Université Abbes LAGHROUR Khenchela
Faculté des Sciences & Technologie
Département de mathématique & Informatique

Ref : N…/…

# Mémoire de fin d'études

*Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)*

**Filière : Mathématiques**

**Spécialité : Mathématiques Appliquées**

# Les fonctions semi-E-convexes

**Réalisé par** :
*AIDI Sara*

*SACI Sara*

**Dirigé par**: *M.BEN Hdid Ayache*

**Membres de jury** :
- **ABD karim abd elhalim**
- **Tabasi fawzi**

**Présenté le**: *30/05/2018*

*2017 / 2018*

## *Remerciement*

Nous remercions avant tout"الله"pour la patience qu'il nous à donné durant ces anneés d'études , qui nous a permis d'arriver jusqu'à là , de nous avoir donné le bon sens , et le tout puissant .

Par ces quelque mots nous adresse notre remerciement les plus s'incres aux personnes qu'on l'aide sans la réalisation de cette thèse ; En premiere lieu nous remercier notre encadreur M.BEN HADID AYACHE d'avoir eu la gentillesse de nous encadrer, diriger, guider avec ses précieux conseils ,nous avans eu l'honneur de travailler sous sa direction .

Nous remercions tout l'ensemble d'enseignants qui nous ont donnes le savoir depuis les classes primaires jusqu'à l'université.

Enfin , on n'oublier pas notre parents pour leur soutien bienveillant , nous souhaiterons remercier également notre proche pour leur encouragement tout au long de la réalisation de ce travail .

Merci à tout et à toute.

# *Dédicace*

***Je dèdie cette thèse***

***À ma belle femme qui ma donneé le bonheur et la volontè durant ma vie , ma très chère mère < <DALILA>>***

***À celle qui a été cause de mon succés , qui c'est s'acrifiés pour moi , cher père <<NOUAR>>***

***À mon  mari et mon amour  et mon amant qui ne cesse pas de m'encouragè <<HACHEM>>***

***À celle qui m'a entouré avec son amour ma chère mes tantes <<SAMIA,AICHA>>***

***À la bonne soeur <<RAYEN>> et mes cheres fréres <<HAÇEN , RAMZI>>, et à ma belle soeur <<AMIRA>>***

***À ma petite <<NISIA>>***

***À mes cousines<<MIMA,AYA,HOUDA...>> et toute ma belle famille***

***À ma meilleur amie <<DINZO , NOUSSA >>***

***À tout mes amies et mes camarades<<  MANEL,ASSIA ,SOUADE,...>>***

***À ma coupine qui partagé tout sa moments avec moi <<SARA AIDI>>***

***Sans oublier tout les professeurs.***

**SACI SARA**

## *Dédicace*

***Je dédie ce modeste travail à***

***Celle qui à illuminé mon parcours avec m'a donnée son amour ma très chère mère <<FATIMA>>***

***Mon père <<DJAMEL>> qui ne cesse pas de m'encouragè et qui ma toujours soutenu ,qui c'est s'acrifies pour moi***

***Mes chers frères <<BLGASSEM,MILOUDE,RAMI,HAITHAM>> et ma chère<<BASSEMA>> , et mes oiseaux<< MOHAMED , ISHAK>>***

***Ma toute ma famille et mes cousines , celle qui m'a toujours encouragè ma meilleure amie<<CHAHRA>>***

***Mes amies <<ASSIA , DJIHED,....>>***

***Ma coupine qui partagés tout sa moments avec moi <<SACI SARA>>***

***Sans oublier tout les proffeseurs.***

**AIDI SARA**

# Table des matières

# Introduction

Bien que la notion de convexité soit connue depuis l'antiquité, c'est essentiellement au début du 20 ème siècle que, avec l'essor de l'analyse fonctionnelle.

La convexité est la branche des mathématiques qui étudie les ensembles et les fonctions convexes. Elle intervient dans la modélisation et la résolution numérique de problèmes en ingénierie, en statistiques, en physique, en économie, en finance et dans les sciences de l'information.

Le concept de la E-convexité pour les ensembles et les fonctions ont été introduits par Youness dans [2], et ils ont des applications importantes dans diverses branches des sciences mathématiques. Ce type de convexité généralisée est basé sur l'effet d'un opérateur $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sur les ensembles et le domaine de la définition des fonctions, Xiusu Chen [3] a introduit un nouveau concept de fonctions semi-$E$-convexes et a discuté de ses propriétés.

Dans ce mémoire, nous présentons le concept des ensembles $E$-convexes, des fonctions $E$-convexes et semi-$E$-convexes et développons quelques propriétés basiques des fonctions semi-E-convexes pour une fonction à valeur réelle $f$ définie sur un ensemble $E$-convexe non vide.

Le manuscrit de cet mémoire est organisé comme suit. Dans le chapitre 1, nous avons présenté le concept de la $E$-convexité pour les ensembles et les fonctions. Ces résultats sont indispensable pour la suite, tandis que les chapitres 2, 3 est sont consacrés au concept des fonctions semi-$E$-conveexes.

# Chapitre 1

# Préliminaires

## 1.1 Les ensembles E-convexes

**Définition 1.1.1** [2] *Soit $M$ un sous-ensemble non vide de $R^n$,*

*et une application $E : R^n \to R^n$ on dit que l'ensemble $M \subseteq R^n$ est E-convexe*

*si $\forall x, y \in M$ , $\forall t \in [0,1]$ : tE(x)+(1-t)E(y) $\in M$ .*

**Example 1** [2] *Soient $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $E(x,y) = (0,y)$.*

*et ,*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda_1 (2,1) + \lambda_2 (0,3)\right\}$$

*avec $\lambda_1, \lambda_2, \geq 0, \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < 1$, alors ,$M$ est un ensembele $E$-convexe.*

***Explication :***

*Soient* $\left\{\begin{array}{l} X = (x_1, y_1) \\ Y = (x_2, y_2) \end{array}\right. \in M$

*alors , il existe* $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ , $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$

*tq* $\left\{\begin{array}{l} \alpha_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{2} \alpha_i < 1 \\ \beta_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{2} \beta_i < 1 \end{array}\right. \quad i = \overline{1,2}$

*avec* $\left\{\begin{array}{l} X = \alpha_1 (2,1) + \alpha_2 (0,3) = (2\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2) \\ Y = \beta_1 (2,1) + \beta_2 (0,3) = (2\beta_1, \beta_1 + 3\beta_2) \end{array}\right.$

*ce qui implique :* $\left\{\begin{array}{l} E(X) = (0, y_1) = (0, \alpha_1 + 3\alpha_2) \\ E(Y) = (0, y_2) = (0, \beta_1 + 3\beta_2) \end{array}\right.$

