الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY

Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

EXITENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION FRACTIONNAIRE

Réalisé par : **TOUMI Nasreddine**

Dirigé par : **M. HAKKAR Naima**

Membres de jury :

M.NASRALLAH Ilham **Président**
M. SAHRAOUI Alaeddine **Examinateur**
M. CHATTOUH Abdeldjalil **Invité**

2022-2023

Dédicace

Au début et avant tout, je rends grâce à Dieu tout puissant, qui m'a aidé à terminer ce travail.
Je dédie ce mémoire,

À mes chers parents pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

À ma chère grand-mère, chère à mon cœur, tout au long de mon parcours universitaire, elle m'a encouragée et poussée à aller de l'avant, et je n'oublie pas ses prières et ses prières pour l'excellence,

À ma chère sœur pour ses encouragements constants et son soutien moral, À mes chers frères pour leurs soutiens et leurs encouragements,

À toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

À tous mes amies qui m'ont toujours encouragé à continuer et à exceller.

Remerciement

Merci à Dieu le tout puissant miséricordieux qui m à donné La force et le patience d'accoupler Ce travail.

Je tiens à exprimer ma plus grande de reconnaissance et mes vifs remerciements à mon directeur de recherche " **Hakkar Naima**" pour Ces conseils , ses orientations.

Je remercie aussi tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Mes remerciements s'étendent avale ment à tous les travailleurs du département du mathématique et l'informatique

ملخص

تظهر المعادلات التفاضلية الكسرية تلقائيا في مختلف المجالات العلمية
تتمثل الكفاءة الكبيرة لهذا النوع من المعادلات في نمذجة العديد من الظواهر سواء كانت طبيعية أو فيزيائية مما شجع العديد من الباحثين على دراسة مسائل من هذا النوع
الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة وجود ووحدانية الحلول للمعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية، وتخصصنا في دراسة مسائل من نوع كوشي، حيث تم استخدام المشتقات الكسرية بمعنى ريمان-لوفيل، والاعتماد على تقنيات مكيفة على حسب نوع المسالة، منها الخطية و غير الخطية
الكلمات المفتاحية : فضاء لوبيغ، مؤثر ريمان- ليوفيل، مؤثر كابتو، تحويل لبلاص، مسألة كوشي

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires apparaissent automatiquement dans divers domaines scientifiques.
La grande efficacité de ce type d'équations est représentée dans la modélisation de nombreux phénomènes, qu'ils soient naturels ou physiques, et cela a encouragé de nombreux chercheurs à étudier des questions de ce genre.
Le but de cette thèse est d'étudier l'existence et l'unicité des solutions aux équations différentielles d'ordres fractionnaires.
Nous nous sommes spécialisés dans l'étude des problèmes de type Cauchy, où les dérivées fractionnaires étaient utilisées au sens de Riemann-Louville, et en nous appuyant sur techniques adaptées selon le type de problème, y compris linéaires et non linéaires
les mot clées : Espace de Lebesgue, L'opérateur de Riemann-Liouville, L'opérateur de Caputo, Transformation de Laplace, problème de Cauchy

Abstract

Fractional differential equations appear automatically in various scientific fields.
The great efficiency of this type of equations is represented in the modeling of many phenomena, whether natural or physical, which has encouraged many researchers to study questions of this kind.
The purpose of this thesis is to study the existence and uniqueness of solutions to differential equations of fractional orders, and we have specialized in the study of Cauchy-type problems, where fractional derivatives have been used in the sense of Riemann-Lovell, and the use of techniques. For problem type including linear and non linear
Key words : Lebesgue spaces, Riemman-Liouville operator,Caputo operator, Laplace transform, Cauchy problem

Table des matières

Dédicace **2**

Remerciement **3**

Notation **7**

Introduction **8**

1 Préliminaire **10**

Préliminaire **10**

1.1 Espaces des fonctions continues et absolument continues 10
1.1.1 Quelques propriétés d'analyse réel 11
1.1.2 Quelques éléments de topologie 12
1.2 Théorèmes du point fixe 13
1.2.1 Principe du point fixe 13

2 Calcul Fractionnaire **16**

2.1 Fonction Utiles 16
2.1.1 Fonction Gamma et ses propriétés 16
2.1.2 Fonction Bêta 19
2.1.3 Lien entre la fonction Gamma et la fonction Béta 20
2.1.4 Fonction Mittag-Leffler 21
2.1.5 Formule de Dirichlet 22
2.2 L'intégrale et dérivée fractionnaire 23
2.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a,b]$ 23
2.2.2 L'intégrale de Riemann-Liouville 24
2.2.3 Exemples d'intégrales d'ordre fractionnaire 25
2.3 Dérivation fractionnaire 27
2.3.1 Dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville 27
2.3.2 Dérivée fractionnaire au sens Caputo 29
2.3.3 Relation entre la dérivéé de Riemann-Liouville et de Caputo 31
2.3.4 Equations et systèmes d'équations différentielles fractionnaire 31
2.4 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire 32

2.4.1 Propriétés de la transformée de Laplace 33
2.4.2 La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres 34
2.4.3 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo 34

3 EXISTENCE ET UNICITÉ D'UN PROBLÈME DE CAUCHY POUR EDF **36**
3.1 Problème fractionnaire de type Cauchy au sens Riemann-Liouville 36
3.1.1 Position du problème 36
3.1.2 Equivalence entre le problème de type Cauchy et l'équation intégrale de Volterra 39
3.1.3 Existence et unicité de la solution du probléme de type Cauchy 42
3.2 Equations différentielles fractionnaires 45
3.2.1 Equation différentielle fractionnaire à un seul terme 45
3.2.2 Equation différentielle fractionnaire à deux termes 45

Conclusion & Perspectives **47**

Bibliography **48**

Notation

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réel
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes
$\|.\|$	La norme.
$\Gamma(z)$	La fonction Gamma de la variable z .
$B(x;y)$	La fonction Bêta de variable x et y.
$E_\alpha(z)$	La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.
$E_{\alpha;\beta}(z)$	La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
I_a^α	Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.
${}^{RL}D_a^\alpha f$	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f.
${}^{C}D_a^\alpha f$	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f.
$\mathscr{L}$	La transformée de Laplace .
$\mathscr{L}^{-1}$	La transformée de Laplace inverse.
s	Paramètre dans la transformation de Laplace .
$C(J;R)$	Espace des fonctions continues sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Introduction

L'objectif du calcul fractionnaire est de généraliser la définition traditionnelle de la dérivation entière d'une fonction a la dérivation d'ordre non entier . Historiquement, la dérivée d'ordre non entier apparu a la fin de 1695 où L'Hopital a posé une question a Leibniz de connaitre la la signification de $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. En 1738, Euler a remarqué le problème de la dérivée d'ordre non entier . En 1822, Fourier a proposé une représentation intégrale afin de définir la dérivée, et sa version peut être considérée comme la première définition de la dérivée d'un ordre arbitraire (positif) . Abel, en 1823, a résolu une équation intégrale associée au problème des tautochrones, qui est considérée comme la première application du calcul fractionnaire. En 1832, Liouville a proposé une définition basée sur la formule de dérivée de la fonction exponentielle. Cette expression est connue comme première définition logique pour la dérivée fractionnaire. La deuxième définition de Liouville, est présentée en termes d'intégrale et s'appelle la version de Liouville pour l'intégration d'ordre non entier.
Après une série d'ouvrages de Liouville, l'article le plu important a été publié par Riemann (1847) . Donc, l'approche de Riemann -Liouville est donnée par une intégrale . Grunwald (1867) et Letnikov (1868) ont développé une approche de la dérivée fractionnaire en termes de série convergent . Letnikov a montré que sa définition coïncide avec le version de Liouville. En 1892, Hadamard a publié un article dans lequel la dérivée d'ordre non entier d'une fonction analytique doit être effectuée en termes de sa série de Tylor .
Après 1900, le calcul fractionnaire connait un développement rapide et d'autres définition ont été proposée. Nous citons a titre d'exemple : Weyl en 1917 a introduit une dérivée fractionnaire afin de contourner un problème impliquant une classe particulière de fonctions, les fonctions périodiques. Riesz en 1939 et en 1949 a démontré le théorème de la valeur moyenne pour les intégrales fractionnaires et introduit une autre formule associée a la transformée de Fourier. En 1927, Marchaud a proposé une nouvelle définition pour la dérivée fractionnaire. Cette définition coïncide avec la version de Liouville pour certaines fonctions. En 1940, Erdélyi-Kober a présenté d'autre définition qui est utile dans les équations intégrales et différentielles. En 1967, Caputo a proposé une définition plus restrictive que la définition de Riemann -Liouville mais plus appropriée pour les équations différentielles fractionnaires avec conditions initiales (problème de Cauchy). Aprés la premiére conférence a l'Université de New Haven, en juin 1974, le calcul fractionnaire s'est développé et plusieurs applications ont apparu dans de nombreux domaines scientifique. En 1974, Oldham et spanier ont écrit le premier livre du calcul fractionnaire qui regroupe des définitions et ses propriétés des opérateurs intégro-différentielles d'ordre fractionnaire. Sur le plan mathématique, il fautcuter le livre de Samko,

Kilbas et Marichev paru en 1993, qui regroupe un ensemble de définitions et de théories importantes sur le calcul fractionnaire . En 1999, Podlubny a écrit un livre qui présente plusieurs applications issues du calcul fractionnaire. Aprés 2000, plusieurs conférences, livres et articles a été écrit sur la théorie et l'application du calcul fractionnaire.
Aujourd'hui, les équations différentielles et intégrales fractionnaires ont attiré l'attention de nombreux chercheurs en raison d'un large éventail d'application dans plusieur domaines de la sciences tels que la physique, chimie, la biologie, l'ingénierie et la finance. Dans tous ces domaines scientifique, il est important de trouver des solution exacte ou approximatives a ces équation. L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'une équation fractionnaire. Ce mémoire se compose d'un total de trois chapitres comme suite :

Chapitre 1 (Préliminaire) : Fournit quelque définitions de base et les propriétés de tels sujets de l'analyse mathématique que les espace fonctionnelle

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions spécifiques ainsi que quelques définitions et propriétés sur les dérivée et intégrales fractionnaire utiles tout au long de ce mémoire et la transformation de Laplace.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy de l'équation différentielle linéaire et non linéaire d'ordre fractionnaire.

