



Université Abbes LAGHROUR Khenchela
Faculté des Sciences & Technologie
Département de mathématique &
Informatique



Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Spécialité: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées

Méthodes De Points Intérieurs Pour La Programmation Linéaire

Réalisé par :

BOUAKAL Sara

MESSAID Habiba

Dirigé par: *Dr. GUEMMAZ Abderrahim*

Membres de jury :

BENHADID Ayache

TBESSI Fouzi

Présenté le : *30/05/2018*

Remerciement

Le grand merci revient à Dieu pour nous avoir donné la santé, et la patience et le courage pour achever ce modeste travail.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur:

Guemmaz Abderrahim

qui à accepté en tout modestie de nous encadrer avec amabilité, patience et surtout avec compréhension qu'elle trouve ici l'expression de notre sincère et profonde connaissance et aussi pour sa pédagogie attentive et pour toutes les discussions instructives et fructueuses qui nous avons eues durant cette recherche

mes remerciements s'adressent également aux membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'examiner ce travail

A tous les enseignants qui nous ont enseignés pendant notre cursus universitaire

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et tous ceux que j'ai connus au département de mathématique

qui ont rendu mes jours au département agréable.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à

*Ma chéri mère qui représente pour moi m'exemple du
sacrificie, et de l'honnêteté qu'elle travée ici l'expression
de mon ethnique affection.*

*A mon chéri père qui a beaucoup souffrait pour me
lever.*

*Et spécialement à le personne qui est la plus belle
chose dans ma vie mon fiancé: Ayoub.*

A mes chérie frères : Yazid , Salah , Aymen .

A ma chérie sœur : Hayet.

A mon binôme : Sara.

A tout ma famille et mes amis.

M-Habiba

Dédicace

*Je dédie ce modeste travail avec un titre très spécial
à mon chère père Ahmed et ma chère mère Hadda.*

A mon frère Riad.

et toutes mes sœurs: Hadjer et Ikram.

A le personne qui est la plus belle chose dans ma vie.

*A tout ma famille, spécialement a mon chère oncle
Balkasem et sa femme.*

A mon binôme Habiba.

A tout mes amis.

*Enfin je le dédie à tous ceux que je connais et qui me
connaissent de prête ou de loin.*

B-Sara

Résumé

Le but de ce mémoire est de proposer une méthode de points intérieurs de chemin centrale de type primal-dual pour résoudre les problèmes de la programmation linéaire (PL). Cette méthode est basée sur les fonctions barrières, la fonction barrière logarithmique sera largement étudiée, les itérations générées par les méthodes basées sur cette fonction sont strictement réalisables, les méthodes de points intérieurs, ou méthodes barrières, connaissent un grand succès depuis l'introduction de l'algorithme de méthode de suivi de chemin central.

Abstract

The purpose of this memory is to propose The interior point methods to the primal-dual central path to solve the problems of linear programming (PL), this method is based on the barrier function, this logarithmic barrier function will be widely studied, iterations resulting from methods that are based on this function are strictly feasible, The interior point methods or barrier methods know a great success since the introduction of the algorithm monitoring of central path methods.

Table des matières

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Notations et terminologie | 3 |
| Introduction | 4 |
| 1 Rappel de quelques notions préliminaires | 6 |
| 1.1 Définitions | 6 |
| 1.2 Minimisation sans contrainte | 8 |
| 1.2.1 Condition d'optimalité | 8 |
| 1.3 Minimisation avec contrainte | 10 |
| 1.4 Théorème de Karush-Kuhn-Tucker (k.k.t) | 11 |
| 1.5 Programmation linéaire | 12 |
| 1.5.1 Dualité en programmation linéaire | 13 |
| 1.5.2 Condition d'optimalité et complémentarité | 14 |
| 2 Méthodes de points intérieurs pour la programmation linéaire basées sur les fonctions barrières | 16 |
| 2.1 Généralités sur les méthodes de points intérieurs | 16 |
| 2.1.1 La fonction barrière | 17 |
| 2.2 Méthode barrière | 17 |
| 2.2.1 Problème primal | 17 |
| 2.2.2 Problème barrière | 18 |

Table des matières

| | | |
|----------|-----------------------------------------------|-----------|
| 2.2.3 | Problème dual | 18 |
| 2.3 | Le chemin central | 20 |
| 2.3.1 | Chemin central primal | 20 |
| 2.3.2 | Chemin central primal-dual | 21 |
| 2.4 | Déplacement de Newton | 22 |
| 2.4.1 | Méthode de Newton | 22 |
| 2.4.2 | Méthodes de suivi de chemin central | 25 |
| 3 | Algorithmes | 30 |
| 3.1 | Algorithme à pas court | 31 |
| 3.2 | Algorithme à pas long | 32 |
| 4 | Application | 34 |
| | conclusion | 40 |
| | Bibliographie | 41 |

Notations et terminologie

| | |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| \mathbb{R}^n | :L'ensemble des vecteurs avec n composantes réelles. |
| $\nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$ | :La dérivée première de la fonction f par rapport à x. |
| $\nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ | :La dérivée seconde de la fonction f par rapport à x. |
| (PP) | :Problème primal. |
| (PL) | :Problème linéaire. |
| $\mathcal{F}_{(P)}$ | $=\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \quad x \geq 0\}$ |
| $\mathcal{F}_{(P)}^0$ | $=\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \quad x > 0\}$ |
| $\mathcal{F}_{(D)}$ | $=\{(y, z) \in \mathbb{R}^{m+n} : A^t y + z = c \quad z \geq 0\}$ |
| $\mathcal{F}_{(D)}^0$ | $=\{(y, z) \in \mathbb{R}^{m+n} : A^t y + z = c \quad z > 0\}$ |
| x^T | :Transposé du vecteur x de \mathbb{R}^n . |
| A_i | :Matrice de i ^{ème} colonne. |
| X_{adm} | $=\{x \in \mathbb{R}^n : x \in X, h_j(x) = 0, g_i(x) \leq 0\}$. |
| X_{int} | $=\{x \in \mathbb{R}^n : x \in X, h_j(x) = 0, g_i(x) < 0\}$. |
| X_{int}^D | $=\{(y, s) : yA^T + s = c, s > 0\}$. |
| C | $=\{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) / F_\mu(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) = 0, x(\mu), s(\mu) > 0\}$. |
| B | :La fonction Barrière logarithmique. |
| (PD) | :Problème dual. |
| (PB _μ) | :Problème Barrière. |
| X | $=\text{diag}(x)$. |
| S | $=\text{diag}(s)$. |
| x^{-1} | $=\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)^T$. |
| e | $=(1, 1, 1, \dots, 1)^T$. |

Introduction

La programmation linéaire est certainement l'un des plus beaux succès de la recherche opérationnelle. Il provient, d'une part, de la puissance de modélisation qu'elle offre et ce malgré la limite inhérente qu'impose la linéarité des fonctions impliquées, et d'autre part, de la richesse de la théorie qu'elle a initiée et qui a permis le développement d'algorithmes extrêmement efficaces pour sa résolution. Depuis sa formulation et le développement de la méthode du simplexe pour sa résolution vers la fin des années 40, la programmation linéaire demeure le modèle d'optimisation le plus utilisé par les décideurs ce qui est certainement dû à la robustesse des algorithmes disponibles.

Les méthodes de points intérieurs jouent actuellement un rôle très important dans la résolution des problèmes de grande taille en programmation linéaire. La méthode de points intérieurs itérée sur des points strictement intérieurs et converge à la limite vers une solution du problème, elle consiste à remplacer la résolution du problème d'optimisation linéaire initial par celle d'un système non linéaire d'équations exprimant les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker. Ceci implique l'utilisation de la méthode de Newton pour la résolution de ce système d'équations non linéaires.

