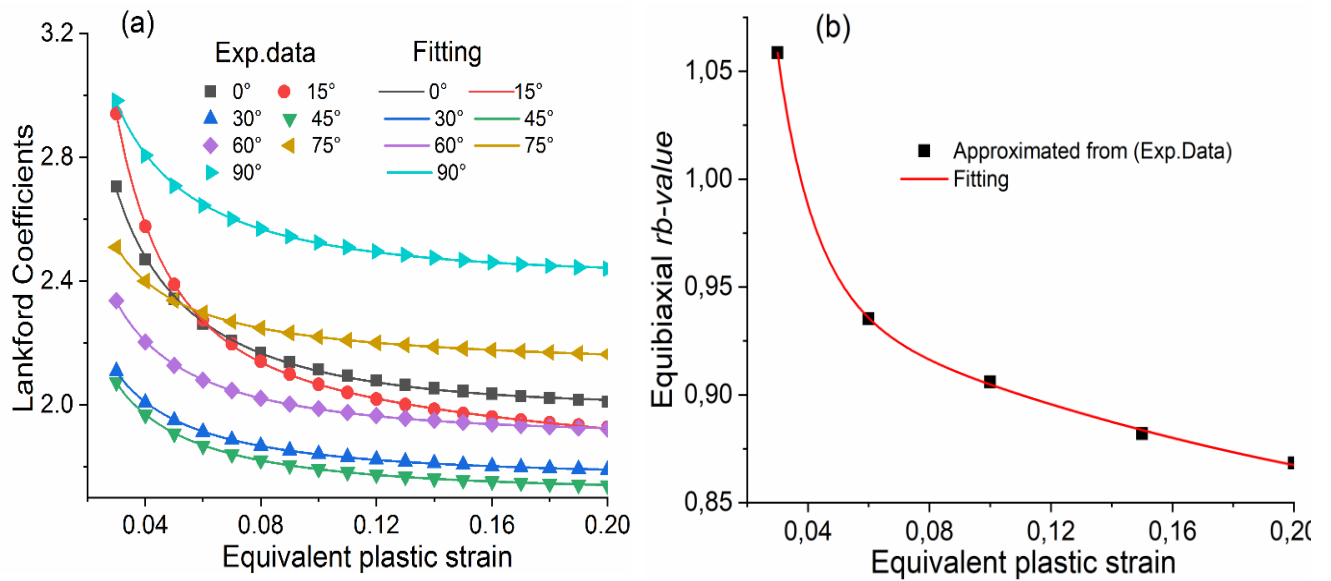


Fig. 3.17 (a) Évolution du coefficient de Lankford en fonction de la déformation plastique suivant les sept directions par rapport à la DL et (b) Coefficient de Lankford equibiaxial déterminé par (Yld96).

Les paramètres d'anisotropie ont été modélisés à l'aide du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} r(\theta) = A_r(\theta) - B_r(\theta) \exp(-C_r(\theta)\varepsilon^p) + D_r(\theta)/\varepsilon^p \\ r_b = A_r(b) - B_r(b) \exp(-C_r(b)\varepsilon^p) + D_r(b)/\varepsilon^p \end{cases} \quad (3.22)$$

Pour l'acier DC04, les coefficients d'ajustement A_r , B_r , C_r et D_r ont été optimisés pour les orientations $\theta=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ ainsi que pour les coefficients équiaxiaux correspondants $A_r(b)$, $B_r(b)$, $C_r(b)$ et $D_r(b)$. Ces valeurs, présentées dans le **Tableau 3.10**, permettent une caractérisation complète du comportement anisotrope du matériau.

La comparaison avec les données expérimentales démontre que les courbes ajustées décrivent avec précision le comportement du matériau dans toutes les directions de chargement. Le modèle de régression présente un excellent accord avec les mesures, comme en témoigne le coefficient de corrélation $R=0.99$ pour la courbe prédite (tracée en pointillés sur la **Figure 3.17**). Cet ajustement remarquable valide la robustesse de l'approche proposée pour la modélisation de l'évolution des paramètres d'anisotropie en fonction de la déformation plastique

Table 3.10 les constants ajustés selon l' eq. ((3.22))

