République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ABBES LAGHROUR KHENCHELA
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Appliqué
Par
Boumaarafi Chahrazed
Keziz Rania
Titre :

ALGORITHME DE POINT INTERIEUR PRIMAL-DUAL BASÉ SUR UNE FONCTION NOYAU

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	Tebessi Fouzi	Université de Khenchela	Président
Pr.	Guemmaz Abderrahim	Université de Khenchela	Encadreur
Pr.	Benhadid Ayache	Université de Batna 2	Examinateur

Juin 2022

Dédicace

Je dédie ce humble travail À
mes chers parents
Sources de mes joies, secrets de ma force
Vous serez toujours le modèle
Papa, dans ta détermination, ta force et ton honnêteté
Maman dans ta bonté, ta patience et ton dévouement pour nous
Merci pour tous vos sacrifices pour que vos enfants grandissent et prospèrent
Merci de trimer sans relâche, malgré les péripéties de la vie au bien être de vos enfants
Merci d'être tout simplement mes parents
C'est à vous que je dois cette réussite
et je suis fière de vous l'offrir
A mes grands-pères & mes grands-mères
Que Dieu vous garde pour nous
A mes frères et mes sœurs
A mes tantes et mes oncles

REMERCIEMENTS

Je remercie avant tout le bon dieu de m'avoir donnée la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire. La création de ce mémoire a été un vrai plaisir et une belle découverte et n'aurait jamais pouvoir le jour sans l'aide de plusieurs personnes que tient à remercier ici. Tout d'abord, mes remerciements les plus chaleureux vont à mon directeur de recherche : **Guemmaz Abderrahim** d'avoir accepté de diriger ce mémoire et de consacrer une partie de son temps pour assurer un meilleur encadrement en notre faveur. Mes remerciements aux membres du jury qui me font l'honneur de lire et de discuter ce travail. Je remercie tous mes amis pour leur patience, conseil et encouragement quand fatigue

Table des matières

Introduction **4**

Notations et terminologie **5**

1 Préliminaires et notions fondamentales **9**

1.1 Eléments d'analyse convexe . . . 9

1.1.1 Ensembles affines . . . 9

1.1.2 Fonctions affines . . . 10

1.1.3 Ensemble convexe . . . 10

1.1.4 Fonction convexe . . . 11

1.1.5 Fonction convexe differentiable . . . 11

1.1.6 Fonction barrière . . . 12

1.2 Programmation mathématiques (PM) . . . 13

1.2.1 Classification et résolution d'un programme mathématique . . . 14

1.2.2 Existence et Unicité de solution . . . 14

1.2.3 Conditions d'optimalité . . . 15

1.2.4 Dualité Lagrangienne . . . 17

1.2.5 Qualification des contraintes . . . 18

1.2.6 Quelques programmes mathématiques . . . 18

1.3 Programmation linéaire . . . 22

1.3.1 Formes usuelles d'un programme linéaire . . . 22

1.3.2 Dualité en programmation linéaire . . . 23
1.3.3 Relation primal-dual pour la programmation linéaire . . . 24

2 Résolution d'un programme linéaire (PL) 26

2.1 Résultats fondamentaux . . . 27
2.2 Méthodes de résolution d'un programme de (PL) . . . 28
2.2.1 Méthode (TC) primale . . . 29
2.2.2 Méthode (TC) duale . . . 31
2.2.3 Méthode (TC) primale-duale . . . 33
2.3 Les fonctions noyaux et propriétés . . . 39
2.3.1 Qualification d'une fonction noyau . . . 40
2.3.2 Propriétés et relation entre les conditions de qualification . . . 42
2.3.3 Une borne supérieure de $\Psi(v)$ après chaque itération externe . . . 43
2.3.4 Analyse de la décroissance de la fonction barrière de proximité Ψ . . . 45
2.3.5 Borne d'itérations et analyse de la complexité . . . 53

3 Méthode de la trajectoire centrale basée sur les fonctions noyaux pour (PL) 57

3.1 Propriétés de la fonction noyau . . . 62
3.1.1 Eligibilité (Qualification) de la nouvelle fonction noyau . . . 63
3.2 Analyse de la complexité . . . 69

Conclusion 75

Bibliographie 75

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons une étude théorique et algorithmique d'une méthode de trajectoire centrale pour les problèmes de programmation linéaire (LP) avec des fonctions noyau. Cette méthode est une extension de méthode classique du locus central. Avantages de notre méthode est d'assurer la convergence de la théorie et de la pratique, mais il reste de trouver un point de départ à l'intérieur et au voisinage de la trajectoire centrale est difficile.

Introduction

Les méthodes de points intérieurs ont été publiées par la communauté scientifique dans certains années et a conduit à une grande variété d'algorithmes de ce type Trajectoire centrale (TC) années 90. Cette méthode est basée sur le suivi d'une trajectoire centrale Ils ont de bonnes propriétés théoriques. Le but de ce mémoire est de présenter une étude théorique et algorithmique Fonction noyau pour la programmation linéaire Cette thèse est divisée en trois chapitres :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, on présente quelques définitions de base sur l'analyse convexe, rappelle les principales propriétés de la programmation mathématique et ainsi sur les conditions d'optimalité. qui rassemble tous les concepts et résultats que nous utiliserons le suivant.

Chapitre 2 :concerne des resultats fondamenteaux , des méthodes de résolution d'un programme de (PL) , fonctions noyaux et propriétés.

Enfin,Chapitre 3 : Le dernier chapitre concerne la méthode de la trajéctoire centrale basée sur les fonctions nouyeax pour (PL)

Notations et terminologie

Notations et terminologie

1. (PNL) : problème non linéaire
2. (PM) : Programmation mathématique.
3. (PL) : Programmation linéaire.
4. (SDP) : Programmation semi-définie.
5. (PPL) : Le problème linéaire primal.
6. (PDL) : Le problème dual de (PPL).
7. (PQ) : problème quadratique
8. $(MPIs)$: Les méthodes de points intérieurs
9. (Tc) : Trajectoire centrale.
10. $K.K.T$: Karush-Kuhn-Tuker

Opérations

1. $\mathbb{R}^n$: L'ensemble des vecteurs avec n composantes réelles.

2. $\mathbb{R}^n$: L'orthant positif de l'espace $\mathbb{R}^n$.

3. $x \geq 0$: Les composantes de x, $x_i \geq$ pour tout i.

4. $x > 0$: Les composantes de x, $x_i > 0$ pour tout i.

5. x^t : Transposé du vecteur x de $\mathbb{R}^n$.

6. $\|x\|_\infty$ = $\max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k|$: (norme infinie).

7. $\|x\|_2$ = $\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$: (norme euclidienne).

8. xs = $(x_1s_1, x_2s_2, ..., x_ns_n,)$ (produit d'Hadamard).

9. $\dfrac{x}{s}$ = $(\dfrac{x_1}{s_1}, \dfrac{x_2}{s_2}, ..., \dfrac{x_n}{s_n})^T$: $(s \neq 0)$.

10. $\sqrt{x}$ = $(\sqrt{x_1}, ..., \sqrt{x_n})^T$: $(x \geq 0)$.

11. x^{-1} = $(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_n})^T$: $(x \neq 0)$.

12. $\langle x, s\rangle$ = $x^T s = \sum_{k=1}^n x_k s_k$: (le produit scalaire de deux vecteurs).

Vecteurs

Les vecteurs sont désignés par des lettres minuscules. Si x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on désigne par :

1. x^T : le vecteur transposé de x.

2. x_i : la i-ème composante de x.

3. x_k : le k-ème vecteur d'une suite de vecteurs.

4. e : le vecteur de $\mathbb{R}^n$, dont toutes les composantes sont égales à 1.

Des vecteurs sont libres c.à.d. sont linéairement indépendants.

Matrices

Les matrices sont désignées par des lettres majuscules. Si A est une matrice, on désigne par.

1. A^T : La matrice transposée de A.

2. X = $diag(x)$, la matrice diagonale X avec $X_{ii} = x_i$.

3. I = $diag(e)$, la matrice identité d'ordre n.

4. X^{-1} = $diag(x^{-1})$, l'inverse de la matrice X avec $X_{ii}^{-1} = \frac{1}{x_i}$: $(x > 0)$

5. A est de plein rang : A est de rang m $(m \leq n)$ si ses lignes sont libres.

6. $\mathbb{R}^{n\times n}$:, est Symétrique : si $A = A^T$, c.à.d: $a_{ij} = a_{ji}$: pour tout $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., n$

Fonctions

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction différentiable à plusieurs variables $x_1, ..., x_n$. Alors :

1. $\nabla f(x)$ = $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$, : (gradient de f au point x).

2. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$: les dérivées partielles au point x.

3. $\nabla^2 f(x)$ = $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_j}(x)\right)_{1\leq i,j\leq n}$, la matrice Hessienne.

Chapitre 1

Préliminaires et notions fondamentales

1.1 Eléments d'analyse convexe

La notion de convexité est un outil mathématique important pour l'étude théorique et numérique des problèmes d'optimisation. On présente dans cette section quelques notions d'analyse convexe d'usage courant.pour plus de detail voir [1]

1.1.1 Ensembles affines

Définition 1.1 *Un sous ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est dit affine si :*

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda x + (1 - \lambda) y \in F$$

On dit aussi que F est une variété affine (ou linéaire).

Les ensembles affines élémentaires sont : $\phi, \{x\} (x \in \mathbb{R}^n)$, et chaque sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2 *On appelle combinaison affine des éléments $x_1, ..., x_m$ de $\mathbb{R}^n$ tout élément de la forme :*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \ \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

Théorème 1.1 *Toute partie affine de $\mathbb{R}^n$ contient ses combinaisons affines :*

$$\forall x_i \in F = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

1.1.2 Fonctions affines

Définition 1.3 *Une fonction f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est dite affine si*

$$f[\lambda x + (1-\lambda) y] = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.2 *Toute fonction affine f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est de la forme $f(x) = Ax + b$; où $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$.*

Proposition 1.1 *Une fonction affine f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est linéaire si et seulement si $f(0) = 0$. i.e., $b = 0$*

1.1.3 Ensemble convexe

Définition 1.4 *Un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé convexe si le segment joignant toute paire de points appartenant D appartient également entièrement à D. Algébriquement, ;on demande donc que $x \in D$ et $y \in D$ entraîne que,*

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in D, \text{ pour tout } \lambda \in [0,1].$$

Définition 1.5 *D est un polyèdre convexe s'il est de la forme :*

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : a_i^t x \leq b_i, i = 1, ..., m \right\},$$

où a_i est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et b_i un scalaire pour $i = 1, ..., m$.

Remarque 1.1 *D peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

où A est une matrice de $\mathbb{R}^{m\times n}$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

1.1.4 Fonction convexe

Définition 1.6 *La fonction $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ est dite convexe équivaut à dire que*

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) \leq \lambda f\left(x\right) + (1-\lambda)\, f\left(y\right) \forall \lambda \in \left[0,1\right], \forall x, y \in D,$$

ou d'une manière équivalente : si $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, x_i \in D$

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f\left(x_i\right),$$

et si l'inégalité au dessus est stricte, alors f est dite strictement convexe $\forall x \neq y$.