1 Préliminaire

Ce chapitre regroupe les outils mathematiques utilisés dans les autres chapitres, à savoir, les notions de bases, fonctions spéciales, et enfin le fameux théorème de point fixe de Banach.

1.1 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Dans cette section, on trouve les espaces, quelques ensembles et applications utiles dans notre etude.

Définition 1.1: (Espace de Lebesgue) [6]
Soit $\Omega = (a; b)(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ un intervalle fini ou infinie de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$.

1. Si $1 \leq p < \infty$ l'espace $L^p(\Omega)$
$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$
2. pour $p = \infty$
$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable,} \exists \text{ une constante } C \text{telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \right\}.$$
La fonctionnelle $||.||_{L^\infty}$ définie par
$$||f||_{L^\infty} = inf \left\{ C; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \right\}$$
et une norme pour $p = \infty$.

Définition 1.2: [6]
Soit $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle fini. On désigne par $AC[a, b]$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables au sens de Lebesgue
$$f \in AC[a, b] \quad f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt \quad (\varphi(t) \in AC[a, b])$$
et on appelle $AC[a, b]$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$

Définition 1.3: [6]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $AC^n[a,b]$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continues sur $[a,b]$ telles que $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$

$$AC^n[a,b] = \left\{ f[a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad et \quad f^{(n-1)} \in AC^n[a,b] \right\}$$

En particulier $AC^1[a,b] = AC[a,b]$

1.1.1 Quelques propriétés d'analyse réel

Définition 1.4
Soit X un espace vectoriel sur un corps $K(\mathbb{R} ou \mathbb{C})$ et d une application de XX dans $\mathbb{R}_+$: On dit que d est une distance si d vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $\forall (x;y) \in X^2 : \quad d(x;y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
2. $\forall (x;y) \in X^2 : \quad d(x;y) = d(y;x).$
3. $\forall (x;y;z) \in X^3 : d(x;z) \leq d(x;y) + d(y;z).$

Le couple $(X;d)$ est appele espace métrique.

Exemple 1.1.1 *$(C[a,b], \mathbb{R}(d_\infty))$ l'espace des fonctions continues sur $[a;b]$ a valeur dans $\mathbb{R}$ muni de la distance*

$$d_\infty(f,h) = sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - h(x)|.$$

est un espace métrique

Définition 1.5: (Suite de Cauchy)
soit $(X;d)$ un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite des éléments dans X. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \text{telle que } \forall p,q \geq N_0, \quad d(x_p - x_q) \leq \epsilon.$$

Définition 1.6: (Espace métrique complet)
Un espace métrique $(X;d)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de X converge dans X

Définition 1.7: (La continuité)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est continue si elle est continue en tout point de R. En d'autres termes, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en a si :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition 1.8: (Applications uniformément continues)
Soient (X, d) et $(X^{'}, d^{'})$ des espaces métriques. Une application $f : X \longrightarrow X^{'}$ est dite uniformément continue si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ tel que

$$\forall (x, y) \in X^2, \quad d(x, y) < \alpha \Longrightarrow d^{'}(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Définition 1.9: (Intégrale de Gauss)
Une intégrale de Gauss est l'intégrale d'une fonction gaussienne sur l'ensemble des réels. i.e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \text{telle que } a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$$

Définition 1.10: (Produit de convolution)
Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes f et g sont intégrables est :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt.$$

1.1.2 Quelques éléments de topologie

Définition 1.11: La norme
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}(\mathbb{R}\ ou \mathbb{C})$. On appelle une norme sur E toute application $||.|| : E \longrightarrow \mathbb{R}_{+}$ vérifie

1. $\forall x \in E : \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : \quad ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||.$
3. $\forall (x, y) \in E^2 : \quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inégalité traingulaire)

Le couple $(E; ||.||)$ est ***appele espace vectoriel normé***.

Exemple 1.1.2 *L'espace $C(J; R)$ muni de la norme*

$$||y||_{\infty} = \sup\{|y(t)| : t \in J\}$$

Définition 1.12: (Espace de Banach) [12]
On appelle ***espace de Banach*** tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Exemple 1.1.3 *$C(J; \mathbb{R})$ espace des fonctions continues sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est de Banach.*

Définition 1.13: (Parties ouvertes) [12]
Soit E un espace métrique. ***Une partie*** A de E est appelée ***ouverte*** si, toutes les fois qu'elle contient un point de E, elle contient au moins une boule ouverte (de rayon > 0)ayant pour centre ce point. i.e

$$(\forall x \in A) \quad (\exists \rho > 0): \quad B_0(x,\rho) \subset A.$$

Définition 1.14: (Parties fermées) [12]
On appelle ***partie fermée*** de E toute partie de E dont le complémentaire est ouvert.

Exemple 1.1.4 *Toute boule fermée est une partie fermée.*

Définition 1.15: Opérateurs Linéaire Bornés [2]
Soit E un espace vectoriel normé, ***on appelle opérateur linéaire borné***. Toute application linéaire continue de E dans E.

- Si A est un opérateur linéaire borné, alors

$$(\forall x \in D_A): \quad \|Ax\| \leq \|A\|.\|x\|.$$

où la norme de A étant définie par

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{x\in D_A} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Définition 1.16: (Opérateur compact) [7]
L' opérateur A ***est dit compact*** si l'image de l'ensemble $X \subset \mathbb{R}$ par A c'est à dire l'ensemble $A(X)$ est relativement compact.

1.2 Théorèmes du point fixe

1.2.1 Principe du point fixe

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers génères d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné [3].

Définition 1.17: (Point fixe) [3]
oit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $x \in E$, tel que $T(x) = x$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T.

***Théorème 1.1:* [3]**
Soit** T **un opérateur continu dans un espace de Banach** E **dans luimême, et on définit la suite** (x_m) **par

$$x_{m+1} = T(x_m), \quad m = 0, 1, \ldots \tag{1.1}$$

qui converge vers** $x = x^*$**, pour** $x_0 \in E$**, alors** x^* **c'est le point fixe de l'opérateur** T**, c'est-à-dire

$$x^* = T(x^*) \tag{1.2}$$

***Théorème 1.2:* [3]**
Soit** T **un opérateur d'un espace de Banach** E **dans lui-même,** T **est une contraction (ou application contractante), s'il existe une constante** $0 < k < 1$ **telle que, pour tout** $x, y \in E$**, on a

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\| \tag{1.3}$$

Remarque 1.2.1

1. Si $k \geq 0$ dans la relation (1.3), T est dit Lipschitzienne
2. L'application Lipschitzienne est nécessairement continue
3. Si $k = 1$ dans la relation (1.3), T est dit non expansive

Théorème 1.3
Soit** E **un espace de Banach et** F **un sous-ensemble fermé de** E**. Soit** f **une application contractante de** F **dans** E**, alors il existe un unique** $z \in F$**, tel que

$$f(z) = z.$$

Théorème 1.4
Si** T **un opérateur continu dans un espace de Banach** E**, tel que pour** $m \in N$**, l'opérateur** T^m **est contractant, alors l'équation** $T^m x = x$**, admet une seule solution, cette solution c'est le point fixe.

Théorème 1.5: (Picard)
Si E est un espace de Banach et f est contractante, alors f admet un unique point fixe

Théorème 1.6: (Schauder)
Soit (E,d) un espace métrique complet, soit X une partie convexe et fermée de E, et soit $A: X \rightarrow X$ une application telle que l'ensemble $Ax : x \in X$ est relativement compact dans E. Alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.7: (Schaefer)
Soient X un espace de Banach et $A: X \rightarrow X$ un opérateur complètement continu, Si l'ensemble

$$\varepsilon = \{u \in X : \lambda A u = u, \textit{pour un certain } \lambda \in]0,1[\},$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe

2

Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au calcul intégral fractionnaire et dérivation fractionnaire, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann Liouville. Nous définissons d'abord certaines fonctions utiles telles que la fonction Gamma, la fonction Béta et la fonction de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire. De telles fonctions sont dites fonctions spéciales et la tranformation de Laplace

2.1 Fonction Utiles

Fonction Gamma, fonction Bêta et fonction Mittag-Leffler sont dites des fonctions spéciales. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire.

2.1.1 Fonction Gamma et ses propriétés

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma on l'appelle aussi fonction d'Euler notée $\Gamma(z)$.