*donc* $\forall t \in [0,1] : tE(X) + (1-t)E(Y) = (0, t(\alpha_1 + 3\alpha_2) + (1-t)(\beta_1 + 3\beta_2))$

*on vérifie que* $(0, t(\alpha_1 + 3\alpha_2) + (1-t)(\beta_1 + 3\beta_2)) \in M$

*il faut trouver* $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ *avec* $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$

*et* $(0, t(\alpha_1 + 3\alpha_2) + (1-t)(\beta_1 + 3\beta_2)) = \lambda_1(2,1) + \lambda_2(0,3) = (2\lambda_1, \lambda_1 + 3\lambda_2)$

*donc* $\begin{cases} 2\lambda_1 & = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & = t(\alpha_1 + 3\alpha_2) + (1-t)(\beta_1 + 3\beta_2) \end{cases}$

*d'ou* $\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \\ \lambda_2 & = t\left(\frac{\alpha_1}{3} + \alpha_2\right) + (1-t)\left(\frac{\beta_1}{3} + \beta_2\right) \end{cases}$

*d'autre part on a :*

$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 < 1 \\ \beta_1 + \beta_2 < 1 \end{cases}$

*ce qui implique :*

$$\begin{cases} 0 \le t\left(\frac{\alpha_2}{3} + \alpha_3\right) < t & (1) \\ 0 \le (1-t)\left(\frac{\beta_1}{3} + \beta_2\right) < 1 - t & (2) \end{cases}$$

*par l'addition de (1) et (2) on trouve :*

$0 \le \lambda_2 = t\left(\frac{\alpha_1}{3} + \alpha_2\right) + (1-t)\left(\frac{\beta_1}{3} + \beta_2\right) < 1$

*par conséquence :*

$0 \le \lambda_2 < 1$

*donc* $[tE(x) + (1-t)E(y)] \in M$ .

*Ainsi* $M$ *est un ensemble* $E$*-convexe .*

**Remarque 1.1.1** [2] *Un ensembles convexes* $M \subset R^n$ *est considéré comme un ensembele E-convexe , avec* $E = Id_{\mathbb{R}^n}$ .

**Example 2** [2] *Soit* $M = \left[-1, \frac{-1}{2}\right] \cup [0,1]$ *et* $E(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

*il est claire que* $M$ *est* $E$*-convexe mais n'est pas convexe .*

***Explication***

*Il y a trois cas :*

*1$^{er}$ cas :*

*Soient* $x, y \in \left[-1, \frac{-1}{2}\right]$ ; $\begin{cases} \frac{1}{4} \le E(x) = x^2 \le 1 \\ \frac{1}{4} \le E(y) = y^2 \le 1 \end{cases}$

*pour* $t \in [0,1]$ : $\frac{1}{4} \le [tE(x) + (1-t)E(y)] \le 1$

*donc* $[tE(x) + (1-t)E(y)] \in M$.

*2$^{eme}$ cas :*

*Soient* $x, y \in [0,1]$ ; $\begin{cases} 0 \le E(x) = x^2 \le 1 \\ 0 \le E(y) = y^2 \le 1 \end{cases}$

*pour* $t \in [0,1]$ : $0 \le [tE(x) + (1-t)E(y)] \le 1$

*donc* $[tE(x)+(1-t)E(y)] \in M$.

*$3^{eme}$ cas :*

*Soit* $x \in \left[-1, \frac{-1}{2}\right]$ , $y \in [0,1]$ ; $\begin{cases} \frac{1}{4} \leq E(x) = x^2 \leq 1 \\ 0 \leq E(y) = y^2 \leq 1 \end{cases}$

*pour* $t \in [0,1]$ : $\frac{t}{4} \leq [tE(x)+(1-t)E(y)] \leq 1$

*donc* $[tE(x)+(1-t)E(y)] \in M$.

*Ainsi* $M$ *est un ensemble* $E$*-convexe mais n'est pas convexe parce que :*

*si on prend :* $x = \frac{-1}{2}$ ,$y = 0$ , $t = \frac{1}{2}$

*on obtient :* $tx + (1-t)y = \frac{-1}{4} \notin M$.

## 1.2 Propriétés

[2] Soit E : $\mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}^n$ une application linéaire, et soit $\mathrm{M}_1$, $\mathrm{M}_2 \subset \mathrm{R}^n$ deux ensembles E-convexes alors :

**1.**$\alpha$ $\mathrm{M}_1 = \{\alpha x, x \in M_1\}$ est E-convexe pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$.

**2.** $\mathrm{M}_1 \cup M_2$ n'est pas nécessaire E-convexe.

**3.** $\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2$est un ensemble E-convexe.

**4.** $\mathrm{M}_1 + \alpha$ .est E-convexe où $\alpha$ un point fixe de E et pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$.

**5.** $\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 = \{x+y, x \in M_1, y \in M_2\}$ est un ensemble E-convexe.

**Preuve:**

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha x$ , $\alpha y \in \alpha M_1$ où $x, y \in M_1$ *et* $0 \leq \lambda \leq 1$.

$$\begin{aligned} \lambda E(\alpha x) + (1-\lambda)E(\alpha y) &= \lambda \alpha E(x) + (1-\lambda)\alpha E(y) \\ &= \alpha(\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y)). \end{aligned}$$

   cela prouve $\alpha M_1$ est $E$-convexe.

2. Considéron l'application E : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

   $E(x,y) = (0,y)$, et considérars les deux ensembles

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda_1(2,1) + \lambda_2(0,3)\right\}. \\ M_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda_1(0,-3) + \lambda_2(-2,-1)\right\}. \end{aligned}$$

   Avec $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < 1$.

Les deux ensembles $M_1$ et $M_2$ sont $E$-convexs, mais $M_1 \cup M_2$ n'est pas $E$-convexe.

car : si on prend :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 = 0 & , & \lambda_2 = \frac{1}{3} \\ X = (0,1) & \in & M_1 \\ Y = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) & \in & M_2 \end{array}$$

Alors :

$$\begin{aligned} tE(X) + (1-t)E(Y) &= t\,(0,1) + (1-t)\left(0, -\tfrac{1}{2}\right) \\ &= \left(0, \tfrac{3}{2}t - \tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

on prend : $t = \frac{1}{3}$

On trouve : $tE(X) + (1-t)E(Y) = (0,0)$

Alors $[tE(X) + (1-t)E(Y)] \notin M_1$

et $[tE(X) + (1-t)E(Y)] \notin M_2$

donc

$$[tE(X) + (1-t)E(Y)] \notin M_1 \cup M_2 \quad .$$

Ainsi $M_1 \cup M_2$ n'est pas $E$-convexe .