1.1.5 Fonction convexe differentiable

Définition 1.7 *Soit $f \in C^1\left(D\right)$, une fonction continûment différentiable sur un domaine convexe S. Alors on a les équivalences suivantes :*

1· *f est convexe sur D si seulement si :*

$$f\left(y\right) - f\left(x\right) \geq \left\langle \nabla f\left(x\right), y - x\right\rangle, \forall x, y \in D.$$

2· *f est strictement convexe sur D si seulement si :*

$$f\left(y\right) - f\left(x\right) > \left\langle \nabla f\left(x\right), y - x\right\rangle, \forall x, y \in D$$

3· *f est convexe sur D si seulement si ∇f est monotone sur D , c'est à dire :*

$$\left\langle \nabla f\left(x\right) - \nabla f\left(y\right), x - y\right\rangle \geq 0, \forall x, y \in D.$$

4· *si* ∇f *est strictement monotone sur* D *, c'est à dire :*

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x) ; y - x \rangle > 0, \forall x, y \in D \text{ avec } x \neq y.$$

Alors f *est strictement convexe sur* D*.*

· f *est fortement convexe si seulement s'il existe* $\alpha > 0$*, tel que :*

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2, \forall x, y \in D$$

Si $f \in C^2(D)$*, alors :*

f *est une fonction convexe sur* D *si et seulement si la matrice Hessienne est semi définie positive, (c'est-à-dire que* $y^t \nabla^2 f(x) y \geq 0, \forall x, y \in D$ *où encore toutes les valeurs propres de* $\nabla^2 f(x)$ *sont positives).*

De même, si la matrice Hessienne est définie positive, (c'est à dire que $y^t \nabla^2 f(x) y > 0, \forall x, y \in D$ *et* $y \neq 0$ *où encore toutes les valeurs propres de* $\nabla^2 f(x)$ *sont strictement positives), alors* f *est une fonction strictement convexe sur* D *.*

1.1.6 Fonction barrière

Définition 1.8 *Une fonction barrière* $\Phi(x)$ *pour le programme* $\mathcal{P}_I$ *est une fonction non négative et continue sur le domaine admissible qui tend vers l'infini lorsque la contrainte d'inégalitè* $g(x)$ *tend vers la frontière à partir de l'intérieur du domaine, c'est-à-dire*

$$\lim \Phi(x) = \infty, \text{ quand } g(x) \longrightarrow 0^- \in Fr(\mathcal{K})$$

Les deux exemples classiques de fonctions barriéres sont définies pour tout x par

$$\Phi(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log(g_i(x)) \text{ et } \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g_i(x)}.$$

Pour les contraintes $g(x) \leq 0$, on prend généralement

$$\Phi(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log(-g_i(x))$$

Remarque 1.2 *Dans la programmation mathématique, la fonction barrière classique la plus utilisée est la fonction barrière logarithmique.*

1.2 Programmation mathématiques (PM)

La programmation mathématique est plus particulièrement l'optimisation vise à résoudre des problèmes où l'on cherche à déterminer parmi un grand nombre de solutions candidates celle qui donne le meilleur rendement. Plus précisément, on cherche trouver un solution satisfaisant un ensemble de contraintes qui minimise ou maximise une fonction donnée (l'objectif ou économique).

Définition 1.9 *Un programme mathématique (PM) est un problème d'optimisation de la forme suivant :*

$$(PM) \begin{cases} \min f(x) \\ S.C \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, ...m \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, ..., p \\ x \in D. \end{cases}$$

Où l'ensemble :

$D = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, ...m \text{ et } h_j(x) = 0, j = 1, ..., p\}$ *est souvent appelé ensemble des contraintes (ou des solutions admissible), dit aussi domaine de faisabilité. La fonction*

$f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ *est appelée fonction objectif ou économique.*

Définition 1.10 (Solution réalisable) *On appelle solution réalisable du problème (PM), tout point vérifiant les contraintes de ce problème (PM) (appartenant à D).*

Définition 1.11 (Solution globale) *Un point $x^* \in D$ qui minimise la fonction objectif sur D* *dit solution optimale du problème (PM) si et seulement si :*

$$\forall x \in D, ; f(x^*) \leq f(x).$$

On note par $argminf(x)$, *l'ensemble des solutions optimales globales du problème(PM).*

Définition 1.12 (Solution locale) *Un point* $x^* \in D$ *est une solution optimale locale de (PM) si* $\exists V$ *(voisinage) de* x^* *tel que* $f(x^*) \leq f(x)$ *: pour* $\forall x \in V$ *, et on note par* $locminf(x)$ *l'ensemble des solutions optimales locales de (PM).*

Remarque 1.3 *Le problème d'optimisation précédent consiste :*

·Soit à chercher un point optimal (local, global).

·Soit, si un tel point n'existe pas on cherche une borne inférieure à la fonction.

·Soit, à établir que f *est non borné inférieurement sur* S*, auquel cas on adopte la convention* $inff(x) = -\infty$ *.*

·Lorsque D *est vide on pose par convention* $inff(x) = +\infty$ *.*

1.2.1 Classification et résolution d'un programme mathématique

La classification de (PM) et son traitement numérique sont établis partir des propriétés fondamentales des fonctions $f, g_i; h_j$ savoir la convexité, la différentiabilité et la linéarité. parmi les cas particuliers les plus étudiés on note :

· La programmation linéaire (f linéaire,$g_i; h_j$ affines).

· La programmation convexe (f, g_i convexes , h_j affines, D convexe).

· La programmation en nombres entiers (D est un ensemble discret, c'est à dire les variables sont entières).

1.2.2 Existence et Unicité de solution

Théorème 1.3 (Weierstrass) *[2] Si* D *est compact (fermé et borné) non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et si* f *est continue sur* D *alors (PM) admet au moins une solution optimale globale* $x^* \in D$.

Théorème 1.4 *[3]Si D est non vide et fermé non borné de $\mathbb{R}^n$ est si f est continue et coercive sur D (c'est-à-dire $\lim_{\|x\|\longmapsto+\infty} f(x) = +\infty$) alors (PM) admet au moins une solution optimale globale.*

Théorème 1.5 (d'existence) *[4]Si D est convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, f est strictement convexe sur D alors (PM) admet une solution optimale au plus.*

1.2.3 Conditions d'optimalité

Dans tout ce qui suit, on suppose que la condition de qualification des contraintes est vérifiée. Une qualification des contraintes est simplement une hypothèse qui assure l'existence de ces multiplicateurs en x pour que les conditions de Karush-Kuhn-Tucker ($K.K.T$) soit satisfaite.

Cas de contraintes d'égalité

On suppose il n'y a que des contraintes d'égalité :

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : h_j(x) = 0,\ \forall j \in J\}$$

Théorème 1.6 (Condition de Lagrange) *Soit x^* un minimum local du problème*

$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.c. \\ h_j(x) = 0. \end{cases}$$

Alors il existe des réels λ_i tels que tels que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \nabla h_j(x^*) = 0.$$

Condition de K.K.T (Cas de contraintes d′égalité et d′inégalitè)

En optimisation non linéaire avec contraintes, les conditions nécessaires de Karush-Kuhn-Tucker (conditions de $K.K.T$) sont les plus utilisées pour définir un minimum local.

Le théorème suivant généralise les conditions de Lagrange (théorème 28) au cas de contraintes égalitaires et inégalitaires.

Théorème 1.7 (Conditions nécessaires du premier ordre) *Soit x^* un point admissible du problème (PM). Supposons f, g et h différentiables en x^* et les contraintes qualifiées au point x^*. Si x^* est un point de minimum local de f sur $\mathcal{F}$. Alors il existe $\lambda^* = \left(\lambda_1^*, ..., \lambda_p^*\right) \in \mathbb{R}^p$ et $\mu^* = (\mu_1^*, ..., \mu_m^*) \in \mathbb{R}^m$ tels que :*

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}_x (x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f (x^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* \nabla h_j (x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* \nabla g_i (x^*) = 0 \\ \mu_i^* \geq 0, \quad \forall i \in \{1, ..., m\} \\ h_j (x^*) = 0, \quad j = 1, ..., p \\ g_i (x^*) \leq 0, \quad i \in 1, ..., m \\ \mu_i g_i (x^*) = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., m\} \end{cases} \tag{1.1}$$

où μ_i et λ_j sont appelés les multiplicateurs de Lagrange. Ces conditions sont aussi connues sous le nom de conditions de Karush, Kuhn et Tucker $(K.K.T)$. La condition $\mu_i g_i (x^*) = 0$, appelée condition de complémentarité. Nous dirons que la condition de complémentarité stricte est satisfaite lorsque

$$\mu_i > 0 \Leftrightarrow g_i (x^*) = 0, \ \forall i \in \{1, ..., m\}$$

Nos conditions nécessaires (1.1) *signifient que le gradient de la fonction objectif peut être reconstruit par une combinaison linéaire des gradients des contraintes actives, c'est-à-dire*

$$\nabla f (x^*) = -\lambda \nabla h (x^*) - \mu \nabla g (x^*)$$

Remarque 1.4 - *Si les contraintes ne sont pas qualifiées en x^*, les conditions de K.K.T ne s'appliquent pas.*

- Si (PM) est convexe, les conditions de K.K.T sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que x soit un minimum global

1.2.4 Dualité Lagrangienne

Les programmes fractionnaires convexes consistent en la maximisation d'un objectif rapport d'une fonction convexe soumis à des contraintes convexes. Pour ces modèles objectif non linéaire et non convexe, une nouvelle décomposition Lagrangienne basée sur une réécriture fractionnaire des contraintes, est proposée. Elle combine la résolution d'un programme en variables 0 - 1 objectif linéaire sous les contraintes initiales et celle d'un programme fractionnaire sans contraintes. Lorsque les contraintes sont linéaires, le résultat de dominance de la décomposition Lagrangienne sur la relaxation Lagrangienne est prouvé.

On considère le problème primal suivant :

$$m = \underset{x}{inf}[f(x), x \in S]$$

Avec

$$S = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., p, h_j(x) = 0, j = 1, ..., m\}.$$

Le Lagrangien associé ce problème est la fonction $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}$, définie par :

$$L(X, \lambda, \mu) = F(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j(x).$$

On pose :

$$\alpha(x) = \sup_{\lambda,\mu}[L(x, \lambda, \mu) : \lambda \geq 0] = \begin{cases} f(x) & \text{si } g_i(x) \leq 0 \text{ et } h_j(x) = 0 \\ +\infty & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Et on prend

$$\bar{\alpha} = \inf_{x \in D} \alpha(x) = \inf_{x}[f(x) : x \in S] :$$

Le problème dual associé au problème primal est :

$$\bar{\beta} = \sup_{\lambda,\mu} \inf_{x \in D} [L(x, \lambda, \mu)].$$

on a l'inégalité de dualité :

$$-\infty \leq \bar{\beta} \leq \bar{\alpha}$$

1.2.5 Qualification des contraintes

La condition de qualification est satisfaite en tout $x^* \in F$ dans les cas suivants :

▷ Les contraintes sont affines (F est un polyédre convexe).

▷ Les gradients des contraintes saturées en x^* sont libres .

▷ F est convexe et $int(F) \neq \varnothing$ (condition de Slater).

On dit que le point x^* est régulier si les contraintes sont qualifiées en x^*.

