UNIVERSITE ABBES LAGHROUR-KHENCHELA

MECANIQUE DU POINT MATÉRIEL

S1-LMD

S. IAICHE

Chapitre IV : Travail & Energie

2016-2017

Plan du cours

Chapitre I. Rappels mathématiques

Les vecteurs – Systèmes de coordonnées – Les équations aux dimensions – Calculs d'erreurs

Chapitre II. Cinématique du point

Mouvement rectiligne – Mouvement dans l'espace – Etude de mouvements particuliers – Etude de mouvements dans différents systèmes (polaires, cylindrique et sphérique) – Mouvement relatif

Chapitre III. Dynamique du point

Principe d'inertie et les référentiels galiléens – Principe de conservation de la quantité de mouvement – Définition Newtonienne de la force (les 3 lois de Newton) – Quelques lois de forces

Chapitre IV. Travail & Énergie

Énergie cinétique – Énergie potentielle de gravitation et élastique – Champ de forces – Forces non conservatives

Références bibliographiques

Liste non exhaustive de livres recommandés pour ce cours.

- Hanni, ‘Mécanique générale cours et exercices’, Office des publications universitaires (OPU) 1996.
- Alonso, Finn, ‘Physique générale 1’, InterEditions
- Lumbroso, ‘Mécanique du point, 1ère année MPSI – PCSI – PTSI – Problèmes résolus’, Dunod - Paris (2002).
- Pérez, ‘Mécanique : Fondements et applications’, Masson.
- Teyssier, ‘Mécanique du point : exercices corrigés’, Ellipses – Paris (2005).
- Taylor, ‘Mécanique classique’, Ellipse – Paris (2007).

MECANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Chapitre I : Rappels mathématiques

Partie A : Les vecteurs

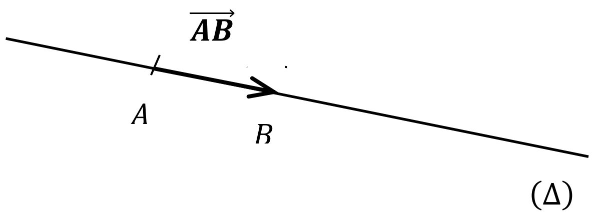
I. Définitions :

On appelle le vecteur $\overrightarrow{AB}$, l'ensemble des deux points (A, B) tel que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit :

$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath}$$

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- **Une portée :** c'est la droite (Δ) qui porte $\overrightarrow{AB}$



- **Un module :** c'est la longueur du segment AB de la droite ; entre A et B

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

- **Une origine** : point initial du vecteur ; point A
- **Une extrémité :** point B
- **Un sens :** de A vers B

II. Vecteurs particuliers :

a) **Vecteur nul :** le vecteur $\overrightarrow{AB}$ devient nul, si les deux points A et B sont identiques et s'écrit : $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

b) **Vecteur unitaire :** c'est le vecteur dont le module est égal à l'unité des longueurs 1 ;

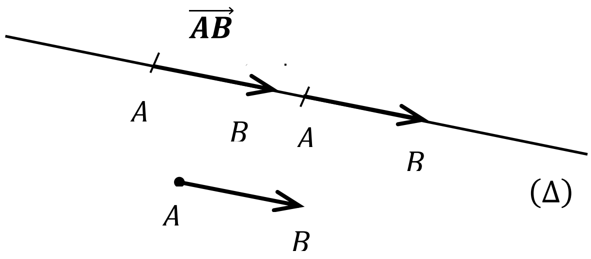
$\|\vec{V}\| = 1$

Exemple : $\vec{V} = -\sin\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = 1$

c) **Vecteur lié :** c'est le vecteur dont la portée, le sens, le module et l'origine sont fixes.

d) **Vecteur glissant :** c'est le vecteur dont la portée, le sens et le module sont fixes, mais dont l'origine peut se mouvoir sur sa portée.



e) **Vecteur libre :** c'est le vecteur dont la portée, le sens et le module sont fixes, mais dont l'origine peut se situer dans n'importe quel point de l'espace.

III. Opérations élémentaires sur les vecteurs :

III.1) Addition des vecteurs :

On définit la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ par la résultante $\vec{V}$, tel que :

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$$

III.2) Produit d'un vecteur avec un scalaire :

Soit le vecteur $\vec{U}$ et la quantité scalaire λ, le produit $\lambda\,\vec{U}$ est un vecteur $\vec{V}$, tel que :

$$\vec{V} = \lambda\,\vec{U} \; avec \; \vec{V} \parallel \vec{U}$$

Propriétés :

$$\|\vec{V}\| = |\lambda|\|\vec{U}\|$$

$$(\lambda + \varepsilon)\,\vec{U} = \lambda\,\vec{U} + \varepsilon\,\vec{U}$$

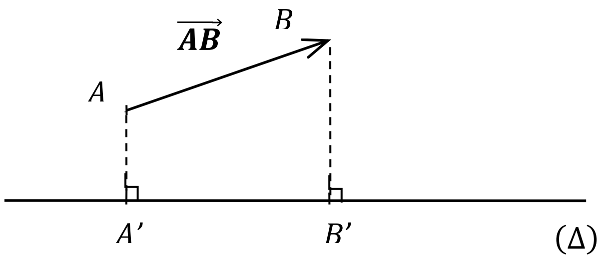
$$\lambda\left(\varepsilon\,\vec{U}\right) = (\lambda\,\varepsilon)\,\vec{V}$$

$$1 \cdot \vec{U} = \vec{U}$$

IV. Projection des vecteurs :

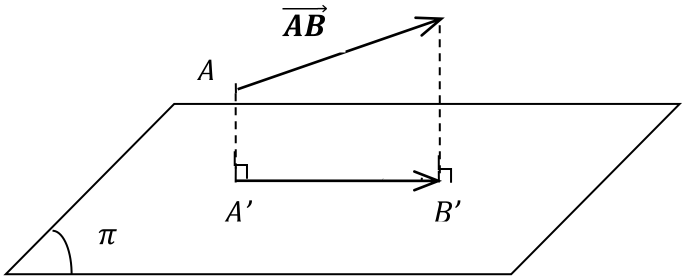
a) **Projection sur une droite** (Δ) :

$$\overrightarrow{A'B'} = \mathcal{P}roj_{(\Delta)}(\overrightarrow{AB})$$



b) Projection sur un plan (π) :

$$\overrightarrow{A'B'} = \mathcal{P}roj_{/\pi}(\overrightarrow{AB})$$



V. La base :

La base de l'espace vectoriel E est l'ensemble de n vecteurs indépendants $(\vec{V}_1,\ \vec{V}_2, \vec{V}_1, .., \vec{V}_n)$, tel que :

$$\boxed{\vec{V} = a_1\vec{V}_1 + a_2\vec{V}_2 + a_3\vec{V}_3 + \cdots a_n\vec{V}_n}$$

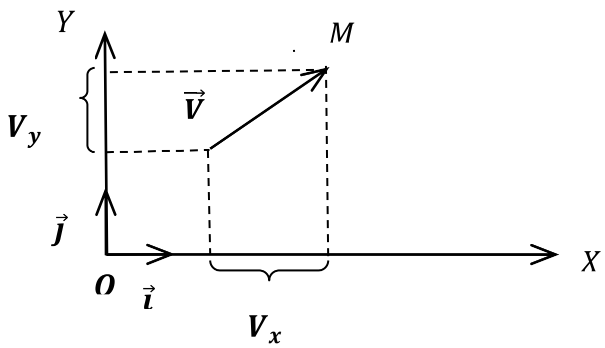
$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$: sont les composantes du vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{V}_1,\ \vec{V}_2, \vec{V}_1, .., \vec{V}_n)$.

Exemple : la base orthonormée est;

a) Dans le plan : $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ avec $\vec{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath}$

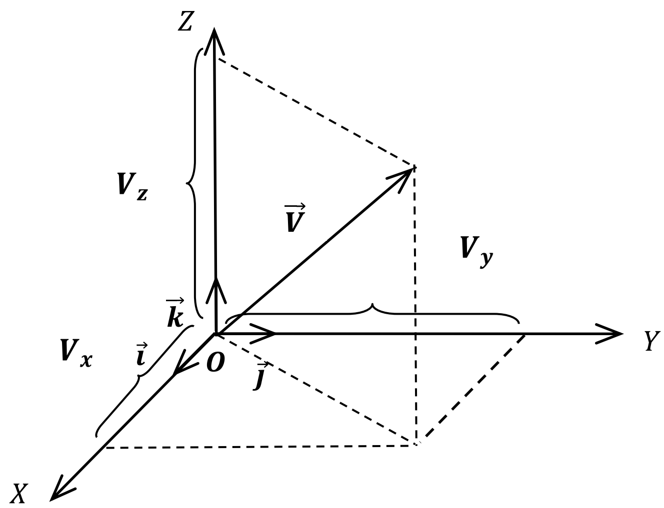
V_x : est la composante de $\vec{V}$ dans la direction de $\vec{\imath}$

V_y : est la composante de $\vec{V}$ dans la direction de $\vec{\jmath}$



b) Dans l'espace : $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ avec $\vec{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k}$

V_z : est la composante de $\vec{V}$ dans la direction de $\vec{k}$



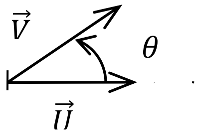
VI. Produit scalaire :

VI.1) Définition :

On définit le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est une quantité scalaire noté par :

$$\boxed{\vec{U}\cdot\vec{V} = \|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\|\cdot\cos(\vec{U},\vec{V})}$$

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{U}\| = 0 \\ \vee\ \|\vec{V}\| = 0 \\ \vee\ \cos(\vec{U},\vec{V}) = 0 \Rightarrow (\vec{U},\vec{V}) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{U}\perp\vec{V} \end{cases}$$



VI.2) Propriétés :

∗ Le produit scalaire est commutatif : $\vec{U}\cdot\vec{V}=\vec{V}\cdot\vec{U}$

∗ Le produit scalaire est distributif : $\vec{U}\cdot(\vec{V}+\vec{W})=\vec{U}\cdot\vec{V}+\vec{U}\cdot\vec{W}$

∗ $(\lambda\,\vec{U})\cdot(\varepsilon\,\vec{V})=(\lambda\,\varepsilon)\,(\vec{U}\cdot\vec{V})$

∗ $(\vec{U}+\vec{V})^2=\|\vec{U}\|^2+\|\vec{V}\|^2+2\,\vec{U}\cdot\vec{V}$

VI.3) L'expression analytique du produit scalaire :

Soit le repère $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ et soient les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, si :

$$\vec{U}=U_x\,\vec{\imath}+U_y\,\vec{\jmath}+U_z\,\vec{k}$$

$$\vec{V}=V_x\,\vec{\imath}+V_y\,\vec{\jmath}+V_z\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{U}\cdot\vec{V}=U_x\,V_x+U_y\,V_y+U_z\,V_z}$$

Par définition on a :

$$\vec{U}\cdot\vec{V}=\|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\|\cdot\cos(\vec{U},\vec{V})$$

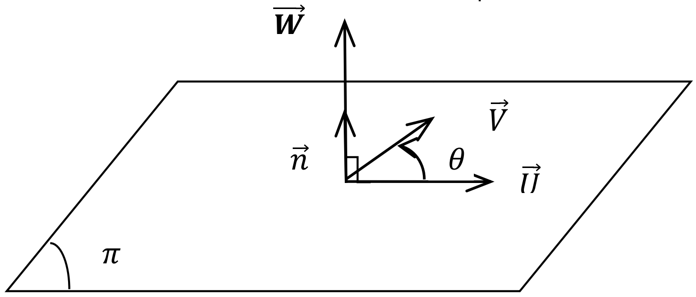
Donc :

$$\boxed{\cos(\vec{U},\vec{V})=\frac{U_x\,V_x+U_y\,V_y+U_z\,V_z}{\|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\|}=\frac{U_x\,V_x+U_y\,V_y+U_z\,V_z}{\sqrt{U_x^2+U_y^2+U_z^2}\,\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}}}$$

VII. Produit vectoriel :

VII.1) Définition :

On définit le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ par le vecteur $\vec{W}$ noté par : $\vec{U}\wedge\vec{V}=\vec{W}$



Tel que la direction de $\vec{W}$ est perpendiculaire au plan constitué par $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

$$\boxed{\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot sin(\vec{U}, \vec{V})\ \vec{n}}$$

$\vec{n}$: est le vecteur unitaire normal porté par $\vec{W}$

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot |sin(\vec{U}, \vec{V})|$$

VII.2) Propriétés :

∗ Le produit vectoriel est anticommutatif : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$

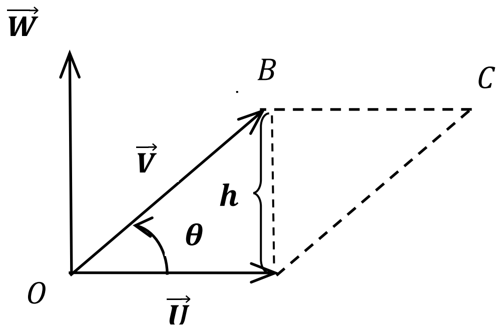
∗ Le produit scalaire est anti-associatif : $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) \neq (\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}$

∗ $(\lambda\,\vec{U}) \wedge (\varepsilon\,\vec{V}) = (\lambda\,\varepsilon)\,(\vec{U} \wedge \vec{V})$

∗ $\vec{U} \wedge (\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{U} \wedge \vec{V}_1) + (\vec{U} \wedge \vec{V}_2) + (\vec{U} \wedge \vec{V}_3)$

∗ $\vec{U} \wedge \lambda\,\vec{U} = \vec{0}$

VII.3) Définition géométrique du produit vectoriel :



Le module du produit vectoriel $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|$ représente la surface du parallélogramme construit sur $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot |sin(\vec{U},\vec{V})|$$

$$sin(\vec{U},\vec{V}) = \frac{h}{\|\vec{V}\|} \Rightarrow h = \|\vec{V}\| \; sin(\vec{U},\vec{V})$$

$$\boxed{\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\| \cdot h = S}$$

S : est la surface du parallélogramme construit sur $\vec{U}$ et $\vec{V}$

<u>VII.4) L'expression analytique du produit scalaire</u> :

Soient $\vec{U}\,(U_x,\; U_y\,, U_z)$ et $\vec{V}\,(V_x,\; V_y\,, V_z)$ dans le repère $(O,\; \vec{\imath},\; \vec{\jmath},\; \vec{k})$ on a :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_y & U_z \\ V_y & V_z \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} U_x & U_z \\ V_x & V_z \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{U} \wedge \vec{V} = [U_y \cdot V_z - U_z \cdot V_y]\,\vec{\imath} - [U_x \cdot V_z - U_z \cdot V_x]\,\vec{\jmath} + [U_x \cdot V_y - U_y \cdot V_x]\,\vec{k}}$$

Remarque :

$\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}, \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}\; et\; \vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\,\vec{\imath}$

<u>Exemple</u> : soient $\vec{U} = 3\,\vec{\imath} + 2\,\vec{k}$ et $\vec{V} = -\,\vec{\jmath} + 5\,\vec{k}$

- Calculer $\vec{U} \wedge \vec{V}$

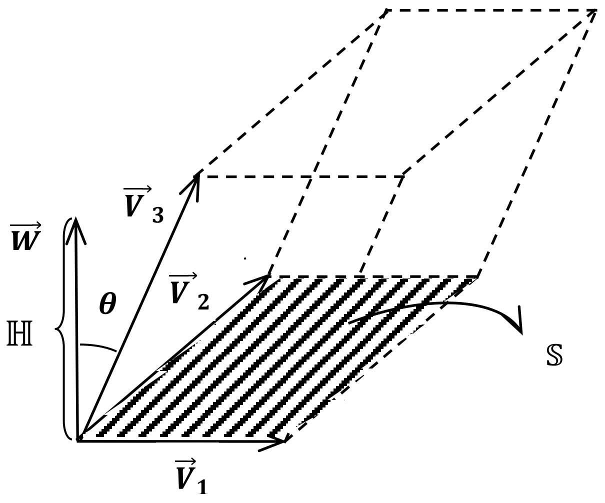
$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = 2\ \vec{\imath} - 15\ \vec{\jmath} - 3\ \vec{k}$$

VII.5) Le double produit vectoriel :

$$\boxed{\vec{\Delta} = \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})}$$

VIII. Produit mixte :



Le but ou la signification du calcul d'un produit mixte est la détermination du volume du parallélipède construit sur les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ *et* $\vec{V}_3$. Le produit mixte est noté par :

$$\boxed{(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = \mathbb{V}}$$

$$\mathbb{V} = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = \vec{W} \cdot \vec{V}_3 = \|\vec{W}\| \cdot \|\vec{V}_3\| \cdot cos(\vec{W}, \vec{V}_3)$$

$$\mathbb{V} = \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| \cdot \|\vec{V}_3\| \cdot cos(\vec{W}, \vec{V}_3)$$

$$\cos(\vec{W}, \vec{V}_3) = \frac{\mathbb{H}}{\|\vec{V}_3\|} \Rightarrow \mathbb{H} = \|\vec{V}_3\|\, cos(\vec{W}, \vec{V}_3)$$

Et $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \mathbb{S}$

$$\boxed{\mathbb{V} = \mathbb{S} \cdot \mathbb{H}}$$

$\mathbb{H}$: est le volume du parallélipède

Remarque :

$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_1 = (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$

Partie B : Systèmes de coordonnées

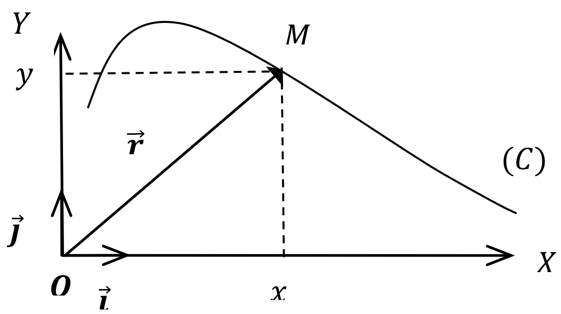
I. Définition :

Un système de coordonnées nous aide à déterminer n'importe quel point dans le plan ou dans l'espace.

II. Coordonnées dans le plan :

II.1) Coordonnées cartésiennes (x, y) :

Dans la base cartésienne, un point matériel M mobile se définit par son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ tel que :



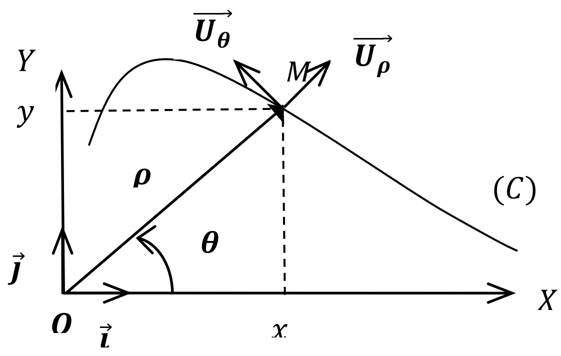
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

II.2) Coordonnées polaires $(\rho,\ \theta)$:

Quand un point matériel mobile M effectue son mouvement dans le plan (XOY), on peut repérer son mouvement en utilisant les coordonnées polaires, tel que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit:

Chapitre I : Rappels mathématiques



$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{U_\rho}}$$

$\rho = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ρ : représente le module du vecteur position de M par rapport à l'origine O qui est appelée le 'pole'.