Définition 2.1: La fonction Gamma [10]
La fonction Gamma est une fonction complexe à variable complexe définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \Re e(z) > 0, \quad z \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

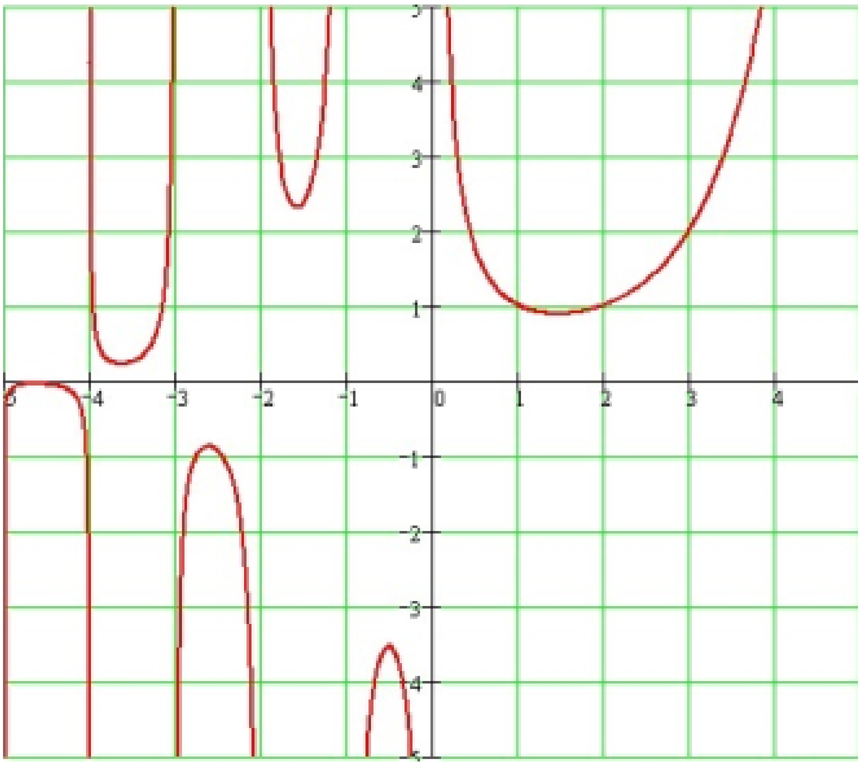

FIGURE 1 : Courbe représentative de la fonction gamma

Proposition 2.1.1

1. $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\ z\in\mathbb{C},$ en particulier $\Gamma(n+1)=n!, \quad \forall n\in\mathbb{N}$
2. Sur l'axe réel on a : $\Gamma(1)=1$ et $\Gamma(0_+)=+\infty$. En plus , elle est continue et strictement positive sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
3. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.
4. $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ et pour les valeurs négatives $\Gamma(-n+\frac{1}{2})=\frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5....(2n-1)}\sqrt{\pi}$

Preuve

1. En utilisan l'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1}e^{-t}\,dt\\ &= \int_0^{+\infty} t^{z}e^{-t}\,dt\\ &= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty}+z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt\\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

On a $\Gamma(1)=0!=1$ et la propriété $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(2)&=1.\Gamma(1)=1!\\ \Gamma(3)&=2.\Gamma(2)=2.1!=2!\\ \Gamma(4)&=3.\Gamma(3)=3.2!=3!\\ \ldots\quad&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ \Gamma(n+1)&=n\Gamma(n)=n(n-1)!=n!\end{aligned}\tag{2.2}$$

2. On a $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=[-e^{-t}]_0^{+\infty}=1$ et $\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}$.
   donc $\Gamma(0_+)=+\infty$.
3. Nous montrons maintenant que $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$
   De la définition (2.1) et le changement de variable $y=\sqrt{t}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2})&=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt\\ &=2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\\ &=2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\quad\text{(d'après l'intégrale de Gauss)}\\ &=\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

   donc $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$
4. En peut facilement démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2})=\tfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}\quad,\quad\text{pour}\quad n\in\mathbb{N}$$

   pour $n=0$, on a $\Gamma(0+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$
   Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et le montrons pour n : on a

$$\Gamma\left((n-1)+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}$$

   est vérifié .Alors

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\frac{1}{2})&=(n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})\\ &=(n-\frac{1}{2})\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}\\ &=\left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}\\ &=\frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-2))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}\\ \Gamma(n+\frac{1}{2})&=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}\end{aligned}$$

Et la même démonstration pour la deuxième l'expression .

Exemple 2.1.1

1. $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.
2. $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$.
3. $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.
4. $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

2.1.2 Fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est préférable d'utiliser la fonction Bêta au lieu de certaines combinaisons de valeurs de la fonction Gamma.

Définition 2.2: fonction bêta [10]
La fonction Bêta ou "fonction de Bessel" est donnée par :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \tag{2.3}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\Re(x) > 0, \quad \Re(y) > 0$

Exemple 2.1.2 *par exemple pour trouver :*

$$\begin{aligned} B(2,3) &= \int_0^1 t(t-1)^2 dt \\ &= \int_0^1 (t - 2t^2 + t^3) dt \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Proposition 2.1.2

1. Le changement de variable $u = 1 - t$ permet de montrer que la fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que :

$$B(x,y) = B(y,x)$$

2. Elle peut prendre aussi les formes intégrales suivants :

$$B(x,y)=\frac{1}{a^{x+y-1}}\int_0^a t^{x-1}(a-t)^{y-1}dt,$$
$$B(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt,$$
$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2x-1}(\theta)cos^{2y-1}(\theta)d0$$

2.1.3 Lien entre la fonction Gamma et la fonction Béta

Proposition 2.1.3

La fonction Bêta est reliée à la fonction Gamma par la relation suivante :
$\forall x, y > 0$ on a :

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{2.4}$$

Preuve

On a

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt \tag{2.5}$$

posons $t = y^2$d'ou $dt = 2ydy$
on a alors

$$\Gamma(p)=2\int_0^{+\infty} y^{2(p-1)}e^{-y^2}ydy$$
$$=2\int_0^{+\infty} y^{2p-1}e^{-y^2}dy$$

et posons $y = x$

$$\Gamma(q)=2\int_0^{+\infty} x^{2p-1}e^{-x^2}dx$$

Multiplition les deux memberx des équations et passons en coordonnées polaire

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2p-1}y^{2p-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (rcos(\theta))^{2q-1}(rsin(\theta))^{2p-1}e^{-r^2}rdrd\theta \\
&= 4\int_0^{+\infty} r^{(2p+q)-1}e^{-r^2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2q-1}(sin\theta)^{2p-1}d\theta \\
&= 2\int_0^{+\infty} r^{(2p+q)-1}e^{-r^2}dr2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2q-1}(sin\theta)^{2p-1}d\theta \\
&= \Gamma(p+q)B(p,q)
\end{aligned}$$

donc

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

2.1.4 Fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, e^z, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante [10] :

$$E_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\quad \alpha>0 \tag{2.6}$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal et elle est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad \alpha>0,\beta>0 \tag{2.7}$$

Remarque 2.1.1

Pour $\beta=1$, on retrouve la relation (2.6)

De la définition (2.7), il résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}+xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$$

En effet, par définition on a,

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Exemple 2.1.3 *La fonction Mittag-Liffler se réduit à des fonctions simples. par exemple,*

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \\
E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x-1}{x} \\
E_{2,1}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = cosh(x)
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.2

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

2.1.5 Formule de Dirichlet

Soient $h(x;y)$ une fonction continue et $\alpha;\beta$ deux réels positifs. L'expression suivante est dite formule de Dirichlet

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}dx\int_0^x (x-y)^{\beta-1}h(x,y)dy = \int_0^t dy\int_y^t (t-x)^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}h(x,y)dy$$

Certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'un intérêt particulier .
Par exemple, si on prend

$$h(x,y) = g(x)f(y)$$

et

$$g(x) = 1$$

Alors :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}dx\int_0^x (x-y)^{\beta-1}f(y)dy = B(\alpha,\beta)\int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1}f(y)dy, \qquad (2.9)$$

où B est la fonction Bêta.

2.2 L'intégrale et dérivée fractionnaire

Les dérivées et les intégrales d'ordre entier, s'interprètent physiquement et géométriquement d'une manière claire en général, c'est pour cette raison que leurs usages dans la résolution des problèmes appliqués dans des différents domaines des sciences est simple.
Les manques de ces interprétations ont été reconnu dans plusieurs conférences internationales sur le calcul fractionnaire. L'absence d'une réponse à cette question a rendu la théorie de la dérivation et l'intégration fractionnaire très mystérieuse. Par conséquent, il restait toujours un des problèmes ouverts. La dérivation et l'intégration fractionnaire sont des généralisations de la dérivation et l'intégration d'ordre entier. Pour ceci, il serait très intéressant d'avoir les interprétations physique et géométrique des opérateurs d'ordre fractionnaire qui fourniront un lieu aux interprétations classiques des dérivations et intégrations d'ordre entier. L'interprétation physique de l'intégration et de la dérivation fractionnaires repose sur l'utilisation de deux types de temps : le temps cosmique et le temps individuel, par contre le calcul différentiel et intégral classique est basé sur l'utilisation du temps mathématique

2.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère les intégrales suivante :

$$\begin{aligned}
I^1 f(x) &= \int_a^x f(t)dt, \\
I^2 f(x) &= \int_a^x I^1 f(u)du = \int_a^x \left(\int_a^u f(t)dt\right)du \\
&= \int_a^x \left(\int_t^x du\right) f(t)dt = \int_a^x (x-t) f(t)dt
\end{aligned}$$

plus généralement le n^{ime} itération de l' Opérateur I peut s'écrire

$$\begin{aligned}
I^n f(x) &= \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 \int_a^{x_3} dx_3 \ldots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (x-t)^{n-1} f(t)dt
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Pour tout entier n.
Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, Riemann rendu compte que le second membre de (2.10) pourait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

2.2.2 L'intégrale de Riemann-Liouville

Définition 2.3: [14]
Si $f \in L^p(a;b), (1 \leq p \leq +\infty)$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale :

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \quad \text{tell que} \quad a \in \mathbb{R}$$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α,
et l'intégrale :

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \quad \text{tell que} \quad b \in \mathbb{R}$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α

Remarque 2.2.1

Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).