Remarque 1.5 *La résolution complète de (PM) est traitée dans l'ordre des points suivants :*

- *L'existence (et éventuellement l'unicité) d'une solution optimale .*
- *Caractérisation de la solution .*
- *Elaboration d'algorithmes pour calculer numériquement cette solution.*

1.2.6 Quelques programmes mathématiques

Rappelons qu'un programme mathématique est un problème d'optimisation sous contraintes. Il existe plusieurs types de programme mathématique, parmi les cas les plus étudiés on trouve :

Programme linéaire

Un problème de programmation linéaire est un problème de programmation mathématique convexe dans lequel la fonction objectif et les contraintes sont linéaires. Les spécialistes du domaine, le considèrent comme étant la technique la plus utilisée dans la recherche opérationnelle.

Définition 1.13 *Un programme linéaire (PL) est un système d'équations ou d'inéquations appelées "contraintes" qui sont linéaires et à partir de ses contraintes on doit optimiser une fonction* *également linéaire appelée "objectif" (économique) sous la forme*

$$(PL)\begin{cases} opt\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \,(\leq, =, \geq)\, b_i, \quad i = 1, ..., m \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

(PL) s'écrit aussi sous la forme matricielle

$$(PL)\begin{cases} opt\,(c^t x) \\ Ax\,(\leq, =, \geq)\, b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Où (PL) est considéré comme primal. Tels que :

$opt = \max$ *ou* $\min, c^t x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, c \in \mathbb{R}^n$ *est le vecteur coût,* $b \in \mathbb{R}^m$ *est le second membre,* $a_{i,j} \in \mathbb{R}, \forall i = 1, ..., m, \forall j = 1, ..., n$ *est la matrice des contraintes.*

Exemple 1.1

$$(PL)\begin{cases} \max\,(5x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \geq 200 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Programme quadratique

La programmation quadratique est connue par ses applications multiples dans plusieurs domaines. Sans perte de généralité, on peut présenter un programme quadratique sous la forme suivante

$$(PQ)\begin{cases} \min \frac{1}{2} x^t Q x + c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique d'ordre $n, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de plein

$rang(rg(A) = m < n)$.

Autrement dit, un programme quadratique est un programme mathématique où sa fonction objectif est quadratique et ses contraintes sont linéaires.

Remarque 1.6 ▷ *L'ensemble des contraintes S de (PQ) est un polyèdre convexe et fermé, la fonction objectif est infiniment différentiable.*

▷ *(PQ) est convexe si et seulement si f est convexe auquel cas la matrice Q est semi définie positive.*

Exemple 1.2

$$(PQ)\begin{cases} \max\left(5x_1 + 10x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2\right) \\ x_1 + x_2 = 100 \\ 3x_1 + x_2 = 200 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \; et \; Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Programme non linéaire

La programmation non linéaire est la recherche de l'optimum d'une fonction non linéaire sur un sous ensemble convexe ou non d'un espace donné. Le problème non linéaire s'écrit sous la forme

$$(PNL)\begin{cases} \max f(x) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., n \\ h_j(x) = 0, j = 1, ..., m \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Donc, un programme mathématique est dit non linéaire si f est non linéaire et S est un domaine convexe ou non convexe. Ainsi la programmation non linéaire se présente comme étant une généralisation de la

programmation quadratique et de la programmation linéaire.

Programme semi-définie

La programmation semi-définie (SDP) est une généralisation de la programmation,linéaire (P) ; où les vecteurs sont remplacés par des matrices et l'orthant positif $\mathbb{R}_+^n$ par le conne convexe S_+^n

Le problème primal de la programmation semi-définie sous forme standard, s'écrit comme suit

$$(SDP) \begin{cases} \min \langle C, X \rangle \\ tr\,(A_i) = b_i, i = 1, ..., m \\ x \in S_+^n \end{cases}$$

C et $A_i, i = 1, ..., n$ sont des matrices, $\langle C, X \rangle = tr \left\langle C^T X \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{m} C_{i,j} X_{i,j}$ et $b \in \mathbb{R}^n$

Exemple 1.3

$$(SDP) \begin{cases} \min \langle C, X \rangle \\ \langle A_i, X \rangle = b_i, i = 1, ..., 4 \\ x \in S_+^3 \end{cases}$$

Où

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.7 *Si X est une matrice diagonale, le problème (SDP) se réduit à un problème de programmation linéaire.*

Il existe d'autres modèles de programmation mathématique tel que : Les programmes convexes *où f et g_i sont convexes et les h_j sont affines, Les programmes en nombres entiers où l'ensemble des variables est un ensemble discret, c'est-à-dire les variables à valeurs entières.*

1.3 Programmation linéaire

1.3.1 Formes usuelles d'un programme linéaire

Les programmes linéaires (PL) se présentent sous trois formes différentes sont :

Forme standard

Un programme linéaire (PL) est sous forme standard si toutes les contraintes sont des égalités, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme

$$(PL)\begin{cases} opt\,(c^t x) \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Forme canonique

Un programme linéaire (PL) est sous forme canonique si toutes les contraintes sont des inégalités, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme

$$(PL)\begin{cases} opt\,(c^t x) \\ Ax\,(\leq \text{ ou } \geq)\,b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Forme mixte

On dit que le problème de programmation linéaire (PL) est sous forme mixte, s'il n'écrit pas ni sous forme canonique, ni sous forme standard.

Remarque 1.8 *On peut toujours mettre un programme linéaire quelconque sous forme standard en introduisant des variables supplémentaires positives appelées "variables d'écarts" ou "variables artificielles".*

Exemple 1.4

$$(PL)\begin{cases} \min 5x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

En introduisant les variables d'écarts $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ *dans la première et la deuxième contrainte, le problème précédent s'écrit sous forme standard comme suit*

$$(PL)\begin{cases} \min 5x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

1.3.2 Dualité en programmation linéaire

La notion de dualité est un concept fondamental en programmation linéaire qui conduit à un résultat de grande portée théorique et pratique (le théorème de dualité faible et le théorème de dualité forte). Ainsi, étant donné un problème de programmation linéaire (PL) appelé primal est noté (P), on peut toujours lui associer un autre problème appelé dual (noté (D)). Soit le problème primal

$$(P)\begin{cases} \min \left(c^T x\right) \\ Ax = b \\ x \geq 0, c \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

Son dual s'écrit sous la forme :

$$(D)\begin{cases}\max\left(b^Ty\right)\\ A^Ty\leq c,\\ y\in\mathbb{R}^m.\end{cases}$$

Exemple 1.5 *Soit le programme primal sous forme standard*

$$(P)\begin{cases}\min\left(x_1-x_2\right)\\ x_1-x_2=0\\ x_1+x_2+x_3=1\\ x_1,x_2,x_3\geq 0\end{cases}$$

Son dual est

$$(D)\begin{cases}\max y_2\\ y_1+y_2\leq 1\\ -y_1+y_2\leq 1\\ y_2\leq 0\end{cases}$$

1.3.3 Relation primal-dual pour la programmation linéaire

Le tableau suivant résume les correspondances entre primal et dual et permet d'écrire directement le dual d'un programme linéaire quelconque

Primal	min	max	dual
Contraintes	$\geq b_i$	≥ 0	Variables
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	*libre*	
Variables	≥ 0	$\geq c_i$	Contraintes
	≤ 0	$\leq c_i$	
	libre	$= c_i$	

∘ Le nombre de variables duales est égal au nombre de contraintes primales, de même

∘ le nombre de contraintes duales est égal au nombre de variables primales.

∘ Le dual du problème dual (D) est le problème primal (P).

∘ On peut transformer un problème de maximisation à un problème de minimisation, il suffit d'écrire $\max(f) = -\min(-f)$ (respectivement $\min(f) = -\max(-f)$).

Remarque 1.9 *Dans notre étude, on s'intéresse à la résolution des problèmes de programmation linéaire. La résolution complète de (PL) traite dans l'ordre les points suivants :*

▷ *L'existence (et éventuellement l'unicité) d'une solution optimale.*

▷ *La caractérisation de la solution (il s'agit des conditions d'optimalité).*

▷ *L'élaboration d'algorithmes pour calculer cette solution.*

Chapitre 2

Résolution d'un programme linéaire (PL)

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution des problèmes de programmation linéaire sous forme standard de type

$$(P)\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Où A est une matrice de $\mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$et $c \in \mathbb{R}^n$.

Bien évidement, n'importe quel (PL) se ramène facilement à cette forme.

Le dual de (P) ; noté (D) est donné par

$$(D)\begin{cases} \max b^T y \\ A^T y + s = c \\ s \geq 0, y \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Posons une fois pour toutes les hypothèses suivantes

(H_1) : S_{int} est non vide,

(H_2) :T_{int} est non vide,

(H_3) : A est de plein rang $(rg(A) = m < n)$, où

$$S_{int} = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax = b, x > 0\right\},$$

$$T_{int} = \left\{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n_+ : A^T y + s = c\right\}.$$

Ces hypothèse sont nécessaires pour l'existence des solutions réalisables.

Proposition 2.1 *Un programme linéaire réalisable et borné (objectif borné) possède au moins une solution optimale, situé sur la frontière du domaine réalisable.*

2.1 Résultats fondamentaux

Théorème 2.1 (dualité faible) *[5] Si x et y sont des solutions réalisables des problèmes (P) et (D) respectivement, alors*

$$c^T x \geq b^T y.$$

Preuve *Soient x et y sont des solutions réalisables, alors*

$$c \geq A^T y \Longrightarrow c^T x \geq \left(A^T y\right)^T x = y^T A x = y^T b = \left(b^T y\right)^T = b^T y.$$

Il vient de montrer que $cTx \geq bTy$; donc $\min c^T x \geq \max b^T y$.

Théorème 2.2 (dualité forte) *[5] Si x^* et y^* sont des solutions réalisables des problèmes (P) et (D) respectivement telles que $b^T y^* = c^T x^*$, alors x^*et y^* sont des solutions optimales de (P) et (D) respectivement.*

Preuve *On veut démontrer que x^* et y^* sont des solutions optimales des problèmes (P) et (D) respectivement, c'est-à-dire, on démontre que*

$$c^T x^* = \min c^T x \text{ et } b^T y^* = b^T y$$

Il vient de montrer que $cTx \geq bTy$; donc $\min c^T x \geq \max b^T y$, en particulier

$$b^T y^* = c^T x^* \geq \min c^T x \ \geq \max b^T y \geq b^T y^* = c^T x^*$$

et comme $b^T y^* = c^T x^*$ *alors*

$$\begin{cases} c^T x^* \geq \min c^T x \ \geq c^T x^* \\ \quad\quad\quad \textit{et} \\ b^T y^* \leq \max b^T y \geq b^T y^* \end{cases}$$

D'où le résultat ■

Théorème 2.3 (Théorème de dualité) *· Si l'un des problèmes*(P) *et* (D) *admet une solution optimale ni, il en est de même pour l'autre et leur valeurs optimales correspondantes sont égales.*

· Si l'un des problèmes à une valeur optimale non borné, l'autre n'a pas de solution optimale

Théorème 2.4 (Théorème des écarts complémentaire) *Soient* $\bar{x}$ *et* $\bar{y}$ *deux solutions réalisables de* (P) *et* (D) *respectivement, posons* $\bar{s} = c - A^T \bar{y}$ *vecteur des variables d'écarts associé à* $\bar{y}$ *alors* $\bar{x}$ *et* $\bar{s}$ *sont optimales si et seulement si* $\bar{x}_i \bar{s}_i = 0, \forall i = 1, ..., n$

■

2.2 Méthodes de résolution d'un programme de (PL)

On dispose de deux types de méthodes de résolution d'un programme linéaire, méthode simpliciale à complexité exponentielle et méthodes de points intérieurs qui s'avèrent actuellement e caces pour les problèmes de grandes tailles à cause de leur complexité polynomiale.