Orientation	A_r	B_r	C_r	D_r
0°	1.8967	0.1092	10.396	0.0255
15°	1.7675	0.2146	10.532	0.0373
30°	1.7353	0.0278	10.224	0.0116
45°	1.6833	0.0307	10.235	0.0121
60°	1.852	0.0435	10.276	0.0151
75°	2.104	0.0289	10.226	0.0125
90°	2.349	0.0626	10.295	0.0198
r_b	0.799	0.4555	25.264	0.0142

21 . Évolution du comportement plastique en cours d'écrouissage

Lors des processus de laminage des tôles métalliques, la contrainte de référence initiale présente une évolution non linéaire en fonction de la déformation plastique équivalente, particulièrement marquée aux niveaux de déformation élevés dans le régime d'écrouissage isotrope. Pour caractériser précisément ce comportement anisotrope, cinq niveaux distincts de déformation plastique équivalente (0,2 %, 3 %, 10 %, 15 % et 20 %) ont été sélectionnés dans la zone d'écrouissage homogène en vue de l'identification des paramètres.

La détermination des paramètres d'anisotropie a été réalisée par l'analyse des propriétés mécaniques instantanées via l'application de la famille de critères de plasticité BBC. La **Figure 3.18** présente une analyse comparative entre les limites d'élasticité expérimentales et les surfaces de charge prédites, accompagnées des surfaces de potentiel plastique correspondantes, pour les différents niveaux de déformation sélectionnés. Cette comparaison permet d'évaluer la performance des différentes formulations des critères BBC selon deux approches :

- L'approche non-associée (non-AFR)
- L'approche associée (AFR)

L'analyse a été conduite en négligeant les effets de cisaillement ($\sigma_{12} = 0$) le long de la direction de laminage (DL). Les résultats mettent en évidence l'influence significative du choix du critère et de la règle d'écoulement sur la précision de prévision du comportement plastique.