D'abord l'impact considérable qu'ont eu ces méthodes sur la communauté scientifique de la programmation mathématique, du à leurs bonnes propriétés théoriques et algorithmiques, se devait d'être compris. Puis le potentiel de certains concepts de ces méthodes pour deux domaines actifs de recherche, les méthodes de décomposition de problème de grande taille et l'optimisation globale, était à considérer.

Enfin, de par leur nature, le comportement des méthodes du simplexe et des méthodes du point intérieur divergent lorsque qu'une face complète du domaine admissible est optimale. Les méthodes du point intérieur convergent vers un point situé à l'intérieur de la face tandis que l'algorithme du simplexe aboutit sur l'un de ses sommets.

Den Hertog (1994) a classé les méthodes de points intérieurs en quatre catégories :

- ▷ Méthodes projectives avec potentiel.
- ▷ Méthodes affines et mise à l'échelle.

- ▷ Méthodes de chemin central
- ▷ Méthodes affines avec potentiel.

Ce mémoire présente la méthode de point intérieur dans quatre chapitre :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, on présente quelques notations et rappelle les principales propriétés de la programmation mathématique et ainsi sur les conditions d'optimalité.

Chapitre 2 : commencer ce chapitre par Généralisation sur la méthode de points intérieurs, puis la définition de la fonction barrière, Nous définissons la notion de chemin central qui est fondamentale à l'analyse de complexité des méthodes de points intérieurs, notamment la méthode de suivi de chemin central. et nous faisons ensuite un bref survol sur la méthode de Newton comme une procédure itérative.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre présente un algorithme de suivi de chemin central on choisi deux algorithmes (algorithme à pas court et algorithme à pas long), Les deux algorithmes sont basés sur l'itération de Newton.

Chapitre 4 : nous terminons ce mémoire par une courte application qui explique la méthode de point intérieur.

Chapitre 1

Rappel de quelques notions préliminaires

1.1 Définitions

Définition 1.1 *Le gradient de f en x est $g(x) = \nabla f(x)$ tel que $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si toutes les dérivées partielles existent*

$$g(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right)_{i=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Définition 1.2 *La dérivée directionnelle de f en x dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$ est :*

$$f_d(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + sd) - f(x)}{s},$$

si la limite existe

Définition 1.3 *Le hessien de f en x est $H(x) = \nabla^2 f(x)$ tel que*
 $H(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.1 1) *Fonction d'une seule variable*

$$f(x) = -x^2 + 4x$$

$$g(x) = \nabla f(x) = -2x + 4$$

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = -2$$

2) *Fonction de deux variables*

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^3$$

$$g(x) = \nabla f(x) = (2x + y, x + 3y^2)$$

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$$

Définition 1.4 $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction de descente en x si :

$$f_d(x) = g(x)^T < 0$$

$d \in \mathbb{R}^n$ direction de déplacement à partir de $x \in X_{adm}$ point admissible

d est une direction admissible si est seulement si :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall s \in]0, \varepsilon] \implies x + sd \in X_{adm}$$

Définition 1.5 A une matrice de dimension $n \times n$ est dite :

▷ *Semi définie positive* si : $y^T A y \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$.

▷ *définie positive* si : $y^T A y > 0, \forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

▷ *Semi définie négative* si : $y^T A y \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$.

▷ *définie négative* si : $y^T A y < 0, \forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.6 Soit $x^* \in S$, on dit que x^* est un minimum local s'il existe $r > 0$ tel que :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in B_r(x^*), \quad B_r(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < r\}.$$

1.2 Minimisation sans contrainte

Le problème de minimisation sans contrainte est formulé de façon suivante :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

1.2.1 Condition d'optimalité

Condition nécessaire du 1^{er} ordre

Soit x^* un minimum local pour le problème : $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. On a alors :

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Un point x satisfaisant cette condition est appelé un point stationnaire.

Preuve Soit x^* point de minimum local

soit $h \in \mathbb{R}^n$

Il suffit montrer que :

$$x = x^* + th \implies x^* + th \in B_r(x^*)$$

Soit

$$x^* + th \in B_r(x^*) \implies \|x^* + th - x^*\| < r$$

$$\implies t\|h\| < r$$

$$\implies t < \frac{r}{\|h\|}$$

Pour $t \in]0, \frac{r}{\|h\|}[$ alors $x^* + th \in B_r(x^*)$,

$$\text{donc } f(x^*) \leq f(x^* + th) \implies f(x^* + th) - f(x^*) \geq 0$$

On divise sur t , on trouve : $\frac{f(x^* + th) - f(x^*)}{t} \geq 0$

Passant à la limite pour t tend vers 0 :

On trouve : $\langle \nabla f(x^*), h \rangle \geq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$

Posons $h = -h$, on obtient :

$\langle \nabla f(x^*), -h \rangle \geq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Alors $\langle \nabla f(x^*), h \rangle \leq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Donc $\langle \nabla f(x^*), h \rangle = 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Alors :

$$\nabla f(x^*) = 0$$

■

Au deuxième ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\leq f(x^* + ty) \\ &= f(x^*) + t \nabla f(x^*) y + \frac{t^2}{2} y^T \nabla^2 f(x^*) y + o(t^2) \end{aligned}$$

Avec $o(t^2)$ dénotant une fonction qui est petit ordre de t^2 c'est-à-dire :

$$\lim \frac{o(t^2)}{t^2} = 0$$

Comme x^* est un minimum local, on a :

$$0 \leq \frac{t^2}{2} y^T \nabla^2 f(x^*) y + o(t^2)$$

En divisant par t^2 , en prenant la limite et par continuité du hessien, on obtient :

Condition nécessaire du 2^{ème} ordre

Soit x^* un minimum local pour la fonction f sur \mathbb{R}^n , on a alors :

$$\nabla f(x^*) = 0 \text{ et } y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

La matrice hessienne au point x^* est donc semi-définie positive.

Conditions suffisantes du 2^{ème} ordre

Soit x^* un point de \mathbb{R}^n tel que :

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) &= 0. \\ y^T \nabla^2 f(x^*) y &> 0, \forall y \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

La matrice hessienne définie positive

Alors x^* est un minimum local (strict) de f sur \mathbb{R}^n .

1.3 Minimisation avec contrainte

Soit le programme mathématique non linéaire (PM) :

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{s.c.} : & \begin{cases} g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k & \dots\dots(1). \\ h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, m \end{cases}\end{aligned}$$

Où les fonctions f, g_i, h_j sont au moins deux fois continument différentiables.

Définition 1.7 L'ensemble : $S = \{x : g_i(x) \leq 0; h_j(x) = 0\}$ est appelé l'ensemble des solutions réalisables.

Définition 1.8 Le lagrangien du programme mathématique (1) est défini par :

$$L(x, \lambda, u) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(x) + \sum_{i=1}^k \mu_i g_i(x).$$

Définition 1.9 On dit qu'un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant les contraintes $h_j(x) = 0$ est un point régulier si : les vecteur $\nabla h_1, \nabla h_2, \dots$ soient linéairement indépendants.