Les différents types de méthodes de point intérieurs sont présentés dans la littérature en trois classes principales

· Les méthode affines

· Les méthodes projectives.

· Les méthodes de trajectoire centrale (TC).

Principe des méthodes (TC)

L'idée générale de ces méthodes consiste à suivre un chemin particulier (chemin des centres) constitué d'une suite de points intérieurs en prenant comme direction de déplacement celle de Newton et un pas de déplacement convenable choisi d'une façon à maintenir la stricte faisabilité des nouveaux itérés.

On distingue trois variantes des méthodes de (TC) à s'avoir

· méthode primale.

· méthode duale.

· méthode primale-duale.

2.2.1 Méthode (TC) primale

Reprenons le programme linéaire standard (P)

$$(P)\begin{cases} \min c^T x - \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La plus part des méthodes nouvelles de points intérieurs peuvent être vues comme des variantes des méthodes barrières logarithmique de Frisch (1955). En effet, au problème (P) on associe le problème non linéaire suivant :

$$(P_\mu)\begin{cases} \min c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = f_\mu(x) \\ Ax = b \\ x > 0. \end{cases}$$

L'objectif f_μ de (P_μ) est appelé fonction barrière logarithmique et $\mu > 0$ désigne le paramètre barrière.

La résolution de (P_μ) est équivalente à celle de (P) au sens que si x_μ^* est une solution optimale de(P_μ), alors $x^* = \lim x^*(\mu)$ (quand $\mu \longrightarrow 0$) est une solution optimale de (P) :

Il suffit donc de résoudre (P_μ)

Proposition 2.2 *Sous l'hypothèse* (H_1) *, on a Pour tout* $\mu > 0$, *l'ensemble des solutions optimales de* (P) *est non vide et borné*

Preuve *Les contraintes de* (P_μ) *sont linéaires et l'objectif* f_μ*est une fonction strictement convexe puisque* $f''(x) = \mu X^{-2}$ *est définie positive donc, si la solution existe elle est unique, globale et complètement caractérisée par les conditions de* KKT*, i.e.,*x *optimale si et seulement si* $\exists y \in \mathbb{R}^m$ *tel que*

$$\begin{cases} c - \mu X^{-1}e - A^T y = 0 \\ Ax = b \\ x > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Le saut de dualité est définie par

$$c^T x - b^T y = \mu x^T X^{-1} e = n\mu$$

d'où si μ *tend vers zéro,* $c^T x$ *et* $b^T y$ *convergent vers la même valeur optimale. Par conséquent* x *et* y *sont des solutions optimales de* (P) *et* (D) *respectivement* ■

Description technique

Conformément au principe des méthodes (**TC**) réalisables, le système non linéaire (2.1) sera résolu par la méthode de Newton, ceci peut être justifié par les résultats magnifiques obtenus éventuellement en théorie et par les subtilités numériques offertes par cette méthode. Ainsi, on se limite à chercher des solutions approximatives suivant la trajectoire centrale en formant une suite décroissante $\left\{\mu^k = \frac{(x^k)^T s^k}{n}\right\}$ convergeant vers zéro.

Plus précisément, il s'agit de résoudre le système$F(x, y) = 0$ tel que :

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} c - \mu X^{-1}e - A^T y \\ Ax - b \end{pmatrix}$$

D'où $x_+ = x + \alpha \triangle x, y_+ = y + \alpha \triangle y$ avec $\alpha > 0$ est le pas de déplacement introduit de façon à maintenir $x_+ > 0$ et $\triangle w = (\triangle x, \triangle y)$ est solution du système non linéaire

$$DF(x, y) \triangle w = -F(x, y) \tag{2.2}$$

avec $DF(x, y)$ est la matrice jacobienne de F au point (x, y) donnée par

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \mu X^{-2} & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

D'après (2.2) on obtient le système

$$\begin{pmatrix} \mu X^{-2} & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(c - \mu X^{-1} e - A^T y\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On change $\mu \left(\hat{\mu} = \sigma\mu, 0 < \sigma < 1\right)$ et on réitère jusqu'à l'optimalité.

L'algorithme correspondant à cette version peut être écrit comme suit

Algorithme 1 (**Algorithme de la méthode (TC) primale)**

Dans cette partie,on présente l′algorithme proto type de la méthode de (TC) primale.

Début algorithme

– Trouver $X^0 \in S_{int}, y^0 \in \mathbb{R}^m, \mu^0 > 0, k = 0.$

– Tant que le test d'optimalité n'est pas satisfait $\left(c^T x - b^T y > \epsilon\right)$ faire

1. Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} \mu^k \left(X^k\right)^{-2} & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle x^k \\ \triangle y^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(c - \mu^k \left(X^k\right)^{-1} e - A^T y^k\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Trouver $0 < \alpha \leq 1/x^{k+1} = x^k + \alpha \triangle x^k > 0$

3. $y^{k+1} = y^k + \triangle y^k > 0$

4. $\mu^{k+1} = \sigma\mu^k, 0 < \sigma < 1$

5. $k = k + 1$

Fin tant que

Fin Algorithme

2.2.2 Méthode (TC) duale

Considérons le programme linéaire standard (D)

$$(D)\begin{cases}\max b^T y\\ A^T y + s = c\\ s \geq 0,\end{cases}$$

1. auquel, on associe le problème barrière suivant

$$(D_\mu)\begin{cases}\max b^T y - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln s_i\\ A^T y + s = c\\ s > 0.\end{cases}$$

Où A est une matrice de $\mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$et $c \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 2.3 *Sous l'hypothèse (H_2) on a pour tout $\mu > 0$ le problème (D_μ) admet une solution optimale si est seulement si l'ensemble des solutions optimales de (D) est non vide et borné*

Description technique

En appliquant les mêmes techniques utilisées dans la version primale, on obtient le système non linéaire suivant

$$\begin{cases}A^T y + s - c = 0\\ Ax - b = 0\\ \mu s^{-1} e - x = 0\\ s > 0, x > 0\end{cases} \tag{2.3}$$

On le résout par la méthode de Newton à partir d'un point $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ et $(y, s) \in T_{int}$ le nouvel itéré est donné par

$$x_+ = x + \alpha\triangle x, y_+ = y + \alpha\triangle y, s_+ = s + \alpha\triangle s$$

où $\alpha > 0$ est le pas de déplacement introduit de façon à maintenir la stricte positivité de

$$x_+ \text{ et } s_+ \text{ (i.e.,} x_+ = x + \alpha\triangle x > 0, \text{ et } s_+ = s + \alpha\triangle s > 0)$$

Algorithme 2 (**Algorithme de la méthode (TC) duale**)

L'algorithmique prototype de cette version s'écrit comme suit

– Choisir $x^0 \in \mathbb{R}^n_{++}, \mu_0 > 0$,trouver $(y^0, s^0) \in T_{int}$

– Tant que le test d'optimalité n'est pas satisfait faire

1. Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ -I & 0 & \mu\left(S^k\right)^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle x^k \\ \triangle y^k \\ \triangle s^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Ax^k + b \\ 0 \\ -\mu\left(S^k\right)^{-1} e + x^k \end{pmatrix}$$

2. Trouver $0 < \alpha \leq 1/x^{k+1} = x^k + \alpha \triangle x^k > 0$ et Trouver $s^{k+1} = s^k + \alpha \triangle s^k > 0$
3. $x^{k+1} = x^k, s^{k+1} = s^k, y^{k+1} = y^k + \alpha \triangle y^k$
4. $\mu^{k+1} = \mu^k + \sigma \mu^k, 0 < \sigma < 1$
5. $k = k + 1$

Fin tant que

Fin Algorithme

2.2.3 Méthode (TC) primale-duale

Les méthodes de trajectoire centrale primale-duale ont été introduites au début des années 90. Elles ont attiré une grande intention de la plus part des chercheurs dans le monde entier et elles montrent en général un excellent comportement pratique et théorique (une complexité polynomiale et une convergence super linéaire).

Description technique

Les méthodes (TC) primales-duales sont basées sur la résolution du système non linéaire suivant

$$\begin{cases} A^T y + s - c = 0 \\ Ax - b = 0 \\ XSe - \mu e = 0 \\ s > 0, x > 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

qui peut être obtenu en combinant le système non linéaire primal (2.1) et le système non linéaire dual (2.3) le système admet une solution unique si et seulement si les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifées simultanément.

Visiblement, le système (2.4) est plus convenable au traitement numérique que les systèmes (2.1) et (2.3) (il est moins non linéaire). Donc la version primale-duale est plus intéressante que les deux autres versions précédentes pour les raisons suivantes

- Les résultats théorique sont plus consistants
- Les algorithmes sont plus performants en pratique.

Maintenant, on va résoudre le système (2.4) par la méthode de Newton, c'est-à-dire pour chaque $\mu > 0$ on résout le système linéaire suivant

$$DF(x, y, s) \triangle w = -F(x, y, s)$$

où

$$F(x, y, s) = \begin{pmatrix} A^T y + s - c \\ Ax - b \\ XS - \hat{\mu} e \end{pmatrix}, \hat{\mu} = \sigma\mu \, (0 < \sigma < 1)$$

$DF(x, y, s)$ désigne la matrice jacobienne de F au point (x, y, s) et $\triangle w = (\triangle x, \triangle y, \triangle s)$ désigne la direction de Newton Par des simples calculs, on arrive à résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} S\triangle x + X\triangle s = Xs - \hat{\mu} e \\ A\triangle x = 0 \\ A^T \triangle y + \triangle s = 0, \end{cases}$$

dont sa solution est

$$\begin{aligned}
\triangle x &= \left[S^{-1} - S^{-1}XA^{T}\left(AS^{-1}XA^{T}\right)AS^{-1}\right]\left(Xs - \hat{\mu}e\right)\\
\triangle y &= -\left[\left(AS^{-1}XA^{T}\right)^{-1}AS^{-1}\right]\left(Xs - \hat{\mu}e\right)\\
\triangle s &= -A^{T}\triangle y.
\end{aligned}$$

Le nouvel itéré s'écrit sous la forme

$$(x_{+}, y_{+}, s_{+}) = (x, y, s) + \alpha\left(\triangle x, \triangle y, \triangle s\right)$$

on réitère jusqu'à l'obtention d'une valeur $\hat{\mu}$ suffisamment proche de zéro.