$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$

* **Equations de passage entre les coordonnées polaires et cartésiennes :**

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\theta \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

* **Vecteur unitaires polaires** $(\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta})$ **:**

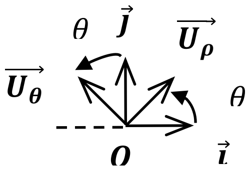
$\overrightarrow{U_\rho}$: est le vecteur unitaire radial, $\|\overrightarrow{U_\rho}\| = 1\ unité\ de\ longueur$

$\overrightarrow{U_\theta}$: est le vecteur unitaire orthoradial, perpendiculaire à $\overrightarrow{U_\rho}$, $\|\overrightarrow{U_\theta}\| = 1$ $unité\ de\ longueur$

On obtient $\overrightarrow{U_\theta}$ par la rotation de $\pi/2$ par rapport à $\overrightarrow{U_\rho}$ dans le sens d'augmentation de l'angle θ

$\overrightarrow{U_\rho} = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$

$\overrightarrow{U_\theta} = -\ \sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$



∗ Dérivation de $\overrightarrow{U_\rho}$ et $\overrightarrow{U_\theta}$ par rapport au temps :

$$\overrightarrow{U_\rho} = \cos\theta\ \vec{\imath} + \sin\theta\ \vec{\jmath}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}[\cos\theta\ \vec{\imath} + \sin\theta\ \vec{\jmath}] = \frac{d\cos\theta}{dt}\ \vec{\imath} + \frac{d\sin\theta}{dt}\ \vec{\jmath}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} = \frac{d\cos\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\sin\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{\jmath} = -\ sin\,\theta\ \dot{\theta}\,\vec{\imath} + \cos\theta\ \dot{\theta}\,\vec{\jmath}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} = [-\ sin\,\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\ \vec{\jmath}]\ \dot{\theta}$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} = \dot{\theta}\ \overrightarrow{U_\theta}}$$

$$\overrightarrow{U_\theta} = -\ sin\,\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\ \vec{\jmath}$$

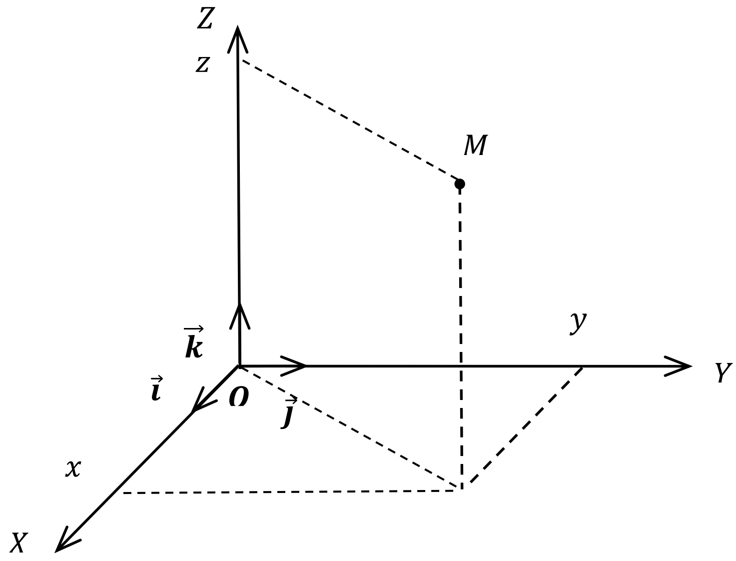
$$\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}[-\ sin\,\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\ \vec{\jmath}] = \frac{d(-\ sin\,\theta)}{dt}\ \vec{\imath} + \frac{d\cos\theta}{dt}\ \vec{\jmath}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = \frac{d(-\ sin\,\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\cos\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{\jmath} = -\ \cos\theta\ \dot{\theta}\,\vec{\imath} -\ sin\,\theta\ \dot{\theta}\,\vec{\jmath}$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = -\,\dot{\theta}\ \overrightarrow{U_\rho}}$$

III. Coordonnées dans l’espace :

II.1) Coordonnées cartésiennes $(x,\ y,\ z)$:

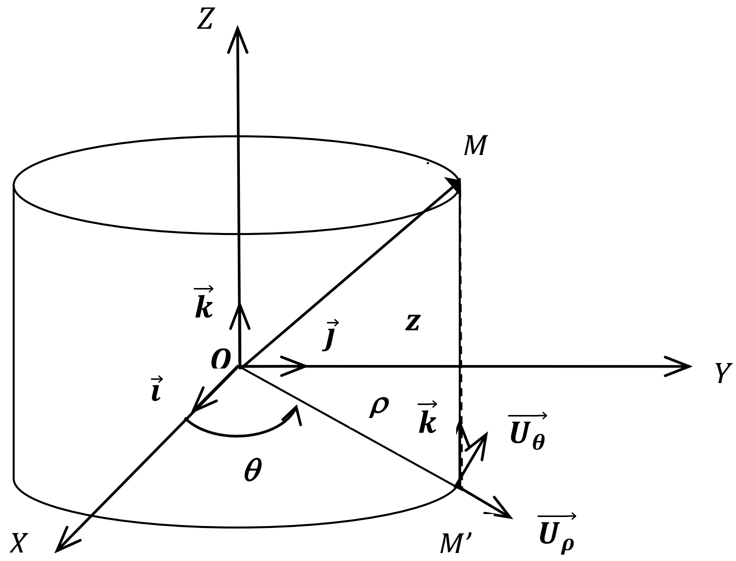


Dans la base cartésienne$(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}}$$

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

III.2) Coordonnées cylindriques $(\rho,\ \theta,\ z)$:



Dans la base cartésienne$(O,\ \overrightarrow{U_\rho},\ \overrightarrow{U_\theta},\ \vec{k})$, qui peut être considérer comme la base polaire + la direction $\vec{k}$ de la base cartésienne on a :

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}}}$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

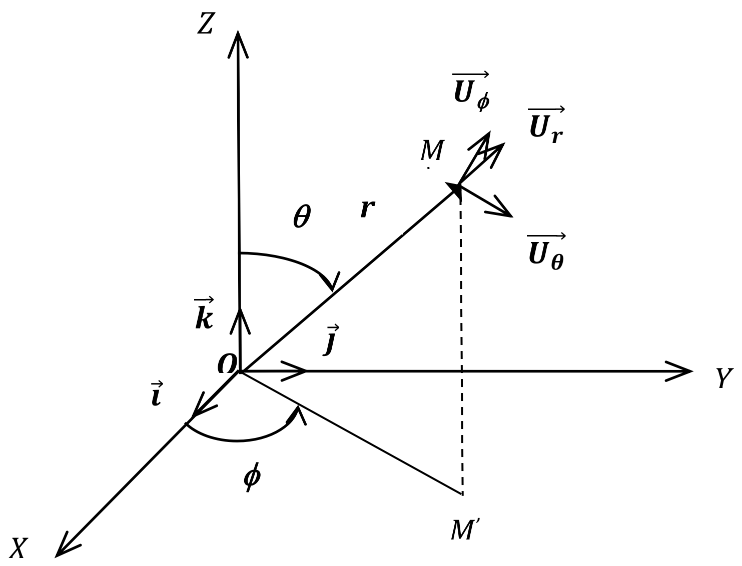
M' : est la projection orthogonale du point M dans le plan(XOY)

∗ **Vecteur unitaires cylindriques** $(\overrightarrow{U_\rho},\ \overrightarrow{U_\theta},\ \vec{k})$ **:**

$\overrightarrow{U_\rho},\ \overrightarrow{U_\theta}$: sont les vecteurs unitaires polaires

$et\ \vec{k}$: est le vecteur unitaire cartésien

III.3) Coordonnées sphériques $(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\phi})$:



Dans la base cartésienne$(O,\ \overrightarrow{U_r},\ \overrightarrow{U_\theta},\ \overrightarrow{U_\phi})$, on a :

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{U_r}}}$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \mathrm{r}$$

$$\boldsymbol{\theta = (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM})\ et\ \phi = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM'})}$$

$\theta \in [0, \pi]\ et\ \phi\ \in [0, 2\pi]$

∗ **Equations de passage entre les coordonnées polaires et cartésiennes :**

$\|\overrightarrow{OM}\| = \mathrm{r}$

Et :

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

On a également :

$$\cos\theta = \frac{z}{\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|} \Rightarrow z = \left\|\overrightarrow{OM'}\right\|\ \cos\theta$$

$$\cos\phi = \frac{x}{\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|} \Rightarrow x = \left\|\overrightarrow{OM'}\right\|\ \cos\phi$$

$$\sin\phi = \frac{y}{\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|} \Rightarrow y = \left\|\overrightarrow{OM'}\right\|\ \sin\phi$$

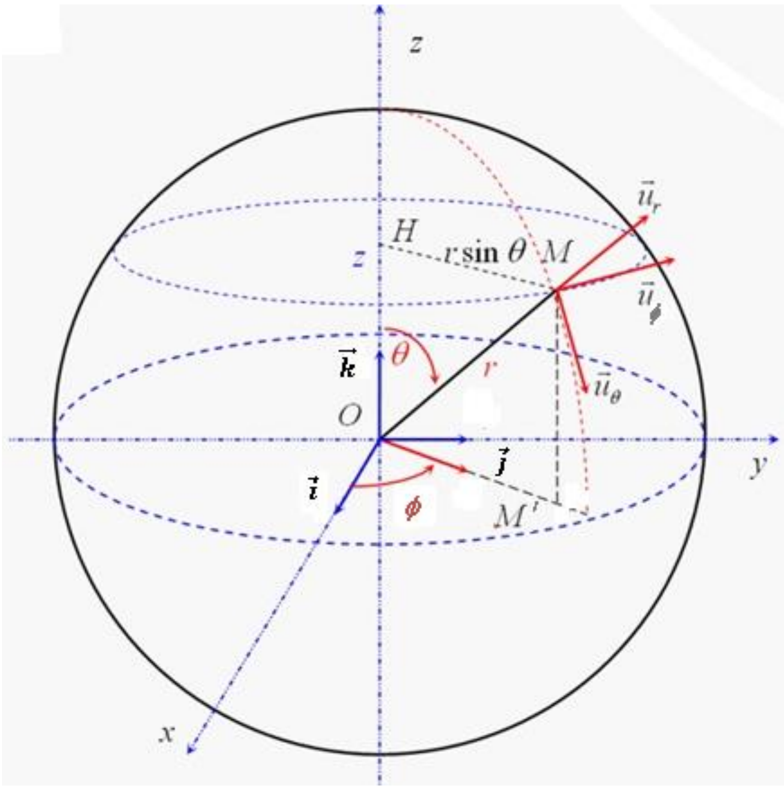
Comme :

$$\sin\theta = \frac{\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|}{r} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{OM'}\right\| = r\ \sin\theta$$

Donc :

$$\boxed{\begin{cases} x = r\ \sin\theta\cos\phi \\ y = r\ \sin\theta\ \sin\phi \\ z = r\ \cos\theta \end{cases}}$$

∗ **<u>Vecteur unitaires sphériques</u>** $\left(\overrightarrow{U_r},\ \overrightarrow{U_\theta},\ \overrightarrow{U_\phi}\right)$ **:**



$\overrightarrow{U_r},\ \overrightarrow{U_\theta}\ et\ \overrightarrow{U_\phi}$: sont les vecteurs unitaires de base

$\overrightarrow{U_r}$: c'est le vecteur unitaire radial tel que ;

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{U_r} \Rightarrow \overrightarrow{U_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$$

$\overrightarrow{U_\theta}$: est le vecteur unitaire orthoradial, perpendiculaire à $\overrightarrow{U_r}$ et dont on obtient par la rotation de $\pi/2$ par rapport à $\overrightarrow{U_r}$ dans le sens d'augmentation de l'angle θ

$\overrightarrow{U_\phi}$: est le vecteur unitaire de longueur, identique à $\overrightarrow{U_\theta}$ dans base polaire

$$\overrightarrow{U_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} = \frac{x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}}{r}$$

$$\overrightarrow{U_r} = \frac{r\sin\theta\cos\phi\;\vec{\imath} + r\sin\theta\;\sin\phi\,\vec{\jmath} + r\cos\theta\,\vec{k}}{r}$$

$$\boxed{\overrightarrow{U_r} = \sin\theta\cos\phi\;\vec{\imath} + \sin\theta\;\sin\phi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}} \;\ldots..(1)$$

$$\overrightarrow{U_\theta} = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\cos\phi\;\vec{\imath} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\sin\phi\,\vec{\jmath} + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{k}$$

On rappelle que :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{U_\theta} = \sin\theta\cos\phi\;\vec{\imath} + \cos\theta\;\sin\phi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\;\vec{k}} \;\ldots..(2)$$

Et :

$$\boxed{\overrightarrow{U_\phi} = -\sin\phi\;\vec{\imath} + \cos\phi\;\vec{\jmath}}$$

* **<u>Dérivation de $\overrightarrow{U_r}$ et $\overrightarrow{U_\theta}$ par rapport au temps</u> :**

$$\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \frac{d}{dt}[\sin\theta\cos\phi]\,\vec{\imath} + \frac{d}{dt}[\sin\theta\;\sin\phi]\,\vec{\jmath} + \frac{d}{dt}[\cos\theta]\,\vec{k}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \cos\theta\cos\phi\,\dot\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\sin\phi\,\dot\phi\,\vec{\imath} + \cos\theta\;\sin\phi\,\dot\theta\,\vec{\jmath} + \sin\theta\cos\phi\,\dot\phi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\dot\theta\,\vec{k}$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \left[\cos\theta\cos\phi\;\vec{\imath} + \cos\theta\;\sin\phi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\;\vec{k}\right]\dot\theta + \left[\sin\theta\,\dot\phi\right]\left[\sin\phi\;\vec{\imath} + \cos\phi\;\vec{\jmath}\right]}$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \sin\theta\,\dot{\phi}\,\overrightarrow{U_\phi}}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = -\sin\theta\cos\phi\ \dot{\theta}\,\vec{\imath} - \cos\theta\ \sin\phi\,\dot{\phi}\,\vec{\imath} - \sin\theta\sin\phi\ \dot{\theta}\,\vec{\jmath} + \cos\theta\cos\phi\ \dot{\phi}\,\vec{\jmath} - \cos\theta\ \dot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = -\left[\sin\theta\cos\phi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\ \vec{k}\right]\dot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\phi}\,[-\sin\phi\ \vec{\imath} + \cos\phi\ \vec{\jmath}]$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = -\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_r} + \cos\theta\ \dot{\phi}\,\overrightarrow{U_\phi}}$$

$$\overrightarrow{U_\phi} = -\sin\phi\ \vec{\imath} + \cos\phi\ \vec{\jmath}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_\phi}}{dt} = [-\cos\phi\,\vec{\imath} + \sin\phi\ \vec{\jmath}]\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_\phi}}{dt} = -\,\dot{\phi}\,[\cos\phi\,\vec{\imath} + \sin\phi\ \vec{\jmath}]$$

En multipliant les équations (1) et (2) par $\sin\theta$ et $\cos\theta$, respectivement on obtient :

$$\sin\theta\ \overrightarrow{U_r} = (\sin\theta)^2\ \cos\phi\,\vec{\imath} + (\sin\theta)^2\sin\phi\ \vec{\jmath} + \sin\theta\ \cos\theta\ \vec{k} \ldots..(1)'$$

$$\cos\theta\ \overrightarrow{U_\theta} = (\cos\theta)^2\cos\phi\,\vec{\imath} + (\cos\theta)^2\ \sin\phi\ \vec{\jmath} - \sin\theta\ \cos\theta\ \vec{k} \ldots..(2)'$$

$$(1)' + (2)' \Rightarrow \sin\theta\ \overrightarrow{U_r} + \cos\theta\ \overrightarrow{U_\theta} = [(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2]\ \cos\phi\,\vec{\imath}$$
$$+[(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2]\ \sin\phi\ \vec{\jmath} + \sin\theta\ \cos\theta\ \vec{k} - \sin\theta\ \cos\theta\ \vec{k}$$

On a :

$$[(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2] = 1$$

$$(1)' + (2)' \Rightarrow \sin\theta\ \overrightarrow{U_r} + \cos\theta\ \overrightarrow{U_\theta} = \cos\phi\,\vec{\imath} + \sin\phi\ \vec{\jmath}$$

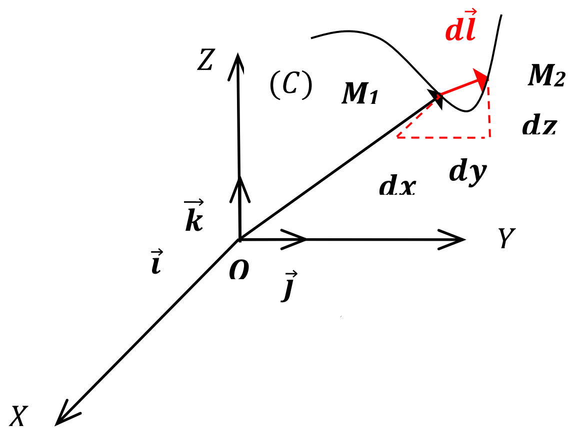
$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{U_\phi}}{dt} = -\,\dot{\phi}\,[\sin\theta\ \overrightarrow{U_r} + \cos\theta\ \overrightarrow{U_\theta}]}$$

IV. Éléments différentielles :

On exprime le déplacement, la surface et le volume élémentaires dans les différents systèmes de coordonnées comme suit :

II.1) En coordonnées cartésiennes :

∗ **Elément de déplacement** :



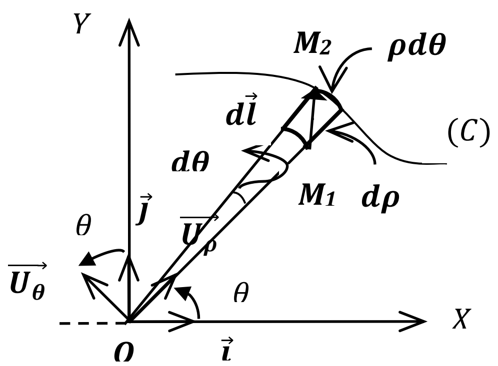
$$\overrightarrow{M_1M_2} = d\vec{l}$$

$$\boxed{d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}}$$

$d\vec{l}$: est le vecteur élément de déplacement du point mobile M

II.2) Coordonnées polaires :

∗ **Elément de déplacement** :



$$\boxed{d\vec{l} = d\rho\,\overrightarrow{U_\rho} + \rho\,d\theta\,\overrightarrow{U_\theta}}$$

∗ **Elément de surface** :

$$dS = d\rho \cdot \rho \cdot d\theta$$

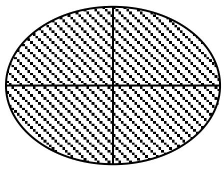
$$\boxed{dS = \rho\,d\rho \cdot d\theta}$$

dS : est l'élément de surface

Si : $\rho = \mathcal{R} = cste \Rightarrow dS = \int_0^{\mathcal{R}} \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$

$$\Rightarrow S = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\mathcal{R}} \cdot 2\,\pi$$

$$\boxed{\boldsymbol{S = \pi\,\mathcal{R}^2}}\ \boldsymbol{Surface\ d'un\ disque}$$