3. Soient $x, y \in M_1 \cap M_2$ ;soit $\lambda \in [0,1]$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in M_1 \cap M_2 \\ y \in M_1 \cap M_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in M_1 \text{ et } x \in M_2 \\ y \in M_1 \text{ et } y \in M_2 \end{array} \right.$$

alors :

$\forall \lambda \in [0,1]\,,\ \lambda E\,(x) + (1-\lambda)\,E\,(y) \in M_1$ et $\lambda E\,(x) + (1-\lambda)\,E\,(y) \in M_2$

donc :$\forall \lambda \in [0,1]\,,\ \lambda E\,(x) + (1-\lambda)\,E\,(y) \in M_1 \cap M_2$

alors $M_1 \cap M_2$ est $E$-convexe.

4. Soient $x, y \in M_1 + \alpha$ , $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tq $E\,(\alpha) = \alpha$ et $0 \leq \lambda \leq 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \lambda E(x+\alpha) + (1-\lambda)E(y+\alpha) &= \lambda(E(x) + E(\alpha)) + (1-\lambda)(E(y) + E(\alpha)) \\ &= \lambda(E(x) + \alpha) + (1-\lambda)(E(y) + \alpha) \\ &= \lambda E(x) + (1-\lambda)E(y) + \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha \\ &= (\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y)) + \alpha. \end{aligned}$$

comme $M_1$ est $E$-convexe ,

donc $$\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y) \in M_1$$

cela prouve que $$\lambda E(x+\alpha) + (1-\lambda)E(y+\alpha) \in M_1 + \alpha.$$

Ainsi $M_1 + \alpha$ est $E$-convexe .

5. Soient $(x_1 + y_1), (x_2 + y_2) \in M_1 + M_2$ ,

   pour $0 \leq \lambda \leq 1$ :

   $$\lambda E(x_1 + y_1) + (1-\lambda)E(x_2 + y_2) = (\lambda E(x_1) + (1-\lambda)E(x_2)) + (\lambda E(y_1) + (1-\lambda)E(y_2))$$

   comme $M_1$ et $M_2$ sont deux ensembles $E$-convexes,

   alors :
   $$\begin{cases} \lambda E(x_1) + (1-\lambda)E(x_2) \in M_1 \\ \lambda E(y_1) + (1-\lambda)E(y_2) \in M_2 \end{cases}$$
   cela prouve que :

   $$\lambda E(x_1 + y_1) + (1-\lambda)E(x_2 + y_2) \in M_1 + M_2$$

   Ansi , $M_1 + M_2$ est $E$-convexe .

   **Remarque 1.2.1** [2] ***1.****L'intersection d'une collection arbitraire d'ensembles E-convexes est un ensemble E-convexe.*

   ***2.****Soit*$E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *linéaire* $M_1, M_2, .., M_m$ *sont des ensembles* $E$*-convexes de* $\mathbb{R}^n$*.*

   *alors ,* $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \ldots + \lambda_m M_m$ *est un ensemble* $E$*-convexe ; ou* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, m$ *.*

□

**Proposition 1.2.1** [2] *Soient* $E_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *et* $E_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *deux applications . Soient* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *une application linéaire avec :* $A \circ E_1 = E_2 \circ A$*,* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *est un ensemble* $E_1$*-convexe alors :* $A(M) \subseteq \mathbb{R}^m$ *est* $E_2$*-convexe.*

**Preuve:** Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ est $E_1$-convexe, soient $x, y \in M$ et $0 \leq \lambda \leq 1$.

Alors $\lambda E_1(x) + (1-\lambda)E_1(y) \in M$.

D'autre part :
$$\begin{aligned} \lambda E_2(A(x)) + (1-\lambda)E_2(A(y)) &= \lambda(E_2 \circ A)(x) + (1-\lambda)(E_2 \circ A)(y) \\ &= \lambda(A \circ E_1)(x) + (1-\lambda)(A \circ E_1)(y) \\ &= \lambda A(E_1(x)) + (1-\lambda)A(E_1(y)) \\ &= A(\lambda E_1(x) + (1-\lambda)E_1(y)). \end{aligned}$$

Cela prouve que :

$$\lambda E_2(A(x)) + (1-\lambda)E_2(A(y)) \in A(M).$$

Ainsi $A(M)$ est $E_2$-convexe . □

**Proposition 1.2.2** [2] *Si un ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est $E$-convexe, alors $E(M) \subseteq M$.*

**Preuve:** Comme $M$ est $E$-convexe , alors pour tout $x, y \in M$ et $0 \leq \lambda \leq 1$.
On obtient :

$$\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y) \in M$$

pour $\lambda = 1$, $E(x) \in M$, ainsi $E(M) \subseteq M$. □

**Proposition 1.2.3** [2] *Soit $E(M)$ convexe et $E(M) \subseteq M$ . alors , $M$ est $E$-convexe.*

**Preuve:** Soit $x, y \in M$. donc , $E(x)$ et $E(y) \in E(M)$, et comme $E(M)$ est convexe.
Pour chaque $0 \leq \lambda \leq 1$, on trouve

$$\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y) \in E(M) \subseteq M$$

cela prouve que $\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y) \in M$ ainsi $M$ est $E$-convexe . □

**Proposition 1.2.4** [2] *Soient $\alpha \in \mathbb{R}, \upsilon \in \mathbb{R}^n$ et $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire nulpotent d'indice $p = 2$ .*
*Alors l'ensemble $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle E(x), \upsilon\rangle \rho\ \alpha\}$ est $E$-convexe où $\rho \in \{<, =, >, \leq, \geq\}$.*

**Preuve:** Soit $x, y \in M$ et $0 \leq \lambda \leq 1$.

$$\begin{aligned}\langle E(\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y)), \upsilon\rangle &= \langle \lambda E^2(x) + (1-\lambda)E^2(y), \upsilon\rangle \\ &= \langle \lambda E(x) + (1-\lambda)E(y), \upsilon\rangle \\ &= \langle \lambda E(x), \upsilon\rangle + \langle (1-\lambda)E(y), \upsilon\rangle \\ &= \lambda \langle E(x), \upsilon\rangle + (1-\lambda)\langle E(y), \upsilon\rangle .\end{aligned}$$

Cela montre que $\langle E(\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y)), \upsilon\rangle\ \rho\ \alpha$ donc $\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y) \in M$.
Alors $M$ est $E$-convexe. □

**Remarque 1.2.2** [2] *Soient $\alpha_i \in \mathbb{R}, \upsilon_i \in \mathbb{R}^n$ pour $i \in I$ et $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire alors l'ensemble $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle E(x), \upsilon_i\rangle \rho\ \alpha_i$ pour $i \in I\ \}$ est $E$-convexe où $\rho \in \{<, =, >, \leq, \geq\}$.*

## 1.3 Les Fonctions E-convexes

**Définition 1.3.1** *1.* [2] *Une fonction $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite E-convexe sur $M$ si $M$ est E-convexe et pour chaque $x, y \in M$ et tout $t \in [0,1]$*

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq tf(E(x)) + (1-t)f(E(y)) \ .$$

*2. On dit qu'une fonction $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est strictement E-convexe sur $M$ si $M$ est E-convexe et $\forall x, y \in M$ et $\forall\ t \in \left]0,1\right[$.*

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) < tf(E(x)) + (1-t)f(E(y)), x \neq y \quad .$$

**Example 3** [2] *Soit $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $E(x,y) = (0,y)$.*
*et , soit $M \subset \mathbb{R}^2$ définie par*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda_1 (2,1) + \lambda_2 (0,3)\right\}$$

*pour* $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < 1,$ *Alors $M$ est E-convexe. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3, & si\ y < 1 \\ xy^3, & si\ y \geq 1 \end{cases}$$

*est E-convexe sur $M$.*

***Explication***

*Soient* $x_1, y_1; x_2, y_2 \in M, \forall\ t \in [0,1] : M$ *est E-convexe* (*voir l'exemple* 1.1) .