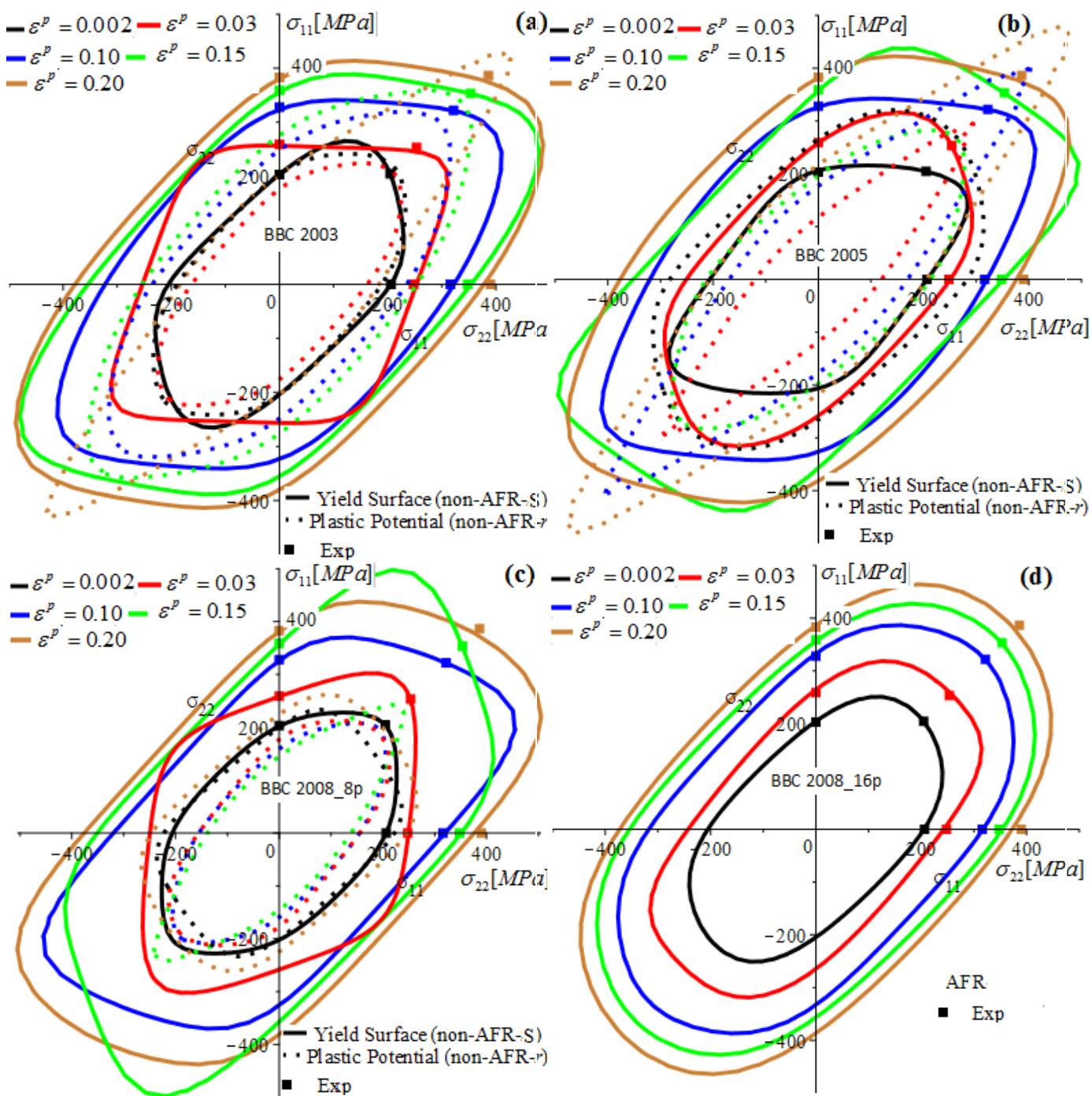