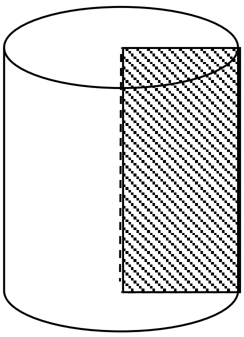


<u>II.3)</u> <u>Coordonnées cylindriques</u> :

∗ **<u>Elément de déplacement</u> :**

$$\boxed{\boldsymbol{d\vec{l} = d\rho\,\overrightarrow{U_\rho} + \rho\,d\theta\,\overrightarrow{U_\theta} + dz\,\vec{k}}}$$

∗ **<u>Elément de surface</u> :**



Si : $\theta = cste \Rightarrow d\theta = 0$

$dS = d\rho \cdot dz \Rightarrow S = \int_0^{\mathcal{R}} d\rho \int_0^{h} dz$

$$\boxed{\boldsymbol{S = \mathcal{R}\,h}}$$

∗ **<u>Elément de volume</u> :**

$$\boxed{\boldsymbol{dV = \rho\,d\rho \cdot\ d\theta \cdot dz}}$$

dV : est l'élément de volume

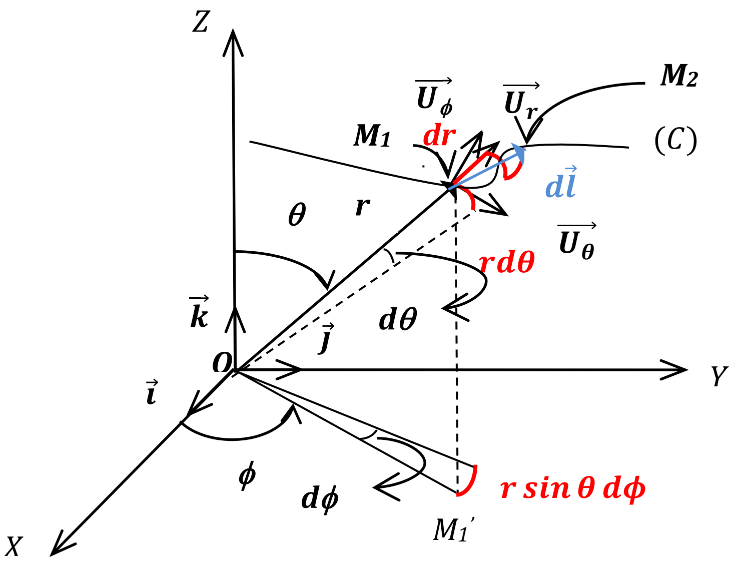
Pour un cylindre de rayon $\mathcal{R}$ et de hauteur h, le volume total devient :

$$dV = \int_0^{\mathcal{R}} \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{h} dz$$

$$\boxed{V = \pi \,\mathcal{R}^2 \, h} \ \ \textit{Surface d'un cylindre}$$

II.1) Coordonnées sphériques :

* Elément de déplacement :



$$\boxed{\vec{dl} = dr\,\overrightarrow{U_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{U_\theta} + r\ \sin\theta\,d\phi\,\overrightarrow{U_\phi}}$$

* Elément de surface :

- $r = cste$; surface externe d'une sphère de rayon $\mathcal{R}$:

$r = cste = \mathcal{R} \Rightarrow dr = 0$

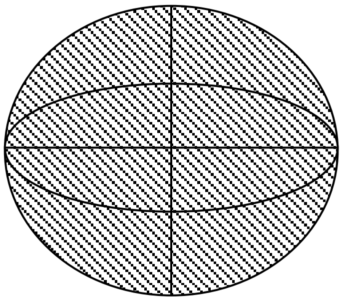
$$dS = \mathcal{R}\,d\theta\,\mathcal{R}\ \sin\theta\ d\phi$$

$dS = \mathcal{R}^2\ \sin\theta\ \ d\theta\,d\phi$

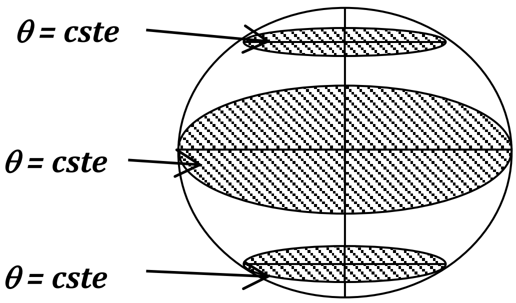
$S = \mathcal{R}^2 \displaystyle\int_0^{\pi} \sin\theta\ \ d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$

$S = \mathcal{R}^2\,[-\ \cos\theta]_0^{\pi}\ 2\pi = \mathcal{R}^2\ 2\ 2\pi$

$\boxed{\boldsymbol{S = 4\,\pi\,\mathcal{R}^2}}$ $\boldsymbol{Surface\ extrerne\ d'une\ sphère\ de\ rayon\ \mathcal{R}}$



- $\underline{\theta = cste}$:



$\theta = cste \Rightarrow d\theta = 0$

$dS = dr\ r\ \sin\theta\ d\phi$

$S = \sin\theta \int_0^{\mathcal{R}} r\,dr \int_0^{2\pi} d\phi = \pi \sin\theta\ \mathcal{R}^2$

Pour $\theta = \pi/2$ on a :

$$\boxed{\boldsymbol{S = \frac{\pi\,\mathcal{R}^2}{2}}}$$

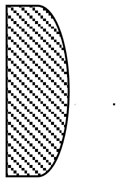
- $\underline{\phi = cste}$:

$\phi = cste \Rightarrow d\phi = 0$

$dS = dr\ r\ d\theta$

$S = \int_0^{\mathcal{R}} r\,dr \int_0^{\pi} d\theta$

$$\boxed{\boldsymbol{S = \frac{\pi\,\mathcal{R}^2}{2}}}$$



∗ **Elément de volume** :

$$dV = r^2\,dr\ \sin\theta\ d\theta\ d\phi$$

$$V = \int_0^{\mathcal{R}} r^2\,dr \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$V = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\mathcal{R}} \ [-\cos\theta]_0^{\pi}\ 2\,\pi$$

$$V = \frac{\mathcal{R}^3}{3}\ 2\ 2\,\pi$$

$$\boxed{\boldsymbol{S = \frac{4}{3}\pi\,\mathcal{R}^3}}\ \textbf{\textit{Volume d'une sphère de rayon}}\ \boldsymbol{\mathcal{R}}$$

Partie C : Les équations aux dimensions et calculs d’erreurs

I. Dimension d’une grandeur physique :

La dimension d’une grandeur physique peut être qualifiée par, *sa nature physique* indépendamment de l’unité de mesure. Une grandeur peut avoir la dimension d’une masse notée **M**, d’une longueur notée **L**, du temps notée **T**, d’une charge notée **C**, d’une quantité de matière notée **N** …ect.

Il ne faut pas confondre dimension et unité. En effet, une quantité physique a une et une seule dimension, en revanche elle peut être exprimée dans plusieurs systèmes d’unités différents.

Il existe **7 grandeurs de base** du système international, à partie desquelles on peut dériver toutes les grandeurs de la physique. Il existe des grandeurs physiques sans dimension dites adimensionnées. Dans ce cas la dimension est notée $[G] = 1$. Une grandeur purement numérique, comme une grandeur définie par le rapport de deux grandeurs de même dimension, ne présente pas de dimension. L'angle est également sans dimension (exprimé par une unité).

Exemple :

La vitesse instantanée v_x d'un objet est par définition :

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

On écrit alors : $[v] = LT^{-1}$. On utilise des crochets [ ] pour exprimer le fait qu'ont ne s'intéresse qu'à la dimension de l'objet considéré.

L'accélération instantanée a_x d'après la définition :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

a pour dimension :

$$[a] = \frac{[v]}{T} = LT^{-2}$$

II. Équation aux dimensions :

Une loi physique affirme l'égalité de deux grandeurs qui sont nécessairement de même nature. Une loi physique est donc aussi une relation entre différentes dimensions : on parle **d'équation aux dimensions**.

L'utilisation de l'analyse dimensionnelle permet de :

- Vérifier l'homogénéité d'une équation et d'éliminer des résultats. Une expression non homogène est nécessairement fausse. Une expression est homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension.
- Obtenir une formule après un raisonnement intuitif.

Exemple :

La force : en vertu de la deuxième loi de New ton $F = m\,a$ on a donc :

$$[F] = MLT^{-2}$$

La constante des gaz parfaits : on peut obtenir sa dimension à partie de la loi du gaz parfait $pV = nRT$.

$$[R] = \frac{[p][V]}{[n][T]} = \frac{[F]}{L^2} \times \frac{L^3}{N\Theta} = ML^2T^{-2}\Theta^{-1}\mathrm{N}^{-1}$$

Pour manipuler les équations aux dimensions, on utilise les règles suivantes :

- On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension.
- Dans une fonction trigonométrique (sinus, cosinus, tangente, …), le nombre est sans dimension.
- La dimension du produit de deux grandeurs est égale au produit de leurs dimensions.
- La dimension de A^n est la dimension de A à la puissance n.

III. Les unités de base :

Mesurer quantitativement une grandeur physique, c'est la comparer avec un étalon qui définit l'**unité de mesure**. L'idéal est de choisir des étalons dont la définition est indépendante du lieu et du temps et avec lesquels on peut construire toutes les unités.

Le système d'unités internationales (SI) forme système cohérent qui repose sur **sept unités de base** regroupé dans le tableau suivant :

Dimension	Symbole	Unité SI	Symbole
Longueur	L	mètre	*m*
Masse	M	kilogramme	*kg*
Temps	T	seconde	*s*
Intensité électrique	I	ampère	*A*
Température	Θ	kelvin	*K*
Quantité de matière	N	mole	*mol*
Intensité lumineuse	J	candela	*cd*

Table 1.1 Les 7 unités de base du (SI)

IV. Notion de l'erreur :

La détermination (par mesure ou application numérique) d'une grandeur physique donnée est, souvent, entaché d'une certaine erreur. Son résultat est seulement approché par suite d'un certain nombre d'erreurs. Les sciences physiques sont avant tout des sciences expérimentales :

toute théorie doit impérativement être validée par l'expérience et toute expérience doit être expliquée par la théorie. Cette indépendance impose au physicien de mesurer les grandeurs.

Soit : X_0 la valeur exacte, valeur de référence qui peut être soit une valeur théorique ou moyenne d'une grandeur physique donnée.

Et : X_e la valeur estimée de la même grandeur, qui peut être soit une valeur expérimentale, soit une valeur associée à un modèle scientifique ou à une approximation particulière.

On appel :

ΔX L'incertitude absolue, tel que ; $\Delta X = |X_0 - X_e|$. La quantité physique $X,\ X_0$ et X_e sont homogènes (ont la même dimension).

L'incertitude relative, $\frac{\Delta X}{X}$ est le rapport sans dimension tel que ;

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{|X_0 - X_e|}{X_0} = \varepsilon$$

V. Origine des erreurs :

On distingue deux types d'erreurs :

- **Erreurs systématiques** : caractérisées par leur nature déterministe. Elles sont fréquemment constantes et identiques à chaque fois que la mesure est répétée plusieurs fois dans les mêmes conditions. Elles ont comme origine ; l'erreur instrumental (précision des appareils) et leur mauvais fonctionnement, étalon défectueux, mauvais ''zéro'', à l'observateur ; mauvaise lecture et/ou réalisation de l'expérience ou encore aux paramètres extérieurs (lumière, champ, ...).
- **Erreurs accidentelles ou aléatoires** : caractérisées par la non reproductibilité (fluctuations) des résultats. Elles ont comme origine ; les variations dues aux fluctuations des conditions ambiantes (variation de température, pression, …), perturbations extérieures non corrélées à l'expérience (vibrations mécaniques, signaux électriques, …), bruit de fond dans les appareils, …

VI. Calcul d'incertitude :

VI.1) Calcul classique :

VI.1.a) Incertitude absolue (dérivées partielles) :

Souvent la grandeur calculée n'est pas mesurée directement, mais donnée par une fonction :

$$X = f(a, b, \dots)$$

Où apparaissent différentes grandeurs mesurées ou données *a, b,* ... ; on suppose connue les incertitudes absolues $\Delta a, \Delta b, \dots ect.$

L'évaluation de l'incertitude ΔX sur X s'appuie sur le calcul différentiel, et est fournie par une borne supérieure de $|\delta X|$, déterminée en calculant les bornes supérieures de $|X'\delta a|$, $|X'\delta b|$. $|\delta a|, |\delta b|$ sont, respectivement, bornées par $\Delta a, \Delta b,$ avec X' est la dérivée partielle de X par rapport à $a, b, \dots ect.$

On suppose que X dépend uniquement du paramètre a, et on admet sur a une erreur $e_a = a_0 - a$, tel que a_0 est la valeur réelle et a la valeur mesurée. Cette erreur conduit à une erreur e_X sur X tel que :

$$e_X = X - X_0 = f(a_0) - f(a)$$

Si e_X et e_a sont petits devant X et a, on peut mathématiquement les considérés des différentiels tel que :

$$e_X = \frac{df}{da} e_a$$

Avec :

$\frac{df}{da}$ *est la dérivée de f par rapport* à a.

L'incertitude réel est la limite supérieure de la valeur absolue de l'erreur, en donnant à e_a la valeur maximale possible de l'erreur donc l'incertitude sur X devient :

$$\boldsymbol{\Delta X = \left|\frac{df}{da}\right| \Delta a}$$

En général, X dépend de plusieurs variables *a, b,* ...L'erreur e_X représente la contribution des erreurs $e_a, e_b, \dots$

$$e_X = \frac{\partial f}{\partial a} e_a + \frac{\partial f}{\partial b} e_b + \cdots$$

$\frac{\partial f}{\partial a}$ *est la dérivée partielle de X par rapport à a.*

Si ces erreurs sont indépendantes l'une de l'autre, on obtient ΔX en remplaçant chaque terme de la somme par la limite supérieur de l'erreur probable au cour de la mesure :

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{X} = \left|\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{a}}\right| \Delta \boldsymbol{a} + \left|\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{b}}\right| \Delta \boldsymbol{b} + \cdots}$$

Exemple :

La somme ou la différence :

Si : $X = a + b + c$ ou $X = a - b - c$, l'incertitude absolu total ΔX sur X est la somme des incertitudes absolues de chaque grandeur on aura:

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{X} = |\Delta \boldsymbol{a}| + |\Delta \boldsymbol{b}| + |\Delta \boldsymbol{c}|}$$

VI.1.b) Incertitude relative (dérivée logarithmique) :

La dérivée logarithmique s'utilise exclusivement lorsque la fonction f contient des multiplications, divisions et élévations à une puissance. Elle n'est pas intéressante pour les sommations.

Exemple :

La multiplication ou division :

Soit la fonction $X = {a \cdot b}/{c}$

En utilisant le logarithme :

$$log\ X = log\ a + log\ b - \ log\ c$$

En différentiant cette expression :

$$d(log\ X) = \frac{dX}{X} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c}$$

En passant aux incertitudes, (c-à-d aux valeurs supérieurs de la valeur absolue des erreurs), on prend la valeur absolue de chaque terme. On obtient :

$$\boxed{\frac{\Delta \boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|} = \frac{\Delta \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{\Delta \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} + \frac{\Delta \boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}}$$

<u>La multiplication de termes élevés à des puissances</u> :

Soit la fonction $X = a^m\, b^n$, l'incertitude relative s'obtient par :

$$ln|X| = m\ ln|a| + n\ ln|b|$$

$$d(ln|X|) = m\ d(ln|a|) + n\ d(ln|b|),$$

$$\frac{d|X|}{X} = m\ \frac{d|a|}{a} + n\ \frac{d|b|}{b}$$

$$\frac{\delta|X|}{X} = m\ \frac{\delta|a|}{a} + n\ \frac{\delta|b|}{b}$$

$$\boxed{\frac{\Delta \boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|} = |\boldsymbol{m}|\ \frac{\boldsymbol{\delta a}}{|\boldsymbol{a}|} + |\boldsymbol{n}|\ \frac{\boldsymbol{\delta b}}{|\boldsymbol{b}|}}$$

<u>VI.2)</u> <u>Traitement statistique</u> :

La grandeur X, à déterminer, est fonction de plusieurs paramètres *a, b, …* . Chacun d'eux a été estimé au terme d'une étude statistique. On connaît donc leurs moyennes de mesures ; $\bar{a},\ \bar{b},\ \ldots$ et les écarts types $\sigma_a, \sigma_b, \ldots$. La fonction définissant X est $X = f(a, b, \ldots)$. D'après les statistiques, on a alors :

$$\begin{cases} \bar{X} = f(\bar{a}, \bar{b}\,, \ldots) \\ \sigma^2 = \left(\dfrac{\partial}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\dfrac{\partial}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \cdots \end{cases}$$

Où $\sigma_a, \sigma_b, \ldots$ sont supposés indépendants.

La relation donnant σ est connue sous le nom de la ''formule de propagation des erreurs''.

Si l'on suppose que N mesures d'une grandeur X sont faites. La meilleure estimation de X est la moyenne des N mesures $X_1, X_2, \ldots$ soit :

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

La déviation standard ou erreur standard sur les N mesures, $X_1, X_2, \dots, X_N$ de la grandeur X est une estimation de l'incertitude moyenne sur toutes les mesures :

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}$$

σ_X est appelé aussi **écart type**.

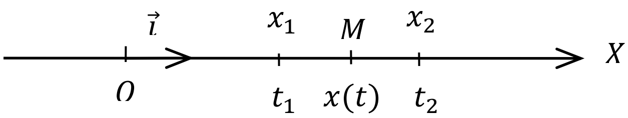
I. Généralités :

- La mécanique est la science qui étudie les mouvements des corps sans considérer (se soucier) les causes qui les provoquent.
- On définit le point matériel comme étant ; un corps solide dont les dimensions sont très faibles devant la distance qui le sépare de l'observateur. L'étude du mouvement de l'objet revient à l'étude du déplacement de son centre de gravité ou de masse (C.D.M).
- La trajectoire d'un solide assimilé à un point matériel est la ligne qui joint ses positions successives au cours du temps.

II. Mouvement rectiligne :

- **Position :**

  Considérons un mobile qui se déplace sur une trajectoire rectiligne



Les positions du mobile en fonction du temps sont repérées par l'abscisse algébrique $x(t) = \overline{OM}\ (t)$

$x = f(t)$ est appelée équation horaire du mouvement.