*pour*

$$\begin{cases} E(x_1,y_1) = (0,y_1) = (0, \alpha_1 + 3\alpha_2) \\ E(x_2,y_2) = (0,y_2) = (0, \beta_1 + 3\beta_2) \end{cases}$$

*alors*

$$\begin{aligned} tE(x_1,y_1) + (1-t)E(x_2,y_2) &= (0, t(\alpha_1 + 3\alpha_2) + (1-t)(\beta_1 + 3\beta_2)) \\ \Rightarrow f(tE(x_1,y_1) + (1-t)E(x_2,y_2)) &= f(0, t(\alpha_1 + 3\alpha_2) + (1-t)(\beta_1 + 3\beta_2)) \end{aligned}$$

*à partir de la définition de la fonction $f$*

*pour*

$$f(0, t(\alpha_1 + 3\alpha_2) + (1-t)(\beta_1 + 3\beta_2)) = \begin{cases} 0 & si \quad t(\alpha_1 + 3\alpha_2) + (1 \\ 0 \times (t(\alpha_1 + 3\alpha_2) + (1-t)(\beta_1 + 3\beta_2))^3 & si \quad t(\alpha_1 + 3\alpha_2) + (1 \end{cases}$$

*alors* $f(tE(x_1,y_1) + (1-t)E(x_2,y_2)) = 0.$

*D'autre part :*

$$\begin{aligned} tf(E(x_1,y_1)) + (1-t)f(E(x_2,y_2)) &= tf(0, \alpha_1 + 3\alpha_2) + (1-t)f(0, \beta_1 + 3\beta_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

*alors $f$ est E-convexe sur $M$.*

# Chapitre 2

# Les fonctions semi-E- convexes

## 2.1 Définitions

**Définition 2.1.1** *1.* [3] *On dit que la fonction* $f : M \to \mathbb{R}$ *est semi- $E$-convexe sur un ensemble $M$ ; ssi $M$ est E-convexe et* $\forall (x, y) \in M \quad \forall t \in [0, 1]$

$$f(tE(x) + (1 - t)E(y)) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

*2.* [3] *On dit que la fonction* $f : M \to \mathbb{R}$ *est strictement-semi- $E$-convexe sur ensemble $M$ ;*

*ssi $M$ est E-convexe et* $\forall (x, y) \in M \times M \quad \forall t \in ]0, 1[$ *et* $x \neq y$ *:*

$$f(tE(x) + (1 - t)E(y)) < tf(x) + (1 - t)f(y).$$

**Example 4** [3] *Soit* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$E(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 1 \leq x \leq 4 \\ 1 + \frac{2}{\pi}\arctan(1 - x) & si \quad x < 1 \\ 2 + \frac{4}{\pi}\arctan(x - 4) & si \quad x > 4 \end{cases}$$

*Tq : l'ensemble* $\mathbb{R}$ *est un ensemble E-convexe , et soit la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 7 & si \quad x < 1 \ ou \ x > 4 \\ x - 3 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 3 - x & si \quad 2 \leq x \leq 3 \\ x - 3 & si \quad 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

*la fonction $f(x)$ est une fonction semi-E-convexe sur l' ensemble E-convexe* $\mathbb{R}$.

***Explication :***

$1^{er}$ *cas :*

*si* $x, y < 1$ *ce qui implique*

$$\begin{cases} E(x) = & 1 + \frac{2}{\pi}\arctan(1-x) \\ E(y) = & 1 + \frac{2}{\pi}\arctan(1-y) \end{cases}$$

*On a :* $x < 1$ *alors* $1 - x > 0 \Rightarrow 0 \leq \arctan(1-x) \leq \frac{\pi}{2}$

*alors* $$\begin{cases} 1 \leq E(x) \leq 2 \\ 1 \leq E(y) \leq 2 \end{cases}$$

*On trouve :* $1 \leq tE(x) + (1-t)E(y) \leq 2$

$f(tE(x) + (1-t)E(y)) = tE(x) + (1-t)E(y) - 3$

$f(tE(x) + (1-t)E(y)) = \left(t\left(1 + \frac{2}{\pi}\arctan(1-x)\right) + (1-t)\left(1 + \frac{2}{\pi}\arctan(1-y)\right) - 3\right)$

*donc :* $f(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq -1$

*et*

$tf(x) + (1-t)f(y) = 7$

*Pour* $x, y < 1$ *elle est veriffie*

$2^{éme}$ *cas :*

*si* $1 \leq x \leq 4$ *et* $y < 1$ , *ce qui implique :*

$$\begin{cases} E(x) = & 1 \\ E(y) = & 1 + \frac{2}{\pi}\arctan(1-y) \end{cases}$$

*Alors* $$\begin{cases} 1 \leq E(x) \leq 1 \\ 1 \leq E(y) \leq 2 \end{cases}$$

*on trouve :* $tE(x) + (1-t)E(y) = 1$

$$\begin{aligned} f(tE(x) + (1-t)E(y)) = & \; tE(x) + (1-t)E(y) - 3 \\ & = -2 \end{aligned}$$