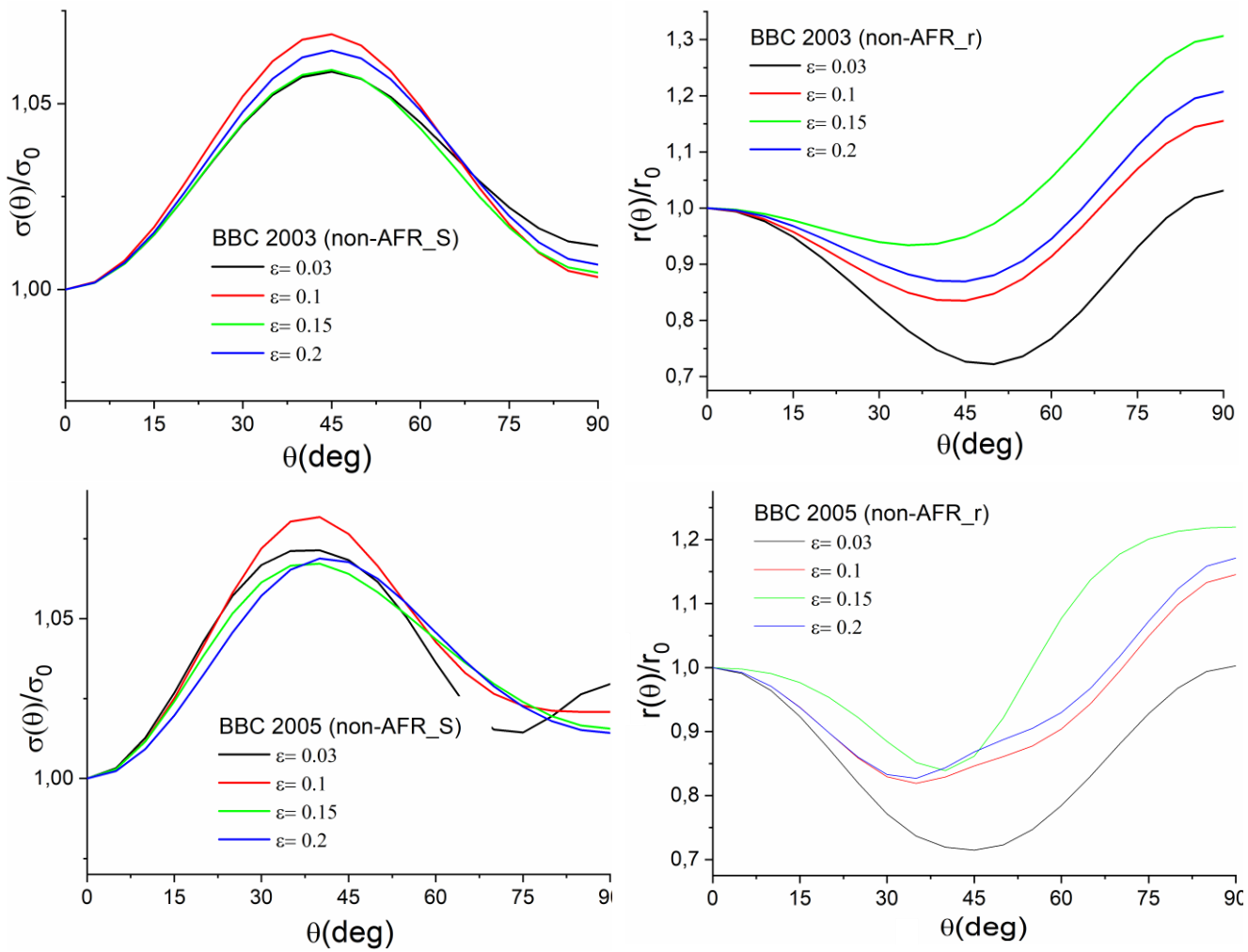