- **Vitesse :**

  Vitesse moyenne : c'est la variation de la position *x* entre deux instants t_2 et t_1

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{t_2 - t_1}$$

Vitesse instantanée : c'est la dérivée de *x* par rapport au temps t

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{moy} = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v\ dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt \Rightarrow \boxed{x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt + x_0}$$

t_0 , x_0 sont le temps et la position initiaux

Si $v(t) = cste$ (constante, ne dépend pas du temps) ;

$$x(t) = v \int_{t_0}^{t} dt + x_0 \Rightarrow x(t) = v[t]_{t_0}^{t} + x_0$$

$$x(t) = v\,(t - t_0) + x_0$$

Si $t_0 = 0\text{s}$ on aura $\boxed{\boldsymbol{x(t) = vt + x_0}}$

<u>Exemple</u> : $v = 2t$ avec $t_0 = 0s$ et $x_0 = 2m$

- Trouvez la fonction $x(t)$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\, dt \Rightarrow dx = 2t\, dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} 2t\, dt \Rightarrow x - x_0 = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t_0}^{t}$$

$$x(t) = t^2 - t_0^2 + x_0$$

$$t_0 = 0$$

$$x(t) = t^2 + 2$$

- <u>**Accélération**</u> **:**

Accélération moyenne :

$$a_{moy}\ [m/s^2] = \frac{\Delta v}{\Delta t} [{}^{m}/_{s}/s] = \frac{v_2(t) - v_1(t)}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\, \vec{\imath} = a_{moy}\, \vec{\imath}$$

Accélération instantanée :

$$\vec{a}\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \vec{\imath} = a(t)\, \vec{\imath}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{moy} = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

a est la dérivée seconde de *x* par rapport au temps.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\, dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\, dt$$

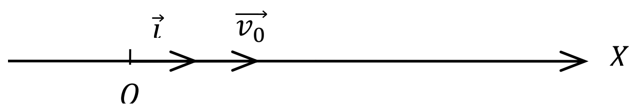
Généralement$a = a\ (t)$

$$v = \int_{t_0}^{t} a\, dt + v_0$$

Si $a = \text{cste}\ \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v(t) = a(t - t_0) + v_0}}$

- **Mouvement rectiligne uniforme :**

$v = cste$



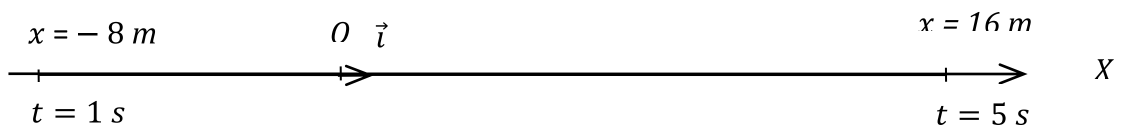
$\vec{v} = v_0\, \vec{\imath}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

$$8v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\, dt \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0\ dt$$

Si $t_0 = 0$s on aura $\boxed{\boldsymbol{x(t) = v_0 t + x_0}}$

Exemple : Un mobile se déplace suivant la droite *x'x* par une vitesse constante v_0, il démarre à l'instants $t_0 = 0\ s$. Sachant qu'à l'instant *t = 1 s*, il se trouve à la position *x = 16 m* et qu'à l'instant *t = 5 s*, *x = - 8 m*. Déterminer l'équation horaire du mouvement, soit *x(t)*.



$x(t) = v_0 t + x_0$

$$\begin{cases} t = 1\ s, & x = 16\ m \\ t = 5\ s, & x = -8\ m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 = v_0(1) + x_0 & \dots (1) \\ -8 = v_0(5) + x_0 & \dots (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Leftrightarrow 16 + 8 = -4\ v_0 \Rightarrow 24 = -4\ v_0$

$$\Rightarrow v_0 = -\frac{24}{4} = -6\ m/s$$

On remplace $v_0$dans (1) on obtient : $16 = -6\ (1) +\ x_0 \Rightarrow x_0 = 16 + 6 = 22\ m$

$\boxed{x(t) = -6\ t + 22}$

- **Mouvement rectiligne uniformément varié** : ***a = constante (cste)***

Ce mouvement est caractérisé par une accélération constante (cste) et une trajectoire rectiligne.

$\vec{v} = a\,\vec{\imath} = a_0\,\vec{\imath}$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow dv = a\,dt$

$\displaystyle\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt$

$a = a_0 \Rightarrow v = v_0 = a_0(t - t_0)$

$\boxed{\boldsymbol{v(t) = a_0(t - t_0) + v_0}}$

Remarque : Si $a = a\,(t)$ et $v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt + v_0$, le mouvement est appelé mouvement à accélération variable.

Exemple : $a = 2t$ avec $t_0 = 0s$ et $v_0 = 2\,{}^{m}/_{s}$

$a = \dfrac{dv}{dt} = 2t \Rightarrow \displaystyle\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} 2t\,dt$

$\displaystyle\int_{2}^{v} dv = \int_{0}^{t} 2t\,dt \Rightarrow v - 2 = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$

$v - 2 = t^2 \Rightarrow \boxed{v(t) = t^2 + 2}$

- **Relation entre *a* et *x* :**

$v = \dfrac{dx}{dt}$ et $a = \dfrac{dv}{dt}$

$\displaystyle\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \Rightarrow \boxed{v(t) = a(t - t_0) + v_0}$

On prend $t_0 = 0$s, on aura :

$\dfrac{dx}{dt} = a\,t + v_0$

$\displaystyle\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (at - v_0)\,dt$

$x - x_0 = a\,\dfrac{t^2}{2} + v_0\,t \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0}}$ ***valable si a = constante***

Relation entre *x* et *v* :

$\dfrac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = a\,dt$

$vdv = a\,v\,dt$

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{x_0}^{x} a \frac{dx}{\cancel{dt}} \cancel{dt}$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - {v_0}^2) = 2a\,(x - x_0) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v^2 - {v_0}^2 = 2\,a\,(x - x_0)}}$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} > 0 \Leftrightarrow Mouvement\ accéléré$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} < 0 \Leftrightarrow Mouvement\ retardé$$

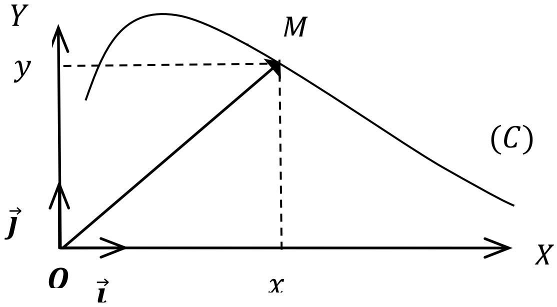
$$\boldsymbol{v \cdot a = 0 \Leftrightarrow Mouvement\ uniforme}$$

III. Mouvement dans le plan :

1) Coordonnées cartésiennes :

Position :

Soit un mobile M qui se déplace sur une trajectoire C, on définit le vecteur position du mobile comme étant le vecteur reliant l'origine O et le point M position du mobile à l'instant *t.*



$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}$$

Vitesse :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j}$$

$$\boldsymbol{\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}}$$

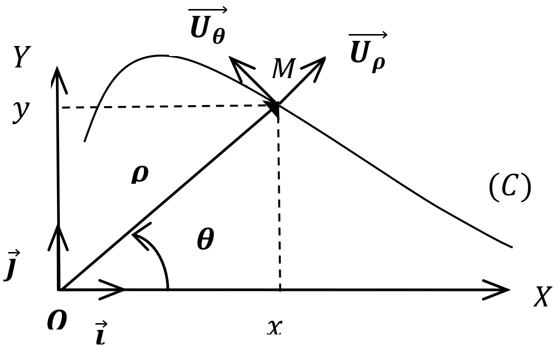
Accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{j}$$

$$\boldsymbol{\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}}$$

2) Coordonnées polaires :

Position :



$\overrightarrow{U_\rho}$: vecteur unitaire radial

$\overrightarrow{U_\theta}$: vecteur unitaire orthoradial

$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{U_\rho}}$ Vecteur position

Vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\,\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\,\overrightarrow{U_\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}}\ \textit{puisque}\ \frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$$

Accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{\rho}\,\overrightarrow{U_\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}\right]$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \dot{\rho}\,\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt}$$

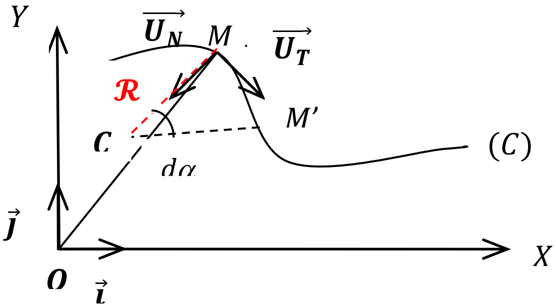
$$\vec{a} = \ddot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \rho\dot{\theta}\left[-\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}\right]$$

$$\vec{a} = \left[\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right]\overrightarrow{U_\rho} + \left[2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right]\overrightarrow{U_\theta}$$

3) La base intrinsèque : $(\overrightarrow{U_T}, \overrightarrow{U_N})$

$\overrightarrow{U_T}$: vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans direction du mouvement.

$\overrightarrow{U_N}$: vecteur unitaire normal à $\overrightarrow{U_T}$, dirigé vers la concavité de la trajectoire.



$\mathcal{R}$: Rayon de courbure de la trajectoire

$$ds = \widehat{MM'}$$

$$\|\vec{v}\| = \left\|\frac{ds}{dt}\right\|$$

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|\,\overrightarrow{U_T} = v\,\overrightarrow{U_T}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}\,\overrightarrow{U_T}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\overrightarrow{U_T} + v\,\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} \quad \ldots (1)$$

Pour calculer $\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt}$ *on utilise le schéma ci − dessus. Pendant* dt *le mobile se déplace de* M *à* M' *tels que* $\widehat{MM'} = ds$ (M' *est très proche de* M)

$\mathcal{R} = CM = CM'$ *rayon de courbure*

ds : déplacement partiel sur la trajectoire (le petit arc que parcoure la particule dans l'intervalle de temps dt)

$$ds = \mathcal{R} \cdot d\alpha$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_T}}{\mathcal{R} \cdot d\alpha} = \frac{1}{\mathcal{R}} \cdot \frac{d\overrightarrow{U_T}}{d\alpha}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_T}}{d\alpha} = \overrightarrow{U_N} \text{ vecteur normal à } \overrightarrow{U_T}$$

$$(1) \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\overrightarrow{U_T} + v \cdot \frac{1}{\mathcal{R}} \cdot v\,\overrightarrow{U_N}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\overrightarrow{U_T} + \frac{v^2}{\mathcal{R}}\,\overrightarrow{U_N}}$$

$\vec{a}$ s'écrit :

$\vec{a} = \overrightarrow{a_T}\,\overrightarrow{U_T} + \overrightarrow{a_N}\,\overrightarrow{U_N}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{a_T} = \frac{dv}{dt}}$ ***la composante tangentielle de l'accélération***

$\boldsymbol{\overrightarrow{a_N} = \frac{v^2}{\mathcal{R}}}$ ***la composante normale de l'accélération***

$\|\vec{\boldsymbol{a}}\| = \sqrt{\boldsymbol{a_T^2 + a_N^2}}$

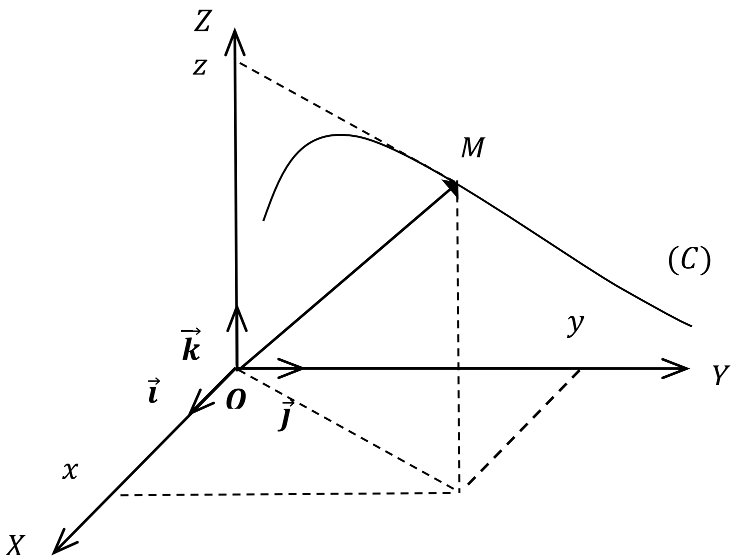
$\overrightarrow{a_T}$ est liée (responsable) du changement du module de $\vec{v}$

$\overrightarrow{a_N}$ est liée (responsable) du changement de la direction de $\vec{v}$

IV. Mouvement dans l'espace :

1) Coordonnées cartésiennes :

Soit un mobile M qui se déplace sur une trajectoire C, on définit le :



Vecteur position :

$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}$

Vecteur vitesse :

$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta OM}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}}$$

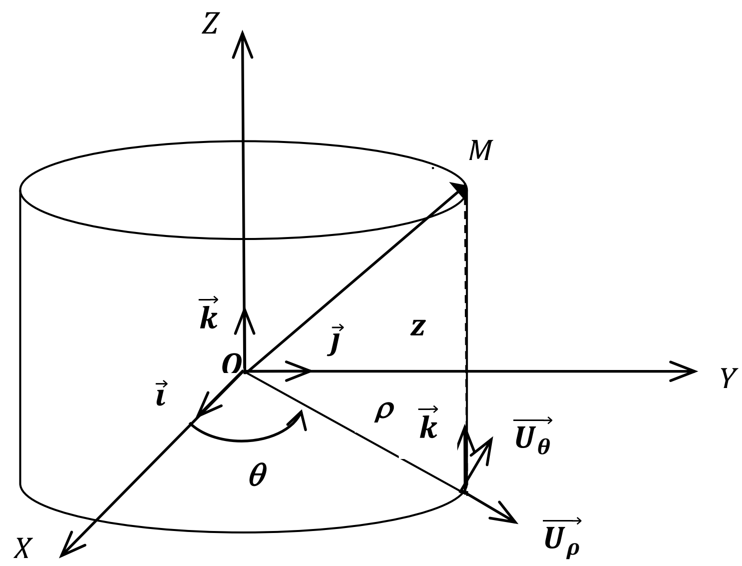
Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

2) Coordonnées cylindriques :

Vecteur Position :



$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{U_\rho} + z\,\vec{k}$$

$$\rho = \left\|\overrightarrow{OM'}\right\|,\ M' projection\ de\ M\ sur\ XOY$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left[\frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{U_\rho} + z\,\vec{k}\right]$$

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\,\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\,\overrightarrow{U_\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\,\vec{k}}$$

$$\vec{v} = v_\rho\,\overrightarrow{U_\rho} + v_\theta\,\overrightarrow{U_\theta} + v_z\,\vec{k}$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\,\overrightarrow{U_\rho} + \dot{\rho}\,\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\rho} + \rho\,\frac{d\dot{\theta}}{dt}\,\overrightarrow{U_\theta} + \rho\,\dot{\theta}\,\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\,\vec{k}$$

On a :

$$\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}\ et\ \frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = -\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\rho}$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\,\overrightarrow{U_\rho} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \rho\,\dot{\theta}\left(-\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\rho}\right) + \ddot{z}\,\vec{k}$$

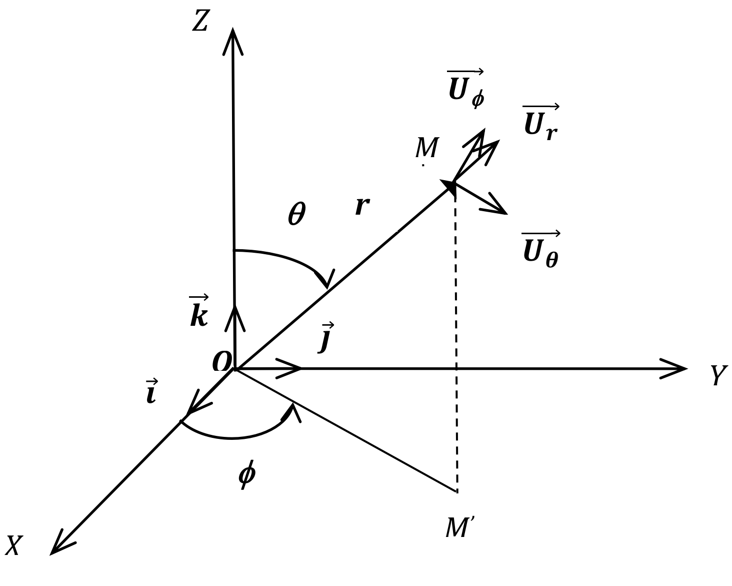
$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{U_\rho} + \left(2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{U_\theta} + \ddot{z}\,\vec{k}}$$

$$\vec{a} = a_\rho\,\overrightarrow{U_\rho} + a_\theta\,\overrightarrow{U_\theta} + a_z\,\vec{k}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)^2 + \ddot{z}^2}$$

3) Coordonnées sphériques :

Vecteur Position :



$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{U_r}}$$

$\theta \in [0, \pi]$ *et* $\phi \in [0, 2\pi]$

$$r = \|\overrightarrow{OM}\|$$

$$\theta = \left(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}\right)\ et\ \phi = \left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM'}\right)$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \dot{\phi}\,\sin\theta\,\overrightarrow{U_\phi}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + r\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\overrightarrow{U_\phi}}$$

$$\vec{v} = v_r\,\overrightarrow{U_r} + v_\theta\,\overrightarrow{U_\theta} + v_\phi\,\overrightarrow{U_\phi}$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\,\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\,\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + r\,\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} + \frac{dr}{dt}\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\overrightarrow{U_\phi}$$

$$+\,r\,\frac{d\dot{\phi}}{dt}\,\sin\theta\,\overrightarrow{U_\phi} + r\,\dot{\phi}\,\frac{d\sin\theta}{dt}\,\overrightarrow{U_\phi} + r\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\frac{d\overrightarrow{U_\phi}}{dt}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = &\left[\ddot{r} - r\,\dot{\phi}^2\,(\sin\theta)^2 - \dot{\theta}^2\right]\overrightarrow{U_r} + \left[2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\phi}^2\,\sin\theta\,\cos\theta\right]\overrightarrow{U_\theta}\\ &+\left[2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\,\sin\theta + 2\,r\,\dot{\theta}\,\phi\,\cos\dot{\phi} + r\,\ddot{\phi}\,\sin\theta\right]\overrightarrow{U_\phi}\end{aligned}}$$

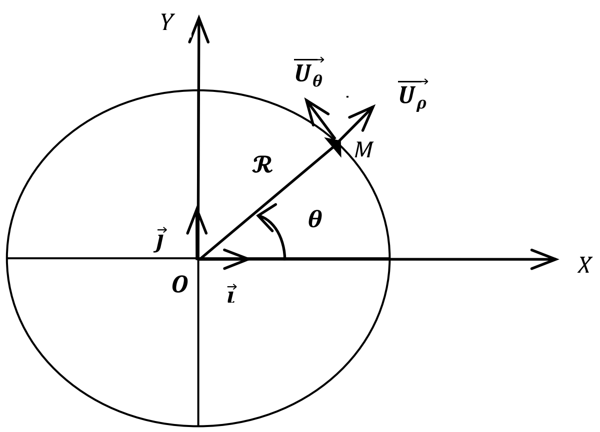
V. Etude de mouvements particuliers :

1) Mouvement curviligne :

Si le mobile M qui se déplace sur une trajectoire non linéaire, on dit que le mouvement est curviligne.