Procédure de positivité

On sait que le nouvel itéré doit être positif, i.e.,

$$x_{+} = x + \alpha\triangle x > 0 \tag{2.5}$$

$$s_{+} = s + \alpha\triangle s > 0 \tag{2.6}$$

de (2.5), on a

$$\alpha\triangle x > -x.$$

Ce qui est équivalent à

$$\alpha = \alpha_1 = \begin{cases} \min\left(\frac{-x_i}{(\triangle x)_i}\right), \text{ si } I_0 \neq \emptyset \\ +\infty, \text{ si } I_0 = \emptyset \end{cases}$$

tel que

$$I_0 = \{i; \triangle x_i < 0, i = 1, ..., n\}$$

De même pour (2.6), on a

$$\alpha \triangle s > -s$$

Ce qui est équivalent à

$$\alpha = \alpha_2 = \begin{cases} \min\left(\frac{-s_i}{(\triangle s)_i}\right), \text{ si } I_1 \neq \emptyset \\ +\infty, \text{ si } I_1 = \emptyset \end{cases}$$

tel que

$$I_1 = \{i; \triangle s_i < 0, i = 1, ..., n\}$$

Alors, il suffit de prendre le pas de déplacement suivant

$$\alpha = \rho \min(\alpha_1, \alpha_2), 0 < \rho < 1$$

Pour mesurer la qualité d'une solution trouvée, on introduit un facteur dit de "centralité" défini par le scalaire

$$\|XSe - \mu e\|.$$

A ce propos, un point est dit voisin de la trajectoire centrale, s'il appartient à l'ensemble suivant

$$\mathcal{F}_{Cent}(\sigma) = \{(x, y; s) \in S_{int} \times T_{int}, \|XSe - \mu e\| \leq \sigma\mu, \mu > 0\}.$$

Hypothèses : Soient δ et σ deux constantes telles que

$$0 \leq \sigma < \frac{1}{2} \text{ et } 0 < \delta < \sqrt{n} \tag{2.7}$$

$$\frac{\sigma^2\delta^2}{2(1-\sigma)} \leq \sigma\left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right) \tag{2.8}$$

Ces hypothèses permettent en particulier, de maintenir $x > 0$ et $s > 0$ au cours des itérés tout en gardant la solution trouvée toujours voisine de la trajectoire.

Algorithme 3 (**Algorithme de la méthode (TC) primale-duale)**

Dans cette partie, on présente l'algorithme de la méthode (TC) primale-duale, puis on donne quelques résultats qui servent pour l'étude de la convergence et la complexité arithmitique pour cette version.

Début d'algorithme

Données soient $\epsilon > 0$ un paramètre de précision, σ et δ deux constantes satisfaisant (2.7) et (2.8)

Initialisation $(x^0, y^0, s^0) \in S_{int}(\sigma)$ où $\mu_0 = \frac{\left(x^0\right)^T s^0}{n}$ (difficulté majeure), $K = 0$;

Tant que $\left(x^k\right)^T s^k \geq \epsilon$ faire

1. Prendre $\mu_{k+1} = \mu_k \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)$
2. calculer
$$\begin{cases} \triangle x = \left[\left(S^k\right)^{-1} - \left(S^k\right)^{-1} X^k A^T \left(A \left(S^k\right)^{-1} X^k A^T\right) A S^{-1}\right] \left(X^k S^k e - \mu_{k+1} e\right) \\ \triangle y = -\left[\left(A \left(S^k\right)^{-1} X^k A^T\right)^{-1} A \left(S^k\right)^{-1}\right] \left(X^k S^k e - \mu_{k+1} e\right) \\ \triangle s = -A^T \triangle y^k \end{cases}$$
3. Prendre $\alpha = \rho \min\left(\alpha_1^k, \alpha_2^k\right), 0 < \rho < 1$
4. Poser
$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha^k \triangle x^k \\ y^{k+1} &= y^k + \alpha^k \triangle y^k \\ s^{k+1} &= s^k + \alpha^k \triangle s^k \end{aligned}$$
5. $k = k + 1$

Fin de tant que

Fin d'algorithme.

Résultats de convergence

Théorème (Théorème de convergence)

Résultats de convergence

Théorème 2.5 ***(Théorème de convergence)*** *Soient σ et δ deux constantes vérifiant les conditions (2.7) et (2.8), $\overline{\mu} > 0$ défini par $\overline{\mu} = \mu\left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)$ où $\mu = \frac{\left(x^T s\right)}{n}$. Supposons que $(x, y, s) \in \mathcal{F}_{Cent}(\sigma)$ et soit $\omega_+ = (x_+, y_+, s_+)$ donnée par $\omega_+ = \omega \div \alpha\Delta\omega$, alors nous avons :*

$$\begin{array}{ll} i) & \left\|X_+S_+e - \overline{\mu}_+e\right\| \leq \sigma\overline{\mu} \\ ii) & \omega_+ \in W. \\ iii) & g(\omega) = x_+^T s_+ = n\overline{\mu}. \end{array}$$

Corollaire 2.1 *La suite de point ω^k engendrée par l'algorithme satisfait :*

$$\begin{array}{ll} i) & \left\|X^kS^ke - \mu_k e\right\| \leq \sigma\mu_k \\ ii) & \omega^k \in W,\ k = 1, ..., n \\ iii) & g\left(\omega^k\right) = \left(x^k\right)^T s^k = n\mu_k,\ k = 1, ..., n. \end{array}$$

Où $\mu_k = \mu_0\left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right).$

Proposition 2.4 *(Complexité arithmétique) Le nombre total d'itérations effectuées par l'algorithme ne dépasse pas la valeur :*

$$k = \frac{\sqrt{n}}{\delta} \ln\left(n\epsilon^{-1}\mu_0\right).$$

Corollaire 2.2 *Si le paramètre de pénalité initial μ_0 satisfait $\mu_0 = 2^{O(L)}$, alors l'algorithme résout les problèmes (P) et (D) dans $O(\sqrt{n}L)$ itérations et $O(n^{3.5}L)$ opérations arithmétiques.*

L est une constante liée à la taille du problème (P) définie par

$$\begin{aligned} L = \ & [(\text{la plus grande valeur absolue du déterminant d'une sous matrice de } A) + 1] + \\ & \left[\log\left(1 + \max_i |c_i|\right)\right] + \left[\log\left(1 + \max_i |b_i|\right)\right] + [\log(m+n)]. \end{aligned}$$

Il existe de nombreux types de méthodes de suivi de chemin : les méthodes dites à pas court, les méthodes prédiction-correction (à pas alterné) et les méthodes à pas long.

2.3 Les fonctions noyaux et propriétés

Définition 2.1 *On dit que* $\psi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{+}$ *est une fonction noyau si* ψ *est deux fois diférentiable et vérifie les conditions suivantes*

1. $\psi(1) = \psi'(1) = 0,$
2. $\psi''(t) > 0, \forall t > 0,$
3. $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^{+}} \psi(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \psi(t) = +\infty.$

Les deux premières conditions désignent que $\psi(t)$ est strictement convexe et admet une valeur minimale, si $t = 1$. On définit $\psi(t)$ à partir de sa dérivée seconde comme suit :

$$\psi(t) = \int_{1}^{t} \int_{1}^{y} \psi''(x)\, dx dy.$$

De plus, la troisième condition indique la propriété de barrière pour la fonction $\psi(t)$.

Lemme 2.1 *Soit* ψ *une fonction noyau alors :*

1. $t\psi'(t) \geq \psi(t)\,,\ \forall\ t \geq 1$
2. *Si* $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, *tel que* $t_1 < 1 < t_2$ *alors :*

$$\begin{aligned} \psi'(t_1) &< 0,\ \psi'(t_2) > 0 \\ \psi(\beta t_1) &< \psi(\beta t_2),\ \forall \beta > 1. \end{aligned}$$

Preuve 1.Soit la fonction $h(t) = t\psi'(t) - \psi(t)\,,$ pour $t \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} h(1) &= 0, \\ h'(t) &= t\psi''(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc on a bien que $t\psi'(t) \geq \psi(t)\,,\ \forall\ t \geq 1.$

2. Supposons que $\psi(t_1) = \psi(t_2)$ avec $t_1 < 1 < t_2$ alors :

$$\begin{cases} t_2\psi'(t_2) > \psi(t_2), \\ \text{et} \\ \psi(1) > \psi(t_1) + (1 - t_1)\psi'(t_1), \end{cases}$$

donc

$$\psi'(t_1) < 0, \ \psi'(t_2) > 0$$

D'autre part, on définit $f(\beta) = \psi(\beta t_1) - \psi(\beta t_2)$, pour $\beta \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} &f(1) = 0. \\ &f'(\beta) = t_1\psi'(\beta t_1) - t_2\psi'(\beta t_2). \end{aligned}$$

Comme $\psi''(t) \geq 0$, et $\beta t_1 < \beta t_2$, pour $\beta > 1$, donc :

$$\psi'(\beta t_1) \leq \psi'(\beta t_2), \ \text{pour } \beta > 1.$$

D'autre part,$\psi'(\beta t_2) > 0$, pour $t_2 > 1$, pour $\beta > 1$, donc :

$$f'(\beta) < (t_1 - t_2)\psi'(\beta t_2) < 0, \ \text{pour } \beta > 1.$$

alors

$$f(\beta) = \psi(\beta t_1) - \psi(\beta t_2) < 0.$$

Ce qui termine la preuve ∎

2.3.1 Qualification d'une fonction noyau

Dans cette partie, on présente les conditions de qualification d'une fonction noyau barrière $\psi(t)$ et quelques propriétés concernant ces conditions. On commence par le lemme technique suivant :

Lemme 2.2 *[1]Soit $\psi(t)$ une fonction noyau barrière donnée. Si elle vérifie les deux propriétés* *suivantes :*

$$(\mathbf{i})\ \ t\psi''(t)-\psi'(t)>0,\ \ t>1,$$
$$(\mathbf{ii})\ \ \psi'''(t)<0,\ \ t>0.$$

Alors on a :

$$\psi''(t)\,\psi'(\beta t)-\beta\psi'(t)\,\psi''(\beta t)>0,\quad t>1,\ \ \beta>1.$$

Preuve Supposons que vérifie ($\mathbf{i}$) et ($\mathbf{ii}$) du lemme. Soit $t>1$, on considère

$$f(\beta)=\psi''(t)\,\psi'(\beta t)-\beta\psi'(t)\,\psi''(\beta t)\,,\ \ t>1,\ \ \beta>1.$$

derivons par rapport β on a

$$f'(\beta)=\psi''(\beta t)\left[t\psi''(t)-\psi'(t)-\beta t\psi'(t)\,\psi'''(\beta t)\right]>0,\ \ \forall\ \beta>1.$$

la dernière inégalité est satisfaite du fait que $\psi''(\beta t)>0$, $t\psi''(t)-\psi'(t)>0$, d'après ($\mathbf{i}$) et $-\beta t\psi'(t)\,\psi'''(\beta t)>0$, car $t>1$, $\psi'(t)>0$ et $\psi'''(\beta t)<0$ d'après ($\mathbf{ii}$). Ce qui implique que $f(\beta)>0$, pour tout $\beta>1$: Ce qui termine la preuve. ■

Commençons par une présentation de la définition d'une fonction noyau qualifiée.