Fig. 3.18 Évolution des surfaces d'écoulement et de potentiel plastique avec l'augmentation de la déformation plastique effective pour : (a) BBC 2003, (b) BBC 2005, (c) BBC 2008_8p, et (d) BBC 2008_16p sous l'approche non-AFR et AFR.

Les résultats issus des modèles de la famille BBC (Figure 3.19) montrent que l'acier étudié présente un comportement quasi isotrope aux faibles niveaux de déformation plastique, caractérisé par de faibles variations angulaires de la contrainte d'écoulement $\sigma(\theta)$ et du coefficient d'anisotropie $r(\theta)$. L'augmentation de la déformation plastique équivalente conduit à une accentuation progressive de ces variations, traduisant l'apparition puis le renforcement d'une anisotropie plastique induite par l'écoulement. Cette évolution est cohérente avec les conclusions générales du manuscrit, soulignant le rôle prépondérant de l'écroutissage directionnel dans la description du comportement anisotrope des tôles laminées.



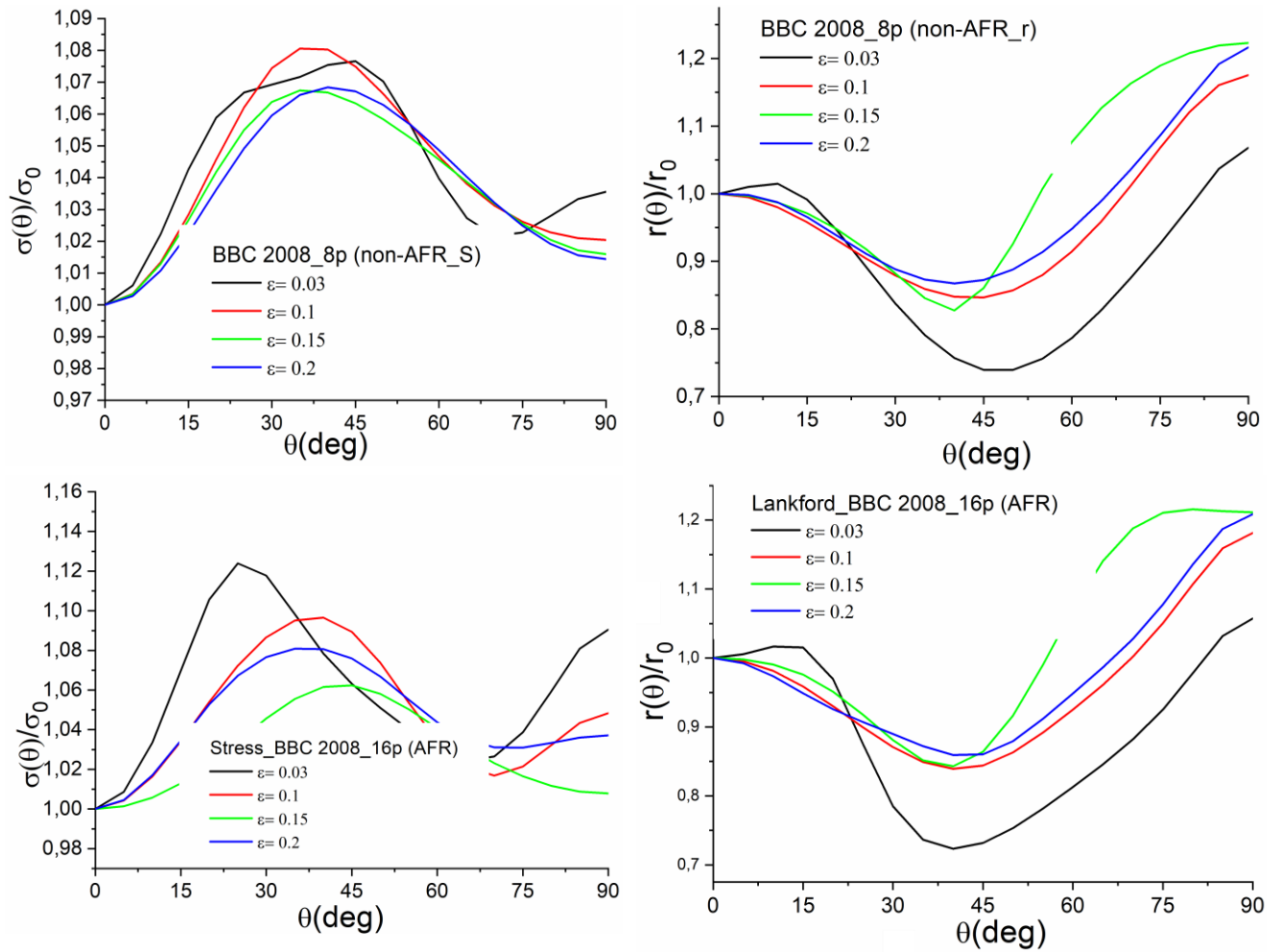


Fig. 3.19 : Comparaison entre la dépendance angulaire des paramètres anisotropes normalisés $\sigma(\theta)$ dans et $r(\theta)$, prédits par les modèles de la famille BBC dans le cadre de l'hypothèse (associée et non associée), pour différents niveaux globaux de déformation plastique équivalente.

Conclusions Générales

Cette étude a examiné l'influence des paramètres mécaniques anisotropes sur le comportement plastique des tôles d'acier ferritique DC04 laminées à froid. Elle a combiné une approche expérimentale rigoureuse, une modélisation théorique avancée pour prédire l'évolution des propriétés mécaniques sous sollicitations multiaxiales. Trois critères de plasticité de la famille BBC ont été proposés pour modéliser l'évolution des surfaces de limite d'écoulement selon sept orientations de chargement distinctes. Des méthodes d'identification analytique ont été employées pour caractériser le comportement en traction equibiaxiale et la valeur equibiaxiale du coefficient de Lankford. Les principaux résultats sont synthétisés ci-après :

(1) Anisotropie initiale

Sous les hypothèses des approches d'écoulement associée (AFR) et non associée (non-AFR), les profils de distribution des propriétés mécaniques normalisées (contraintes d'écoulement et potentiels plastiques) ont été analysés dans le plan de la tôle. Les critères de la famille BBC reproduisent de manière cohérente le comportement mécanique du matériau, en accord avec les données expérimentales. Parmi eux, le critère **BBC2008-16p** s'est distingué par sa flexibilité accrue. Sous l'hypothèse AFR, les contours des surfaces d'écoulement des critères BBC convergent vers le cas isotrope de von Mises. En revanche, des écarts significatifs entre les critères sont observés sous l'hypothèse non-AFR, soulignant l'importance du choix de l'hypothèse d'écoulement dans les modèles prédictifs.

(2) Évolution de l'anisotropie

L'évolution instantanée du comportement anisotrope en fonction de la déformation plastique a été quantifiée. Durant le processus de laminage, et dans le domaine d'écrouissage isotrope, une méthode originale a été proposée pour estimer l'évolution des paramètres anisotropes des tenseurs de contrainte et de déformation. Les surfaces des fonctions d'écoulement et les potentiels plastiques prédits par les critères BBC, sous le cadre des deux hypothèses AFR et non-AFR, ont été validés, offrant ainsi un cadre robuste pour la simulation des procédés de mise en forme.