Proposition 2.2.1

Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0([a;b])$.

1. $I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f) = I_a^{\alpha+\beta} f \quad (Re(\alpha) > 0, \quad Re(\beta) > 0$
2. $\frac{d}{dt} I_a^{\alpha} f(t) = I_a^{\alpha-1} f(t), \quad (Re(\alpha) > 0, \quad Re(\beta) > 0$

Preuve

1. Pour la démonstration on utilise la fonction Bêta. En effet :

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-r)^{\alpha-1} (I_a^{\beta} f(r))dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-r)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^r (r-t)^{\beta-1} f(t)dt \right) dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-r)^{\alpha-1} dr \int_a^r (r-t)^{\beta-1} f(t)dt. \end{aligned}$$

D'après la formule de Dirichlet (2.9),

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f(x)) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt = I_a^{(\alpha+\beta)} f(x). \end{aligned}$$

D'où la première égalité.

2. On montre maintenant la deuxième égalité

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right).\end{aligned}$$

Puisque $f(t)$ et $(x-t)^{\alpha-1}$ sont continues donc l'application : $t \to (x-t)^{\alpha-1} f(t)$ est continue, et on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{d}{dx}((x-t)^{\alpha-1} f(t))dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t)dt\\ &= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)dt\\ &= I_a^{\alpha-1} f(x).\end{aligned} \tag{2.12}$$

D'où le résultat

2.2.3 Exemples d'intégrales d'ordre fractionnaire

Exemple 2.2.1 *Considérons la fonction $f(x) = x^\beta$ En remplaçant dans la dé...nition de l'intégrale de Riemann-Liouville, on obtient :*

$$I^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt. \tag{2.13}$$

En faisant le changement de variable : $t = ux$ alors $u = \frac{t}{x}$
on obtient :

$$\begin{aligned}I^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} x^{\alpha-1}(xu)^\beta du\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} x^{\alpha-1}(xu)^\beta du\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha)\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

D'où :

$$I^{\alpha}x^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}$$

La formule précédente est une généralisation du cas $\alpha=1$

En efet, pour $\alpha=1$ on obtient :

$$I^{1}x^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}x^{\beta+1}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)}x^{\beta+1}=\frac{1}{(\beta+1)}x^{\beta+1}.$$

En particulier, pour $\alpha=\frac{1}{2}$ et pour $\beta=0,1,2$ on a :

$$I^{\frac{1}{2}}x^{0}=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$$I^{\frac{1}{2}}x^{1}=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^{3}}{\pi}}$$

$$I^{\frac{1}{2}}x^{2}=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})}x^{\frac{5}{2}}=\frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^{5}}{\pi}}.$$

De ce qui précède, on déduit que l'intégrale fractionnaire d'ordre α d'une constante k est donnée par :

$$I^{\alpha}k=\frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}.$$

Exemple 2.2.2 *Soient $\alpha>0;\beta>-1$ et $f(x)=(x-a)^{\beta}$ alors :*

$$(I_{a}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}\,dt. \tag{2.14}$$

En effectuant le changement de variable

$$t=a+(x-a)y,\quad (y\in[0;1])$$

Alors (2.14) devient :

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt.\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a-(x-a)y)^{\alpha-1}[x+(x-a)y-x]^\beta (x-a)dy\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1}y^\beta dy\\ &= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^\beta dy\\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{(\beta+1)-1}dy\end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (2.3) *puis de la relation* (2.4)*, on arrive à :*

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1).\\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha,\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

ainsi on obtient :

$$(I_a^\alpha (x-a)^\beta) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{2.15}$$

2.3 Dérivation fractionnaire

Il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie les approches de Riemann-Liouville et de Caputo qui sont les plus utilisées.par exemple dans certains domaines physique faisent intervenir des phénomènes de diffusion comme l'électromagnétisme, l'acoustique ou la thermique [10]

2.3.1 Dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville

Définition 2.4
Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\Re e(\alpha) > 0)$ notée : ${}^{RL}D_a^\alpha f$ ou (D_a^α) est définie par :

$$(D_a^\alpha(f)(x) = D^n\big(I_a^{n-\alpha}f\big)(x)\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt, \tag{2.16}$$

où $n = -[-\alpha]+1$ et $x > a$.

En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$ on a :

$$({}^{RL}D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^x f(t)dt = f(x),$$

$$({}^{RL}D_a^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right)\int_0^x f(t)dt = \frac{d^m}{dx^m} f(x) \tag{2.17}$$

par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique par $\alpha \in \mathbb{N}$

Remarque 2.3.1

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x),$$

tell que : $n = [\Re e(\alpha)] + 1, x > a.$

Exemple 2.3.1

- *Soit $f(x) = (x-\alpha)^\beta$ avec $\beta > -1$.*
  pour $\alpha \geq 0$ tel que $n-1 \leq \alpha \leq n$; on a d'après la définition puis la remarque

  $${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = {}^{RL} D^n I^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}.$$

  Alors ,puis $(\alpha-\beta) \in \{1,2,3,...n\}$ on a :

  $${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = {}^{RL} D_a^\alpha (x-a)^{\alpha-j} = 0, \quad j \in \{1,2,3,...n\},$$

  par ailleurs si $(\alpha-\beta) \notin \{1,2,3,...n\}$, on trouve :

  $${}^{RL}D_a^\alpha (x-\alpha)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{2.18}$$

- *En particulier, si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante $f(x) = c$ au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle, ni constante, mais on a :*

  $${}^{RL}D_a^\alpha c = \frac{c(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Proposition 2.3.1

Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n$, $m-1 \leq \beta \leq m$.

1. Pour $f \in L^1([a;b])$; l'égalité :

   $${}^{RL}D_a^\alpha (I_a^\alpha f(x)) = f(x) \tag{2.19}$$

2. Si $\alpha > \beta > 0$ alors pour $f \in L^1([a;b])$, la relation :

$$ {}^{RL}D_a^{\beta}({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(x) = (I^{\alpha-\beta} f)(x) $$

est vrai pour presque tout $x \in [a;b]$.

3. Si $\beta > \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire ${}^{RL}D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a :

$$ {}^{RL}D_a^{\beta}(I^{\alpha} f)(x) = ({}^{RL}D_a^{\beta-\alpha} f)(x). $$

4. Si $f \in L^1([a;b])$ et $I^{n-\alpha} f \in \mathbb{C}^n([a;b])$, avec $n = [Re(\alpha)+1]$ alors :

$$ [I_a^{\alpha}\, {}^{RL}D_a^{\beta} f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x\to a^+} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f\right](x). $$

Les dérivées fractionnaires de quelque fonctions au sens de Riemann-Liouville

[10]

$f(t)$	$D_t^{\alpha} f(t), (t>0, \alpha \in \mathbb{R})$
$\delta(t)$ Dirac	$\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$
t^{ν}	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} t^{\nu+\alpha} \quad (\nu > -1)$
$e^{-\lambda t}$	$t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t)$
$cosh(\sqrt{\lambda t})$	$t^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(\lambda t^2)$
$\frac{sin(\sqrt{\lambda t})}{\sqrt{\lambda t}}$	$t^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(\lambda t^2)$
$t^{\beta-1} E_{\mu,\beta}(\lambda t^{\mu})$	$t^{\beta-\alpha-1} E_{\mu,\beta-\alpha}(\lambda t^{\mu}) \quad (\beta > 0, \mu > 0)$

2.3.2 Dérivée fractionnaire au sens Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle im- portant dans le développement du calcul fractionnaire, à cause de ses applications dans les Mathématiques pures et appliquées. Cependant, étant donnée que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constant n'est pas nulle et que les conditions initiales du problème de Cauchy sont exprimées par des dérivées d'ordre fractionnaire, Caputo propose une autre approche où la dérivée de la constante est nulle et que les conditions initiales sont exprimées comme dans le cas classique par des dérivées d'ordre entier [10]- [14].