1.4 Théorème de Karush-Kuhn-Tucker (k.k.t)

Soit x^* un minimum local régulier de (1) Alors, il existe les multiplicateurs $\lambda^* \in \mathbb{R}$ et $\mu^* \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) + \sum_{i=1}^k \mu_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$\begin{cases} \mu_i^* \geq 0 \\ \mu_i^* g_i(x^*) = 0 \\ g_i(x^*) \leq 0 \\ h_j(x^*) = 0 \end{cases}$$

Les conditions nécessaires du premier ordre (KKT) sont souvent appelées les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (ou Kuhn-Tucker). Dans le cas convexe (c'est-à-dire lorsque $f(x)$ et $g_i(x)$ sont des fonctions convexes et $h_j(x)$ des fonctions affines), un point x^* régulier est un minimum global pour le programme (1) si et seulement si il satisfait les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

Les conditions du deuxième ordre utilisent les notations suivantes :

$$I(x) = \{i = 1, 2, \dots, k : g_i(x) = 0\}.$$

$$I'(x) = \{i = 1, 2, \dots, k : g_i(x) = 0, \mu_i > 0\}.$$

$$T(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x)y \leq 0, i \in I(x) \text{ et } \nabla h_j(x)y = 0, j = 1, 2, \dots, m\}.$$

$$T'(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x)y \leq 0, i \in I'(x) \text{ et } \nabla h_j(x)y = 0, j = 1, 2, \dots, m\}.$$

L'ensemble $I(x)$ correspond à l'ensemble des indices des contraintes d'inégalités actives au point x . L'ensemble $I'(x)$ ne contient que les indices des contraintes d'inégalités actives qui vérifient la complémentarité stricte. $T(x)$ est le cône des directions admissibles au point x qui est inclus dans le cône élargi $T'(x)$. Ces ensembles permettent la caractérisation de la matrice hessienne réduite du lagrangien.

Condition nécessaire du 2^{ème} ordre

Soit x^* un minimum local régulier de (1). Alors, il existe des multiplicateurs $\lambda^* \in \mathbb{R}$ et $\mu^* \in \mathbb{R}$ tels que :

- Les conditions de KKT sont satisfaites.
- $y^T \nabla^2 L(x^*, \lambda^*, u^*) y \geq 0 \quad \forall y \in T(x^*)$.

Conditions suffisantes du 2^{ème} ordre

Soit x^* est un minimum local strict de (1), s'il existe des multiplicateurs $\lambda^* \in \mathbb{R}$ et $\mu^* \in \mathbb{R}$ tels que :

- Les conditions de KKT sont satisfaites.
- $-y^T \nabla^2 L(x^*, \lambda^*, u^*) y > 0, \forall y \in T'(x^*)$.

1.5 Programmation linéaire

On appelle un programme linéaire tout programme mathématique, où la fonction objectif est linéaire et l'ensemble des contraintes est affine.

il existe trois formes pour écrire un programme linéaire qui sont :

La forme canonique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x c^t x \quad 0 \neq c \in \mathbb{R}^n \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Tel que :

A matrice de dimension $(m \times n)$, $b \in \mathbb{R}^m$

La forme standard :

$$\{\min_x c^t x, Ax = b \quad x \geq 0\}$$

La forme général :

$$\{\min_x c^t x, Ax \leq b \quad Bx \geq b'\}$$

tel que :

B matrice de dimension $(p \times n)$, $b' \in \mathbb{R}^p$

On considère le programme linéaire primal (p) :

$$s.c : \begin{cases} \min_x c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La matrice A est de dimension $m \times n$ avec $m \leq n$, $b \in \mathbb{R}^m$, et $c \in \mathbb{R}^n$.

L'ensemble des solutions réalisables :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

1.5.1 Dualité en programmation linéaire

on considère un programme linéaire sous la forme standard suivant :

$$(P) \begin{cases} \min_x c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Où A est une matrice de type $(m \times n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$

n'importe quel programme linéaire ramène facilement à cette forme le dual de (P) est défini par :

$$(D) \begin{cases} \max_{(y,z)} b^t y \\ A^t y + s = c \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Où $y \in \mathbb{R}^m$, $s \in \mathbb{R}^n$

on notera par la suite

$$\mathcal{F}_{(P)} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \quad x \geq 0\}$$

$$\mathcal{F}_{(P)}^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \quad x > 0\}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{(D)} &= \{(y, s) \in \mathbb{R}^{m+n} : A^t y + s = c \quad s \geq 0\} \\ \mathcal{F}_{(D)}^0 &= \{(y, s) \in \mathbb{R}^{m+n} : A^t y + s = c \quad s > 0\}\end{aligned}$$

les ensembles des solutions réalisables et strictement réalisables des deux problèmes de (P) et (D), respectivement

Théorème 1.1 (Dualité faible)

(P) programme linéaire et (D) le dual de (P) alors

$$c^t x \geq b^t y$$

$\forall x$ réalisable de (P), $\forall y$ réalisable de (D)

Théorème 1.2 (Dualité forte)

si $x \in \mathcal{F}_{(P)}$ et $(y, s) \in \mathcal{F}_{(D)}$ tel que

$$c^t x = b^t y$$

alors x et (y, s) sont des solutions optimales de (P) et (D) respectivement

Théorème 1.3 (théorème des écarts complémentaires)

soient x et y deux solutions réalisables primale et duale respectivement posent :

$$s = c - A^t y$$

vecteur des variables d'écart associé à y , alors x et (y, z) sont optimales si $x_i s_i = 0, \quad \forall i=1, \dots, n$

1.5.2 Condition d'optimalité et complémentarité

A partir des résultats précédents, on obtient immédiatement les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

Supposons le programme primal (P) réalisable et son dual (D) réalisable. On a :

Le point x est optimal pour le programme primal si et seulement si il existe y et s tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{lll} Ax & = b & \dots \quad (2) \\ A^T y + s & = c & \dots \quad (3) \\ x_i s_i & = 0, i = 1 \dots n & \dots \quad (4) \\ x, s & \geq 0 & \dots \quad (5) \end{array} \right.$$

Ces conditions correspondent aux conditions d'optimalité du premier ordre de Karush-Kuhn-Tucker (les conditions de régularité sont toujours satisfaites).

La contrainte (4) met en évidence le caractère complémentaire des solutions optimale du primal et du dual. On dit que la complémentarité est stricte si :

$$x_i s_i > 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Chapitre 2

Méthodes de points intérieurs pour la programmation linéaire basées sur les fonctions barrières

2.1 Généralités sur les méthodes de points intérieurs

Ces méthodes ont été développées dans les années 60 dans le but de résoudre des programmes mathématiques non linéaires. Leur utilisation pour la programmation linéaire n'a pas reçu autant d'enthousiasme à cause de la dominance quasi totale de la méthode du simplexe à cette époque. Après l'apparition de l'algorithme de Karmarkar en 1984 pour la programmation linéaire, les méthodes de points intérieurs ont connu une véritable révolution, on enregistre plus de 3000 publications en quelques années. On distingue trois classes fondamentales de méthodes de points intérieurs à savoir : les méthodes affines, les méthodes de réduction du potentiel, les méthodes de trajectoire centrale (suivi du chemin).

Les méthodes de trajectoire centrale (suivi du chemin) : Elles ont été introduites à la même époque que les méthodes de réduction du potentiel et pleinement développées au début des années 90. Elles possèdent de bonnes propriétés théoriques : une complexité polynômiale et une convergence super linéaire. Les algorithmes de trajectoire centrale restreignent les itérés à un voisinage de la trajectoire centrale, ce dernier est une courbe de points strictement réalisables.

2.1.1 La fonction barrière

Définition 2.1 une fonction barrière $B : X_{int} \rightarrow \mathbb{R}$ est simplement une fonction différentiable telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} B(x) = +\infty$

Fonctions barrières usuelles

Barrières logarithmique : $B(x) = -\sum_{i=1}^m \ln(x_i)$

Barrières inverse : $B(x) = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i}$

2.2 Méthode barrière

La méthode barrière consiste à combiner la fonction cout avec une fonction barrière.

La fonction barrière est pénalisée par un paramètre $\mu > 0 \rightarrow$ hauteur de la barrière.

▷ Problème avec contraintes inégalités : $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ sous $\begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \\ x \in X \end{cases} \rightarrow$ solution x^*

▷ Problème barrière associé : $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_\mu(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \mu B(x)$ sous $\begin{cases} h(x) = 0 \\ x \in X \end{cases} \rightarrow$ solution $x(\mu)$

Problème avec contraintes égalité plus simple (contraintes actives).