(3) Propriétés mécaniques locales

Les profils de dureté ont été analysés pour établir un lien avec l'anisotropie du matériau. Une corrélation polynomiale d'ordre deux a été appliquée entre le coefficient d'anisotropie $r(\theta)$ et le paramètre de rapport d'aspect $\rho(\theta)$, garantissant une cohérence analytique et ouvrant la voie à une caractérisation indirecte de l'anisotropie par des essais non destructifs.

Perspectives

Les résultats obtenus constituent une avancée significative dans la compréhension de la plasticité anisotrope des tôles métalliques. Toute fois, des travaux complémentaires pourraient explorer :

- Comparaison entre la famille des critères BBC avec d'autres séries des critères non quadratique modernes (La famille de Barlat).
- L'intégration des fonctions de charge de la famille BBC dans un cadre éléments finis (exemple: *Abaqus*) offrirait ainsi un outil prédictif robuste pour l'analyse et l'optimisation des procédés de mise en forme des tôles métalliques.
- L'optimisation des modèles non-AFR pour une meilleure adéquation aux comportements observés en industrie.

En conclusion, cette étude fournit des outils théoriques et expérimentaux précieux pour la prédiction et l'optimisation des procédés de formage, tout en proposant des pistes innovantes pour des recherches futures.

Références bibliographiques :

- [1] Safaei, M. (2013). *Constitutive Modelling of Anisotropic Sheet Metals Based on a Non-Associated Flow Rule* [Thèse de doctorat, Université de Gand].
- [2] Bridgman, P. W. (1947). The Effect of Hydrostatic Pressure on the Fracture of Brittle Materials. *Journal of Applied Physics*, 18(2), 246-258.
- [3] Bridgman, P. W. (1952). *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*. Harvard University Press.
- [4] Barlat, F., Maeda, Y., Chung, K., Yanagawa, M., Brem, J. C., Hayashida, Y., Lege, D. J., Matsui, K., Murtha, S. J., Hattori, S., Becker, R. C., & Makosey, S. (1997). Yield function development for aluminum alloy sheets. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(11-12), 1727-1763.
- [5] Barlat, F., Brem, J. C., Yoon, J. W., Chung, K., Dick, R. E., Lege, D. J., Pourboghrat, F., Choi, S. H., & Chu, E. (2003). Plane stress yield function for aluminum alloy sheets – Part I: Theory. *International Journal of Plasticity*, 19(9), 1297-1319.
- [6] Barlat, F., Aretz, H., Yoon, J. W., Karabin, M. E., Brem, J. C., & Dick, R. E. (2005). Linear transformation-based anisotropic yield functions. *International Journal of Plasticity*, 21(6), 1009-1039.
- [7] Barlat, F., Yoon, J. W., & Cazacu, O. (2007). On linear transformations of stress tensors for the description of plastic anisotropy. *International Journal of Plasticity*, 23(5), 876-896.
- [8] Kröner, E. (1960). Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 4(1), 273-334.
- [9] Hill, R. (1967). The Essential Structure of Constitutive Laws for Metal Composites and Polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(2), 79-95.
- [10] Simo, J. C., & Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer.
- [11] Khan, A. S., & Huang, S. (1995). *Continuum Theory of Plasticity*. John Wiley & Sons.
- [12] Gurson, A. L. (1977). Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99(1), 2-15.
- [13] Navier, C. L. M. H. (1821). De l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, 177-181.
- [14] Beltrami, E. (1892). Sulla teoria delle figure di equilibrio. *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 25, 121-130.
- [15] Liu, W. (2015). *Identification of strain-rate dependent hardening sensitivity of metallic sheets under in-plane biaxial loading* [Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Rennes].
- [16] Islamoff, I. (1965). *Metal Forming Techniques* (NASA Technical Report NASA-SP-5028). National Aeronautics and Space Administration.