a) Mouvement circulaire quelconque :

∗ **Coordonnées polaires :**



$$\rho = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \mathcal{R} = cste$$

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \mathcal{R}\,\overrightarrow{U_\rho}}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \mathcal{R}\,\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt}$$

$$\vec{v} = \mathcal{R}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\|\vec{v}\| = \mathcal{R}\,\dot{\theta}$$

$\boldsymbol{\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}\left[{rad}/{s}\right]}$ ***est la vitesse angulaire***

$\theta \nearrow \Rightarrow \dot{\theta} \nearrow$ *et si* $\theta \searrow \Rightarrow \dot{\theta} \searrow$

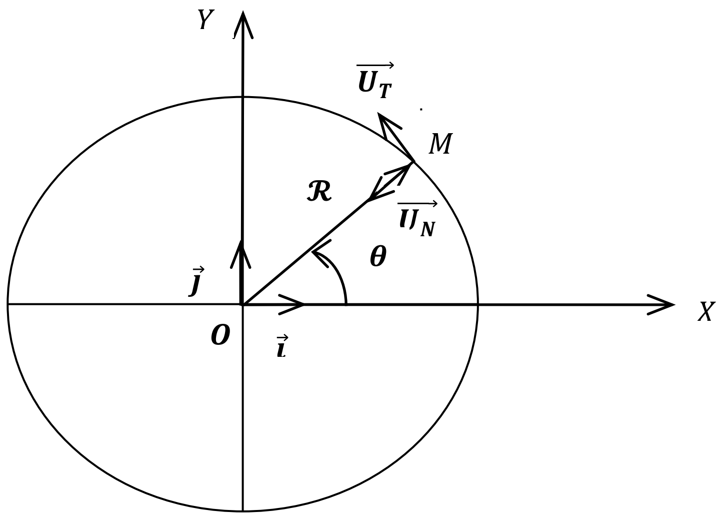
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \mathcal{R}\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \rho\,\dot{\theta}\,\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt}$$

$$\vec{a} = \mathcal{R}\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \mathcal{R}\,\dot{\theta}\left(-\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\rho}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a} = -\,\mathcal{R}\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{U_\rho} + \mathcal{R}\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}}}$$

$\boldsymbol{\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\,[rad/s^2]}$***est l'accélération angulaire***

*** <u>Coordonnées intrinsèques</u> :**



$$\overrightarrow{U_T} = \overrightarrow{U_\theta} \text{ et } \overrightarrow{U_N} = -\,\overrightarrow{U_\rho}$$

$$\overrightarrow{OM} = -\,\mathcal{R}\,\overrightarrow{U_N}$$

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \overrightarrow{U_T} = \mathcal{R}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_T}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_T} + \frac{v^2}{\mathcal{R}}\overrightarrow{U_N}$$

$\mathcal{R}$: $rayon\ du\ cercle$

$$\boxed{\vec{a} = \mathcal{R}\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_T} + \frac{\mathcal{R}^2\,\dot{\theta}^2}{\mathcal{R}}\overrightarrow{U_N} = \mathcal{R}\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_T} + \dot{\theta}^2\mathcal{R}\,\overrightarrow{U_N}}$$

b) Mouvement circulaire uniforme :

$$Si\ \omega = cste\ (est\ constante), \omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \omega_0 \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0}$$

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \overrightarrow{U_T} = \mathcal{R}\,\omega_0\,\overrightarrow{U_T} = \mathcal{R}\,\omega_0\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \vec{a} = -\mathcal{R}\,\omega_0^2\,\overrightarrow{U_\rho} = \mathcal{R}\,\omega_0^2\,\overrightarrow{U_N}$$

c) Mouvement circulaire uniformément varié :

$$Si\ \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \alpha_0 = cste\ (est\ constante)$$

α : $l'accélération\ angulaire$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha_0 \Rightarrow d\omega = \alpha_0\, dt$$

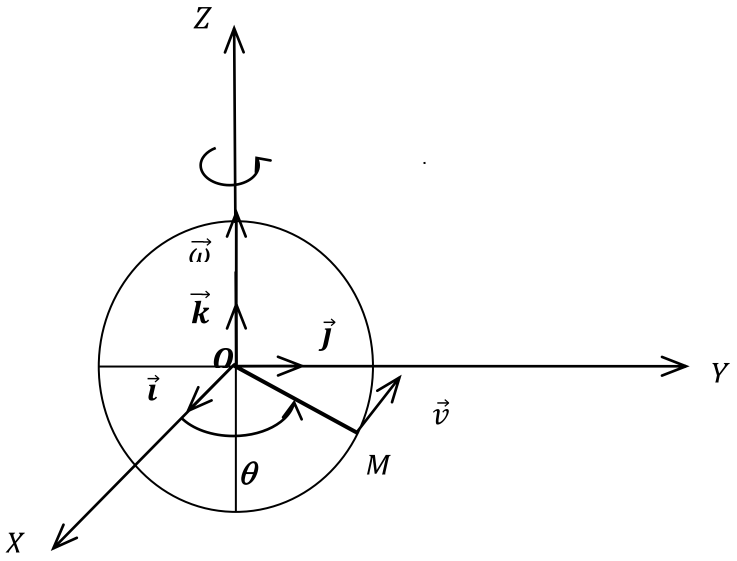
$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha_0 \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \alpha_0 t + \omega_0}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}_0 \Rightarrow d\theta = \omega\, dt = (\alpha_0 t + \omega_0)\, dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{0_0}^{t} \left((\alpha_0 t + \omega_0)\right) dt \Leftrightarrow \theta - \theta_0 = \frac{\alpha_0}{2}_0 t^2 + \omega_0\, t$$

$$\boxed{\theta = \frac{\alpha_0}{2}_0 t^2 + \omega_0\, t + \theta_0}$$

Relation vectorielle entre $\vec{v}$, $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{\omega}$:



$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{\omega} = \omega\, \vec{k}$$

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \mathcal{R}$$

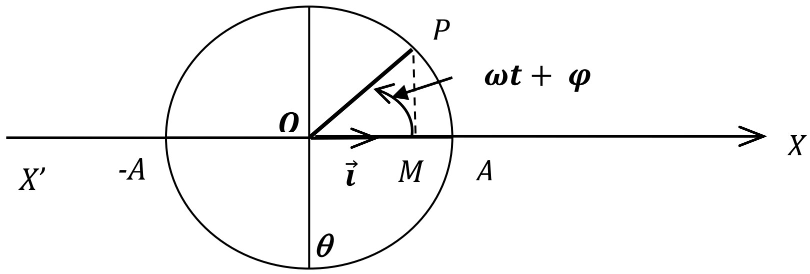
$$\boldsymbol{\vec{v} = \|\vec{\omega}\| \cdot \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \cdot \sin(\vec{\omega}, \overrightarrow{OM})\, \overrightarrow{U_\theta}}$$

$$\vec{v} = \omega\, \mathcal{R}\, \overrightarrow{U_\theta}$$

$\vec{\omega}$: *vecteur accélération angulaire perpondiculaire* $\perp$ *au plan cercle* $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{v}\right)$

d) Mouvement harmonique (rectiligne sinusoïdal) :

On peut le considérer comme la projection du mouvement circulaire uniforme d'un point P de vitesse angulaire ω sur le rayon A d'un cercle (sur un diamètre).



Soit M la projection de P sur l'axe $X'OX$, le mouvement harmonique de M est donc défini par :

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath}$

$\boldsymbol{x = OM = A\ \cos\ (\omega t + \ \varphi)}$

$\boldsymbol{(\omega t + \ \varphi)}$: ***est appelé la phase***

$\boldsymbol{\varphi}$: ***est la phase initiale ou phase à l'originedes temps***

l'abscisse de M varie entre $\boldsymbol{x = \ -A}$ ***et*** $\boldsymbol{x = \ +A}$

$\boldsymbol{A}$: ***est appelée amplitude du mouvement***

Le mouvement se produit identiquement à lui-même chaque fois que l'angle ωt augmente de 2π d'où :

$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega}}$, $\boldsymbol{T}$: ***est la période***

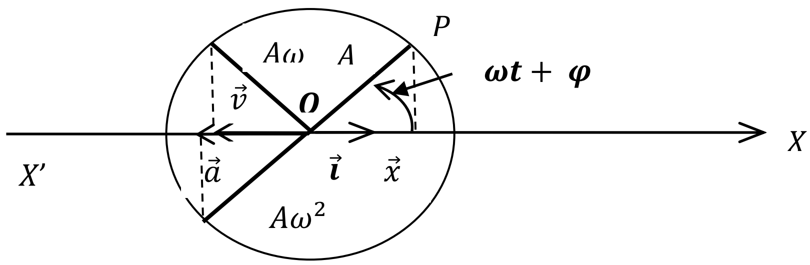
$\boldsymbol{\omega}$: ***est appelée pulsation ou fréquence angulaire***

$\boldsymbol{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$, $\boldsymbol{f}$: ***est le nombre d'oscillations complètes par unité de temps***

$\boldsymbol{A, \varphi}$ **sont déterminées à partir des conditions initiales**

$$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} = -A\ \cos\ (\omega t + \varphi) = A\,\omega\ \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

$$\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = -A\,\omega^2\ \cos\ (\omega t + \varphi) = A\,\omega^2\ \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$



VI. Mouvement relatif :

1) Introduction :

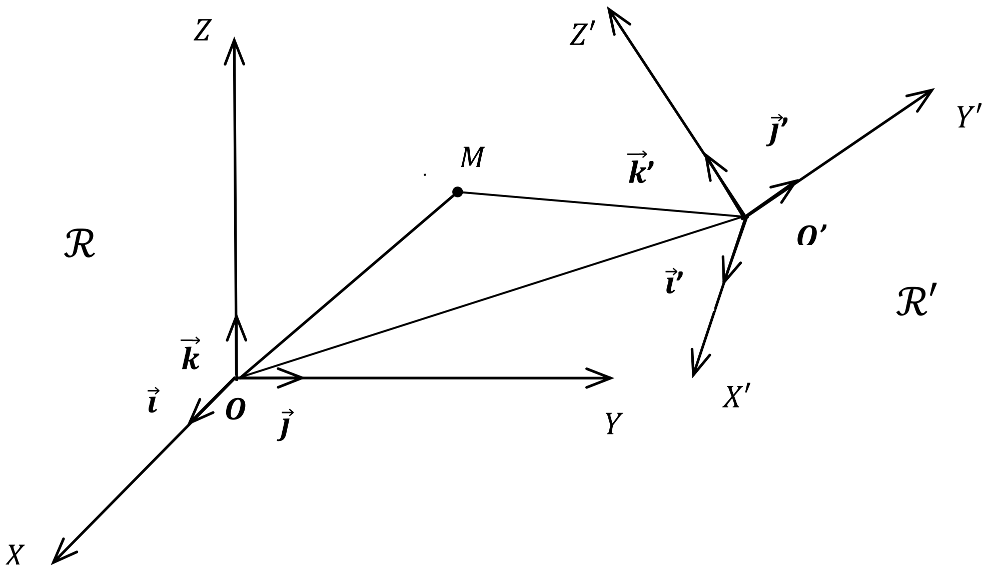
Le mouvement est une notion relative en ce sens qu'on doit toujours le rapporter à un système de référence particulier choisi par l'observateur.

Le repos et le mouvement sont des notions relatives et ils dépendent de la situation du mobile par rapport à un corps (repère) qui sert de référence.

Le mouvement du mobile par rapport à un repère fixe $\mathcal{R}\,(O, X, Y, Z)$ est appelé le mouvement absolu et son mouvement par rapport à un repère mobile soit $\mathcal{R}'\,(O', X', Y', Z')$ est appelé mouvement relatif.

2) Grandeurs absolues et grandeurs relatives :

Soit un mobile M en mouvement par rapport à deux référentiels $\mathcal{R}\,(O, X, Y, Z)$ et $\mathcal{R}'\,(O', X', Y', Z')$



2.A) Vecteur position :

∗ **Vecteur position absolu :** $\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

∗ **Vecteur position relatif :** $\overrightarrow{O'M}_{/\mathcal{R}'} = x'\,\vec{\imath'} + y'\,\vec{\jmath'} + z'\,\vec{k'}$

2.B) Vecteur vitesse :

∗ **Vecteur vitesse absolu :**

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/\mathcal{R} = \frac{dx}{dt}\,\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$$

∗ **Vecteur vitesse relatif :**

$$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/\mathcal{R}' = \frac{dx'}{dt}\,\vec{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\,\vec{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\,\vec{k'}$$

2.C) Vecteur accélération :

∗ **Vecteur accélération absolu :**

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}/\mathcal{R} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/\mathcal{R} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{k}$$

∗ **Vecteur accélération relatif :**

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt}/\mathcal{R}' = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}/\mathcal{R}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\,\vec{\imath'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\,\vec{\jmath'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\,\vec{k'}$$

3) Composition des vitesses :

C'est la recherche d'une relation entre la vitesse absolue et la vitesse relative

A chaque instant t ;

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

dérivant la relation vectorielle précédente, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/\mathcal{R} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/\mathcal{R} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}\left[x'\,\vec{\imath'} + y'\,\vec{\jmath'} + z'\,\vec{k'}\right]$$

$\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}$ et $\vec{k'}$ ne sont pas fixes par rapport à $\mathcal{R}$

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{\imath'} + x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$\vec{v}_a = \left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right] + \left[\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + +\frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right]$$

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r}$$

Le premier terme $\vec{v}_e$ est appelé vitesse d'entrainement du repère $\mathcal{R}'$ par rapport au repère $\mathcal{R}$ avec :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

On peut rencontrer que la vitesse d'entrainement $\vec{v}_e$ peut être considérer comme la vitesse absolue $\vec{v}_a$ qu'aurait le mobile M dans $\mathcal{R}$ s'il était immobile (fixe) par rapport à $\mathcal{R}'$ c'est-à-dire :

$$Si\ \vec{v}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_e$$

Le deuxième terme $\vec{v}_r$ représente la vitesse relative du mobile M par rapport à $\mathcal{R}'$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}_{\text{Mvt de translation}} + \underbrace{x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}}_{\text{Mvt de rotation}}$$

En général : Si $\vec{A}$ est un vecteur qui effectue une rotation, on a ;

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

d'où :

$$\frac{d\vec{\imath}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}', \frac{d\vec{\jmath}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}' \text{ et } \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}'$$

donc :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath}'\right) + y'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}'\right) + z'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k}'\right)$$

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \left(x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'\right)$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

$\vec{\omega}$: ***vecetur vitesse angulaire ou vecteur rotation instantanné de*** $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$

4) Composition des accélérations :

C'est la recherche d'une relation entre les accélérations.

A chaque instant t ;

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}/\mathcal{R} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$$

$$+ \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}' + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{a}_a = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right] + 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]$$

$$+ \left[\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}_r}$$

tels que :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$$

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]$$

$$\vec{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$$

$\vec{a}_e$: est l'accélération d'entraînement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. C'est l'accélération qu'aurait le mobile dans le repère absolu s'il était immobile par rapport à $\mathcal{R}'$.

$$Si\ \frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2} \Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_e$$

$\vec{a}_r$: correspond à l'accélération relative

$\vec{a}_e$: est appelée accélération complémentaire ou de Coriolis, elle dépend à la fois de la vitesse de M dans $\mathcal{R}'$ et de la rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

L'accélération de Coriolis s'annule si :

$*$ le mobile est fixe par rapport à $\mathcal{R}'$ soit ;

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dz'}{dt}$$

$*$ ou si le repère relatif (mobile) est animé d'un mouvement de translation (même accélération) par rapport au repère absolu (*////fixe) ou un mouvement de translation uniforme soit ;

$$\frac{d\vec{\imath'}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath'}}{dt} = \frac{d\vec{k'}}{dt}$$

On peut rencontrer que $\vec{a}_e$ et $\vec{a}_c$ s'annulent, on aura donc :

$\vec{a}_a = \vec{a}_r$ (il s'ensuit alors que les vecteurs accélération du mobile mesurés dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$ sont égaux).

$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}_r$

On a :

$$\frac{d\vec{\imath'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath'}, \frac{d\vec{\jmath'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'}\ et\ \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k'}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right] + y'\frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right] + z'\frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \wedge \vec{\imath'}\right] + y'\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'}\right] + z'\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \wedge \vec{k'}\right]$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{\imath'} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right] + y'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{\jmath'} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right] + z'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{k'} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \left(x'\,\vec{\imath'} + y'\,\vec{\jmath'} + z'\,\vec{k'}\right) + x'\,\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath'}\right) + y'\,\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'}\right) + z'\,\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{k'}\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \left(x'\,\vec{\imath'} + y'\,\vec{\jmath'} + z'\,\vec{k'}\right)\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{O'M}\right)\right)}}$$

$\boldsymbol{\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{O'M}\right)\right)}$ **: est l'accélération centripète**

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath'}\right) + \frac{dy'}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'}\right) + \frac{dz'}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k'}\right)\right]$$

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt}\,\vec{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\,\vec{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\,\vec{k'}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\left(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r\right) + \vec{a}_r}}$$

5) Etude de quelques cas particuliers :

5.A) Mouvement relatif de translation du repère mobile par rapport au repère fixe :

$\vec{\imath}' = \vec{\imath}, \vec{\jmath}' = \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}' = \vec{k}\ et\ \vec{\omega} = \vec{0}$

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{v}_r$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

$$\vec{a}_c = \vec{0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{a}_r}}$$

Remarque :

Lorsque le repère relatif est en mouvement de translation uniforme par rapport au repère absolu, c'est-à-dire qu'il effectue son mouvement de translation avec une vitesse constante $\overrightarrow{v_0}$ au cours du temps, les paramètres cinématiques du repère mobile et le point matériel mobile M dans le repère absolu deviennent :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \overrightarrow{v_0}\ et\ \overrightarrow{OO'} = v_0\ t$$

$$\boldsymbol{\vec{v}_e = \overrightarrow{v_0}\ avec\ v_0 = cste}$$

$$\vec{a}_e = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{v}_r$$

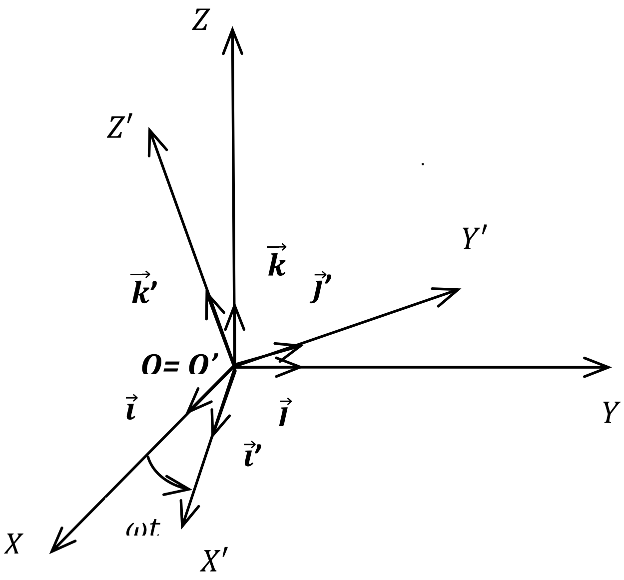
$$\boldsymbol{\vec{a}_a = \vec{a}_r}$$

5.B) Mouvement relatif de rotation :

On considère que le repère $\mathcal{R}'$ est en rotation autours d'un axe (Δ) avec une vitesse de rotation $\vec{\omega}$ sans effectuer un mouvement de translation.