Pour $\mu = 0$, on retrouve le problème initial.

2.2.1 Problème primal

La forme standard du problème linéaire :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

$$s.c \begin{cases} Ax = b & \dots (PL) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Avec $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

- Ensemble des point admissibles : $X_{adm} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ =polytope des contraintes.
- Ensemble des point intérieurs : $X_{int} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x > 0\}$

2.2.2 Problème barrière

- Barrière logarithmique : $B(x) = -\sum_{i=1}^n \ln(x_i)$
- Problème barrière associé : $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_\mu(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$ sous $\begin{cases} Ax = b \\ x > 0 \end{cases}$

Solution

- $\mu > 0$ \longrightarrow solution x_μ .
- $\mu = 0$ \longrightarrow solution x^* du problème initial.
- $\mu \longrightarrow \infty$ \longrightarrow solution x_∞ = centre analytique du polytope P.

2.2.3 Problème dual

On définit le problème dual suivant :

$$\begin{aligned} & \max y^T b \\ & s.c \begin{cases} y^T A + s^T = c^T & \dots\dots (PD) \\ s \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Soit le problème barrière associé au problème dual :

$$\begin{cases} \max y^T b - \mu \sum_{j=1}^n \ln s_j \\ y^T A + s^T = c^T \\ s \geq 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions optimales du dual est borné :

$$X_{int}^D = \{(y, s) : yA^T + s = c, s > 0\} \neq \phi$$

Le Lagrangien est :

$$L(y, s) = y^T b - \mu \sum_{j=1}^n \ln s_j + \lambda (y^T A + s^T - c^T)$$

On obtient les conditions d'optimalité :

$$\begin{cases} s_\mu \lambda_\mu = \mu e \\ A \lambda_\mu = b \\ A^T y_\mu + s_\mu = c \end{cases}$$

Le centre analitique

Est le point qui est solution du programme :

$$\min B(x)$$

Le centre analytique est en fait le point de départ du chemin central.

Remarque 2.1 *Le centre analitique n'est pas une notion géométrique ,elle dépend des inéquations utilisées pour décrire le domaine des solutions. Le rajout d'une contrainte redondante change ce centre.*

Exemple 2.1 *Problème linéaire*

$$\text{Forme standard : } \begin{cases} \min_{x_1, x_2, x_3} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Polytope des contraintes : $P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n / x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

Problème barrière

$$\text{Barrière logarithmique : } \min_{x_1, x_2, x_3} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \mu (\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3) \text{ sous } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Centre analitique } x_\infty : \min_{x_1, x_2, x_3} B(x_1, x_2, x_3) = -(\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3) \text{ sous } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 \longrightarrow \min_{x_1, x_2} B(x_1, x_2) = -(\ln x_1 + \ln x_2 + \ln(1 - x_1 - x_2))$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1} + \frac{1}{1-x_1-x_2} = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} = -\frac{1}{x_2} + \frac{1}{1-x_1-x_2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \implies x_3 = \frac{1}{3} \longrightarrow x_\infty = \left(\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}\right)$$

2.3 Le chemin central

Les méthodes de point intérieur sont basées sur l'utilisation d'une fonction barrière bien spécifique, appelée barrière logarithmique :

$$B(x) = -\sum_{i=1}^m \ln(x_i)$$

2.3.1 Chemin central primal

Le chemin central primal est l'ensemble des solutions x_μ lorsque la hauteur de barrière μ décroît de l'infini à 0 $\rightarrow \{x_\mu, \mu \geq 0\}$

- **Début** : x_∞ = centre analytique du polytope.
- **Fin** : x^* = solution du problème linéaire.

Pour construire précisément le chemin central, il faudrait résoudre l'ensemble des problèmes successifs (PB $_\mu$) sous contraintes égalité pour $\mu \geq 0$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_\mu(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \text{ sous } \begin{cases} Ax = b \\ x > 0 \end{cases}$$

- Lagrangien :

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, s) &= f_\mu(x) + \lambda^T (b - Ax) - s^T x \\ &= c^T x - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \lambda^T (b - Ax) - s^T x \end{aligned}$$

► Condition d'ordre 1 : $\nabla_x L(x, \lambda, s) = 0 \implies c - \mu X^{-1} - A^T \lambda - s = 0$

► Condition complémentaire : $s_i x_i = 0 \implies X S e = 0$

$$\text{On définit : } \begin{cases} s_\mu = s + \mu X^{-1} \\ S_\mu = S + \mu X^{-1} \end{cases} \implies \begin{cases} A^T \lambda + s_\mu - c = 0 \\ X S_\mu e = \mu e \end{cases}$$

- Les conditions d'optimalités de KKT sont :

$$\begin{cases} c^T - \lambda^T A - \mu x^{-1} e = 0 \\ Ax = b \end{cases}$$

En introduisant : $s = \mu x^{-1} e$ et on aura :

$$xs = \mu e$$

$$\begin{cases} A^T \lambda + s = c \\ Ax = b \end{cases}$$

· Comprison des condition d'ordre 1 du problème barrière (PB_μ) et du problème initial (PL) :

| <i>Problème barrière (PB_μ)</i> | <i>Problème linéaire (PL)</i> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} Ax_\mu - b = 0 \\ A^T \lambda_\mu + s_\mu - c = 0 \\ X_\mu S_\mu = \mu e \longrightarrow (x_\mu, \lambda_\mu, s_\mu) \\ x_\mu \geq 0 \\ s_\mu \geq 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} Ax - b = 0 \\ A^T \lambda + s - c = 0 \\ XS = 0 \longrightarrow (x^*, \lambda^*, s^*) \\ x \geq 0 \\ s \geq 0 \end{cases}$ |

2.3.2 Chemin central primal-dual

Définition 2.2 *Le chemin central est une courbe située dans*

$$X_{int} = X_{int}^P \times X_{int}^D = \{(x, y, s) : yA^T + s = c, Ax = b, s > 0, x > 0\}$$

Paramétrée par un scalaire $\mu > 0$. c'est donc l'image d'une application

$$\mu \in]0, +\infty] \longrightarrow (x(\mu), y(\mu), s(\mu)) \in X_{int}$$

· Les condition d'optimalité du problème barrière (PB_μ) deviennent celles du problème initial (PL) lorsque μ tend vers 0.

· On cherche à résoudre le problème linéaire en considérant l'ensemble des variables primales et duales (x, λ, s) dans \mathbb{R}^{n+m+n}

· Ensemble des points intérieurs :

$$X_{int} = \{(x, \lambda, s) / Ax - b = 0, A^T \lambda + s - c = 0, x \geq 0, s > 0\}$$

· $(x_0, \lambda_0, s_0) = (x^*, \lambda^*, s^*) \longrightarrow$ solution du problème linéaire.

2.4 Déplacement de Newton

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} A^T y + s = c \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ s = \mu x^{-1} e \end{cases}$$

Prendre une solution approchée (x^k, y^k, s^k) pour $\mu = \mu_k$ donné telle que :

$$\begin{cases} A^T y^k + s^k = c \\ Ax^k = b \\ x^k, s^k > 0 \end{cases}$$

Utiliser cette solution comme point de départ pour générer une nouvelle solution approchée $(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1})$ par la méthode de Newton .

2.4.1 Méthode de Newton

Les méthodes de points intérieurs consistent à remplacer la résolution des problèmes d'optimisation (PP) et (PD) par celle du système d'équations non linéaires.

La méthode de Newton est une procédure itérative qui a pour objectif de trouver un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x) = 0$. Pour chaque itéré x^k , la méthode calcule une approximation du premier

ordre de F autour de x^k et définit l'itéré suivant x^{k+1} comme le zéro de cette approximation.

pour $F(x) = 0$ où $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ et $f_i(x)$ sont différentiables sur $D \subset \mathbb{R}^m$.