Définition 2.2 *Une fonction noyau f est dite qualifiée si $f\in C^3$ et f vérifie les propriétés suivantes*

$$\begin{aligned}
t\psi''(t)+\psi'(t) &> 0,\quad t<1, &(2.10)\\
t\psi''(t)-\psi'(t) &> 0\ \ t>1, &(2.11)\\
\psi'''(t) &< 0,\quad t>0, &(2.12)\\
2\left[\psi''(t)\right]^2-\psi'(t)\,\psi'''(t) &> 0\ \ t<1, &(2.13)\\
\psi''(t)\,\psi'(\beta t)-\beta\psi'(t)\,\psi''(\beta t) &> 0,\quad t>1,\quad \beta>1. &(2.14)
\end{aligned}$$

Remarque 2.1 *D'après le Lemme* 2.2*, il est montré que* (2.11) *et* (2.12) *impliquent* (2.14) *Donc, pour montrer la qualification de $\psi(t)$, on vérifie seulement les conditions de* (2.10) *à* (2.13)*.*

2.3.2 Propriétés et relation entre les conditions de qualification

Le lemme suivant montre que toute fonction noyau éligible $\psi(t)$ est exponentielement convexe, dont l'importance de ce lemme est justifié par la suite (voir [1], [11]).

Lemme 2.3 *[11] Soit ψ une fonction deux fois différentiable, alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(**a**) $\psi\left(\sqrt{t_1 t_2}\right) \leq \frac{\psi(t_1)+\psi(t_2)}{2}$ *pour tous* $t_1, t_2 > 0$.

(**b**) *la fonction* φ *définie par* $\varphi(\xi) = \psi(e^{\xi})$ *est convexe.*

(**c**) $t\psi''(t) + \psi'(t) \geq 0$, $t > 0$

Preuve Signalons que la fonction φ est continue donc pour qu'elle soit convexe, il suffit qu'elle soit mid-convexe. Montrons que (**a**) $\Leftrightarrow$ (**b**)

$$\begin{aligned}
\psi\left(\sqrt{t_1 t_2}\right) &\leq \frac{\psi(t_1)+\psi(t_2)}{2} \\
&\Leftrightarrow \varphi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right) = \psi(\sqrt{e^{\xi_1} e^{\xi_1}}) \leq \frac{\left(\psi\left(e^{\xi_1}\right)+\psi\left(e^{\xi_1}\right)\right)}{2},\ \forall t_1, t_2 > 0 \\
&= \frac{\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi_2)}{2},\ \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R},\ \text{telque } t_1 = e^{\xi_1},\ t_2 = e^{\xi_2} \\
&\Leftrightarrow \varphi \text{ est mid-convexe}
\end{aligned}$$

Concernant l'équivalence (**b**) $\Leftrightarrow$ (**c**)

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ convexe } &\Leftrightarrow \varphi''(\xi) = \left[\psi\left(e^{\xi}\right)\right]'' = \left[\psi'\left(e^{\xi}\right)e^{\xi}\right]' = \left[\psi''\left(e^{\xi}\right)e^{2\xi} + e^{\xi}\psi'\left(e^{\xi}\right)\right] \\
&= \left[\psi''\left(e^{\xi}\right)e^{\xi} + \psi'\left(e^{\xi}\right)\right]e^{\xi} \geq 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow t\psi''(t) + \psi'(t) \geq 0,\ \forall t > 0,\ \text{telque } t = e^{\xi}
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.4 *Soit une fonction deux fois différentiable, alors les propriétés suivantes sont équi-*

valentes :

$$\begin{cases} 1)\ \psi\left(\sqrt{\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{2}}\right) \leq \frac{\psi(\xi_1)+\psi(\xi_2)}{2},\ \xi_1,\ \xi_2 > 0. \\ 2)\ \textit{la fonction } \phi \textit{ définie par } \phi(t) = \psi\left(\sqrt{t}\right)\ \textit{ est convexe}, t > 0. \\ 3)\ t\psi''(t) - \psi'(t) \geq 0,\ t > 0. \end{cases}$$

Preuve Signalons que la fonction ϕ est continue donc pour qu'elle soit convexe, il suffit qu'elle soit mid-convexe.

Montrons que 1) $\Leftrightarrow$ 2)

$$\begin{aligned} \psi\left(\sqrt{\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{2}}\right) &\leq \frac{\psi(\xi_1)+\psi(\xi_2)}{2},\ \xi_1,\ \xi_2 > 0 \\ \phi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) &= \psi\left(\sqrt{\frac{t_1+t_2}{2}}\right) \leq \frac{\psi\left(\sqrt{t_1}\right)+\psi\left(\sqrt{t_2}\right)}{2} \\ &= \frac{\phi(t_1)+\phi(t_2)}{2},\ \forall (t_1,t_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \text{ telque } t_1 = \xi_1^2,\ t_2 = \xi_2^2 \\ &\Leftrightarrow \phi \text{ mid-convexe} \end{aligned}$$

Concernant l'équivalence 2) $\Leftrightarrow$ 3)

$$\phi \text{ convexe} \Leftrightarrow \phi''(\xi) = \left[\psi\left(\sqrt{t}\right)\right]'' = \frac{1}{4t^{\frac{3}{2}}}\left(t\psi''(t) - \psi'(t)\right) \geq 0,\ t > 0$$

Ce qui termine la preuve. ■

2.3.3 Une borne supérieure de $\Psi(v)$ après chaque itération externe

Notons qu'au début de chaque itération externe du l'Algorithme (3), juste avant la mise à jour du paramètre μ avec le facteur $(1-\theta)$, on a $\Psi(v) < \tau$. Après la réduction de μ en le multipliant par le facteur $(1-\theta)$: $\mu_+ = (1-\theta)\mu$, avec $0 < \theta < 1$, le vecteur v est mis à jour par la relation suivante : $v_+ = \frac{v}{\sqrt{(1-\theta)}}$. Ceci conduit en général à une augmentation de la valeur de $\Psi(v)$ dans les itérations externes, puis, au cours des itérations internes $\Psi(v)$ diminue jusqu'à ce qu'elle atteint la première valeur inférieure ou égale à τ. Au cours de l'algorithme, les plus grandes valeurs de $\Psi(v)$ se produisent juste après les mises à jours de μ.

Pour cela, nous avons besoin d'une bonne estimation de la borne supérieure de $\Psi(v)$. En d'autre terme, on trouve une borne supérieure de $\Psi\left(\frac{v}{\sqrt{(1-\theta)}}\right)$ en fonction de $\Psi(v)$.

Il sera clair que certaines fonctions inverses liées à la fonction noyau et sa première dérivée jouent un rôle important pour analyser l'Algorithme 3. On introduit ces fonctions inverses ici. On note par

$$\varrho : [0,+\infty[\rightarrow [1,+\infty[, \text{ et } \rho : [0,+\infty[\rightarrow]0,1]$$

les fonctions inverses de ψ pour $t \geq 1$ et $-\frac{1}{2}\psi'$. pour $t \in]0,1]$, respectivement. Ceci equivalent à

$$\begin{aligned} s &= \psi(t) \Leftrightarrow t = \varrho(s), \text{ pour } t \geq 1 \\ s &= -\frac{\psi'(t)}{2} \Leftrightarrow t = \rho(s), \text{ pour } t \geq 1 \end{aligned}$$

Supposons dans toute la suite que est une fonction noyau qualifiée. On a le théorème suivant qui est représenté en [7] et dont la démonstration dépend de la condition (2.14).

Théorème 2.6 *Pour tout vecteur positif* v *et tout* $\beta > 1$, *on a :*

$$\Psi(\beta v) \leq n\psi\left(\beta\varrho\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right)\right).$$

La démonstration du théorème énoncé à la page 13 ref [1]. En conséquence du Théorème 50, on a si $\Psi(v) \leq \tau$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$ alors, après la mise à jourde μ, $\Psi(v)$ est égale à $\Psi\left(\frac{v}{\sqrt{1-\theta}}\right)$ qui est bornée supérieurement par $n\psi\left(\beta\varrho\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right)\right)$. Comme ϱ est croissante, alors $\Psi(v) \leq \tau \Leftrightarrow \varrho\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right) \leq \varrho\left(\frac{\tau}{n}\right)$.

Et donc pour tout vecteur positif v, si $\Psi(v) \leq \tau$ et $\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} > 1$, alors :

$$\Psi_0 \leq L(n,\theta,\tau) = n\psi\left(\frac{\varrho\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}}\right),$$

où Ψ_0 désigne la valeur de $\Psi(v)$ après la mise à jour de μ.

2.3.4 Analyse de la décroissance de la fonction barrière de proximité Ψ

Dans cette sous-section, on va calculer le pas de déplacement α qui conserve la stricte faisabilité de nouveau itéré et réduire la valeur de proximité durant les itérations internes et on donne les résultats de complexité de l'algorithme.

Pour μ fixé, si on prend α le pas de déplacement, alors le nouveau itéré est donné par :

$$x_+ = x + \alpha \Delta x, \; y^+ = y + \alpha \Delta y, \; s^+ = s + \alpha \Delta s.$$

Maintenant, nous introduisons le vecteur réduit v et les directions de recherche réduite d_x et d_s comme suit :

$$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}, d_x = \frac{v\Delta x}{x}, d_s = \frac{v\Delta s}{s} \tag{2.15}$$

Alors,on peut écrire

$$x_+ = x\left(e + \alpha \frac{\triangle x}{x}\right) = x\left(e + \alpha \frac{d_x}{v}\right) = \frac{x}{v}\left(v + \alpha d_x\right)$$

et

$$s_+ = s\left(e + \frac{\alpha}{v} \triangle s\right) = s\left(e + \frac{\alpha}{v} d_s\right) = \frac{s}{v}\left(v + \alpha d_s\right)$$

Donc pour μ fixé, on a :

$$v_+ = \sqrt{\frac{x_+ \ s_+}{\mu}} = \sqrt{\left(v + \alpha d_x\right)\left(v + \alpha d_s\right)}, \tag{2.16}$$

Pour tout $\alpha > 0$, on considère la fonction suivante :

$$f\left(\alpha\right) = \Psi\left(v_+\right) - \Psi\left(v\right), \text{ pour tout } \alpha \geq 0. \tag{2.17}$$

Alors $f\left(\alpha\right)$ est la différence de la proximité entre le nouvel itéré et l'ancien itéré, pour μ fixé.

En utilisant le Lemme 2.5 on obtient :

$$\begin{aligned}\Psi\left(v_{+}\right) &= \Psi\left(\sqrt{\left(v+\alpha d_{x}\right)\left(v+\alpha d_{s}\right)}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\Psi\left(v+\alpha d_{x}\right)+\Psi\left(v+\alpha d_{s}\right)\right]\end{aligned}$$

Et par conséquant $f\left(\alpha\right) \leq f_1\left(\alpha\right)$, ou

$$f_1\left(\alpha\right)=\frac{1}{2}\left[\Psi\left(v+\alpha d_{x}\right)+\Psi\left(v+\alpha d_{s}\right)\right]-\Psi\left(v\right), \tag{2.18}$$

avec

$$f(0)=f_1(0)=0,$$

Maintenant, pour estimer la décroissance de la fonction de proximité durant un pas, on utilise les deux dérivées successive de $f_1\left(\alpha\right)$ par rapport à α on obtient

$$f_1'\left(\alpha\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\psi'\left(v_i+\alpha\left[d_x\right]_i\right)\left[d_x\right]_i+\psi'\left(v_i+\alpha\left[d_s\right]_i\right)\left[d_s\right]_i\right]$$

et

$$f_1''\left(\alpha\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\psi''\left(v_i+\alpha\left[d_x\right]_i\right)\left[d_x\right]_i^2+\psi''\left(v_i+\alpha\left[d_s\right]_i\right)\left[d_s\right]_i^2\right], \tag{2.19}$$

où les $\left[d_x\right]_i$ et $\left[d_s\right]_i$ désigne respectivement.la $i^{ième}$ composante de des vecteurs d_x et d_s

D'après la définition de δ, et puisque $d_x+d_s=-\nabla\Psi\left(v\right)$, on trouve :

$$f_1'\left(0\right)=\frac{1}{2}\nabla\Psi\left(v\right)^T\left(d_x+d_s\right)=-\frac{1}{2}\nabla\Psi\left(v\right)^T\nabla\Psi\left(v\right)=-2\left(\delta\left(v\right)\right)^2 \tag{2.20}$$

d'où $f_1''\left(\alpha\right)>0$ si d_x ou $d_s\neq 0$, alors dans ce cas f_1 est strictement convexe.