$O\ et\ O'$ sont identiques

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$$



$$\vec{v}_e = x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$\vec{v}_e = x'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath'}\right) + y'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'}\right) + z'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k'}\right)$$

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \left(x'\,\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'}\right)$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{e}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{v}_r$$

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{O'M}\right)\right) + 2\left(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r\right) + \vec{a}_r$$

Puisque ;

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{d\vec{\omega}}}{\boldsymbol{dt}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \left(\vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}\right) + \boldsymbol{2}\left(\vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}\right) + \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{r}}}$$

Remarque :

Si le mouvement est rotationnel uniforme, soit $|\vec{\omega}| = cste$ donc :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$$

$$et\ \vec{a}_a = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\left(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r\right) + \vec{a}_r$$

I. Introduction :

La dynamique c'est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes qui les produisent. Notre expérience quotidienne nous montre que le mouvement (mvt), d'un corps est le résultat direct de ses interactions avec les autres corps qui l'entourent.

L'étude de la dynamique est au fond l'analyse de la relation qui existe entre la force et les variations du mouvement d'un corps.

II. Lois de Newton :

Ce sont trois lois du mouvement énoncées pour la 1ère fois par Sir Isaac Newton (1642-1727) bien qu'elle aient été implicitement contenues auparavant dans l'œuvre de Galilée et qui sont des généralisations issues d'une analyse soigneuse des mouvements que nous observons autour de nous, et l'extrapolation de nos observations au cours de certaines expériences idéales ou simplifiées.

II.1) La 1ère loi de Newton :

a) Principe d'inertie (Référentiel Galiléen) :

Si un objet n'est soumis à aucune force ;

- Soit il continue à se déplacer en ligne droite avec la même vitesse.
- Soit il reste au repos, s'il l'était déjà.

Autrement dit : i existe un référentiel absolu pour lequel un corps isolé (très éloigné de tout autre corps de telle sorte qu'il ne soit soumis à aucune action) est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme [un cas particulier est le repos].

b) Référentiel de Copernic :

Il a pour origine, le centre de masse du système solaire, les directions sont définies à partir de trois étoiles fixes.

Le soleil concentre 99,85 % de la masse du système solaire, donc le centre de masse du système solaire se confond avec celui du soleil.

Le référentiel de Copernic est le référentiel le plus Galiléen.

II.2) La 2ème loi de Newton :

a) Quantité de mouvement :

Nous définissons la quantité de mouvement (Q. mvt) d'une particule de masse m et qui est en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$ comme le produit :

$$\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{v}}\ [\boldsymbol{kg\ m/s}]$$

La masse est un coefficient qui distinct une particule d'une autre, elle caractérise l'inertie d'un corps. C'est-à-dire la résistance que le corps oppose à tout changement provoqué de sa vitesse.

Pour un système de plusieurs particules, la quantité totale du mouvement de ce système est égale à :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P_i} = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3} + \cdots + \vec{P_N} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i$$

b) Enoncé de la 2ème loi :

L'interaction produit une variation de la quantité de mouvement.

Dans un repère Galiléen, la variation de la quantité de mouvement d'un corps par rapport au temps est égale à la résultante des forces extérieures appliquées sur ce mobile.

$$\boxed{\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{P}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{dm}\,\vec{\boldsymbol{v}}}{\boldsymbol{dt}}}$$

Si m est constante alors il devient :

$$\boxed{\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \frac{\boldsymbol{dm}\,\vec{\boldsymbol{v}}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{a}} \quad [\boldsymbol{Principe\ fondamentale\ de\ la\ dynamique}]}$$

Nous disons en particulier si la résultante des forces est nulle ;

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} = m\,\vec{a} = \vec{0}$$

Cela implique que cette particule est en mouvement rectiligne uniforme.

Dans ce cas la 1ère loi est un cas particulier de la 2ème loi.

Remarque :

$\vec{F}_{moy} = \dfrac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$, $\vec{F}_{moy}$ ***est le vecteur force moyenne***

$\vec{F}_{inst} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$, $\vec{F}_{inst}$ ***est le vecteur force instantanné***

c) <u>Principe de conservation de la quantité de mouvement</u> :

Si :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \overrightarrow{cste}} \text{ le vecteur quantité de mouvement est constant}$$

$\vec{P}$ est constant en module et en sens, ce qui veut dire que la quantité de mouvement totale d'un système de particules isolées est constante [quelque soit les interactions mutuelles entre les constituants du système].

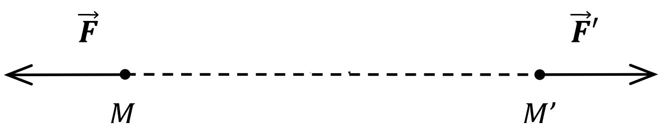
<u>Exemple</u> : un neutron n vient frapper un noyau de Bore (5 protons + 5 neutrons), cela donne après collision : un noyau d'Hélium et de Lithium ⟶ la quantité de mouvement totale est conservée.

$$^{1}_{0}n + {}^{10}_{5}B \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{7}_{3}Li$$

<u>II.3) 3ème loi de Newton</u>: [loi de l'action et de la réaction]

Soient deux points matériels M et M' ne subissant que des forces d'action mutuelle.

Soit $\vec{F}$ la force exercée sur M de la part de M'et soit $\vec{F'}$ la force exercée sur M' de la part de M.



Le principe de l'action et de la réaction énonce que :

$$\boxed{\vec{F'} = -\vec{F}}$$

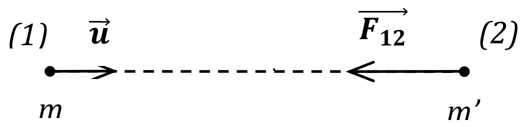
$\vec{F}$ et $\vec{F'}$ ont le même module et de sens opposés.

<u>III)</u> <u>Les forces</u>: [interactions fondamentales]

Toutes les forces qui se trouvent dans la nature se composent de quatre (4) forces fondamentales.

III.1) Force de la gravitation universelle :

C'est une force attractive entre deux masses m et m' distantes l'une de l'autre par une distance r.



$$\overrightarrow{F_{12}} = -\frac{G\,m\,m'}{r^2}\,\vec{u}$$

avec :

$$\vec{r} = r\,\vec{u} \implies \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{12}} = -\frac{G\,m\,m'}{r^3}\,\vec{r}}$$

G : est la constante universelle de la gravitation égale à :

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [m^3/(kg\ s^2)]$

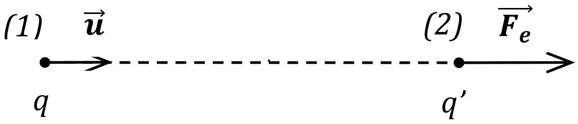
Au voisinage de la terre (surface de la terre), la gravitation est responsable de l'attraction des corps vers le centre de la terre.

L'interaction gravitationnelle se manifeste essentiellement à nous par la pesanteur : c'est elle qui nous maintient sur le sol, qui fait couler les rivières et rouler les pierres du bas des montagnes et c'est elle encore qui retient l'atmosphère terrestre.

F s'exprime en Newton $[N]$, m en kilogramme $[kg]$ est r en $[m]$

III.2) Force électrique :

C'est une force qui apparaît entre deux charges électriques q et q' placées à une distance r l'une de l'autre.



$$\boxed{\vec{F_e} = \frac{K\,q\,q'}{r^2}\,\vec{u}}$$

K : est la constante de proportionnalité ou constante de Coulomb.

$$K = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ [(N\,m^2)/C^2]$$

Où ε_0 : représente la permittivité dans le vide, elle vaut : $8{,}854 \times 10^{-12}\ [F/m]$, *Farads par mètre ou de manière équivalente en* $C^2/(N \cdot m^2)$

Dans un milieu autre que le vide, ε_0 sera remplacée par $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ où ε_r représente la permittivité relative ou constante diélectrique.

F s'exprime en Newton $[N]$, q en Coulomb $[C]$ est r en $[m]$

$\vec{F_e}$ est une force d'attraction si les charges sont de signes contraire et une force de répulsion si elles sont de même signe.

Cette force est responsable de la stabilité des électrons autours du noyau atomique, c'est elle qui assure la cohésion de la matière solide.

III.3) Interaction forte :

Les neutrons et les protons sont maintenus ensembles dans le noyau par l'interaction nucléaire forte qui est attractive. C'est elle qui rend stable les noyaux atomiques. Cette interaction est très intense, mais son rayon d'action est très court ; elle ne se manifeste pratiquement plus au-delà de $10^{-15}\ m$. Sa grande intensité explique la raison pour laquelle il faut des énergies considérables pour briser les noyaux.

III.4) Interaction faible :

C'est elle qui réagit certaines réactions entre particules élémentaires. C'est la force responsable de la radioactivité.

IV) Les forces particulières :

MECANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Chapitre III : Dynamique d'une particule

Ce sont trois lois du mouvement énoncées pour la 1ère fois par Sir Isaac Newton (1642-1727) bien qu'elle aient été implicitement contenues auparavant dans l'œuvre de Galilée et qui sont des généralisations issues d'une analyse soigneuse des mouvements que nous observons autour de nous, et l'extrapolation de nos observations au cours de certaines expériences idéales ou simplifiées.

IV.1) Force de contact statique :

C'est une force qui apparaît quand deux corps sont en contact l'un avec l'autre.

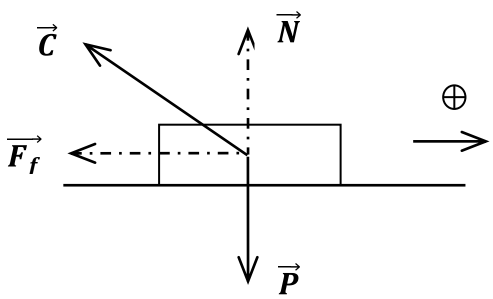
$$\sum \vec{F} = \vec{p} + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = -\vec{N}$$

$\vec{p}$: est la force du poids du corps sur le sol

$\vec{N}$: est la force de contact du sol sur le corps

IV.2) Force de frottement solide :

L'effet retardataire des frottements se traduit par une force appelée, 'force de frottement'.
L'expérience montre que cette force, est dans la plupart des cas, proportionnelle à la composante normale $\vec{N}$ de l'action de contact $\vec{C}$, qu'exerce un corps sur un autre. La constante de proportionnalité μ est appelée coefficient de frottement.



$\vec{C}$ *est la force résultante de la réaction du sol sur le corps* , $\vec{C} = \vec{R}$

Si le corps est statique, μ est appelé coefficient de frottement statique μ_s et si le corps est en mouvement, on l'appelle coefficient de frottement de glissement.

$$\mu_s = \frac{\|\overrightarrow{C_{OT}}\|}{\|\overrightarrow{C_{ON}}\|}$$

Où $\overrightarrow{C_{OT}}$ et $\overrightarrow{C_{ON}}$ sont respectivement les composantes tangentielle et normale de l'action de contact $\overrightarrow{C_0}$ mesurée à la rupture d'équilibre.

$$\mu_g = \frac{\|\overrightarrow{C_T}\|}{\|\overrightarrow{C_N}\|}$$

Où $\overrightarrow{C_T}$ et $\overrightarrow{C_{ON}}$ sont respectivement les composantes tangentielle et normale de l'action de contact $\overrightarrow{C}$ au cours du mouvement.

Le coefficient μ_g est caractérisé par étant:

- Inférieur au coefficient de frottement statique
- Sensiblement indépendant de la vitesse
- Sensiblement indépendant des superficies des surfaces en contact
- Indépendant de la nature des surfaces en contact

IV.3) Force de frottement d'un fluide (liquide ou gaz) :

Lorsqu'un solide se déplace dans un milieu fluide (gaz ou liquide), ce dernier s'oppose à son déplacement. Cet effet retardataire est appelé frottement visqueux. La force qui lui est associée est appelée résistances du fluide.

Pour des vitesses relatives inferieures à 1 (m/s) la loi de cette force s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{F_f} = -K\,\eta\,\vec{v}}$$

- Le signe – indique que $\overrightarrow{F_f}$ est de direction opposée à $\vec{v}$
- K est un coefficient qui dépend de la forme du corps, (dépend de la géométrie et de la nature du fluide, exemple pour une sphère $K = 6\,\pi\,R$
- η est appelé coefficient de viscosité. Il dépend du frottement interne du fluide ; c'est-à-dire de la force de frottement entre les différentes couches du fluide se déplaçant à des vitesses différentes.

$\vec{v}$: vecteur vitesse du corps mobile

$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$

Pour des vitesses relatives élevées, en plus du frottement visqueux, apparaît un autre effet retardataire, dû à la compression et à la dépression du fluide respectivement à l'avant et à l'arrière du corps ; la loi de force s'écrit donc :

$\|\vec{F_f}\| = K\,\eta\,v^2 \;\textbf{pour}\; v < 20\ (m/s)$

$\|\vec{F_f}\| = K\,\eta\,v^n \;\textbf{pour}\; v > 20\ (m/s)$

Où l'exposant η est un nombre réel supérieur à 2

IV.4) Force élastique (de rappel) :

La force élastique $\vec{F_{él}}$ responsable du mouvement sinusoïdal rectiligne d'un point M de masse m est proportionnelle au déplacement $\overrightarrow{OM}$ mesuré par rapport à l'origine et lui est opposée (opposé à la force).

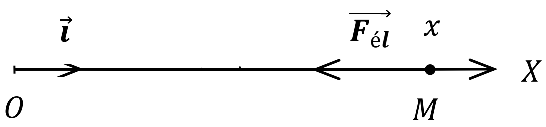
$$\boxed{\vec{F_{él}} = m\,\vec{a} = -K\,\overrightarrow{OM}}$$

La force élastique $\vec{F_{él}}$ est toujours dirigée vers l'origine O.

$\overrightarrow{OM}$: vecetur position avec :

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath}$

K : est appelée constante de raideur ou d'élasticité du ressort



Le module du vecteur position et égale à :

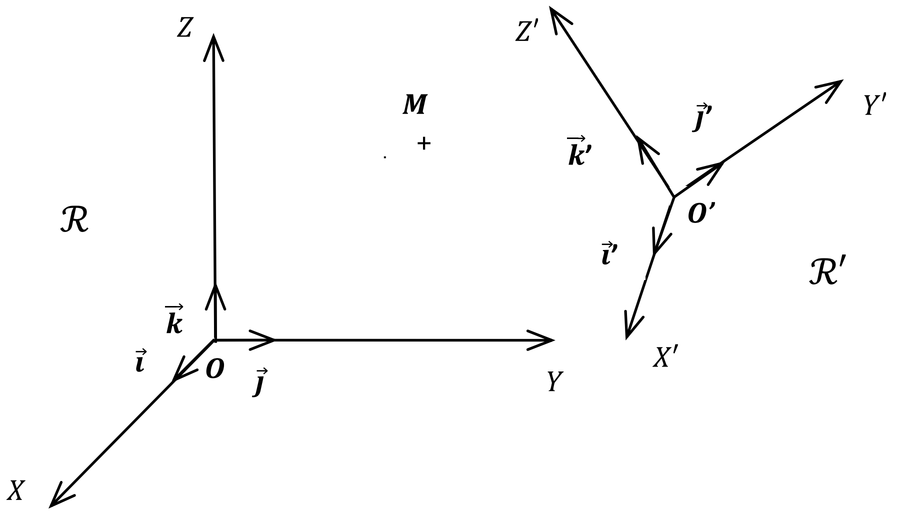
$\|\overrightarrow{OM}\| = \Delta l$

Δl : correspond à l'allongement où à la compression du ressort, le module de la force élastique s'écrit alors :

$\|\vec{F_{él}}\| = K\,\Delta l$

IV.5) Pseudo-forces d'inertie :

La relation fondamentale de la dynamique $(R.F.D)$ dans le cas d'un mouvement relatif. Dans un référentiel non Galiléen on a :



$\vec{F} = m\,\overrightarrow{a_a}\,(t)$

$\overrightarrow{a_a}\,(t) = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$

$\vec{F} = m\,\overrightarrow{a_r} + m\,\overrightarrow{a_e} + m\,\overrightarrow{a_c} \;\Rightarrow\; m\,\overrightarrow{a_r} = \vec{F} - m\,(\overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c})$

$-\,m\,\overrightarrow{a_e}$ et $-\,m\,\overrightarrow{a_e}$ s'appellent force d'inertie d'entraînement et force d'inertie de Coriolis respectivement.

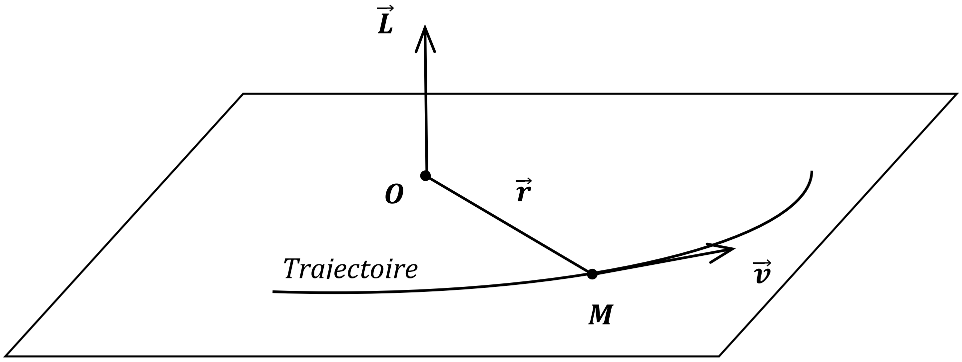
$m\,\overrightarrow{a_r} = \vec{F} + \vec{f}$

$$\boldsymbol{\vec{f} = -\,m\,(\overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c})}$$

$\vec{f}$: est appelée pseudo-force d'inertie

<u>V)</u> <u>Le moment cinétique</u> :

<u>V.1)</u> <u>Définition</u> :



Le moment cinétique $\vec{L}$ d'un corps mobile M par rapport à un point fixe O est définit par :

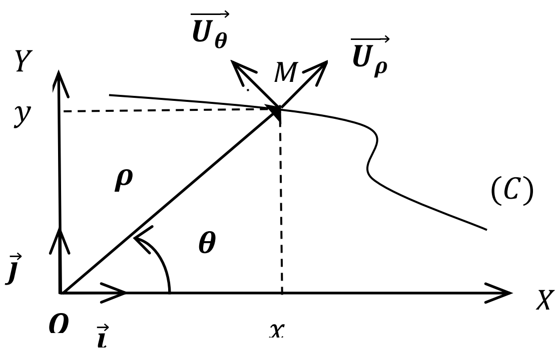
$$\boxed{\vec{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}}$$

$\vec{L}_{M/O}$: est aussi appelé moment de la quantité de mouvement $\vec{P} = m\,\vec{v}$

On définit aussi le moment cinétique d'un corps solides constitué de plusieurs éléments $(m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n)$ par :

$$\vec{L}_{M/O} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{P}_i$$

<u>V.2)</u> <u>Cas d'un mouvement plan curviligne</u> :



$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{U_\rho} = r\,\overrightarrow{U_r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$$

$$\vec{L}_{M/O} = r\,\overrightarrow{U_r} \wedge m\,(\dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta})$$

$\vec{L}_{M/O} = r\, m\, \dot{r}\, (\overrightarrow{U_r} \wedge \overrightarrow{U_r}) + m\, r^2\, \dot{\theta}\, (\overrightarrow{U_r} \wedge \overrightarrow{U_\theta})$

$\overrightarrow{U_r} \wedge \overrightarrow{U_r} = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{L}_{M/O} = m\, r^2\, \dot{\theta}\, \vec{k}}$$

* **mouvement curviligne uniforme** :

Si le mouvement est circulaire uniforme alors :

$r = \|\overrightarrow{OM}\| = \mathcal{R} = cste$

$\omega = \dot{\theta} = \omega_0 = cste$

$\boxed{\vec{L}_{M/O} = m\, \mathcal{R}^2 \omega_0\, \vec{k}}$

V.3) Théorème du moment cinétique :

La dérivée par rapport au temps du vecteur moment cinétique $\vec{L}_{/O}(t)$ d'une particule est égale au moment de la résultante des forces $\vec{F}_{ext}$ appliquées à cette particule :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{M/O}(t)\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{\tau}_{/O}\,(\vec{F}_{ext})}$$

Démonstration :

$\vec{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\, \vec{v}$

$\frac{d\vec{L}_{M/O}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\,(\overrightarrow{OM} \wedge m\, \vec{v})$

$\frac{d\vec{L}_{M/O}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\, \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d}{dt}\,(m\, \vec{v})$

$\frac{d\vec{L}_{M/O}(t)}{dt} = \vec{v} \wedge m\, \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\, \vec{a}$

$\vec{v} \wedge m\, \vec{v} = \vec{0}$

$\frac{d\vec{L}_{M/O}(t)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\, \vec{a}$

$\frac{d\vec{L}_{M/O}(t)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{\tau}_{/O}\,(\vec{F}_{ext})$

Et c'est ce qui est recherché.