L'expression de Taylor de $f_i(x)$ en x^k :

$$f_i(x) = f_i(x^k) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} \Delta x_j^k$$

où

$$\begin{aligned} \Delta x_j^k &= x_j^{k+1} - x_j^k, \quad j = 1, \dots, m \\ F(x) = 0 &\implies \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} \Delta x_j^k = -f_i(x^k) \end{aligned}$$

$F'(x^k)$ est la matrice Jacobienne de $F(x)$:

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\boxed{F'(x^k) \Delta x^k = -F(x^k)}$$

Et $\Delta x^k = (\Delta x_1^k, \Delta x_2^k, \dots, \Delta x_n^k)^T$

Pour minimiser $L(x)$ nous posons : $F(x) = L'(x)$

Appliquons la méthode de Newton pour résoudre :

$$F(x) = 0 \iff L'(x) = \frac{\partial L(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

L'itération de Newton nous donne :

$$\nabla^2 L(x^k) \Delta x^k = -\nabla L(x^k)$$

telle que : Δx^k le pas de Newton, $\nabla^2(x^k)$ la matrice Hessienne de L .

On va donc finalement appliquer la méthode de Newton au système non linéaire par KKT :

$$\begin{cases} A^T y + s = c \\ Ax = b \\ XSe = \mu e \dots (*) \\ x > 0, s > 0 \end{cases}$$

Telle que : (*) est non linéaire

On a :

$$F_\mu(x, y, s) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ yA^T + s - c \\ xSe - \mu e \end{bmatrix} = 0, x > 0, s > 0$$

Soit $C = \{(x(\mu), y(\mu), S(\mu)) / F_\mu(x(\mu), y(\mu), S(\mu)) = 0, x(\mu), S(\mu) > 0\}$ connu par chemin central.

Donc l'itération de Newton est donnée :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ s & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu e - xse \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A\Delta x = 0 & \dots(6) \\ A^T \Delta y + \Delta s = 0 & \dots(7) \\ s\Delta x + x\Delta s = \mu e - xse & \dots(8) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A\Delta x = 0 \\ \Delta s = -A^T \Delta y \\ s\Delta x + x\Delta s = \mu e - xse \end{cases}$$

On substituant dans (8) on obtient : $s\Delta x - xA^T \Delta y = \mu e - xse$

Multiplions par As^{-1} on obtient :

$$\begin{aligned} As^{-1}s\Delta x - As^{-1}xA^T \Delta y &= (\mu e - xse)As^{-1} \\ \iff A\Delta x - As^{-1}xA^T \Delta y &= As^{-1}(\mu e - xse) \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned}\Delta y &= -(As^{-1}xA^T)^{-1}As^{-1}(\mu e - xse) \\ \Delta s &= A^T(As^{-1}xA^T)^{-1}As^{-1}(\mu e - xse) \\ \Delta x &= s^{-1}(\mu e - xse) - s^{-1}x\Delta s\end{aligned}$$

On utilise la solution de Newton comme direction de recherche.

$$\begin{pmatrix} x_\mu \\ \lambda_\mu \\ s_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ s \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{pmatrix}, 0 \leq \alpha \leq 1$$

La convergence :

Pour que l'algorithme converge vers la solution du problème linéaire (PL), il faut :

- Régler le pas α pour ne pas s'approcher trop rapidement du bord de l'ensemble admissible.
- Abaisser progressivement la hauteur de la barrière μ jusqu'à 0.

La solution du problème linéaire PL est obtenue lorsque $XS = 0 \iff x_i s_i = 0, i = 0, \dots, n$.

2.4.2 Méthodes de suivi de chemin central

Les méthodes de suivi de chemin sont articulées autour du chemin central et se caractérisent par un choix du paramètre μ différent de zéro. Leur principe revient à définir un certain voisinage autour du chemin central, et à faire évoluer les itérés à l'intérieur de ce voisinage tout en progressant vers la solution. On peut se demander comment ces algorithmes choisissent les valeurs de μ . Chaque choix de μ revient à choisir cette cible en fonction de la position actuelle de l'itéré suivant par rapport au chemin central. En général, l'itéré courant ne sera pas sur le chemin central, mais dans son voisinage.

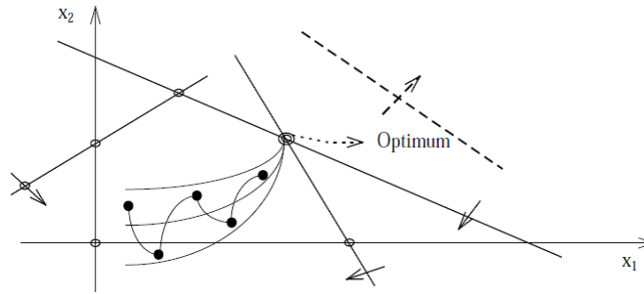


Figure 01 : Quelques itérés d'une méthode de suivi de chemin central

La caractéristique des points du chemin central, outre leur admissibilité, étant l'égalité des produits $x_i s_i$ (on a : $x_i s_i = \mu$ pour le point repéré par μ), définissons la mesure de dualité suivante,

Mesures du saut de dualité et du centrage

Le contrôle des itérés dans les algorithmes de points intérieurs se fait par plusieurs “mesures” : mesure du saut de dualité, mesure centrage et mesure de l'admissibilité. Si on veut se donner une cible sur le chemin central primal-dual ζ , il est nécessaire de savoir près de quel point central l'itéré courant z se trouve. Il n'y aurait en effet pas de sens à se donner une cible qui soit plus éloignée de la solution que ne l'est l'itéré courant. Trouver le point central le plus proche de z n'est cependant pas un problème simple, ni d'ailleurs bien posé car, le chemin central n'étant pas un convexe fermé, la projection de z sur ζ n'est en général pas bien définie. Par contre, l'image de ζ par l'application surjective P :

$$P : z = (x, y, s) \in X_{int} \longmapsto (x_1 s_1, x_2 s_2, \dots, x_n s_n) \in \mathbb{R}$$

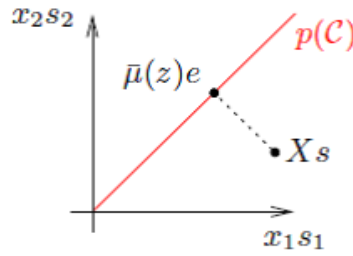


Figure 02 : La demi – droite μe

Est la demi-droite $\{\bar{\mu}e : \bar{\mu} > 0\}$, si bien que la projection dans l'espace d'arrivée de cette application se fait trivialement en résolvant le problème :

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}} \|Xs - \bar{\mu}e\|_2$$

Sa solution est la moyenne arithmétique des produits $x_i s_i$:

$$\bar{\mu} \equiv \bar{\mu}(z) = \frac{X^T S}{n} = \frac{\sum x_i s_i}{n}.$$

On l'appelle la mesure du saut de dualité (ou plus simplement le saut de dualité ; il s'agit alors d'un abus de langage car, il n'y a pas de saut de dualité en la solution d'un problème d'optimisation linéaire). Les algorithmes devront faire tendre $\bar{\mu}(z)$ vers 0.

Pour $z = (x, y, s) \in X_{int} : z \in \zeta \iff Xs = \bar{\mu}(z)e$.

Un point $z \in X_{int}$ est donc proche du chemin central si $\left\| \frac{Xs}{\bar{\mu}(z)} - e \right\|$ est petit devant 1 ou encore si $\|Xs - \bar{\mu}(z)e\|$ est petit devant $\bar{\mu}(z)$.