Définition 2.5: Dérivée fractionnaire de Caputo
oient $0 < n-1 < \alpha < n$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^n([a,b])$. La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f est définie par :

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha} f(x) &= I^{n-\alpha}(D^{\alpha} f(x)) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f(s)^n (x-s)^{n-\alpha-1} ds
\end{aligned}$$

Exemple 2.3.2 *Considérons la fonction : $f(x) = x^{\beta}$*
Pour $0 < n-1 < \alpha < n$, on a :

$$\begin{aligned}
{}^{CD}I^{\alpha} f(x) &= I^{n-\alpha}(D^{\alpha} x^{\beta}) \\
D^n x^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-n}
\end{aligned}$$

Par suite :

$$I^{n-\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-n}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1-n)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt$$

on fait le changement de variable :$t = yx$ qui implique : $dt = x dy$ on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt &= \int_0^1 (x-xy)^{n-\alpha-1} (xy)^{\beta-n} x dy \\
&= \int_0^1 x^{n-\alpha-1} (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} x^{\beta-n+1} dy \\
&= \int_0^1 x^{\beta-\alpha} (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\
&= x^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\
&= x^{\beta-\alpha} B(n-\alpha, \beta-n+1) \\
&= x^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}
\end{aligned}$$

D'où

$$I^{n-\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-n}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1-n)} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} x^{\beta-\alpha}$$

et finalement, on obtient

$${}^{C}D^{\alpha} x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-\alpha}$$

En particulier, pour $\beta = 0$, on a :

$$^{C}D^{\alpha}x^{0} =^{C} D^{\alpha}1 = 0$$

Contrairement à la dérivation de Riemann-Liouville la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.

2.3.3 Relation entre la dérivéé de Riemann-Liouville et de Caputo

Le théorème suivante établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

On noté par $^{RL}D_a^{\alpha}$ la dérivée au sens de Riemann-Liouville et par $^{C}D_a^{\alpha}$ la dérivée fractionnaire au sens Caputo.

Théorème 2.1
Soit** $n-1 < \alpha < n$, $\quad (n \in \mathbb{N}^*$ **Supposons que** f **est une fonction telle que

$$^{C}D_a^{\alpha} =^{RL} D_a^{\alpha} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m-\alpha}}{(m-\alpha+1)!} \tag{2.20}$$

De la relation** (2.20)**, on déduit que si

$$f^{(m)}(a) = 0, \quad m = 1, 2 \ldots n-1$$

on aura :

$$^{C}D_a^{\alpha} f =^{RL} D_a^{\alpha} f$$

2.3.4 Equations et systèmes d'équations différentielles fractionnaire

Avant de commencer laisser nous introduire une définition d'une équation différentielle fractionnaire (EDF).

- L'équation différentielle fractionnaire est une équation qui contient une ou des dérivées fractionnaires

Définition 2.6
Soit $\alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathbb{N}, \quad n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alors

$$^{RL}D^{\alpha} y(x) = f(x, y(x)) \tag{2.21}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type **Riemann-Liouville**. Comme conditions initiales pour ce type d'EDF on utilise :

$$^{RL}D^{\alpha} y(0) = b_k; \quad (k = 1, 2, ..., n-1), \quad \lim_{x \to 0^+} I^{n-\alpha} y(x) = b_n$$

De la mème manière

$$^{C}D^{\alpha} y(x) = f(x, y(x)) \tag{2.22}$$

est appelée Èquation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales

$$y(0) = b_k; \quad (k = 0, 2, ..., n-1)$$

Remarque 2.3.2

L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les EDFs Líutilisation de conditions initiales de différents types pour les EDFs (2.21) et (2.22) nous assure l'unicité des solutions de l'EDF correspondante.

- Le système fractionnaire est un système qui est décrit par des équations différentielles fractionnaires.

Il existe plusieurs méthodes analytiques et numériques pour résoudre les équations différentielles et intégrales fractionnaires comme la méthode de décomposition adomienne,la méthode d'itération variationnelle, la méthode de Demirci et Ozalp,la méthode de transformation diférentielle,la méthode d'analyse de l'homotopie . En outre il existe d'autre techniques classiques de solution telles que la tranformation de Laplace,la méthode de la fonction de Green, la transformation de Mellin et la méthode des polynômes orthogonaux.
Dans cette mémoire on vautiliser méthode de transformation de Laplace pour trouver la solution exacte de problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire

2.4 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire

La méthode de transformation de Laplace est un outil extrêmement utile pour résoudre de problèmes de valeurs initiales linéaires (fractionnaires ou classiques).

Définition 2.7: Laplace de la fonction [10]
La fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(x); s\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \tag{2.23}$$

est appelée transformée de Laplace de la fonction $f(x)$

- Pour l'existence de l'intégrale (2.23) la fonction $f(x)$ doit être d'ordre exponentiel α.
- On peut trouver l'originale $f(x)$ de la transformée de Laplace $F(s)$ à l'aide de la transformée de Laplace inverse.
- On note la transformée de Laplace par des lettres majuscules et les originaux en minuscules.
- **la transformée de Laplace inverse est** [10]

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s); x\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx} F(s) ds, \quad c = \mathscr{R}e(s) > c_0$$

où c_0 réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace. Pour indiquer que f est la transformée inverse unique de F .

- **La transformée de Laplace de la convolution** [10]

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(x-t) g(t) dt$$

de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, qui sont égale à zéro pour $x < 0$, est égale au produit de leurs transformées de Laplace :

$$\mathscr{L}\{f(x) * g(x); s\} = F(s) * G(s)$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent.

- **La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire d'un ordre entier n de la fonction $f(x)$:** [10]

$$\mathscr{L}\{f^n(x); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k+1} f^{(n-k)}(0) \tag{2.24}$$

2.4.1 Propriétés de la transformée de Laplace

Soient les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur $[0, \infty)$, les transformées de Laplace des ces fonctions existent pour $s \geq s_0$ comme $s_0 \in \mathbb{R}$

1. Si $f_3 = a_1 f_1 + a_2 f_2$ avec a_1 et $a_2 \in \mathbb{R}$

$$F_3(s) = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

(Linéarité de la transformée de Laplace)

2. Si $f_3(x) = \int_0^x f_1(t) dt$ et $s > \max\{0, s_0\}$

$$F_3(s) = \tfrac{1}{s} F_1(s)$$

3. Soit $a > 0$ et $f_3(x) = f_1(ax)$ .Alors

$$F_3(s) = \tfrac{1}{a} F_1(\tfrac{s}{a})$$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_3(x) = e^{-ax} f_1(x)$. Alors

$$F_3(s) = F_1(s+a)$$

2.4.2 La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres s'écrit sous la forme :

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm a x^\alpha) dx = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}}, \quad (\Re e(s) > |a|^{\frac{1}{\alpha}}) \tag{2.25}$$

Cas particulier de (2.25) pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty e^{-sx} t^{\frac{k-1}{2}} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(k)}(\pm a\sqrt{x}) dx = \frac{k!}{(\sqrt{s} \mp a)^{k+1}}, \quad (\Re e(s) > |a|^2) \tag{2.26}$$

2.4.3 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo

L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re e(\alpha) > 0)$ est définie par la convolution

$$I_{0^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} * f(x) \tag{2.27}$$

et la transformée de Laplace du fonction $x^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$\mathscr{L}[x^{\alpha-1}](s) = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \left(\text{notation } \mathscr{L}[x^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\right) \tag{2.28}$$

d'après la formule (2.27) et (2.28) la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens Riemann-Liouville est la suivant :

$$\mathscr{L}[I_{0^+}^\alpha f](s) = s^{-\alpha} F(s) \tag{2.29}$$

En utilisant la formule (2.24) et (2.29), on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[D_{0^+}^\alpha f](s) &= \mathscr{L}[D_{0^+}^n I_{0^+}^{n-\alpha} f](s) \\
&= s^n \mathscr{L}[I_{0^+}^{n-\alpha} f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1}(I_{0^+}^{n-\alpha} f)(0) \\
&= s^n s^{\alpha-n} \mathscr{L}(f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1}(I_{0^+}^{n-\alpha} f)(0) \\
&= s^\alpha \mathscr{L}(f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1}(D_{0^+}^{\alpha-n} f)(0) \\
&= s^\alpha \mathscr{L}(f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(0) \\
&= s^\alpha \mathscr{L}(f)(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} D^{\alpha-k} f(0)
\end{aligned}$$

de même on applique la formule (2.29) et (2.24), on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{^{c}D_{0^+}^{\alpha}f\}(s) &= \mathscr{L}\{I_{0^+}^{n-\alpha}D_{0^+}^{\alpha}f\}(s)\\
&= s^{\alpha-n}\mathscr{L}(D_{0^+}^{n}f)(s)\\
&= s^{\alpha-n}\Big[s^{n}\mathscr{L}(f)(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0)\Big]\\
&= s^{\alpha}\mathscr{L}(f)(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0)
\end{aligned}$$

Proposition 2.4.1

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est définie par

$$\mathscr{L}\{D_{0^+}^{\alpha}f(x);s\} = s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{k-1}D^{\alpha-k}f(0) \qquad (n-1\le\alpha<n) \tag{2.30}$$

Proposition 2.4.2

La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est définie par :

$$\mathscr{L}\{^{C}D_{0^+}^{\alpha}f(x);s\} = s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0) \quad (n-1\le\alpha<n) \tag{2.31}$$

Tableau récapitule certaines transformations de Laplace de quelque fonctions

Le tableau suivant donne un bref résumé de quelques transformées de Laplace utiles. Nous allons souvent se référer à ce tableau le long de cette thèse. a et b sont deux réels constants $(a \neq b)$ et $\alpha;\beta > 0$

$F(s)$	$\mathscr{L}^{-1}\{F(s);x\}$
$\frac{1}{s^{\alpha}}$	$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^{\alpha}}$	$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-ax}$
$\frac{1}{s^{\alpha}-a}$	$x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ax^{\alpha})$
$\frac{s^{\alpha}}{s(s^{\alpha}+a)}$	$E_{\alpha}(-ax^{\alpha})$
$\frac{a}{s(s^{\alpha}+a)}$	$1-E_{\alpha}(-ax^{\alpha})$
$\frac{1}{s^{\alpha}(s-a)}$	$x^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(ax)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a}$	$x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{ax}-e^{bx})$

3

EXISTENCE ET UNICITÉ D'UN PROBLÈME DE CAUCHY POUR EDF

Dans ce chapitre nous considérons la question de l'existence et de l'unicité de solutions des problèmes de type Cauchy, pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire sur un intervalle fini de l'axe réel dans les espaces des fonctions sommable et des fonctions continues

3.1 Problème fractionnaire de type Cauchy au sens Riemann-Liouville

Dans cette partie nous donnons des conditions pour prouver l'existence et l'unicité du problème fractionnaire de type Cauchy pour des équations différentielles fractionnaires linéaires et non linéaire au sens de Riemann-Liouville.