*Qn calcule* $tf(x) + (1-t)f(y)$

*a) Si* $1 \leq x \leq 2$ *et* $y \leq 1$

$tf(x) + (1-t)f(y) = t(x-10) + 7$

*alors* $-3 \leq t(x-10) + 7 \leq 9$

*donc* $tf(x) + (1-t)f(y) \leq 9$

*pour* $1 \leq x \leq 2$ *et* $y < 1$ *elle est veriffie*

*b) Si* $2 \leq x \leq 3$ *et* $y \leq 1$

$tf(x) + (1-t)f(y) = 7 - t(x+4)$

*alors* $0 \leq t(x+4) + 7 \leq 7$

*donc* $tf(x) + (1-t)f(y) \leq 7$

*pour* $2 \leq x \leq 3$ *et* $y < 1$ *elle est veriffie*

*c) Si* $3 \leq x \leq 4$ *et* $y \leq 1$

$tf(x) + (1-t)f(y) = t(x-10) + 7$

$$alors \qquad -3 \leq t(x-10)+7 \leq 9$$

$$donc\ tf\,(x)+(1-t)\,f\,(y) \leq 9$$

$$pour\ 1 \leq x \leq 2 \quad et \quad y < 1 \quad elle\ est\ veriffie$$

*De même façon on a vérifié les cas siuvants :*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3^{éme}cas:$ | $x > 4$ | *et* | $y < 1$ |
| $4^{éme}cas:$ | $x \leq 1$ | *et* | $1 \leq y \leq 4$ |
| $5^{éme}cas:$ | $1 \leq x \leq 4$ | *et* | $1 \leq y \leq 4$ |
| $6^{éme}cas:$ | $x > 4$ | *et* | $1 \leq y \leq 4$ |
| $7^{éme}cas:$ | $x \leq 1$ | *et* | $y > 4$ |
| $8^{éme}cas:$ | $1 \leq x \leq 4$ | *et* | $y > 4$ |
| $9^{éme}cas:$ | $x > 4$ | *et* | $y > 4$ |

*Donc $f$ est une fonction semi-E-convexe.*

**Proposition 2.1.1** [3] *Si la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est semi- E-convexe sur $M \subseteq \mathbb{R}^n$ E-convexe . Alors pour chaque $x \in M$ $\quad f\,(E(x)) \leq f\,(x)$ .*

**Preuve:**

1. Supposons que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est semi-E-convexe sur un ensemble E-convexe $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .

   alors : $\forall x, y \in M$ et *pour* $0 \leq t \leq 1$,on a :

   $$f(tE(x)+(1-t)E(y)) \;\; \leq \;\; tf(x)+(1-t)f(y)$$

   Pour $t = 1$ , $f(E(x)) \leq f(x)$.

□

**Remarque 2.1.1** ***1.***[3] *Une fonction E-convexe sur un ensemble E-convexe n'est pas nécessairement une fonction semi-E- convexe.*

***2.***[3] *Une fonction semi-E-convexe sur un ensemble E-convexe n'est pas nécessaire une fonction E-convexe .*

**Example 5** ***1.***[3] *Soient $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $E(x,y) = (1+x,y)$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie comme $f(x,y) = x^2+y^2$ et $\mathbb{R}^2$ est un ensemble E-convexe ;*

*Soit $X = (x_1, x_2)\,, Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0,1]$*

$$f\left(tE\left(X\right)+\left(1-t\right)E\left(Y\right)\right) = f\left(t\left(1+x_1,x_2\right)+\left(1-t\right)\left(1+y_1,y_2\right)\right) = \left[t\left(1+x_1\right)+\left(1-t\right)\left(1+y_1\right)\right]^2+\left[tx_2+\left(1-t\right)y_2\right]$$

*et comme la fonction carré est une fonction convexe alors :*

$$f\left(tE\left(X\right)+\left(1-t\right)E\left(Y\right)\right)\leq t\left[\left(1+x_1\right)^2+(x_2)^2\right]+\left(1-t\right)\left[\left(1+y_1\right)^2+(y_2)^2\right]$$

*d'autre part :*

$$tf\left(E\left(X\right)\right)+\left(1-t\right)f\left(E\left(Y\right)\right) = tf\left(1+x_1,x_2\right)+\left(1-t\right)f\left(1+y_1,y_2\right) = t\left[\left(1+x_1\right)^2+(x_2)^2\right]+\left(1-t\right)\left[\left(1+y_1\right)^2+(y_2)^2\right]$$

*alors $f$ est E-convexe sur $M$*

*et pour $x=0,y=0$*

$$E(0,0)=(1,0) \quad et \quad f(E(0,0))=1 \qquad et \quad f(0,0)=0$$

*alors*

$$f(E(0,0))> \ f(0,0)$$

*alors d'aprés la proposition* (2.1.1) *, $f$ n'est pas semi-E-convexe sur $M$.*

***2.***[3] *Soit $E:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :*

$$E(x)=\begin{cases} 1 & si \quad 1\leq x\leq 4 \\ 1+\frac{2}{\pi}\arctan(1-x) & si \quad x<1 \\ 2+\frac{4}{\pi}\arctan(x-4) & si \quad x>4 \end{cases}$$

*Tq : l'ensemble $\mathbb{R}$ est un ensemble E-convexe , et soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x)=\begin{cases} 7 & si \quad x<1 \ ou \ x>4 \\ x-3 & si \quad 1\leq x<2 \\ 3-x & si \quad 2\leq x\leq 3 \\ x-3 & si \quad 3<x\leq 4 \end{cases}$$

*D 'aprés l'exemple* (2.1)*la fonction $f(x)$ est semi-E-convexe sur l'ensemble E-convexe.*

*Et pour : $t=\frac{1}{2}$ , $x=1$ , $y=5$*

$$f(\tfrac{1}{2}E(1)+(1-\tfrac{1}{2})E(5)) = f(2) = 1 \qquad (1)$$

et

$$\tfrac{1}{2}f(E(1))+(1-\tfrac{1}{2})f(E(5)) = \tfrac{1}{2}f(1)+\tfrac{1}{2}f(3) = -1 \qquad (2)$$

*d'aprés (1) et (2)*

$$f(\tfrac{1}{2}E(1)+(1-\tfrac{1}{2})E(5))> \ \tfrac{1}{2}f(E(1))+(1-\tfrac{1}{2})f(E(5))$$

*Alors la fonction $f\left(x\right)$n'est pas E-convexe sur l'ensemble E-convexe $\mathbb{R}$ .*

**Définition 2.1.2** *1.* [1] *Soit $M$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et soient $E:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ et $f:M\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions, on considérons les ensembles suivants :*

$$\begin{aligned} epi(f) &= \{(x,\alpha)\in M\times\mathbb{R}/f(x)\leq\alpha\} \\ E-\ e(f) &= \{(x,\alpha)\in M\times\mathbb{R}/f(E(x))\leq\alpha\} \\ epi_E(f) &= \{(z,\alpha)\in E(M)\times\mathbb{R}/f(z)\leq\alpha\} \\ epi^E(f) &= \{(Ex,\alpha)\in E(M)\times\mathbb{R}/f(x)\leq\alpha\} \end{aligned}$$

*Les quatre ensembles* , $E - e(f), epi^E(f), epi_E(f), epi(f)$ *ne sont pas égaux.*

*Clairement,* $epi_E(f) \subset epi(f)$ *si* $M$ *est* $E$*-convexe* .