- [17] Col, A. (2010). *L'emboutissage des aciers*. Dunod.
- [18] Berveiller, M. (2007). *Contribution à la modélisation de la mise en forme des tôles métalliques : application au retour élastique et à la localisation* [Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers].
- [19] Govik, A., Nilsson, L., & Moshfegh, R. (2012). Finite element simulation of the manufacturing process chain of a sheet metal assembly. *Journal of Materials Processing Technology*, 212(7), 1453-1462.
- [20] McDowell, D. L. (2010). A perspective on trends in multiscale plasticity. *International Journal of Plasticity*, 26(9), 1280-1309.
- [21] Boogaard, A. H. van den (2001). *Thermally Enhanced Forming of Aluminium Sheet: Modelling and Experiments* [Thèse de doctorat, University of Twente].
- [22] Rabahallah, M. (2007). *Modélisation de l'anisotropie plastique et application à la mise en forme des tôles métalliques* [Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine de Metz].
- [23] Domkin, K. (2005). *Constitutive Models Based on Dislocation Density: Formulation and Implementation into Finite Element Codes* [Thèse de doctorat, Luleå University of Technology].
- [24] Meinders, T., Perdahcioglu, E., Riel, M., & Wisselink, H. (2008). Numerical modeling of advanced materials. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 48(5), 485-498.
- [25] Kocks, U. F., Tomé, C. N., & Wenk, H.-R. (2000). *Texture and Anisotropy: Preferred Orientations in Polycrystals and Their Effect on Materials Properties*. Cambridge University Press.
- [26] Cardoso, R. P. R., & Yoon, J. W. (2009). Stress integration method for a nonlinear kinematic/isotropic hardening model and its characterization based on polycrystal plasticity. *International Journal of Plasticity*, 25(9), 1684-1710.
- [27] Barlat, F. (2007). Constitutive Modeling for Metals. In D. Banabic (Ed.), *Advanced Methods in Material Forming* (p. 1-18). Springer.
- [28] Song, Y. Q., Cheng, Y. C., & Liu, Y. (2001). Mechanical definition and standardized measurement of the strain hardening exponent in tensile deformation. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 44(2), 113-122.
- [29] Song, Y. Q., Hai, J. T., & Guan, Z. P. (2001). Mechanical analysis of the strain-hardening exponent under tensile deformation. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 44(6), 647-653.
- [30] Song, Y. Q., Cheng, Y. C., & Wang, X. W. (2001). Experimental measurement and elaborate analysis of strain hardening exponent in tensile deformation. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 44(4), 365-376.
- [31] Hollomon, J. H. (1945). Tensile Deformation. *Metal Technology*, 12(4), 1-22.
- [32] Ludwik, P. (1909). *Elemente der Technologischen Mechanik*. Springer.
- [33] Swift, H. W. (1952). Plastic instability under plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1(1), 1-18.

- [34] Voce, E. (1948). The relationship between stress and strain for homogeneous deformation. *Journal of the Institute of Metals*, 74, 537-562.
- [35] Wagoner, R. H., Lim, H., & Lee, M. G. (2013). Advanced Issues in Springback. *International Journal of Plasticity*, 45, 3-20.
- [36] Thuillier, S., & Manach, P. Y. (2009). Comparison of the work-hardening of metallic sheets using tensile and shear strain paths. *Materials Science and Engineering: A*, 512(1-2), 64-72.
- [37] Phillips, A., & Sierakowski, R. L. (1965). On the concept of the yield surface. *Acta Mechanica*, 1(1), 29-35.
- [38] Banabic, D. (2010). *Sheet metal forming processes: constitutive modelling and numerical simulation*. Springer.
- [39] Karafillis, A. P., & Boyce, M. C. (1993). Tooling design in sheet metal forming using a contour failure criterion. *Journal of Materials Processing Technology*, 36(1), 13-28.
- [40] Hill, R. (1979). Theoretical plasticity of textured aggregates. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 85(1), 179-191.
- [41] Cardoso, R. P. R., & Adetoro, O. B. (2017). [Titre non spécifié]. **International Journal of Mechanical Sciences*, 128-129*, 253-268.
- [42] Brinis, N., Regaiguia, B., Chahaoui, O., & Fares, M. L. (2019). [Titre non spécifié]. *Journal of Solid Mechanics*, 11(3), 425-438.
- [43] Von Mises, R. (1913). Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1913*, 582-592.
- [44] Hill, R. (1948). A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 193(1033), 281-297.
- [45] Barlat, F., Becker, R. C., Hayashida, Y., Maeda, Y., Yanagawa, M., Chung, K., Brem, J. C., Lege, D. J., Matsui, K., Murtha, S. J., & Hattori, S. (1997). Yielding description for solution strengthened aluminium alloys. *International Journal of Plasticity*, 13(4), 385-401.
- [46] Hosford, W. F. (1979). On yield loci of anisotropic cubic metals. Dans *Proceedings of the Seventh North American Metalworking Conference* (p. 191-197). Society of Manufacturing Engineers.
- [47] Barlat, F., & Lian, J. (1989). Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. *International Journal of Plasticity*, 5(1), 51-66.
- [48] Barlat, F. (1987). [Titre non spécifié]. *Materials Science and Engineering*, 91, 55-72.
- [49] Banabic, D., Balan, T., & Comsa, D. S. (2000). *A new yield criterion for orthotropic sheet metals under plane-stress conditions* [Communication]. 7th Conference 'TPR2000', Cluj Napoca, Romania.
- [50] Gotoh, M. (1977). A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order (plane stress state). *International Journal of Mechanical Sciences*, 19(9), 505-512.