Le principe des méthodes de suivi de chemin sera donc de calculer la mesure de dualité de l'itéré courant, soit $\bar{\mu}(z)$, et à prendre pour cible un μ inférieur (plus proche de l'optimum) en appliquant un coefficient de proportionnalité (ou paramètre de centrage) σ , selon la formule $\mu = \sigma \bar{\mu}$. Le choix de σ dépend de la méthode considérée.

Alors la hauteur de barrière μ est réglée à partir de la mesure de dualité $\bar{\mu}$.

Et σ est le paramètre de centrage permet de corriger de déplacement.

Mesure de centrage ,Voisinage du chemin central

On appelle mesure du centrage pour la norme ℓ_p , $p \in [1, \infty]$, la quantité : $N_p(z) = \|Xs - \bar{\mu}(z)e\|_p$.

Divers voisinages du chemin central sont associés à ce concept de centrage.

On définit une première famille de voisinages, paramétrés par $p \in [1, \infty]$ et $\theta \in [0, 1[$, par :

$$N_p(\theta) = \left\{ z \in X_{int} : \|Xs - \bar{\mu}(z)e\|_p \leq \theta \bar{\mu}(z) \right\}$$

Les deux versions les plus intéressantes sont celles du voisinage $N_2(\theta)$ et du voisinage $N_\infty(\theta)$ (avec θ et σ compris entre 0 et 1)

Voisinage restreint avec la norme 2, noté $N_2(\theta)$

$$N_2(\theta) = \{z(x, y, s) \in X_{int} : \|Xs - \bar{\mu}(z)e\|_2 \leq \theta \bar{\mu}(z)\}, \quad 0 \leq \theta < 1.$$

Le voisinage $N_2(\theta)$ exprime que la distance euclidienne entre $(x_1s_1, x_2s_2, \dots, x_ns_n)$ et $(\bar{\mu}, \bar{\mu}, \dots, \bar{\mu})$ ne peut excéder un certain pourcentage de $\bar{\mu}$ (où, rappelons-le, $\bar{\mu}$ est la valeur moyenne de ces produits $x_i s_i$)

Voisinage large avec la norme ∞ , noté $N_\infty(\theta)$

$$N_\infty(\theta) = \{z(x, y, s) \in X_{int} : \|Xs - \bar{\mu}(z)e\|_\infty \leq \theta \bar{\mu}(z)\}, \quad 0 \leq \theta < 1.$$

$$\begin{aligned} \|Xs - \bar{\mu}(z)e\|_\infty \leq \theta \bar{\mu}(z) &\Leftrightarrow |x_i s_i - \bar{\mu}(z)| \leq \theta \bar{\mu}(z) \\ &\Leftrightarrow \bar{\mu}(z)(1 - \theta) \leq x_i s_i \leq \bar{\mu}(z)(1 + \theta), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

On se contente de la borne inférieure, qui empêche les produits $x_i s_i$ de converger prématurément vers 0. En remplaçant θ par $(1 - \theta)$.

$$N_\infty(\theta) = \{z(x, y, s) \in X_{int} : x_i s_i \geq \theta \bar{\mu}(z), i = 1, \dots, n\}, \quad \text{avec } 0 \leq \theta < 1.$$

Le voisinage $N_\infty(\theta) = \theta N_\infty$, exprime simplement que chaque produit $x_i s_i$ ne peut être inférieur

à un certain pourcentage de leur valeur moyenne $\bar{\mu}$.

Chapitre 3

Algorithmes

L'algorithme de Barrière logarithmique est méthode de point intérieurs qui, à partir d'un point initial situé près du chemin central, suit approximativement ce dernier jusqu'à la solution optimale, On peut envisager deux algorithmes de suivi du chemin central :

- Algorithme à pas court.
- Algorithme à pas long.

Les deux algorithmes sont basés sur l'itération de Newton.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S_k & 0 & X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_k S_k e - \mu e \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \mu = \sigma \bar{\mu}_k \\ \bar{\mu}_k = \frac{X_k^T S_k}{n} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \\ S_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ S_k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_s \end{pmatrix}, 0 < \alpha \leq 1,$$

$$\text{avec } \begin{pmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \\ S_{k+1} \end{pmatrix} \in N_2(\theta) \text{ ou } N_\infty(\theta).$$

Les différences résident dans la stratégie de réglage du paramètre de centrage σ et du pas α .

3.1 Algorithme à pas court

Le principe de cette méthode consiste à choisir un voisinage $N_2(\theta)$ pour une valeur de θ donnée, et de fixer les paramètres σ et α à deux valeurs constantes :

- On applique systématiquement l'itération de Newton avec $\alpha = 1$.

$$\begin{pmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \\ S_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ S_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_s \end{pmatrix}$$

- On règle le paramètre de centrage σ pour rester dans le voisinage du chemin central $N_2(\theta)$.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S_k & 0 & X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_k S_k e - \sigma \bar{\mu}_k e \end{pmatrix},$$

- Réglages**
- $\theta = 0.4$ largeur du voisinage.
 - $\sigma = 1 - \frac{\theta}{\sqrt{n}}$ garantit que l'itération de Newton reste dans le voisinage $N_2(\theta)$.

Le nouveau point doit rester dans le voisinage $N_2(\theta)$:

$$\begin{pmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \\ S_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ S_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_s \end{pmatrix} \in N_2(\theta).$$

$$\implies \frac{1}{\mu} \|X_{k+1} S_{k+1} e - \bar{\mu}_k e\|_2 \leq \theta \text{ avec } \begin{cases} X_{k+1} = X_k + D_X, D_X = \text{diag}(\Delta_x), \Delta_x = D_X e. \\ S_{k+1} = S_k + D_S, D_S = \text{diag}(\Delta_s), \Delta_s = D_S e. \\ S_k \Delta_x + X_k \Delta_s = -X_k S_k e + \sigma \bar{\mu}_k e \end{cases}$$

$$\implies \frac{1}{\mu} \|(X_k + D_X)(S_k + D_S)e - \bar{\mu}_k e\|_2 \leq \theta.$$

$$\implies \frac{1}{\mu} \|X_k S_k e + X_k \Delta_s + S_k \Delta_x - \bar{\mu}_k e\|_2 \leq \theta. \text{ à l'ordre 1 en } \Delta_x \text{ et } \Delta_s.$$

$$\implies \frac{1}{\mu} \|\sigma \bar{\mu}_k e - \bar{\mu}_k e\|_2 \leq \theta.$$

$$\implies |\sigma - 1| \|e\|_2 \leq \theta \text{ avec } \|e\|_2 = \sqrt{n} \implies \sigma \geq 1 - \frac{\theta}{\sqrt{n}}.$$

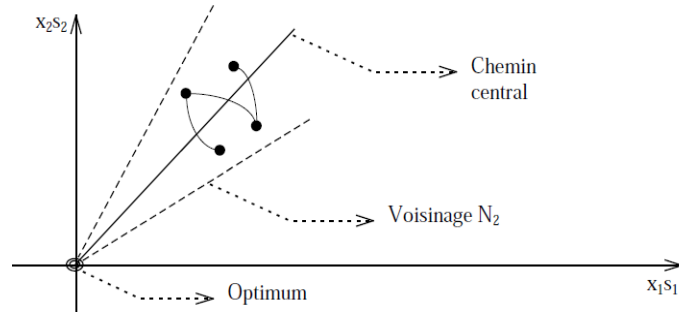


Figure 03 : Méthode de suivi de chemin central à pas court

3.2 Algorithme à pas long

Le principe de cette méthode est encore une fois de confiner les itérés dans un voisinage du chemin central, défini cette fois-ci par $N_\infty(\theta)$. Cependant, on va cette fois s'autoriser un choix moins conservateur du paramètre σ

On fixe le paramètre de centrage σ .