3.1.1 Position du problème

Le cas linéaire

Dans cette partie, nous discutons sur l'existence et l'unicité de solutions de problèmes de type Cauchy pour des équations différentielles fractionnaires linéaires. On considère le problème fractionnaire de type Cauchy suivant :

$$\begin{cases} D_0^{\alpha} y(x) = f(x), & (\alpha > 0, 0 < x < T < \infty) \\ \left(D_0^{\alpha-k} y\right)(0) = b_k \in \mathbb{R} & k = 1, 2, ..., n \end{cases}. \tag{3.1}$$

Où $f(x) \in L^1(0,T)$, i.e

$$\int_0^T |f(x)| dx < \infty.$$

Théorème 3.1: [10]
***Si** $f(x) \in L^1(0,T)$, **alors le problème** (3.1) **admet une solution unique** $y(x) \in L^1(0,T)$.*

Preuve

Construisons donc une solution du problème considéré. En appliquant, à la première équation de (3.1), la formule de la transformée de Laplace (2.30) d'une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, à savoir

$$\mathscr{L}\{D_{0^+}^{\alpha} y\} = s^{\alpha} Y(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{j-1} D^{\alpha-j} y(0) = F(s) \tag{3.2}$$

Où $Y(s)$ et $F(s)$ désignent les transformées de Laplace de $y(x)$ et $f(x)$. En s'aidant de la condition initiale introduite dans (3.1), on peut écrire

$$Y(s) = s^{-\alpha} F(s) + \sum_{j=1}^{n} s^{j-\alpha-1} b_j \tag{3.3}$$

et la transformée de Laplace inverse donne

$$\mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \mathscr{L}^{-1}[s^{-\alpha} F(s)] + \mathscr{L}^{-1}\Big[\sum_{j=1}^{n} s^{j-\alpha-1} b_j\Big] \tag{3.4}$$

D'après la formule (2.29), on a

$$y(x) = I_{0^+}^{\alpha} f(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j L^{-1}(s^{j-\alpha-1}), \tag{3.5}$$

En utilisant la formule (2.28), on a

$$y(x) = I_{0^+}^{\alpha} f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j x^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \tag{3.6}$$

En utilisant la règle de la différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du fonction polynôme $\left(I_{a^+}^{\alpha} x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha} x^{\alpha-j} &= D_{a^+}^{n} I_{a^+}^{n-\alpha} x^{\alpha-j} \\ &= D_{a^+}^{n} \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(n-j+1)} x^{n-j} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

on aura

$$D_{a^+}^{\alpha} y(x) = D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f(x) = f(x). \tag{3.8}$$

ce qui veut dire que notre $y(x)$ défini par (3.6) est bien solution, dans $L^1(0,T)$, de la première équation de (3.1). Par ailleurs, on sait que(voir la formule (2.18))

$$D_{a^+}^{\alpha-k}x^{\alpha-j}=\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(k-j+1)}x^{k-j}$$

Alors, de (3.6), on a

$$\begin{aligned}
D_{a^+}^{\alpha-k}y(x) &= D_{a^+}^{\alpha-k}I_{0^+}^{\alpha}f(x)+D_{a^+}^{\alpha-k}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_jx^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}\\
&= I_{0^+}^{k}f(x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_jx^{k-j}}{\Gamma(k-j+1)}\\
&= I_{0^+}^{k}f(x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_jx^{k-j}}{(k-j)!}
\end{aligned}$$

D'où $[D_{a^+}^{\alpha-k}y(x)]_{x=0}=b_k$, c'est à dire que les conditions initiales introduite dans (3.1) est bien vérifiée. Par conséquent la fonction construite $y(x)$ est solution du problème (3.1) reste à montrer l'unicité de cette dernière, Pour cela,posons

$$z(x)=y_1(x)-y_2(x)$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions (dans $L^1(0,T)$) du problème (3.1). Et donc $z(x)$ sera solution du problème suivant :

$$\begin{cases} D_0^{\alpha}z(x)=0,\\ \left(D_0^{\alpha-k}z\right)(0)=0. \end{cases} \qquad (3.9)$$

En appliquant la transformée de Laplace dans les deux membres de la première équation de (3.9), on obtient

$$Z(s)=\mathscr{L}\{z(x)\}(s)=0,$$

et donc $z(x)=0$ pour presque tout $x\in(0,T)$, ce qui prouve que la solution $y(x)$ est l'unique solution dans $L^1(0,T)$ du problème (3.1)

Le cas non linéaire

Le "Model" non linéaire d'équation différentielle d'ordre fractionnaire α, ($\Re e(\alpha)>0$) sur un intervalle fini $[a,b]$ de l'axe réel $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ de la forme

$$D_{a^+}^{\alpha}y(x)=f\big[x,y(x)\big],\quad (\Re e(\alpha>0,x>\alpha) \qquad (3.10)$$

Avec les conditions initiales

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k}y\right)(a^+)=b_k,\quad b_k\in\mathbb{C},(k=1,2,...,n) \tag{3.11}$$

dans l'espace $L^{\alpha}(a,b)$ défini pour $\alpha\in\mathbb{C}(\Re e(\alpha)>0)$ par :

$$L^{\alpha}(a,b)=\{y\in L(a,b);D_{a^+}^{\alpha}y\in L(a,b)\}. \tag{3.12}$$

Où $n=[\alpha]+1$ pour $\alpha\notin\mathbb{N}$ et $\alpha=n$ pour $\alpha\in\mathbb{N}$. La notation $(D_{a^+}^{\alpha-k}y)(a^+)$ signifie que la limite est prise à presque tous les points du voisinage du côté droit de $(a,a+\epsilon)(\epsilon>0)$ comme suit :

$$(D_{a^+}^{\alpha-k}y)(a^+)=\lim_{x\to a^+}(D_{a^+}^{\alpha-k}y)(x)\quad(1\le k\le n-1), \tag{3.13}$$

$$(D_{a^+}^{\alpha-n}y)(a^+)=\lim_{x\to a^+}(I_{a^+}^{n-\alpha}y)(x),(\alpha\in n);(D_{a^+}^{0}y)(a^+)=y(a),\quad(\alpha=n) \tag{3.14}$$

Où I^{α} est l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens Riemann-Liouville d'ordre α

En particulier

si $\alpha=n$ puis, conformément aux (2.17) et(3.14), le problème dans ((3.10)-(3.11) est réduit au problème usuel de Cauchy pour l'équation différentielle ordinaire d'ordre $n\in\mathbb{N}$

$$D^{\alpha}y(x)=f[x,y(x)],y^{(n-k)}(a)=b_k,b_k\in\mathbb{C}(k=1,2,...n) \tag{3.15}$$

Quand $0<\Re e(\alpha)<1$, le problème (3.10)-(3.11) prend la forme

$$D_{a^+}^{\alpha}y(x)=f[x,y(x)],(I_{a^+}^{n-\alpha}y)(a)=b,(b\in\mathbb{C}) \tag{3.16}$$

Et aussi on peut écrivez un problème de type Cauchy sous la forme

$$D_{a^+}^{\alpha}y(x)=f[x,y(x)],\lim_{x\to a^+}(x-a)^{1-\alpha}y(x)=c,(c\in\mathbb{C}) \tag{3.17}$$

3.1.2 Equivalence entre le problème de type Cauchy et l'équation intégrale de Volterra

Dans cette partie nous montrons que le problème de type Cauchy (3.10)-(3.11) et l'équation intégrale de Volterra

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt,\qquad(x>a), \tag{3.18}$$

Èquivalente dans le sens que, si $y(t) \in L(a,b)$ satisfait une de ces relations, alors elle satisfait l'autre .

Lemme 3.1.1: [10]
L'opérateur d'intégration fractionnaire I^{α} avec $\alpha \in \mathbb{C}(\Re e(\alpha) > 0)$ est borné dans $L^1(a,b)$:

$$\|I^{\alpha}_{a+}g\|_1 \leq \frac{(b-a)^{\Re e(\alpha)}}{\Re e(\alpha)\Gamma(\alpha)}\|g\|_1$$

En particulier, pour $\alpha > 0$; l'estimation prend la forme suivante :

$$\|I^{\alpha}_{a+}g\|_1 \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|g\|_1 \tag{3.19}$$

D'abord, nous considérons le problème de type Cauchy (3.10)-(3.11) avec un réel $\alpha > 0$ donné par :

$$D^{\alpha}_{a^+}y(x) = f\big[x, y(x)\big], \quad (\alpha > 0), \tag{3.20}$$

$$\big(D^{\alpha-k}_{a^+}y\big)(a^+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C}, (k = 1, 2, ..., n) \tag{3.21}$$

Théorème 3.2: [10]
Soient $\alpha > 0, n = -[-\alpha]$, Soit G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$,
et $f : (a,b)G \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in L(a,b)$ pour toute $y \in G$.
Si $y \in L(a,b)$, alors y satisfait les relation (3.10) − (3.11) si et seulement si, y satisfait l'équation intégrale (3.18) .