Nous définissons également la mesure de proximité, basée sur la norme, $\delta(v):\mathbb{R}_{++}^n\longrightarrow\mathbb{R}_{+}$,comme suit :

$$\delta(v)=\delta(x;y;s)=\frac{1}{2}\left\|d_x+d_s\right\|=\frac{1}{2}\left\|\nabla\Psi\left(v\right)\right\| \tag{2.21}$$

Le lemme suivant présente une borne supérieure de $f_1''(\alpha)$ pour $\boldsymbol{LP}$

Lemme 2.5 *[1] Soit $f_1(\alpha)$ défini dans* (2.18) *et δ défini dans* (2.21)*, alors on a :*

$$f_1''(\alpha) \leq 2\delta^2 \psi''(v_{\min} - 2\alpha\delta) \tag{2.22}$$

Avec $v_{\min}$ désigne le minimum de l'ensemble : $\{v_i \in \mathbb{R}_{++},\, 1 \leq i \leq n\}$.

Lemme 2.6 *Si le pas de déplacement α satisfait*

$$-\psi'(v_{\min} - 2\alpha\delta) + \psi'(v_{\min}) \leq 2\delta. \tag{2.23}$$

Alors

$$f_1'(\alpha) \leq 0.$$

Preuve En utilisant (2.20) et (2.21) nous écrivons :

$$\begin{aligned}
f_1'(\alpha) &= f_1'(0) + \int_0^\alpha f_1''(\varsigma)\, d\varsigma \\
&\leq -2\delta^2 + 2\delta^2 \int_0^\alpha \psi''(v_{\min} - 2\varsigma\delta)\, d\varsigma \\
&= -2\delta^2 - \delta \int_0^\alpha \psi''(v_{\min} - 2\varsigma\delta)\, d(v_{\min} - 2\varsigma\delta) \\
&= -2\delta^2 - \delta\left[\psi'(v_{\min} - 2\alpha\delta) - \psi'(v_{\min})\right] \\
&= -2\delta^2 + 2\delta^2 = 0,
\end{aligned}$$

car on à :

$$-\psi'(v_{\min} - 2\alpha\delta) + \psi'(v_{\min}) \leq 2\delta, \tag{2.24}$$

alors, $f_1'(\alpha) \leq 0$. D'ou le résultat. $\blacksquare$

Lemme 2.7 *L'estimation de la plus grande valeur de* α *vérifiant* (2.23), *est donnée par :*

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2\delta}\left[\rho\left(\delta\right) - \rho\left(2\delta\right)\right] \tag{2.25}$$

Preuve Nous voulons déterminer la plus grande valeur de α vérifiant (2.23). On fixe δ, $v_{\min}$ et α. ■

Comme ψ'' est strictement décroissante alors

$$-\psi''\left(v_{\min} - 2\alpha\delta\right) + \psi''\left(v_{\min}\right) \leq 0.$$

Donc la valeur maximale pour l'expression à gauche dans (2.23) par rapport à $v_{\min}$ est atteinte si $v_{\min}$ atteint sa valeur minimale, et d'autre part la dérivée de l'expression à gauche dans (2.23) par rapport à α est

$$2\delta\psi''\left(v_{\min} - 2\alpha\delta\right) \geq 0.$$

Donc la valeur maximale pour l'expression à gauche dans (2.23) par rapport à α est atteinte pour la plus grande valeur de α.

Pour $v_{\min} \in \left]0, 1\right[$ alors

$$\delta(v) = \frac{1}{2}\left\|\nabla\Psi\left(v\right)\right\| \geq \frac{1}{2}\left|\psi'\left(v_{\min}\right)\right| \geq -\frac{1}{2}\psi'\left(v_{\min}\right),$$

comme ρ est strictement décroissante alors $\rho\left(\delta\right) \leq v_{\min}$. Nous prenons

$$v_{\min} = \rho\left(\delta\right). \tag{2.26}$$

Donc $\psi'\left(v_{\min}\right) = -2\delta$, en le remplaçant dans l'expression à gauche dans (2.23), on obtient

$$-\psi'\left(v_{\min} - 2\alpha\delta\right) \leq 4\delta,$$

nous prenons

$$-\frac{1}{2}\psi'\left(v_{\min} - 2\alpha\delta\right) = 2\delta,$$

donc

$$v_{\min} - 2\alpha\delta = \rho\,(2\delta)\,. \tag{2.27}$$

D'après (2.25) et (2.26), on a :

$$\begin{aligned} v_{\min} &= \rho\,(\delta)\,. \\ 2\alpha\delta &= v_{\min} - \rho\,(2\delta)\,, \end{aligned}$$

donc

$$\alpha = \frac{1}{2\delta}\left[\rho\,(\delta) - \rho\,(2\delta)\right].$$

Ce qui termine la preuve

Lemme 2.8 *Soient ρ et $\bar{\alpha}$ définis dans le lemme* 2.7*. Alors on a*

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''\left(\rho\,(2\delta)\right)}.$$

Par la suite, on note par :

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{\psi''\left(\rho\,(2\delta)\right)}. \tag{2.28}$$

Preuve Par la définition de ρ on a

$$-\psi'\left(\rho\,(\delta)\right) = 2\delta$$

on dérive par rapport à δ, on trouve

$$-\psi''\left(\rho\,(\delta)\right)\rho'\,(\delta) = 2$$

alors

$$\rho'\,(\delta) = -\frac{2}{\psi''\left(\rho\,(\delta)\right)} < 0$$

et comme la fonction définie par $\psi''(\rho(s))$ est croissante, donc

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \frac{1}{2\delta}\int_{2\delta}^{\delta}\rho'(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{2\delta}\frac{ds}{\psi''(\rho(s))} \\ &\geq \frac{1}{\delta}\frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))}\int_{\delta}^{2\delta}ds,\end{aligned}$$

d'où

$$\psi''(\rho(2\delta)) = \max_{[\delta,2\delta]}\psi''(\rho(s)),$$

ce qui donne

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))}.$$

Ce qui termine la preuve ■

Le lemme suivant montre que la proximité Ψ est décroissante. Pour plus de détails voir [12]

Lemme 2.9 *[12] On suppose que $h(t)$ est une fonction convexe et deux fois diffiérentiable, telle que :*

$$h(0) = 0,\ \ h'(0) < 0,$$

et h atteint son minimum global à $t^* > 0$; et h'' est croissante pour tout $t \in [0,\ t^*]$, alors pour tout $t \in [0,\ t^*]$, on a :

$$h(t) \leq \frac{th'(0)}{2}.$$

Preuve On suppose que h'' est croissante pour tout $t \in [0,\ t^*]$, Posons $\gamma = h'$, alors γ' est croissante, c'est a dire

$$[\gamma'(t_2) - \gamma'(t_1)]\,[t_2 - t_1] \geq 0,\ \ \forall t_1,\ t_2 \in [0, t^*]$$

L'opérateur γ' est donc monotone. Se rappeler que la condition

$$\langle \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

est une condiion nécessaire et suffisante de convexité de la fonction f. ■

Donc $\gamma = h'$ est une fonction convexe. La sécante passant par les points $(0, h'(0))$ et $(t^*, h'(t^*))$ est au dessus de la courbe $(t, h'(t))$ pour tout $t \in [0, t^*]$. L'équation de la sécante passant par les deux points est

$$sec(t) = h'(0) + t\frac{h'(t^*) - h'(0)}{t^*}.$$

Se rappeler que $h'(t^*) = 0$. On a donc

$$h'(t) \leq sec(t) = \left(1 - \frac{t}{t^*}\right) h'(0),\ \forall t \in [0, t^*].$$

Alors

$$\int_0^t h'(\zeta)\, d\zeta \leq \int_0^t \left(1 - \frac{\zeta}{t^*}\right) h'(0)\, d\zeta,\ \forall t \in [0, t^*],$$

donc

$$[h(t) - h(0)] \leq \frac{th'(0)}{2} + \frac{th'(0)}{2}\left(1 - \frac{t}{t^*}\right),\ \forall t \in [0, t^*].$$

Se rappeler que $h(0) = 0$. On a donc

$$h(t) - \frac{th'(0)}{2} \leq \frac{th'(0)}{2}\left(1 - \frac{t}{t^*}\right),\ \forall t \in [0, t^*].$$

Comme $h'(0) < 0$, alors

$$h(t) - \frac{th'(0)}{2} \leq 0,\ \forall t \in [0, t^*]$$

Ce qui termine la preuve

Et par conséquent, on a le lemme suivant qui présente une borne supérieure pour la valeur de décroissance de la proximité à une itération interne.

Noter aussi que toute borne supérieure pour $f_1(\alpha)$ et aussi est une borne supérieure pour $f(\alpha)$

Lemme 2.10 *Si le pas de déplacement α vérifie $\alpha \leq \bar{\alpha}$, alors :*

$$f(\alpha) \leq -\alpha\delta^2.$$

Preuve Soit h une fonction définie par

$$h(\alpha) = -2\alpha\delta^2 + \alpha\delta\psi'(v_{\min}) - \frac{1}{2}\psi(v_{\min}) + \frac{1}{2}\psi(v_{\min} - 2\alpha\delta),$$

alors

$$\begin{aligned} h(0) &= f_1(0) = 0, \;\; h'(0) = f_1'(0) = -2\delta^2, \\ h''(\alpha) &= 2\delta^2\psi''(v_{\min} - 2\alpha\delta) \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.5 on a

$$f_1''(\alpha) \leq h''(\alpha), \tag{2.29}$$

et par conséquent on obtient

$$f_1'(\alpha) \leq h'(\alpha) \;\text{ et }\; f_1(\alpha) \leq h(\alpha),$$

donc si $\alpha \leq \bar{\alpha}$ on a

$$\begin{aligned} h'(\alpha) &= h'(0) + \int_0^\alpha h''(\xi)\, d\xi \\ &= -2\delta^2 + \int_0^\alpha 2\delta^2\psi''(v_{\min} - 2\xi\delta)\, d\xi \\ &= -2\delta^2 + \delta(-\psi'(v_{\min} - 2\alpha\delta) + \psi'(\min)) \leq -2\delta^2 + 2\delta^2 = 0, \end{aligned}$$

avec h'' est croissante, donc d'après le lemme 2.9 on a

$$f(\alpha) \leq f_1(\alpha) \leq h(\alpha) \leq \alpha\frac{h'(0)}{2} = -\alpha\delta^2.$$

Ce qui termine la preuve. ■

En combinant les résultats des lemmes 2.8 et 2.10 on obtient

$$f(\tilde{\alpha}) \leq -\frac{\delta^2}{\psi''(\rho(2\delta))}. \tag{2.30}$$

avec $\tilde{\alpha}$ étant la taille de pas par défaut, comme déjà indiqué en (2.28). Et on utilise $\tilde{\alpha}$ comme taille de pas par défaut.