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S_k & 0 & X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_k S_k e - \sigma \bar{\mu}_k e \end{pmatrix}$$

- On règle le pas α pour rester dans le voisinage large du chemin central $N_\infty(\theta)$.

$$\begin{pmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \\ S_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ S_k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_s \end{pmatrix}, 0 < \alpha$$

Réglages · $\theta = 0.001$ → largeur du voisinage.

· $\sigma = 0.1$

· Initialisation avec $\alpha = 1$.

Division de α par 2 tant que le nouveau point n'est pas dans le voisinage large.

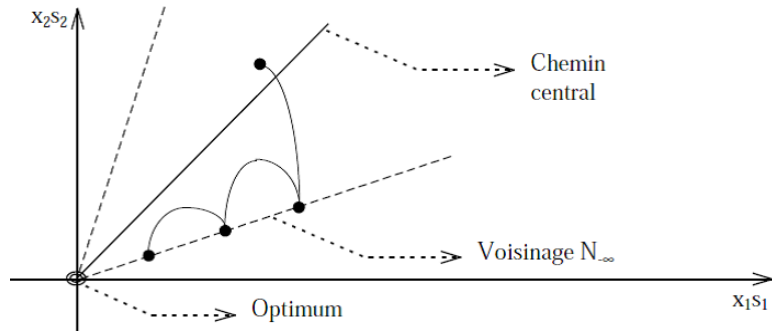


Figure 04 : Méthode de suivi de chemin central à pas long.

Chapitre 4

Application

Soit le problème linéaire (pL) suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{x_1, x_2, x_3} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{sous } & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \\ \text{Telle que : } & A = (1; 1; 1), c^T = (3; 2; 1), b = 2 \end{aligned}$$

Conditions d'ordre 1 du problème linéaire (PL) :

$$xs = 0 \implies \begin{cases} x_1 s_1 = 0 \\ x_2 s_2 = 0 \\ x_3 s_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \text{ ou } s_1 = 0 \\ x_2 = 0 \text{ ou } s_2 = 0 \\ x_3 = 0 \text{ ou } s_3 = 0 \end{cases} \text{ on a 6 combinaisons possibles}$$

$$\begin{aligned} A^T \lambda + s = c & \implies \begin{cases} \lambda + s_1 = 3 \\ \lambda + s_2 = 2 \\ \lambda + s_3 = 1 \end{cases} \\ & \implies \begin{cases} s_1 = 3 - \lambda \\ s_2 = 2 - \lambda \\ s_3 = 1 - \lambda \end{cases} \\ & \implies \begin{cases} s_2 = s_1 - 1 \\ s_3 = s_2 - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$s \geq 0 \implies \begin{cases} s_1 \geq 0 \\ s_2 \geq 0 \\ s_3 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \text{ ou } s_3 = 0 \end{cases} \quad \text{on a 2 combinaisons possibles}$$

$$Ax - b = 0 \implies x_1 + x_2 + x_3 = 2 \implies x_3 = 2$$

Donc la solution du problème (pL) est :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}, \begin{cases} s_1 = 2 \\ s_2 = 1 \\ s_3 = 0 \end{cases}, \lambda = 1, x^* = (0 \ 0 \ 2)$$

Le problème barrière :

Barrière logarithmique associé :

$$\begin{aligned} & \min_{x_1, x_2, x_3} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - \mu(\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3) \\ & \text{sous } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Centre analytique x_∞ :

$$\min_{x_1, x_2, x_3} B(x_1, x_2, x_3) = \min_{x_1, x_2, x_3} (-(\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3))$$

On pose : $x_3 = 2 - x_1 - x_2$, on trouve :

$$\min_{x_1, x_2, x_3} B(x_1, x_2, x_3) = \min_{x_1, x_2, x_3} (-(\ln x_1 + \ln x_2 + \ln(2 - x_1 - x_2)))$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1} + \frac{1}{2-x_1-x_2} = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} = -\frac{1}{x_2} + \frac{1}{2-x_1-x_2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \implies x_3 = \frac{2}{3} \quad \text{donc : } x_\infty = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

Polytope des contraintes : $p = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

Conditions d'ordre 1 du problème barrière ($PB\mu$) :

$$\begin{aligned}
 A^T \lambda + s = c &\implies \begin{cases} \lambda + s_1 = 3 \\ \lambda + s_2 = 2 \\ \lambda + s_3 = 1 \end{cases} \\
 &\implies \begin{cases} s_1 = 3 - \lambda \\ s_2 = 2 - \lambda \\ s_3 = 1 - \lambda \end{cases} \\
 xs = \mu e &\implies \begin{cases} x_1 s_1 = \mu \\ x_2 s_2 = \mu \\ x_3 s_3 = \mu \end{cases} \\
 &\implies \begin{cases} x_1 = \frac{\mu}{3-\lambda} = \frac{\mu}{h+1} \\ x_2 = \frac{\mu}{2-\lambda} = \frac{\mu}{h} \quad h = 2 - \lambda. \\ x_3 = \frac{\mu}{1-\lambda} = \frac{\mu}{h-1} \end{cases} \\
 Ax - b = 0 &\implies x_1 + x_2 + x_3 = 2 \implies \frac{\mu}{h+1} + \frac{\mu}{h} + \frac{\mu}{h-1} = 2 \implies 2h^3 - 3\mu h^2 - 2h + \mu = 0
 \end{aligned}$$

Le point du chemin central $(x_\mu, s_\mu, \lambda_\mu)$ pour une barrière de hauteur μ vérifie :

$$\begin{cases} x_\mu s_\mu = \mu e \\ Ax_\mu = b \\ A^T \lambda_\mu + s_\mu = c \end{cases} \quad x_\mu > 0, s_\mu > 0$$

En résolvant les conditions d'ordre 1 du problème barrière, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_\mu = 2 - h, \text{ avec } 2h^3 - 3\mu h^2 - 2h + \mu = 0 \\ s_\mu = (3 - \lambda_\mu, 2 - \lambda_\mu, 1 - \lambda_\mu) \\ x_\mu = \mu \left(\frac{1}{3-\lambda_\mu}, \frac{1}{2-\lambda_\mu}, \frac{1}{1-\lambda_\mu} \right) \end{cases}$$

On résout le problème pour des valeurs décroissantes de la hauteur de barrière μ .

Points du chemin central pour une barrière de hauteur μ de 10000 à 0.

| μ | x_1 | x_2 | x_3 | s_1 | s_2 | s_3 | λ |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| 10000 | 0.66662 | 0.66667 | 0.66671 | 15001.0 | 15000.0 | 14999.0 | -14998.0 |
| 1000 | 0.66622 | 0.66677 | 0.66677 | 1501.0 | 1500.0 | 1499.0 | -1498.0 |
| 100 | 0.66225 | 0.66667 | 0.67114 | 151.0 | 150.0 | 149.0 | -148.004 |
| 10 | 0.62344 | 0.66489 | 0.71225 | 16.04 | 15.04 | 14.04 | -13.044 |
| 1 | 0.05293 | 0.52932 | 1.12461 | 2.8892 | 1.8892 | 0.8892 | 0.1108 |
| 0.1000 | 0.04877 | 0.09516 | 1.96464 | 2.0509 | 1.0509 | 0.0509 | 0.9491 |
| 0.0100 | 0.00499 | 0.00995 | 2.00006 | 2.0050 | 1.0050 | 0.0050 | 0.9950 |
| 0.0010 | 0.00050 | 0.00100 | 2.00004 | 2.0005 | 1.0005 | 0.0005 | 0.9995 |
| 0.0001 | 0.00005 | 0.00010 | 2.00001 | 2.0001 | 1.0001 | 0.0001 | 0.9999 |
| 0.0000 | 0.00000 | 0.00000 | 2.00000 | 2.00000 | 1.0000 | 0.0000 | 1.00000 |