## 2.2 Quelques propriétés sur les fonctions semi-E-convexes

**Théorème 2.2.1** [1] *Soit* $M$ *un ensemble non vide de* $\mathbb{R}^n$ , *et soient* $E : M \to M$ *et* $f : M \to \mathbb{R}$

**1-** Si $M$ est E-convexe et $f$ est semi-E-convexe sur $M$ alors $epi(f) \subset E - e(f)$.

**2-**Si $epi(f) \subset E - e(f)$ et $f$ est E-convexe sur $M$ alors $f$ est semi-E-convexe sur $M$.

**3-**Si $epi(f) \subset E - e(f)$ et $f$ est convexe sur E(M) alors $f$ est semi-E-convexe sur $M$.

**4-**Si $epi(f) \subset E - e(f)$ et $epi_E(f)$ est convexe alors $f$ est semi-E-convexe sur M.

**Preuve:**

1. Soit $(x, \alpha) \in epi(f)$

   alors pour $x \in M, \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) \leq \alpha$

   comme $f$ est semi -E-convexe $f(E(x)) \leq f(x)$

   donc $f(E(x)) \leq \alpha$

   $$epi(f) \subset E - e(f).$$

2. Pour $x, y \in M$ et $t \in [0,1]$ , $(x, f(x)), (y, f(y)) \in epi(f)$

   alors :

   $$(x, f(x)), (y, f(y)) \in E - epi(f) \qquad \Rightarrow \begin{cases} f(E(x)) & \leq & f(x) \\ f(E(y)) & \leq & f(y) \end{cases}$$

   comme $f$ est une fonction E-convexe sur $M$

   $$\begin{aligned} f(tE(x) + (1-t)E(y)) &\leq tf(E(x)) + (1-t)f(E(y)) \\ &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

   alors $f$ est semi-E-convexe.

3. Similaire à la preuve du théorème 2.

4. Pour $x, y \in M$ et $t \in [0,1]$ , $(x, f(x)), (y, f(y)) \in epi(f)$

   de la condition $\quad epi(f) \subset E - e(f)$ ,

   on obtient :

$$(x, f(x)), (y, f(y)) \in E - e(f) \ ,$$

alors

$$f(E(x)) \leq f(x) \ , \ f(E(y)) \leq f(y) \quad \Rightarrow \ (E(x), f(x)) \ , \ (E(y), f(y)) \in epi_E(f)$$

D'ou $epi_E(f)$ est convexe .

On trouve :

$$(tE(x) + (1-t)E(y) \ , \ tf(x) + (1-t)f(y) \ \in epi_E(f)$$

alors

$$f(tE(x) + (1-t)E(x)) \ \leq \ tf(x) + (1-t)f(x)$$

alors $f$ est semi-E-convexe.

□

**Proposition 2.2.1** [3] *Supposons que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $E$-convexe sur un ensemble $E$-convexe $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Alors $f$ est semi-E-convexe sur $M$ ssi $\forall x \in M \quad f(E(x)) \leq f(x)$.*

***Preuve:***

*Supposons que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $E$-convexe sur un ensemble $E$-convexe $M$ et $\forall x \in M, \ f(E(x)) \leq f(x)$*

*alors $\forall x, y \in M$ et $0 \leq t \leq 1$ ,*

*On obtient :*

$$\begin{aligned} f(tE(x) + (1-t)E(y)) \ &\leq \ tf(E(x)) + (1-t)f(E(y)) \\ &\leq \ tf(x) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

*Par conséquent, $f$ est semi-E-convexe sur $M$.*

*L'autre main est dérivée de la proposition* (2.1.1) *.* □

**Proposition 2.2.2** [3] *Si la fonction $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$est semi-E-convexe sur un ensemble E-convexe $M \subseteq \mathbb{R}^n, i = 1, 2, .......k$,avec la meme application $E$ alors la fonction $h(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)$est semi-E-convexe sur $M$ pour $\alpha_i \geq 0$.*

**Proposition 2.2.3** [3] *Si la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est semi-E-convexe sur un ensemble E-convexe $M \subseteq \mathbb{R}^n$,alors pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$,l'ensemble $K_\alpha = \{x \mid x \in M, f(x) \leq \alpha\}$est E-convexe.*

**Preuve:**

1. Soit $M$ un ensemble E-convexe

   Pour tout $x, y \in K_\alpha$ et $0 \leq t \leq 1$, alors $f(x) \leq \alpha$,on suppose que $f$est semi-E-convexe sur un ensemble E-convexe $M \subseteq \mathbb{R}^n$

   alors,

   $$tE(x) + (1-t)E(y) \quad \in \quad M$$

   et

   $$\begin{aligned} f(tE(x) + (1-t)E(y)) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ &\leq \alpha \end{aligned}$$

   c-a-d : $tE(x) + (1-t)E(y) \in K_\alpha$

   alors $K_\alpha$ est E-convexe.

□

**Remarque 2.2.1** [3] *L'inverse de la proposition* (2..2.3) *n'est pas vrai . donnons un exemple de l'ensemble* $K_\alpha = \{x \mid x \in M, f(x) \leq \alpha\}$ *est E-convexe mais la fonction* $f(x)$ *n'est pas semi-E-convexe .*

**Example 6** [3] *Soit* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$E(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 1 \leq x \leq 4 \\ 1 + \frac{2}{\pi}\arctan(1-x) & si \quad x < 1 \\ 2 + \frac{4}{\pi}\arctan(x-4) & si \quad x > 4 \end{cases}$$

*et soit la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < 1 \ ou \ x > 4 \\ x-3 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 3-x & si \quad 2 \leq x \leq 3 \\ x-3 & si \quad 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

*Alors :*

$$K_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad \alpha \geq 2 \\ [1,4] & si \quad 1 < \alpha < 2 \\ [1,2) \cup [3-\alpha, 3+\alpha] & si \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ [1,2) & si \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

*sont toujours E-convexes .*

*Pour* $x = 1$ *et* $y = 5, t = \frac{1}{2}$

*on trouve :*

$$f(\tfrac{1}{2}E(1) + \tfrac{1}{2}E(5)) = f(2) = 1 \qquad (\ast)$$

$$\tfrac{1}{2}f(1) + \tfrac{1}{2}f(5) = 0 \qquad (\ast\ast)$$

*D'après* $(\ast)$ *et* $(\ast\ast)$ *:*

$$f(\tfrac{1}{2}E(1) + \tfrac{1}{2}E(5)) > \tfrac{1}{2}f(1) + \tfrac{1}{2}f(5)$$

*alors la fonction* $f(x)$ *n'est pas semi-E-convexe sur l'ensemble E-convexe* $\mathbb{R}$ *.*

# Chapitre 3

# Résultats

**Définition 3.0.1** [4] *On dit qu'une fonction* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *est semi-continue inférieurement si et seulement si pour tout nombre réel* $\alpha$ *, l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$ *est fermé.*

**Définition 3.0.2** [4] *On définie l'application* $E \times I$ *comme :*

$E \times I : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$(x,t) \rightarrow (E \times I)\ (x,t) = (E(x), t)\,.$$

**Proposition 3.0.4** [4] *Soit* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *, alors* $f$ *est semi-continue inférieurement si et seulement si son épigraphe est fermé.*

**Théorème 3.0.2** [4] *Soit l'application* $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *linéaire et nullpotente ,alors la fonction* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *est E-convexe sur* $\mathbb{R}^n$ *ssi E-épigraphe est* $(E \times I)$ *-convexe sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*.*
*où* $E-\ e(f) = \{(x, \alpha) \in M \times \mathbb{R} / f(E(x)) \leq \alpha\}$ .