Preuve

D'abord nous prouvons la nécessité. Soit $y(x) \in L^1(a,b)$ satisfait les relations (3.10) et (3.11). Depuis que $f(x,y) \in L^1(a,b)$, signifie que $(D^{\alpha}_{a^+}y)(x)$ existe dans $L^1(a,b)$.
Selon (2.16)

$$D^{\alpha}_{a^+}y(x) = D^n(I^{n-\alpha}_{a^+}y)(x), \ (I^0_{a+}y)(x) = y(x) \tag{3.22}$$

et d'aprés (3.22) nous voyons que $I^{n-\alpha}_{a^+} \in AC^n[a,b]$ et comme $(I^{n-\alpha}_{a^+}y)(x) = (D^{\alpha-n}_{a^+}y)(x)$, alors $(D^{\alpha-n}_{a^+}y)(x) \in AC^1[a,b]$. Selon le lemme (3.1.2), l'intégrale $\big(I^{\alpha}_{a+}f\big)(t, y(t))$ existe dans $L(a,b)$. Appliquant l'opérateur $I^{\alpha}_{a^+}$ sur les deux côtés de (3.10)

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a^+}y)(x) = (I^{\alpha}_{a^+}f(x, y(x))(x) \tag{3.23}$$

D'autre part nous avons :

$$I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha}_{a+}y(x)=y(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{y^{n-j}_{n-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}\quad (y_{n-\alpha}=I^{n-\alpha}_{a^+}(x)) \tag{3.24}$$

D'aprés (2.16) nous oubtenons :

$$y^{n-j}_{n-\alpha}(x)=\big(\frac{d}{dx}\big)^{n-j}\big(I^{(n-j)-(\alpha-j)}_{a^+}y\big)(x)=(D^{\alpha-j}_{a^+}y)(x). \tag{3.25}$$

En utilisant cette relation et (3.21), nous réécrivons (3.24)sous la forme

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha}_{a^+}y(x) &= y(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{D^{\alpha-j}_{a^+}y(a^+)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}) \\ &= y(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} \end{aligned} \tag{3.26}$$

D'après (3.23) et (3.26), il vient :

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt,\quad (x>a) \tag{3.27}$$

avec $\alpha>0$. Ce qui prouve la condition nécessaire.
Maintenant, nous prouvons la suffisance. soit $y(x)\in L^1(a,b)$ satisfaisant l'équation (3.18). en appliquant l'opérateur $D^{\alpha}_{a^+}$ aux deux côtés de (3.18), on a

$$D^{\alpha}_{a^+}y(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(D^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\alpha-j})+D^{\alpha}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}[t,y(t)](x) \tag{3.28}$$

D'après (2.16) et (2.15), on a

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\alpha-j} &= D^{n}_{a^+}I^{n-\alpha}_{a+}(x-a)^{\alpha-j} \\ &= D^{\alpha}_{a+}\left[\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(n-j+1)}(x-a)^{n-j}\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Et selon la relation (2.19), on obtient :

$$D^{\alpha}_{a^+}y(x)=f(x,y(x)) \tag{3.30}$$

et donc, on arrive à l'équation (3.10).
A présent on peut montrer que la relation (3.11) est aussi réalisée. Pour cela, on applique l'opérateur $D^{\alpha-k}_{a^+}(k=1,,n)$ aux deux côtés de (3.18). Si $1\le k\le n-1$, d'après la relations (2.18)-(3.29), on a

$$\begin{aligned}(D^{\alpha-k}_{a^+}y)(x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(D^{\alpha-k}_{a^+}(x-a)^{\alpha-j})(x)+D^{\alpha-k}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}[t,y(t)](x)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(k-j+1)}(x-a)^{k-j}+I^{k}_{a^+}[t,y(t)](x) \qquad (3.31)\end{aligned}$$

Donc

$$(D^{\alpha-k}_{a^+}y)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{(k-j)!}(x-a)^{k-j}+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-1}f[t,y(t)]dt. \qquad (3.32)$$

Si $k=n$, selon la relations (3.14) et (3.32), on obtient

$$(D^{\alpha-n}_{a^+}y)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{(n-j)!}(x-a)^{n-j}+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f[t,y(t)]dt. \qquad (3.33)$$

Utilisons (3.32)-(3.33) pour calculer la limite $t\longrightarrow a^+$ on obtient la relation (3.11). Ainsi, la suffisance est prouvée, qui complète la preuve du théorème (3.1.2).

3.1.3 Existence et unicité de la solution du probléme de type Cauchy

Dans cette partie nous établissons l'existence d'une solution unique au probléme (3.10)-(3.11) de type Cauchy dans l'espace $L^{\alpha}(a,b)$ défini dans (3.12) sous les conditions du théoréme (3.1.2), et la condition de Lipschitz sur $f(x,y)$ par rapport à la deuxiéme variable :il existe $A\in]0,1[$ tel que pour tout $x\in[a,b]$ et tous $y_1,y_2\in G\subset\mathbb{R}$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<A|y_1-y_2| \quad (0<A<1) \qquad (3.34)$$

Théorème 3.3: *[10]*
Soit $\alpha>0, n=-[-\alpha]$, soientt G un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$,
et $f:(a,b]G\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y)\in L^1(a,b)$ pour toute $y\in G$ et la condition (3.34) est satisfaite.
Alors il existe une solution unique $y(x)$ au probléme de type Cauchy (3.10)−(3.11) dans l'éspace $L^{\alpha}(a,b)$.

Preuve

D'abord nous prouvons l'existence d'une solution unique $y(x)\in L(a,b)$
Selon le théoreme (3.1.2) il est suffsant de prouver l'existence d'une solution unique $y(x)\in L^1(a,b)$ à l'équation intégrale non linéaire (3.18) de Volterra. Pour ceci nous appliquons la méthode connue, pour des équations intégrales non linéaires de Volterra, deprouver d'abord le résultat sur une partie de l'intervalle $[a,b]$.
L'équation (3.18) semble raisonnable dans n'importe quel intervalle $[a,x_1]\subset[a,b](a<x_1<b)$.

Choisissons x_1 telle que l'inégalité :

$$A\frac{(x_1-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}<1 \tag{3.35}$$

est vérifiée, et puis prouvons l'existence d'une solution unique $y(t)\in L^1(a,x_1)$ à l'équation (3.18) sur l'intervalle $[a,x_1]$. Pour ceci nous utilisons le théoréme du point fixe de Banach pour l'espace $L^1(a,t_1)$, qui est clairement un espace métrique complet avec la distance.

$$d(y_1,y_2)=\|y_1-y_2\|=\int_a^{x_1}|y_1(x)-y_2(x)|dt. \tag{3.36}$$

Nous réecrivons l'équation intégrale (3.18) sous la forme $y(x)=(Ty)(x)$, où

$$(Ty)(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt \tag{3.37}$$

avec

$$y_0(x)=\sum_{j=1}^n\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} \tag{3.38}$$

Pour appliquer le théoréme du point fixe nous devons prouver ce qui suit :

1. si $y(t)\in L^1(a,x_1)$, alors $(Ty)(x)\in L(a,x_1)$,
2. pour toutes $y_1,y_2\in L^1(a,x_1)$; l'évaluation suivante est vérifée :

$$\|Ty_1-Ty_2\|_1\leqslant\omega\|y_1-y_2\|_1\ ,\ \omega=A\frac{(x_1-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3.39}$$

Il découle de (3.38) que $y_0(x)\in L^1(a,b)$: Depuis que $f(x,y(x))\in L^1(a,b)$; et d'aprés le lemme (3.1.2) (avec $b=x_1$ et $g(x)=f(x,y(x))$, l'intégrale dans le côté droit de lemme (3.1.2) appartient également à $L^1(a,x_1)$, et par conséquent $(Ty)(x)\in L^1(a,x_1)$.
Maintenant nous prouvons l'évaluation (3.29). D'aprés (3.37)-(3.38) et (3.12) (définition de $L^\alpha(a,b)$), utilisons la condition de Lipschitz (3.34) et appliquant la relation (3.19) (avec $b=x_1$ et $g(x)=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))$ nous avons

$$\begin{aligned}\|Ty_1-Ty_2\|_{L(a,x_1)} &\leqslant \|I^\alpha_{a^+}[|f(t,y_1)-f(t,y_2)|]\|_{L(a,x_1)}\\ &\leqslant A\left\|I^\alpha_{a^+}[|y_1-y_2|]\right\|_{L(a,x_1)}\\ &\leqslant A\frac{(x_1-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1(x)-y_2(x)\|_{L(a,x_1)}=\omega\|y_1(x)-y_2(x)\|_{L(a,x_1)}\end{aligned}$$

ce qui donne (3.39). Selon (3.35) vérifie $0<\omega<1$, et par conséquent (d'aprés le théoréme (1.2.1) il existe une solution unique $y^*(t)\in L^1(a,x_1)$ à l'équation (3.18) dans l'intervalle $[a,x_1]$:
D'aprés le théoréme (1.2.1), la solution y^* est obtenu comme une limite de la séquence convergente $(T^my_0^*)(x)$:

$$\lim_{m\to\infty}\|T^my_0^*-y^*\|_{L(a,x_1)}=0 \tag{3.40}$$

où $y_0^*(x)$ est n'importe quelle fonction dans $L^1(a,b)$: Si au mois un $b_k\neq0$ dans les conditions initiales (3.11), nous pouvons prendre $y_0^*(x)=y_0(x)$ avec $y_0(x)$ définie par (3.38).
D'aprés (3.37), la séquence $(T^my_0^*)(x)$ est définie par la formule de récurrence

$$(T^my_0^*)(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,T^{m-1}y_0^*(t))dt\ \ (m=1,2,...). \tag{3.41}$$