V.4) Théorème du moment cinétique :

Si :

$$\vec{L}_{/O}(t) = \overrightarrow{cste} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/O}(t)}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \longrightarrow le\ système\ est\ isolé \\ \overrightarrow{OM} \parallel \sum \vec{F}_{ext} \longrightarrow la\ somme\ des\ forces\ est\ centrale \end{cases}$$

V.5) Les forces centrales :

1) Définition :

On dit que le mouvement est central (induit sous l'effet d'une force centrale) si la résultante des forces appliquées sur le corps est dirigée à chaque instant (toujours) vers un point C appelé : centre des accélérations.

$$\boxed{\overrightarrow{CM} \parallel \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow \overrightarrow{CM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}}$$

2) Le moment cinétique en présence d'une force centrale :

• **a)** Le vecteur moment cinétique $\vec{L}_{/C}(t)$, d'une particule soumise uniquement à une force centrale, est constant en module, en sens et en direction. En plus :

• **b)** La trajectoire est plane

• **c)** La vitesse aréolaire est constante

$\frac{ds}{dt}$: *est la vitesse aréolaire*

Démonstration :

• **a)** $\vec{L}_{/C}(t) = \overrightarrow{CM} \wedge m\,\vec{v}$

$$\frac{d\vec{L}_{M/C}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{CM}}{dt} \wedge m\,\vec{v} + \overrightarrow{CM} \wedge \frac{d}{dt}(m\,\vec{v})$$

$$\frac{d\vec{L}_{M/C}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{CM}}{dt} \wedge m\,\vec{v} + \overrightarrow{CM} \wedge m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_{M/C}(t)}{dt} = \overrightarrow{CM} \wedge m\,\vec{a} = \overrightarrow{CM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

Puisque le mouvement est central alors :

$\overrightarrow{CM} \parallel \sum \vec{F}_{ext}$

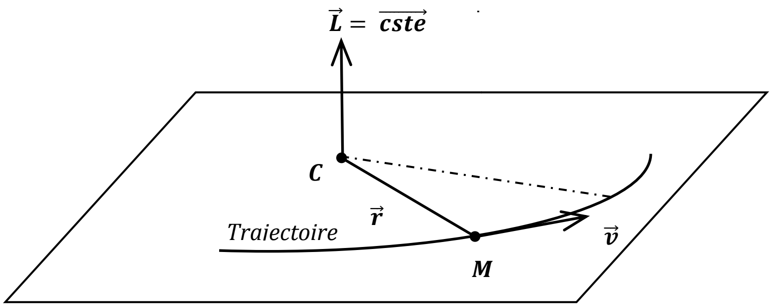
$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{M/C}(t)}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{M/C}(t)}{dt} = \overrightarrow{cste}$$

• **b)** $\vec{L}_{/C}(t) \perp (\overrightarrow{CM}, \vec{v})$

$\vec{L}_{/C}$ est constant en direction $\Rightarrow \overrightarrow{CM}$ et $\vec{v}$ forment toujours le même plan

$\Rightarrow$ Le mvt est plan (s'effectue toujours dans le même plan)



• **c)**

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{CM} \wedge \vec{v}\|$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\,m}\,\|\overrightarrow{CM} \wedge m\,\vec{v}\|$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\,m}\,\|\vec{L}_{M/C}\|$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\,K = cste\ (constante)$$

Avec :

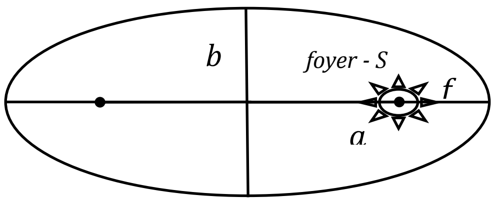
$$K = \frac{\|\vec{L}_{M/C}\|}{m}$$

V.6) Mouvement des planètes :

1) Lois de Kepler :

∗ 1ère loi :

Dans le système solaire, chaque planète décrit une trajectoire elliptique autour du soleil dont il est l'un des foyers.



a : est le grand axe

b : est le petit axe

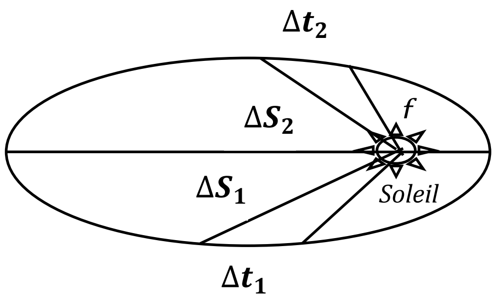
f : est le foyer

*** 2ème loi : loi des aires**

Le vecteur position d'une planète, par rapport au soleil, balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

On a :

$$\frac{ds}{dt} = cste \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = cste}$$

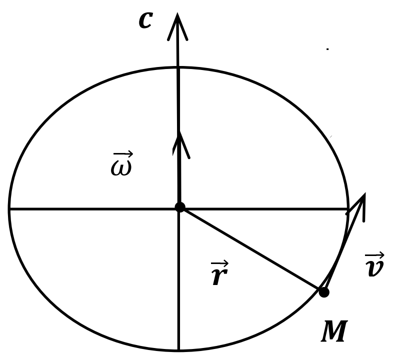


On a trouvé auparavant que pour un mouvement plan curviligne ;

$\vec{L}_{M/O} = m\, r^2\, \dot{\theta}\, \vec{k} \Leftrightarrow \vec{L}_{M/O} = m\, r^2\, \vec{\omega}$

Avec pour un mouvement circulaire, on a :

$\omega = \frac{v}{r}$



$*\ \vec{L}_{M/O}$ constant en direction et en sens définit le plan contenant la trajectoire de la planète et son sens de rotation ;

$$\vec{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v} = \ m\,r^2\,\frac{v}{r}\,\vec{k} = m\,r\,v\,\vec{k}$$

$*\ \vec{L}_{M/O}$ constant en module traduit la 2ème loi de Kepler puisque :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\,m}\,\|\overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}\|$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\,m}\,m\,r^2\,\omega = \frac{1}{2}\,r^2\,\omega = cste$$

<u>* 3ème loi</u> : dite loi des périodes

Pour deux planètes quelconques du système solaire, leur périodes de révolution (T_1, T_2) sont reliées au rayon $r_1$et $r_2$de leurs orbites, assimilées à des cercles, par la relation :

$$\boxed{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3}$$

Ou bien, la loi des périodes peut être énoncée par :

Le carré du temps périodique T nécessaire à une planète pour qu'elle effectue un tour complet (une rotation complète) autour du soleil est proportionnel au cube du grand axe de la trajectoire de cette planète.

$$\boxed{T^2 = \alpha\,a^3}$$

α : est le coefficient de proportionnalité

$$\alpha = \frac{4\,\pi^2}{G\,m_s}$$

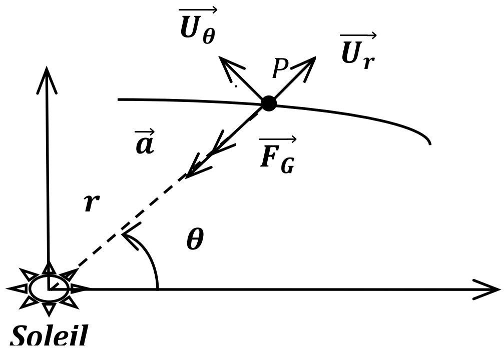
$G\ = 6{,}67\ \cdot\ 10^{-11}\ [m^3/(kg\ s^2)], constante\ de\ la\ gravitation\ terrestre$

$m_s\ = 2{,}01 \cdot 10^{30}\ kg, poid\ du\ soleil$

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \cdots = \frac{T_n^2}{a_n^3}}$$

2) Trajectoire du mouvement centrale des planètes :

La trajectoire du mouvement centrale des planètes est plane.



Exemple : une particule de masse m se trouve à une distance r du centre O de la terre. Si M est la masse de la terre, R son rayon et G la constante de la gravitation universelle, montrer que :

1/ Le moment cinétique $\vec{L}_{/O}$ par rapport au centre O de la terre est constant. Que peut-on déduire quand à sa trajectoire ?

2/ Ecrire les expressions de la vitesse $\vec{v}$ et celle du moment cinétique $\vec{L}_{/O}$ en coordonnées cylindriques.

Solution :

1/ $\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}$

$$\frac{d\vec{L}_{M/O}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\,\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\,\vec{v})$$

$$\frac{d\vec{L}_{M/O}(t)}{dt} = \vec{v} \wedge m\,\vec{v} + \vec{r} \wedge m\,\vec{a}$$

$$\vec{v} \wedge m\,\vec{v} = \vec{0}$$

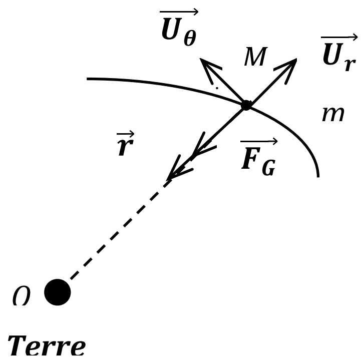
$$\frac{d\vec{L}_{M/O}(t)}{dt} = \vec{r} \wedge m\,\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = -\frac{G\,m\,m'}{r^2}\,\overrightarrow{U_r}$$

$$\frac{d\vec{L}_{M/O}(t)}{dt} = \vec{r} \wedge \left(- \frac{G\,m\,m'}{r^2}\,\overrightarrow{U_r}\right) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_{M/O}(t) = \overrightarrow{cste}}$$

Donc le mouvement est plan et la trajectoire est plane.

2/ Les coordonnées cylindriques



$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{L}_{/O} = \vec{r} \wedge m\left[\frac{dr}{dt}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}\right]$$

$$\vec{L}_{/O} = \vec{r} \wedge \left[m\,\frac{dr}{dt}\,\overrightarrow{U_r} + m\,r\,\dot{\theta}\,\vec{r}\ \wedge \overrightarrow{U_\theta}\right]$$

$$\vec{L}_{/O} = r\,\overrightarrow{U_r} \wedge\ m\,\dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + m\,r^2\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_r}\ \wedge \overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{L}_{/O} =\ m\,r^2\,\dot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\left\|\vec{L}_{/O}\right\| =\ m\,r^2\,\dot{\theta} = cste$$

I. L'énergie :

On appelle énergie tout ce qui peut se transformer en travail ou en une autre forme d'énergie.
L'énergie existe sous de multiples formes :

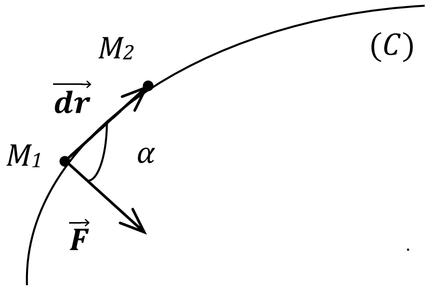
- Mécanique (cinétique + potentielle)
- Électrique
- Calorifique
- Nucléaire
- Lumineuse
- Chimique

L'énergie peut passer d'une forme à l'autre sous l'action d'une force.

- La force de frottement transforme l'énergie mécanique en chaleur
- Une cellule photovoltaïque transforme l'énergie lumineuse en énergie électrique
- Notre peau transforme l'énergie lumineuse en chaleur
- Un moteur à essence transforme l'énergie chimique en énergie mécanique (force électrique)

II. Travail :

Lorsqu'une force déplace un corps sur une distance $d\vec{r}$, on dit que cette force effectue un travail.
Si cette force n'a pas la même direction que le déplacement, seule sa composante parallèle au déplacement contribue au travail.



$\overrightarrow{M_1M_2} = d\vec{r} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$

L'élément de déplacement dW est donné par :

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$dW = \|\vec{F}\| \cdot \|d\vec{r}\| \cdot cos\alpha$

Ou α : est l'angle entre $d\vec{F}$ et $d\vec{r}$

$W_{M_1M_2} = \int dW = \vec{F} \cdot \vec{r}$

$\vec{r} = \int d\vec{r}$

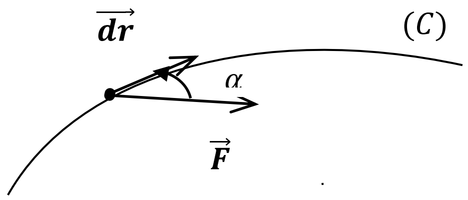
$\vec{r}$: est la distance parcourue

L'unité de mesure du travail est le joule avec :

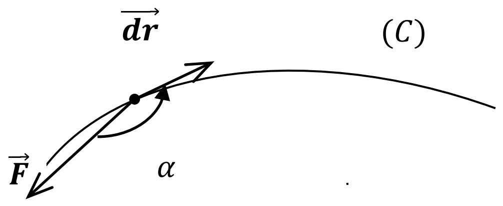
$1[J] = 1[N \cdot m] = 1[kg \cdot m^2/s^2]$

Le travail est une grandeur scalaire obtenue à partir de deux grandeur vectorielles $\vec{F}$ et $\vec{r}$.

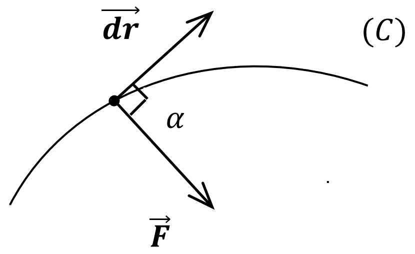
On parle de travail moteur lorsque $\alpha < 90°$



On parle de travail résistant lorsque $\alpha > 90°$



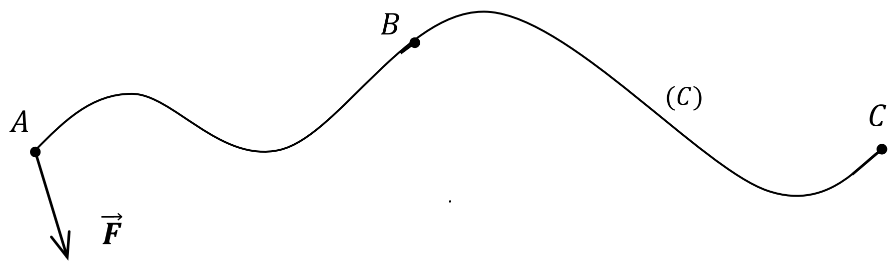
Une force perpendiculaire au déplacement ; $\alpha = 90°$ n'effectue aucun travail. C'est le cas de la force centripète du mouvement circulaire.



Un travail n'est jamais perdu, il se retrouve toujours sous une forme d'énergie.

Le travail est additif, ainsi le calcul du travail d'une force lors d'un déplacement non rectiligne se fait en sommant les travaux de la force le long d'éléments rectiligne.

III. Propriétés du travail :



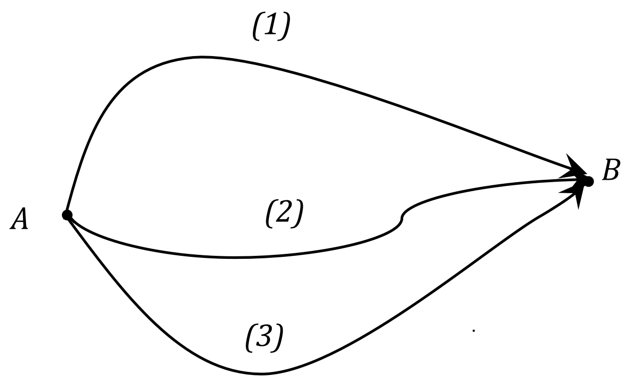
1) $W_{AC}(\vec{F}) = W_{AB}(\vec{F}) + W_{BC}(\vec{F})$

   Où $W_{AC}(\vec{F})$: représente le travail de la force $\vec{F}$ sur une masse ponctuelle m pendant un déplacement du point A au point C

2) $W_{AB}(\vec{F}) = -\,W_{BA}(\vec{F})$
3) $W_{AB}(\vec{F}_{res}) = W_{AB}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n) = W_{AB}(\vec{F}_1) + W_{AB}(\vec{F})_2 + \cdots + W_{AB}(\vec{F}_n)$

   $\vec{F}_{res}$: est la résultante des force appliquées sur le corps assimilé à un point ponctuel

   Le travail de la somme des forces est égal à la somme du travail de chacune de ses forces.
4) Une force est dite conservatrice si son travail du point A au point B est indépendant du chemin suivi.



Exemple : la force de pesanteur et conservative, alors que la force de frottement est non conservative [dissipative].