- [51] Aretz, H. (2005). A non-quadratic plane stress yield function for orthotropic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*, 168(1), 1-9.
- [52] Logan, R. W., & Hosford, W. F. (1980). Upper-bound anisotropic yield locus calculations assuming pencil glide. *International Journal of Mechanical Sciences*, 22(7), 419-430.
- [53] Banabic, D., Bunge, H. J., Pöhlandt, K., & Tekkaya, A. E. (2000). *Formability of metallic materials*. Springer.
- [54] Barlat, F., Cazacu, O., Zyczkowski, M., Banabic, D., & Yoon, J. W. (2003). Yield surface plasticity and anisotropy. In D. Raabe, L.-Q. Chen, F. Barlat, & F. Roters (Eds.), *Continuum Scale Simulation of Engineering Materials* (p. 145-187). Wiley-VCH.
- [55] Bassani, J. L. (1977). Yield characterization of metals with transversally isotropic plastic properties. *International Journal of Mechanical Sciences*, 19(11), 651-654.
- [56] Banabic, D., Aretz, H., Comsa, D. S., & Paraianu, L. (2005). An improved analytical description of orthotropy in metallic sheets. *International Journal of Plasticity*, 21(3), 493-512.
- [57] Banabic, D., Kuwabara, T., Balan, T., Comsa, D. S., & Julean, D. (2003). Non-quadratic yield criterion for orthotropic sheet metals under plane-stress conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(5), 797-811.
- [58] Spitzig, W. A., & Richmond, O. (1984). The effect of pressure on the flow stress of metals. *Acta Metallurgica*, 32(3), 457-463.
- [59] Lee, E. H., Stoughton, T. B., & Yoon, J. W. (2017). A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals. *International Journal of Plasticity*, 99, 120-143.
- [60] Stoughton, T. B., & Yoon, J. W. (2008). Anisotropic hardening and non-associated flow in proportional loading of sheet metals. *International Journal of Plasticity*, 24(2), 583-616.
- [61] Langford, W. F., Snyder, S. C., & Bausch, J. (1950). New criteria for predicting the press performance of deep drawing steels. *Transactions of the American Society for Metals*, 42, 1197-1232.
- [62] Tabor, D. (1948). A Simple Theory of Static and Dynamic Hardness. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 192(1029), 247-274.
- [63] Tabor, D. (1951). *The Hardness of Metals*. Oxford University Press.
- [64] Zhang, P., Li, S. X., & Zhang, Z. F. (2011). General relationship between strength and hardness. *Materials Science and Engineering: A*, 529, 62-73.
- [65] Ohashi, K., Utsunomiya, H., & Matsumoto, R. (2011). Evaluation of r-value of steels using Vickers hardness test. *Journal of Physics: Conference Series*, 268, Article 012012.
- [66] Banabic, D., Aretz, H., Paraianu, L., & Jurco, P. (2005). Application of various FLD modelling approaches. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 13(5), 759-769.

- [67] Comsa, D.-S., & Banabic, D. (2008). Plane-Stress Yield Criterion for Highly-Anisotropic Sheet Metals. Dans *Proceedings of the 7th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes (NUMISHEET 2008)*.
- [68] Levenberg, K. (1944). A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(2), 164-168.
- [69] Marquardt, D. W. (1963). An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2), 431-441.
- [70] Hockett, J. E., & Sherby, O. D. (1975). Large strain deformation of polycrystalline metals at low homologous temperatures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23(2), 87-98.