Si nous dénotons $y_m(x) = (T^m y_0^*)(x)$ alors la derniére relation prend la forme

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y_{m-1}(t)) dt \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{3.42}$$

et (3.40) peut être récrit comme suit :

$$\lim_{m\to\infty} \|y_m - y^*\|_{L(a,x_1)} = 0. \tag{3.43}$$

Ceci signifie que nous avons appliqué réellement la méthode d'approximations successives pour trouver une solution unique $y^*(x)$ à l'équation intégrale (3.18) dans $[a, x_1]$: Aprés, nous considérons l'intervalle $[x_1, x_2]$, où $x_2 = x_1 + h$, $h > 0$ et vérifie $x_2 < b$: Récrivons l'équation (3.18) sous la forme

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t) dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha-j} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \end{aligned}$$

Depuis que la fonction $y(x)$ est uniquement définie sur l'intervalle $[x_1, x_2]$; la derniére intégrale peut être consiéÈré comme fonction connue, et nous réecrivons la derniére équation comme :

$$y(x) = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \tag{3.44}$$

où $y_{01}(x)$ est définie par

$$y_{01}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \tag{3.45}$$

est la fonction connue. Utilisons les mémes arguments comme ci-dessus, nous concluons qu'il existe une solution unique $y^*(x) \in L^1(x_1, x_2)$ à l'équation (3.18) dans l'intervalle $[x_1, x_2]$: Prenons l'intervalle suivant $[x_2, x_3]$, où $x_3 = x_2 + h_2$ et $h_2 > 0$ telle que $x_3 < b$, et par la répétition de ce processus, nous concluons qu'il existe une solution unique $y^*(x) \in L^1(a, b)$ pour l'équation (3.18) sur l'intervalle $[a, b]$: Ainsi, il existe une solution unique $y(x) = y^*(x) \in L^1(a, b)$ à l'Èquation intégrale (3.18) de Volterra, et par conséquent au probléme de type Cauchy (3.10)-(3.11). Pour terminer la preuve du théoréme (3.1.3), nous devons prouver que la solution $y(t) \in L(a, b)$ est unique et appartient à l'espace $L^1(a, b)$: Selon (3.1.3), il est suffisant de prouver cela $D_{a^+}^{\alpha} \in L^1(a, b)$ D'aprés la preuve ci-dessus, la solution est une limite de
La séquence $y_m(t) \in L(a, b)$:

$$\lim_{m\to\infty} \|y_m - y\|_1 = 0 \tag{3.46}$$

avec le choix de certain y_m sur chacun $[a, x_1], ..., [x_{m-1}, b]$. Daprés (3.10) et (3.34) nous avons

$$\|D_{a^+}^{\alpha} y_m - D_{a^+}^{\alpha} y\|_1 = \|f(x, y_m) - f(x, y)\|_1 \leq A \|y_m - y\|_1 \tag{3.47}$$

Ainsi, d'aprés (3.46) et (3.47), nous obtenons

$$\lim_{m\to\infty} \|D_{a^+}^{\alpha} y_m - D_{a^+}^{\alpha} y\|_1 = 0 \tag{3.48}$$

et par conséquent $D_{a+}^{\alpha} y(x) \in L^1(a, b)$: Ceci accomplit la preuve du théorème (3.1.3)

3.2 Equations différentielles fractionnaires

3.2.1 Equation différentielle fractionnaire à un seul terme

Considérons l'équation différetienlle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante :

$$aD_0^{\alpha}y(x) = f(x), \qquad (n-1 \leq \alpha < n), \tag{3.49}$$

$$[D^{\alpha-k-1}y(x)]_{x=0} = 0, \qquad (k = 0, 1, ..., n-1), \tag{3.50}$$

Appliquant la transformée de Laplace sur les deux côtés de l'équation (3.49) nous obtenons

$$as^{\alpha}Y(s) = F(s),$$

et comme

$$G_1(x) = L^{-1}\{\frac{1}{as^{\alpha}}\} = \frac{1}{a}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

ou $G_1(x)$ est appelée la fonction fractionnaire de Green à un seul terme.

Sous les conditions initiales données, la solution $y(x)$ de l'équation (3.49) est obtenue par la convolution

$$y(x) = \int_0^x G_1(x-s)f(s)ds = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}f(t)ds = \frac{1}{a}I_0^{\alpha}f(x).$$

Exemple 3.2.1 *Si nous prenons $a = 1$, $f(x) = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ l'équation est devenue*

$$D_0^{\frac{1}{2}}y(x) = 1, \tag{3.51}$$

avec

$$\left[D^{\alpha-1}y(x)\right]_{x=0} = 0 \tag{3.52}$$

La solution est donnée par :

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-s)^{\frac{-1}{2}}ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$$

3.2.2 Equation différentielle fractionnaire à deux termes

Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante :

$$aD_0^{\alpha}y(x) + by(x) = f(x), \qquad (n-1 \leq \alpha < n), \tag{3.53}$$

avec les mêmes conditions définies par (3.50).
L'utilisation de la transformée de Laplace donne :

$$a s^{\alpha} Y(s) + b Y(s) = F(s). \tag{3.54}$$

Nous pouvons aussi écrire ((3.54) sous la forme

$$Y(s) = \frac{1}{a}\frac{1}{s^{\alpha}+\frac{b}{a}}F(s),$$

et comme :

$$G_2(x) = L^{-1}\{\frac{1}{a}\frac{1}{s^{\alpha}+\frac{b}{a}}\} = \frac{1}{a}x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\frac{b}{a}x^{\alpha}),$$

ou $G_2(x)$ est appelée la fonction fractionnaire de Green à deux termes, et $E_{\alpha,\beta}$ la fonction Mittag-Leffer de deux paramètres.
La solution $y(x)$ est obtenue par la convolution

$$y(x) = \int_0^x G_2(x-s)f(s)ds$$

Exemple 3.2.2 *Si nous prenons $a = 1$; $b = 1$; $f(x) = 1$; $\alpha = \frac{1}{2}$ nous obtenons :*

$$D_0^{\frac{1}{2}} y(x) + y(x) = 1;$$

avec la même condition initiale (3.50) *:*
La fonction de Green est donnée par :

$$G_2(x) = x^{\frac{-1}{2}} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-x^{\frac{1}{2}}),$$

la solution prend la forme

$$y(x) = -\int_0^x E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-s^{\frac{1}{2}})ds = -\sqrt{x}E_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(-\sqrt{x})$$

Conclusion & Perspectives

Les équation différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires, elle peuvent présente plusieurs phénoménes dans grandes domaines de la sciences de tous genres.
On a présenté quelques résultats d'existence et l'unicité des solution du problème de Cauchy pour des équation d'ordre fractionnaire. En utilisant les technique de point fixe et quelque théorème .
Après avoir prouvé l'existence et l'unicité de la solution, nous avons utilisé la transformée de Laplace dans plusieurs exemples pour trouver la solution.
D'aprés ce travaille on peut connaitre l'importance du calcul fractionnaire dans le domaine des mathématique.
Dans les perspectives, utiliser calcule fractionnaire a d'autres équation, et développer d'autre façons de résolutions des équations différentielles a dérivée fractionnaire et Pourquoi ne pas mettre en avant l'étude qualitative de la solution

Bibliographie

[1] M. Benchohra, F. Ouaar, Existence Results For Nonlinear Fractional Differential Equations With Integral Boundary Conditions, J, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 2010

[2] N. Boccara, Analyse Fonctionnelle une introduction pour physiciens, 1984 .

[3] B. Bollobas, W. Fulton, A. Katok, F. Kirwan, P. Sarnak. Fixed Point Theory and Applications, 2004

[4] K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations, 2010.

[5] K. Haouam, Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires, Thèse, Constantine, 2007.

[6] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. Theory And Applications Of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, 2006.

[7] A. Kirillov, A. Gvichiani, Théorèmes Et Problèmes D'analyse Fonctionnelle, Éditions Mir Moscou, 1982.

[8] A. Kolmogorov, S. Fomine, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. 2e edition, Editions Mir-Moscou. 1974.

[9] S. K. Ntouyas, Existence Results For First Order Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations And Inclusions With Fractional Integral Boundary Conditions, J, Fractional Calculus and Applications, July, 2012.

[10] I. Podlubny. Fractional differential equations. Academic Press, 1999.

[11] S. G. Samko, A. A. Kilbas , O. I. Marichev,Fractional integrals and derivatives Theory and Applivations, Russian, Belarus, Yverdon, 1993.

[12] L. Schwartz, Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle, Édition Corrigée , Paris, 2008.

[13] G. Skandalis, Topologie Et Analyse 3e Année, 2004

[14] Y. Zhou, Basic Theory Of Fractional Differential Equations. Xiangtan University, China, 2014.