Tableau 01

Alors la solution du problème linéaire ($\mu \rightarrow 0$) : $x^*(0.0.1)$

Direction de déplacement

On cherche à résoudre :

$$F(x, \lambda, s) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T \lambda + s - c \\ XS - \mu e \end{pmatrix} = 0 \text{ pour } \mu \text{ fixé avec } \begin{cases} x > 0 \\ s > 0 \end{cases}$$

La méthode de Newton à partir d'un point intérieur initial

Point initial : on choisit un point intérieur initial

$$(x, \lambda, s) \in X_{int} \implies \begin{cases} Ax - b = 0 \\ A^T \lambda + s - c = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x > 0 \\ s > 0 \end{cases}$$

On peut prendre :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) > 0 \text{ tel que } x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \lambda = 0 \\ s = c \implies s^T = \end{array} \right. \implies \bar{\mu} = \frac{x^T s}{n} = \frac{3x_1 + 2x_2 + x_3}{3} \quad (3.2.1)$$

La hauteur de barrière μ est réglée par le paramètre de centrage σ :

$$\mu = \sigma \bar{\mu} = \frac{\sigma}{n} x^T s$$

La direction de déplacement $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)$ à partir du point initial (x, λ, s) est obtenue en résolvant les équations de Newton.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{pmatrix} = -F(x, \lambda, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -XS + he \end{pmatrix} \text{ car } \begin{cases} Ax - b = 0 \\ A^T \lambda + s - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta \lambda \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -x_1 s_1 + \mu \\ -x_2 s_2 + \mu \\ -x_3 s_3 + \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \mu = \sigma \bar{\mu} = \frac{\sigma}{n} (x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 0 \\ \Delta s_1 + \Delta \lambda = 0 \\ \Delta s_2 + \Delta \lambda = 0 \\ \Delta s_3 + \Delta \lambda = 0 \\ s_1 \Delta x_1 + x_1 \Delta s_1 = \mu - x_1 s_1 \\ s_2 \Delta x_2 + x_2 \Delta s_2 = \mu - x_2 s_2 \\ s_3 \Delta x_3 + x_3 \Delta s_3 = \mu - x_3 s_3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \Delta \lambda \left(\frac{x_1}{s_1} + \frac{x_2}{s_2} + \frac{x_3}{s_3} \right) = x_1 + x_2 + x_3 - \mu \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \right) \\ \Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s_3 = -\Delta \lambda \\ \Delta x_1 = \frac{\mu + x_1 \Delta \lambda}{s_1} - x_1 \\ \Delta x_2 = \frac{\mu + x_2 \Delta \lambda}{s_2} - x_2 \\ \Delta x_3 = \frac{\mu + x_3 \Delta \lambda}{s_3} - x_3 \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 3 \\ s_2 = 2 \\ s_3 = 1 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mu} = \frac{3x_1 + 2x_2 + x_3}{3} \\ \mu = \sigma \bar{\mu} \end{array} \right.$$

Le point initial (x_1, x_2, x_3) doit vérifier : $\left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 > 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{array} \right.$

Illustrations pour le point $x = (0.8, 0.6, 0.6)$

Et pour 2 valeurs de σ :

$\sigma = 0 \rightarrow$ vers la solution du problème initial (Newton)

$\sigma = 1 \rightarrow$ vers le chemin central $(x_\mu, \lambda_\mu, s_\mu)$

| | $\bar{\mu}$ | x_1 | x_2 | x_3 | s_1 | s_2 | s_3 | λ |
|-----------------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------------|
| | 1.4 | 0.8 | 0.6 | 0.6 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| σ | μ | Δx_1 | Δx_2 | Δx_3 | Δs_1 | Δs_2 | Δs_3 | $\Delta \lambda$ |
| 0 | 0 | -0.3429 | -0.0857 | 0.4285 | -1.71428 | -1.71428 | -1.71428 | 1.71428 |
| 1 | 1.4 | -0.20381 | 0.24571 | 1.09142 | -0.48571 | -0.48571 | -0.48571 | 0.48571 |
| <i>Chemin central</i> | 1.4 | 0.59619 | 0.84571 | 1.69143 | 2.51429 | 1.51429 | 0.51429 | 0.48571 |

Tableau 02

conclusion

Les méthodes de points intérieurs généralement reposent sur la fonction barrière logarithmique. Cette fonction barrière logarithmique sera largement étudiée, Les itérés générés par les méthodes basées sur cette fonction sont strictement réalisables : ils restent à l'intérieur du domaine réalisable.

Dans ce mémoire, on a présenté une méthode qui s'appelle chemin centrale parmi les méthodes de points intérieurs pour résoudre un programme linéaire basée sur la fonction barrière en introduisant la méthode de Newton.

Bibliographie

- [1] Y. Yinyu. Progress in Linear Programming : Interior-Point Algorithms, University of Iowa U.S.A.(1994).
- [2] P. Segalat. Méthodes de Points Intérieurs et de quasi-Newton, Thèse de doctorat, Université de Limoges France.(2002).
- [3] E. Kellal. Une synthèse des méthodes du point intérieur, Mémoire de (M.SC), Université de Sherbrook, Québec, Canada.(Janvier 1998).
- [4] M. Bierlaire. Introduction à l'optimisation différentiable, ISBN-10 : 2-88074-669-8.(2006).
- [5] P. Pesneau. Programmation Linéaire 2 - Cours 4, Université de Bordeaux 1, France. (2010).
- [6] N. Anane. Méthodes de points intérieurs pour la programmation linéaire basées sur les fonctions noyaux, Thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas de Sétif 1.(2012).
- [7] F. Glineur. Etude des méthodes de point intérieur appliquées à la programmation linéaire et la programmation semidéfinie, Université catholique de Louvain, Belgique.(2012)
- [8] Y. Dodge, S. Gonano. Optimisation appliquée, ISBN : 2-287-21335-X, Springer-Verlag France.(2005).
- [9] M. Cerf. Techniques d'optimisation, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), France.(2013).
- [10] M. Belloufi. Cours d'optimisation Sans Contraintes, Université Mohamed Chérif Messaadia de Souk-Ahras.(2015).

- [11] R. Fourer. Optimization Methods (Solving Linear Programs by Interior-Point Methods), Northwestern University U.S.A.(2005).
- [12] L. Gillopi. Optimisation sous contrainte, Laboratoire de mathématiques Jean Le-ray, Université de Nantes, France.(2016).

Résumé

Le but de ce mémoire est de proposer une méthode de points intérieurs de chemin centrale de type primal-dual pour résoudre les problèmes de la programmation linéaire (PL). Cette méthode est basée sur la fonction barrière, Cette fonction barrière logarithmique sera largement étudiée, Les itérées générés par les méthodes basées sur cette fonction sont strictement réalisables, La méthode de points intérieurs, ou méthode barrière, connaissent un grand succès depuis l'introduction de l'algorithme de méthode de suivi de chemin central.

Abstract

The purpose of this memory is to propose The interior point methods to the primal-dual central path to solve the problems of linear programming (PL), this method is based on the barrier function, this logarithmic barrier function will be widely studied, iterations resulting from methods that are based on this function are strictly feasible, The interior point methods or barrier methods know a great success since the introduction of the algorithm monitoring of central path methods.

الهدف من هذه المذكرة هو اقتراح طريقة النقاط الداخلية لأسلوب المسار الوسط من نوع بدائي ومزدوج من أجل حل مشكلة البرامج الخطية, و هذا لطريقة ترتكز على دالة الحاجز, و سيتم هذه الدالة

فهي محققة تماما, طريقة النقاط الداخلية طريقة الحاجز عرفت رواج كبير منذ خوارزمية متابعة المسار الأوسط