IV. Relation analytique du travail :

A) Coordonnées cartésiennes :

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\vec{F} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} + F_z\,\vec{k}$

$\overrightarrow{dr} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$

$dW = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$

$$\boxed{W_{M_1 \to M_2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz}$$

B) Coordonnées polaires :

$\vec{F} = F_\rho\,\overrightarrow{U_\rho} + F_\theta\,\overrightarrow{U_\theta}$

$\overrightarrow{dr} = d\rho\, \overrightarrow{U_\rho} + \rho\, d\theta\, \overrightarrow{U_\theta}$

$dW = F_\rho\, d\rho + F_\theta\, \rho\, d\theta$

$$\boxed{W_{M_1 \to M_2} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} F_\rho\, d\rho + \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_\theta\, \rho\, d\theta}$$

C) Coordonnées intrinsèques :

$\vec{F} = F_T\, \overrightarrow{U_T} + F_N\, \overrightarrow{U_N}$

$\overrightarrow{dr} = dr\, \overrightarrow{U_T} = \|\vec{v}\|\, dt\, \overrightarrow{U_T}$

$dW = F_T\, dr = F_T\, \|\vec{v}\|\, dt$

$$\boxed{W_{M_1 \to M_2} = \int_{t_1}^{t_2} F_T\, \|\vec{v}\|\, dt}$$

$F_N \perp$ à $la\ trajectoire \Rightarrow F_N n'effectue\ aucun\ travail$

V. La puissance :

La puissance est définit comme étant le travail d'une force par unité du temps.

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}$$

L'unité de la puissance est le Watt qui équivaut le joule par seconde, avec :

$1\ W = 1[J/s]$

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{F} \cdot \vec{dr}\right] = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

VI) L'énergie mécanique :

L'énergie mécanique d'un corps peut se subdiviser en deux parties : l'énergie provenant de sa vitesse (l'énergie cinétique, du grec Kinésis qui signifie mouvement) et l'énergie qui lui vient de sa position dans un champ gravitationnel (l'énergie potentielle).

6) L'énergie cinétique :

Soit un corps en mouvement sous l'effet d'une force $\vec{F}$, pendant un temps dt très petit et un déplacement $d\vec{r}$, l'énergie effectuée est :

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$dW = m\,\dfrac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\,\vec{v}\;\,d\vec{v}\;\Rightarrow dW = d(\frac{1}{2} m\,v^2)$

La quantité $\frac{1}{2} m\,v^2$ *est appellée énergie cinétique* E_C

$$\boxed{\boldsymbol{E_C = \frac{1}{2} m\,v^2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{dW = dE_C}}$$

$P = m\,\vec{v}\;\;\Rightarrow E_C = \dfrac{1}{2m}\,P^2$

<u>7)</u> <u>Théorème de l'énergie cinétique</u> :

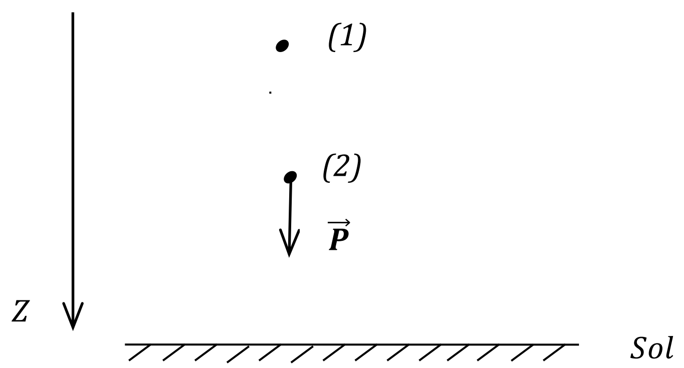
La variation de l'énergie cinétique d'un corps entre deux temps t_1 et t_2 est égale au travail de la somme des forces exercées sur le corps.

$dW = dE_C$

$\displaystyle\int_1^2 dW = \int_{E_{C_1}}^{E_{C_2}} dE_C \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{W_{1\to 2} = E_{C_2} - E_{C_1}}}$

<u>Exemple 1</u> : un corps tombe d'une hauteur h sans vitesse initiale.

- Trouver la vitesse du corps quand il atteint le sol.



$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$dW = \vec{p}\, dz\, \vec{k} = m\, g\, \vec{k}\, dz\, \vec{k} = m\, g\, dz$

$$\int_1^2 dW = \int_{z_1}^{z_2} m\, g\, dz = m\, g\, (z_2 - z_1) = m\, g\, h$$

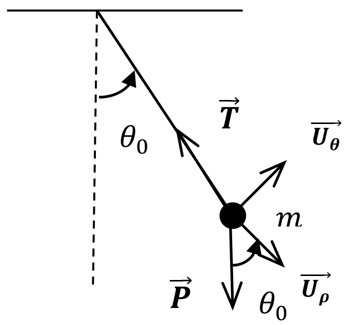
$$\int_{E_{C_1}}^{E_{C_2}} dE_C = \frac{1}{2} m\, v_2^2 - \frac{1}{2} m\, v_1^2$$

$$v_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m\, v_1^2 = 0$$

$$\int_1^2 dW = m\, g\, h = \frac{1}{2} m\, v_2^2 \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{2\, g\, h}}$$

<u>Exemple 2</u> : on déplace un corps de masse m attaché à un fil de longueur l d'un angle θ_0 par rapport à sa position initiale sans vitesse initiale.

- Trouver la vitesse du corps pour un angle quelconque.



$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$dW = (\vec{p} + \vec{T}) \cdot d\vec{r}$

$\vec{p} = m\, g\, \cos\theta\, \overrightarrow{U_\rho} - m\, g\, \sin\theta\, \overrightarrow{U_\theta}$

$d\vec{r} = -\, l\, d\theta\, \overrightarrow{U_\theta}$

$\vec{T} = -\, T\, \overrightarrow{U_\rho}$

$$\int_1^2 dW = \int_{\theta_0}^{\theta} + m\, g\, \sin\theta \cdot l\, d\theta$$

$$W_{1\to 2} = + m\, g\, l \int_{\theta_0}^{\theta} + \sin\theta \cdot l\, d\theta$$

$$W_{1\to 2} = -\, m\, g\, l\, (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\int_{E_{C_1}}^{E_{C_2}} dE_C = \frac{1}{2} m\, v_2^2 - \frac{1}{2} m\, v_1^2 = \frac{1}{2} m\, v_2^2 \Leftrightarrow \; m\, g\, l\, (\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2} m\, v_2^2$$

$$\Rightarrow v_2^2 = -\,2\, g\, l\, (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{+\,2\, g\, h\, (\cos\theta_0 - \cos\theta)}}$$

8) L'énergie potentielle :

Pour chaque force conservatrice existe une fonction algébrique (scalaire) E_P (énergie de position, de situation) dérivée de la force tels que :

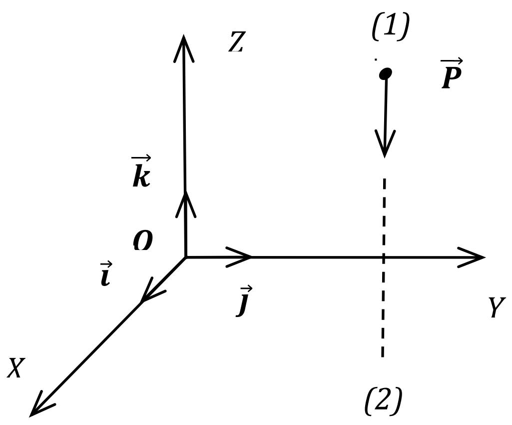
$$\vec{F} = -\,\overrightarrow{grad}\, E_P = -\vec{\nabla} \cdot E_P$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}$$

$$\vec{F} = (\frac{\partial\, E_P}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial\, E_P}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial\, E_P}{\partial z}\,\vec{k})$$

L'énergie potentielle existe sous diverses formes ; par exemple : énergie potentielle de gravitation, de déformation (ressort, arc,...).

e) Energie potentielle de gravitation (pesanteur) :



$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 -\,m\, g\, \vec{k} \cdot d\, z\, \vec{k} = \int_1^2 -\,m\, g \cdot d\, z$$

$$\boxed{\boldsymbol{W_{1\to 2} = m\, g\, (z_1 - z_2)}}$$

Si le mobile part et revient au même point donc :

$(1) = (2) \Rightarrow z_1 = z_2$

$\Rightarrow W_{1\to 2} = 0$

Ceci implique que la force de pesanteur est une force conservatrice.

$$\vec{p} = -\,\overrightarrow{grad}\, E_P = -\,\vec{\nabla} \cdot E_P$$

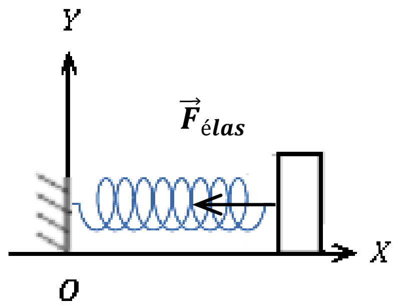
$$-\,m\, g\, \vec{k} = -\,\overrightarrow{grad}\, E_P = -\frac{\partial\, E_P}{\partial x}\,\vec{\imath} - \frac{\partial\, E_P}{\partial y}\,\vec{\jmath} - \frac{\partial\, E_P}{\partial z}\,\vec{k}$$

$$\frac{d\, E_P}{dz} = m\, g \Rightarrow\; E_P = \int m\, g\, dz = m\, g\, z + C$$

$$\boxed{\boldsymbol{E_P = m\, g\, z + C}}$$

C : est la constante d'intégration

<u>f)</u> **<u>Energie potentielle élastique</u>** **:**



$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 -\,K\, x \cdot d\, x = -\frac{1}{2}\, K\, (x_2^2 - x_1^2)$$

$(1) = (2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow W_{1\to 2} = 0$

$\Rightarrow \vec{F}_{élas}$ *est conservative*

$$\vec{F}_{élas} = -\,\overrightarrow{grad}\, E_P = -\,\vec{\nabla} \cdot E_P$$

$$-\,K\, x = -\frac{d\, E_P}{dx} \Rightarrow\; E_P = \int K\, x\;\, dx = \frac{1}{2}\, K\, x^2 + C$$

$$\boxed{E_P = \frac{1}{2} K\, x^2 + C}$$

g) Energie liée à une force centrale :

* Coordonnées sphériques :

$\vec{F} = F_r\, \overrightarrow{U_r}$

$\overrightarrow{dr} = dr\, \overrightarrow{U_r} + r \sin\theta\, d\phi\, \overrightarrow{U_\phi} + r\, d\theta\, \overrightarrow{U_\theta}$

$W_{1\to 2} = \int_1^2 F_r\, \overrightarrow{U_r}\, d\vec{r} = \int_1^2 F_r\, dr\, \overrightarrow{U_r} \cdot \overrightarrow{U_r}$

$$\boxed{W_{1\to 2} = \int_1^2 F_r\, dr}$$

Exemple :

$\vec{F} = -\frac{G\, m\, m'}{r^2}\, \overrightarrow{U_r}$

$W_{1\to 2} = -\int_1^2 \frac{G\, m\, m'}{r^2} dr$

$W_{1\to 2} = \left[\frac{G\, m\, m'}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = G\, m\, m' \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$

$Si\ (1) \equiv (2) \Rightarrow r_1 = r_2$

$W_{1\to 2} = G\, m\, m' \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1}\right] = 0 \ \rightarrow La\ force\ centrale\ est\ une\ force\ conservative$

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_P$

$-\frac{G\, m\, m'}{r^2}\, \overrightarrow{U_r} = -\frac{d\, E_P}{dr}\, \overrightarrow{U_r}$

$$\boxed{E_P = -\frac{G\, m\, m'}{r} + C}$$

h) Energie liée à une force centrale :

$W\, \vec{F_C} = \int_A^B F_C\, \overrightarrow{dr} = E_P(A) - E_P(B)$

$$\boxed{W_{A\to B} = -[\, E_P(B) - E_P(A)] = -\Delta E_P}$$

i) Définition de l'énergie mécanique :

On appelle énergie mécanique d'un corps ou d'un système, la somme des énergies cinétique et potentielle de ce corps ou ce système.

$$\boxed{E_M = E_C + E_P}$$

i) Théorème de l'énergie mécanique :

$$\boxed{E_M = E_C + E_P \quad \begin{cases} \textit{L'énergie mécanique d'un point matériel, soumis à une force} \\ \textit{conservative uniquement, reste constante au cours du temps} \end{cases}}$$

- **Démonstration :**

Si $\vec{F}$ est conservative alors on a ;

$W_{1\to2} = E_{C_2} - E_{C_1}$

$$\begin{aligned} \text{et } W_{1\to2} = E_{P_1} - E_{P_2} &\Rightarrow E_{C_2} - E_{C_1} = E_{P_1} - E_{P_2} \\ &\Rightarrow E_{C_2} + E_{P_2} = E_{P_1} + E_{C_1} \\ &\Rightarrow E_{M_2} = E_{M_1} \\ &\Rightarrow E_{M_2} - E_{M_1} = 0 \Leftrightarrow \Delta E_M = 0 \Rightarrow E_M = cste,\ E_M \text{ est constante} \end{aligned}$$

VII. Cas d'une force non conservative :

$$W_{1\to2} = \int_1^2 \Sigma\vec{F}\ d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}_{resultante}\, d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}_{res}\, d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{F}_C + \vec{F}_f)\cdot d\vec{r}$$

$\vec{F}_C$: est une force conservative

$\vec{F}_f$: est la force de frottement

$$W_{1\to2} = \int_1^2 \vec{F}_C\, d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_f\, d\vec{r}$$

$$W_{1\to2} = W_{\vec{F}_C} + W_{\vec{F}_f} \dots\dots\dots (1)$$

D'après le théorème de l'énergie potentielle :

$$W_{\vec{F}_C} = \int_1^2 \vec{F}_C\, d\vec{r} = -\Delta E_P = E_{P_1} - E_{P_2}$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$W_{1\to2} = W_{\vec{F}_C} = \int_1^2 \vec{F}_C\, d\vec{r} = \Delta E_C = E_{C_2} - E_{C_1}$$

$(1) \Leftrightarrow \; W_{1\to 2} = \Delta\, E_C$

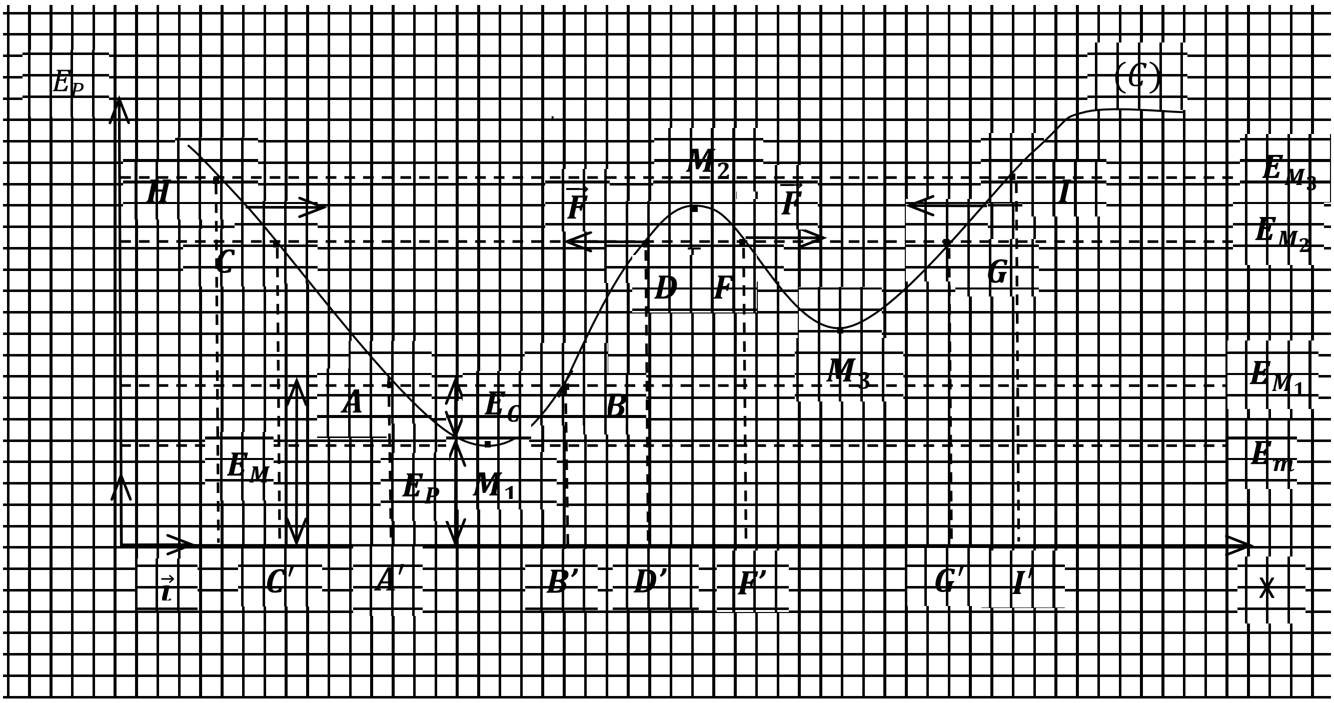
$W_{1\to 2} = \Delta\, E_P + W_{\vec{F}_f} \Longrightarrow \Delta\, E_C = -\,\Delta\, E_P + W_{\vec{F}_f}$

$W_{\vec{F}_f} = E_{C_2} + E_{P_2} - (E_{P_1} + E_{C_1})$

$$\boxed{\boldsymbol{W_{\vec{F}_f} = E_{M_2} - E_{M_1} = \Delta\, E_M}}$$

La variation de l'énergie mécanique est égale au travail des forces ne dérivant pas d'un potentiel, ceci se traduit par une transformation intégrale de l'énergie mécanique en chaleur.

VIII. Discussion des courbes d'énergie potentielle :



E_m : c'est l'énergie mécanique minimale que puisses avoir la particule

Les graphes qui représentent l'énergie potentielle E_P en fonction de x [à une dimension] ou $E_P(r)$ pour les forces centrales sont très utiles pour comprendre le mouvement d'une particule.

$$F_x = -\frac{d\,E_P}{dx}$$

$$\frac{d\,E_P}{dx} : est\ la\ pente\ de\ la\ courbe\ \ E_P(x)$$

∗ Entre M_1et M_2 :

$$\frac{d\,E_P}{dx} > 0 \Rightarrow \Delta\,E_P > 0$$

$$\Rightarrow\ E_P \nearrow et\ F \searrow$$

∗ En M_1, M_2 et M_3 :

$$\frac{d\,E_P}{dx} = 0 \Longrightarrow l'énergiepotentielle\ est\ maximum\ ou\ minimum$$

∗ En M_1 et M_3, E_P *est minimum correspondant* à *des positions d'équilibres tables*

∗ Pour M_2, $E_P\ (x)$*est maximum correspondant* à *une position d'équilibre instable*

Considérons une particule d'énergie mécanique E_{M_1}donc $E_C = E_M - E_P$ est donnée par la distance de la courbe à la droite E_{M_1}.

∗ $E_{M_1}\ coupe\ \ E_P\ (x)\ aux\ points\ A\ et\ B$

A gauche de A et à droite de $B, E_{M_1} <\ E_P\ donc\ \ E_C\ < 0\ cas\ impossible$

$\Rightarrow mvt\ de\ la\ particule\ est\ limité$ à $l^{'}intervale\ AB$

$\Rightarrow la\ particule\ oscille\ entre\ A^{'}et\ B'$

∗ $E_{M_2}\ coupe\ \ E_P\ (x)\ aux\ points\ C, D, F\ et\ G$

La particule oscille entre deux régions possibles $C'D'\ ou\ F'G'$ si la particule se trouve dans la région $C'D'$ elle ne peut sauter d'elle-même.