**Preuve:** Supposons que $f$ est E-convexe, soient $(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2) \in E - e(f)$ et $t \in [0,1]$ . on vérifier que :

$$t\,(E \times I)\,(x_1, \alpha_1) + (1-t)\,(E \times I)\,(x_2, \alpha_2) \in E - e\,(f)$$

où bien :

$$(tE(x_1) + (1-t)E(x_2), t\alpha_1 + (1-t)\,\alpha_2) \in E - e\,(f)\,.$$

D'aprés la condition de l'inclusion dans $E - e(f)$ on a :

$$\begin{aligned} f(E(tE(x_1) + (1-t)E(x_2))) &= f(tE(x_1) + (1-t)E(x_2)) \\ &\leq tf(E(x_1)) + (1-t)f(E(x_2)) \\ &\leq t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2 \end{aligned}$$

ainsi $\quad t\,(E \times I)\,(x_1, \alpha_1) + (1-t)(E \times I)(x_2, \alpha_2) \in E - e(f)$.

Pour l'inverse de l'équivalence :

Supposons que $E - e(f)$ est $(E \times I)-$convexe , pour tout $x_1, x_2 \in M$

Il est claire que : $(x_1, f(E(x_1))), (x_2, f(E(x_2))) \in E - e(f)$

alors si $t \in [0, 1]$ □

$$\begin{array}{rl} t(E \times I)(x_1, f(E(x_1))) + (1-t)(E \times I)(x_2 f(E(x_2))) & \in E - e(f). \\ t(E(x_1), f(E(x_1)) + (1-t)(E(x_2), f(E(x_2)) & \in E - e(f). \\ (tE(x_1) + (1-t)E(x_2), tf(E(x_1)) + (1-t)\,f(E(x_2))) & \in E - e(f). \end{array}$$

**Preuve:** donc

$$f(tE(x_1) + (1-t)E(x_2)) \;\; \leq \;\; tf(E(x_1)) + (1-t)f(E(x_2)) \ .$$ □

**Théorème 3.0.3** [4] *Soit $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire et nulpotente , $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurment. supposons qu'il existe un $\alpha \in ]0, 1[$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ , $s, t \in \mathbb{R}$ , $f(E(x)) < s$ , $f(E(y)) < t \Longrightarrow f(\alpha E(x) + (1-\alpha)E(y)) < \alpha s + (1-\alpha)t$ , alors $f$ est E-convexe.*

***Preuve:*** *D'après le théorème $(3, 0, 1)$, il suffit de montrer que $E - e(f)$ est $E \times I$-convexe en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $(x_1, \alpha_1)$, $(x_2, \alpha_2)$ $\in E - e(f)$ (avec $x_1$ ,$x_2 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$) et $\alpha_0 \in ]0, 1[$telle que :*

$$(\alpha_0 E(x_1) + (1-\alpha_0)E(x_2) \ , \ \alpha_0\alpha_1 + (1-\alpha_0)\alpha_2) \quad \notin \quad E - e(f) \quad .$$

*soit $x_0 = \alpha_0 E(x_1) + (1-\alpha_0)E(x_2)$ et $\lambda_0 = \alpha_0\alpha_1 + (1-\alpha_0)\alpha_2$ ,alors $(x_0, \lambda_0) \notin E - e(f)$ .*

*comme $E$ est nulpotente , alors $(E(x_1), \alpha_1)\,, (E(x_2), \alpha_2) \in E - e(f)$.*

*Soit*

$$A = E - e(f) \cap [(E(x_1), \alpha_1)\,, (x_0, \lambda_0)]$$

*et*

$$B = E - e(f) \cap [(x_0, \lambda_0)\,, (E(x_2), \alpha_2)]$$

*D'aprés la semi-continuité inférieurment de $f$ , et la continuité de $E$(linéaire sur $\mathbb{R}^n$) alors epi$(f \circ E) = E - e(f)$ est semi continue .*

*$A$ et $B$ sont des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ;*

*Puisque epi$(f \circ E) = E - e(f)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ d'aprés la proposition $(3, 0, 4)$ ,le segment $[(E(x_1), \alpha_1)\,, (x_0, \lambda_0)]$ est fermé*

*donc l'intersection de deux fermé est fermé .*

*et comme : $E - e(f) \cap [(E(x_1), \alpha_1)\,, (x_0, \lambda_0)] \subset [(E(x_1), \alpha_1)\,, (x_0, \lambda_0)]$*

*et le segment* $[(E(x_1), \alpha_1), (x_0, \lambda_0)]$ *est bornée ;*

*donc* $A$ *et* $B$ *sont des sous-ensembles bornés donc compactes de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *.*

*On obtient aussi* $(x_0, \lambda_0) \notin A$ *et* $(x_0, \lambda_0) \notin B$*.*

*Ils existent donc* $Z_A = (x_3, \alpha_3) \in A$ *et* $Z_B = (x_4, \alpha_4) \in B$

*tells que*

$$\min_{Z \in A} \|Z - (x_0, \lambda_0)\| = \|Z_A - (x_0, \lambda_0)\|$$

*et*

$$\min_{Z \in B} \|Z - (x_0, \lambda_0)\| = \|Z_B - (x_0, \lambda_0)\|$$

*Par conséquence , on trouve*

$$]Z_A, Z_B[ \cap E - e(f) = \phi \qquad (1)$$

*D'autre part, puisque*$Z_A \in E - e(f)$ *et* $Z_B \in E - e(f)$ *, on obtient* $f(E(x_3)) < \alpha_3 + \varepsilon$ *,* $f(E(x_4)) < \alpha_4 + \varepsilon$ *pour chaque* $\varepsilon > 0$*.*

*Puisque* $\alpha(\alpha_3 + \varepsilon) + (1 - \alpha)(\alpha_4 + \varepsilon) = \alpha\alpha_3 + (1 - \alpha)\alpha_4 + \varepsilon$*. Par l'hypothèse du théorème, nous obtiens* $$f(\alpha E(x_3) + (1 - \alpha)E(x_4)) \leq \alpha\alpha_3 + (1 - \alpha)\alpha_4 + \varepsilon$$

*Puisque* $\varepsilon$ *est un nombre réel positif arbitraire, il s'ensuit que*

$$f(E(\alpha x_3 + (1 - \alpha)x_4)) \leq \alpha\alpha_3 + (1 - \alpha)\alpha_4 \qquad (2)$$

*En utilisant* (2) *nous obtenons*

$$(\alpha x_3 + (1 - \alpha)x_4, \alpha\alpha_3 + (1 - \alpha)\alpha_4) \in E - e(f)$$

*donc*

$$\alpha Z_A + (1 - \alpha)Z_B \in E - e(f)$$

*ce qui contradiction avec* (1)*. Ainsi, nous concluons que* $E - e(f)$ *est* $E \times I$*-convexe.*

*Sur les fonctions* $E$*-convexes et semi-*$E$*-convexes.* □

**Théorème 3.0.4** [4] *Soient l'application* $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineaire et nulpotente ,* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *semi-continue inférieurment Alors* $f$ *est* $E$*-convexe si et seulement s'il existe un* $t \in ]0, 1[$*tel que pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(tE(x) + (1 - t)E(y)) \leq tf(E(x)) + (1 - t)f(E(y)) \ .$$

**Preuve:** Suit du théorème (3.0.3), avec $s = f(E(x)) + \varepsilon$ et $t = f(E(y)) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ , puis prendre $\varepsilon \to 0$ □

**Théorème 3.0.5** [4] *Soit* $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une aplication linéaire et nulpotente,* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *semi-continue inférieurment . Alors* $f$ *est* $E$*-convexe si et seulement si pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^n$*,il existe un* $\alpha \in ]0,1[$ $(\alpha$ *dépend de* $x, y)$ *telle que :*

$$f(\alpha E(x) + (1-\alpha)E(y)) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \tag{3}$$

**Preuve:** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $E$-convexe. De la définition (1.3.1), il s'ensuit que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, il existe un $\alpha \in ]0,1[$ telle que (3) est verifié.

Pour le Par contre, d'après le théorème (3.0.2), il suffit de montrer que $E - e(f)$ est $(E \times I)$-convexe en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Par l'absurde :

Supposons qu'il existe $(x_1, \alpha_1)$ , $(x_2, \alpha_2) \in E - e(f)$ (avec $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$) et $\alpha_0 \in ]0,1[$ telle que :

$$(\alpha_0 E(x_1) + (1-\alpha_0)E(x_2)\ ,\ \alpha_0\alpha_1 + (1-\alpha_0)\alpha_2) \quad \notin \quad E - e(f)$$

soit $x_0 = \alpha_0 E(x_1) + (1-\alpha_0)E(x_2)$ et $\lambda_0 = \alpha_0\alpha_1 + (1-\alpha_0)\alpha_2$ ,alors $(x_0, \lambda_0) \notin E - e(f)$ on suit la preuve de théorème (3.0.3) . par la difinition de $A, B, Z_A = (x_3, \alpha_3)\,, Z_B = (x_4, \alpha_4)$ on trouve :

$$]Z_A, Z_B[ \cap epi\,(f) = \phi \tag{4}$$

D'autre part , et avec l'hypothése de théorème , pour $x = x_3$ et $y = x_4$,il existe un $\alpha \in ]0,1[$ telle que

$$f\left(\alpha E\left(x_3\right) + (1-\alpha)\,E\left(x_4\right)\right) \leq \alpha f\left(E\left(x_3\right)\right) + (1-\alpha)\,f\left(E\left(x_4\right)\right) \tag{5}$$

On utilise (5) ,on trouve :

$$f\left(E\left(\alpha x_3 + (1-\alpha)\,x_4\right)\right) \leq \alpha\alpha_3 + (1-\alpha)\,\alpha_4$$

alors

$$\alpha Z_A + (1-\alpha)\,Z_B \in E - e\,(f)$$

par contradiction avec (4). alors,on conclurte $E - e\,(f)$ est $E \times I-$convexe. □

Avec les relation des théorèmes (3.0.4) et (3.0.5) et $E = Id_{\mathbb{R}}$ on a les résultats suivants consernant les fonctions convexes .

**Théorème 3.0.6** [4] *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *semi-continue inférieurment .Alors* $f$ *est convexe si et seulement s'il existe un* $\alpha \in ]0,1[$*tel que pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

**Corollaire 3.0.1** [4] *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurment .*
*Alors $f$ est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,*

$f(\frac{1}{2}(x+y)) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$

**Théorème 3.0.7** [4] *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ semi-continue inférieurment .*
*Alors $f$ est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ , il existe un $\alpha \in ]0,1[$ ($\alpha$ dépend de $x, y$) telle que :*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

# Bibliographie


[1] .X.M. Yang, On E-convex set, E-convex function and E-convex programming, J. Optim. Theory Appl. 109 (2001) 699–703.

[2] . Youness, E. A : E-convex sets, E-convex functions and E-convex programming. J. Optim. Theory Appl.102(3), 439-450(1999)

[3] . Chen, X : Some properties of semi-E-convex functions. J. Math. Anal. Appl. 275, 251-262 (2002)

[4] . G. Dalmaso , An Introduction to convergence , BirKhuser , Boston, (1993) . http : / /dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0327-8

[5] . Syau, Y-R, Lee, ES : Some properties of E-convex functions. Appl. Math. Lett. 18, 1074-1080 (2005)

[6] . Iqbal, A, Ahmad, I, Ali, S : Some properties of geodesic semi-E-convex functions. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 74, 6805-6813 (2011)

[7] . Iqbal, A, Ali, S, Ahmad, I : On geodesic E-convex sets, geodesic E-convex functions and E-epigraphs. J.Optim. Theory Appl. (2012), (Article Available online)

[8] .LUPSA, L., Slack convexity with respect to a given set, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation, and Convexity, Babes-Bolyai University Publishing House, Cluj-Napoca, Romania, pp. 107–114, 1985, (in Romanian)

[9] .DUCA,D. I., and LUPSA¸ L.,On the E-epigraph of an E-convex function , Journal of Optimization Theory and Applications,Vol.129, No. 2, pp. 341–348, 2006.

[10] . I.A. Abou-Tair, W.T. Sulaiman, Inequalities via convex functions, Internat. J. Math. Math. Sci. 22(1999) 543–546.

[11] . M.A. Noor, Fuzzy preinvex functions, Fuzzy Sets and Systems 64 (1994) 95–104.

[12] . YANG, X.M., On E-convex sets, E-convex functions, and E-convex programming,Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 109, pp. 699–704, 2001.

[13] .CHEN,X.S., Some properties of semi-E-convex functions , Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol 275,pp 251–262, 2002.