Corollaire 2.3 *Le membre droit de l'expression* (2.30) *est strictement décroissante par rapport à* δ *:*

2.3.5 Borne d'itérations et analyse de la complexité

On doit compter le nombre d'itérations internes nécessaire pour revenir à la situation où $\Psi(v) \leq \tau$. On note que Ψ_0 désigne la valeur de $\Psi(v)$ après la mise à jour de μ, les valeurs suivantes dans la même itération externe sont notées par Ψ_k, $k = 1, 2, ..., K$, avec K désigne le nombre total d'itérations internes produites durant une itération externe.

Nous avons besoin des lemmes ci-dessous, utilisés par J.Peng et al.[8], pour faciliter au lecteur la compréhension des propos établis le long des différentes preuves.

Lemme 2.11 *[11] Si* $\alpha \in [0, 1]$ *alors*

$$(1+t)^{\alpha} \leq 1 + \alpha t, \ \forall t \geq -1.$$

Preuve On définit la fonction

$$f(t) = (1+t)^{\alpha} - \alpha t - 1, \text{ pour } t \geq -1$$

Alors

$$\begin{aligned} f'(t) &= \alpha(1+t)^{\alpha-1} - \alpha. \\ f''(t) &= \alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2}. \\ f''(t) &\leq 0, \end{aligned}$$

donc f est concave et $f'(0) = 0$, alors

$$f(t) \leq f(0) = 0.$$

C'est à-dire que

$$(1+t)^{\alpha} \leq \alpha t + 1, \ \forall t \geq -1$$

Ce qui termine la preuve. ■

Lemme 2.12 *[22] Soit t_0, $t_1, ..., t_K$ une suite des nombres positifs qui vérifie :*

$$t_{k+1} \leq t_k - \beta t_k^{1-\gamma}, k = 0, 1, ..., K-1,$$

tels que $\beta > 0$ et $0 < \gamma < 1$, alors :

$$K \leq \left[\frac{t_0^{\gamma}}{\beta\gamma}\right].$$

Preuve En utilisant le lemme 2.11, nous pouvons écrire ■

$$\begin{aligned} t_{k+1}^{\gamma} &\leq \left(t_k - \beta t_k^{1-\gamma}\right)^{\gamma} = t_k^{\gamma}\left(1 - \beta t_k^{-\gamma}\right)^{\gamma} \\ &\leq t_k^{\gamma}\left(1 - \gamma\beta t_k^{-\gamma}\right) = t_k^{\gamma} - \gamma\beta, \end{aligned}$$

donc $t_k^{\gamma} \leq t_0^{\gamma} - \gamma\beta k$,, en remplaçant k par K, on obtient $t_0^{\gamma} - \gamma\beta K > 0$, alors

$$K \leq \left[\frac{t_0^{\gamma}}{\gamma\beta}\right].$$

Ce qui termine la preuve.

Lemme 2.13 *Soit K le nombre d'itérations internes, alors on a :*

$$K \leq \frac{(\Psi_0)^{\gamma}}{\beta\gamma}.$$

Preuve La définition de K implique que $\Psi_{K-1} > \tau$ et $\Psi_K < \tau$ et (d'après la décroissance de $f(\tilde{\alpha})$ on obtient la valeur de γ et β)

$$\Psi_{k+1} < \Psi_k - \beta\left(\Psi_k\right)^{1-\gamma}, \ k = 0, 1, ..., K-1,$$

En utilisant le Lemme 2.12 avec $t_k = \Psi_k$, on obtient :

$$K \leq \frac{\left(\Psi_0\right)^{\gamma}}{\beta\gamma}.$$

Ce qui achève la preuve. ■

La détermination du nombre total d'itérations nécessaires pour trouver une solution optimale primale-duale nécessite le calcul du nombre d'itérations externes.

Le lemme suivant présente le nombre d'itérations externes à partir duquel l'Algorithme 3 converge

Théorème 2.7 *Soit k le nombre d'itérations externes nécessaires pour trouver une solution optimale primale-duale approchée à une précision $\varepsilon > 0$, alors on a :*

$$k \geq \frac{1}{\theta}\log\frac{n}{\varepsilon} \tag{2.31}$$

Preuve D'après l'Algorithme (42), l'obtention d'une solution optimale primale-duale nécessite que

$$n\mu^k \leq \varepsilon$$

Notons que à chaque itération externe k se réduit par un facteur de $(1-\theta)$ c'est à dire :

Si θ le paramètre de la trajectoire centrale avec $\mu^0 = 1$ et $\mu^k = (1-\theta)^k \mu^0$, on a :

$$(1-\theta)^k \mu^0 n \leq \varepsilon \Rightarrow (1-\theta)^k \leq \frac{\varepsilon}{n},$$

En utilisant la fonction croissante log on obtient :

$$k\log(1-\theta) \leq \log\varepsilon - \log n,$$

puisque $\log(1-\theta) \leq -\theta$ pour $0 < \theta < 1$,

$$\begin{aligned} k\theta &\geq \log\left(\frac{n}{\varepsilon}\right) \\ k &\geq \frac{1}{\theta}\log\left(\frac{n}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Le nombre total d'itérations nécessaires pour trouver une solution optimale primale duale approchée avec des précisions $\varepsilon > 0$ et $\tau > 0$ n'est autre que la multiplication de nombre d'itérations externes par le nombre d'itérations internes. On obtient le nombre total d'itérations produites par l'Algorithme (3) qui est donnée par :

$$\frac{[\Psi_0]^\gamma}{\beta\gamma\theta}\log\left(\frac{n}{\varepsilon}\right) \tag{2.32}$$

Si on prend $\tau = \mathcal{O}(n)$ et $\theta = \Theta(1)$, dans (2.32), on trouve le nombre d'itérations pour ***IPMs*** à long-pas.

Par contre, si $\tau = \mathcal{O}(1)$, et $\theta = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ dans (2.32), on trouve le nombre d'itérations pour ***IPMs*** à court-pas.

Chapitre 3

Méthode de la trajectoire centrale basée sur les fonctions noyaux pour (PL)

Dans ce chapitre, on va étudier la méthode de trajectoire centrale primale-duale basée sur les fonctions noyaux. A cet effet, on a choisi la fonction noyau de B. Bounibane et EL. Djeffal [15] pour trouver une nouvelle classe de directions dans le but d'obtenir un nouveau résultat de complexité.

Nous considérons le problème d'optimisation linéaire primal donné par :

$$\min\left\{c^T x : Ax + b = 0, x \geq 0\right\}, \tag{P}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, rang\,(A) = m, b \in \mathbb{R}^m$et $c, x \in \mathbb{R}^n$et son problème dual associé :

$$\max\left\{b^T y : A^T y + s = c, y \in \mathbb{R}^m, s \in \mathbb{R}^n, s \geq 0\right\} \tag{D}$$

En 1984, Karmarkar[6] a proposé une nouvelle méthode en temps polynomial pour résoudre des programmes linéaires. Cette méthode, et ses variantes, développées par la suite, s'appellent Méthodes de Points Intérieurs, notées **IPMs**. Les lecteurs peuvent se référer à des références de base traitant le sujet, voir Y.Q.Bai et al. [7] , et J.Peng et al. [8], C.Roos et al . [9] Y.Ye [10]Sans perte de généralité, nous supposons que (P) et (D) satisfont la Condition de Points Intérieurs, notée **IPC**, i.e., il existe (x^0, y^0, s^0) tel que

$$Ax^0 = b, x^0 > 0, A^T y^0 + s^0 = c, s^0 > 0$$

Il est bien connu que la recherche de solutions optimales de (P) et (D) est équivalente à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} Ax = b, x \geq 0 \\ A^T y + s = c, s \geq 0 \\ xs = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Le système (3.1) est obtenu par le théorème de la dualité forte appliqué aux problèmes duaux (P) et (D). L'idée principale d'**IPMs** est de remplacer la troisième équation du système (3.1), dite condition de complémentarité, par l'équation paramétrée $xs = \mu e$, avec $\mu > 0$. Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} Ax = b, x \geq 0 \\ A^T y + s = c, s \geq 0 \\ xs = \mu e. \end{cases} \tag{3.2}$$

Assez surprenant, si la condition **IPC** est satisfaite, alors il existe une solution $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ du dernier système, pour chaque $\mu > 0$, et cette solution est unique.

Nous appelons $x(\mu)$ le μ-centre de (P) et $(y(\mu), s(\mu))$ le μ-centre de (D). L'ensemble de μ-centres (avec μ prenant plusieurs valeurs décroissantes des nombres réels positifs qui convergent vers 0) forme un trajet, appelé la trajectoire centrale de (P) et (D).

L'importance de la trajectoire centrale pour l'optimisation linéaire a été reconnue par plusieurs chercheurs, Si $\mu \to 0$, la limite de la trajectoire centrale existe, et étant donné que les points limites satisfont la condition de complémentarité, la limite donne des solutions optimales de (P) et (D).

D'un point de vue théorique, on peut supposer que l'**IPC** est satisfaite. Pour simplifier les contributions théoriques, et toujours sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $x_0 = s_0 = e$ Nous supposons que $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ est connu pour certaines valeurs positives de μ .

Par exemple, en raison de l'hypothèse ci-dessus, nous pouvons supposer que pour $\mu =$

$1, x(1) = s(1) = e$. Nous réduison μ à $\mu = (1-\theta)\mu$ pour un nombre θ fixé $\theta \in]0,1[$, et on résout le système de Newton suivant :

$$\begin{cases} A\triangle x = 0, \\ A^T\triangle y + \triangle s = 0 \\ s\triangle x + x\triangle s = \mu e - xs. \end{cases} \tag{3.3}$$

Le système (3.3) admet une solution unique désignée par $(\triangle x, \triangle y, \triangle s)$. Cette solution est dite la direction de Newton classique pour l'optimisation linéaire. Ensuite, μ est à nouveau réduite par le facteur $(1-\theta)$, et nous appliquons de nouveau la méthode de Newton ciblant les nouveaux μ-centres, et ainsi de suite. Ce processus est répété jusqu'à ce que devient assez petit (obtention de la condition $n\mu \leq \varepsilon$), alors dans ce cas nous obtenons une ε-solution des problèmes (P) et (D). Le nouvel itéré de la méthode de Newton avec un pas fixé est donné par :

$$x_+ = x + \alpha\triangle x, y_+ = y + \alpha\triangle y, s_+ = s + \alpha\triangle s, \text{ où } \alpha \in \ ]0,1]. \tag{3.4}$$

Maintenant, nous introduisons le vecteur réduit υ et les directions de recherche réduite d_x et d_s comme suit :

$$\upsilon = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}, d_x = \frac{\upsilon\triangle x}{x}, d_s = \frac{\upsilon\triangle s}{s} \tag{3.5}$$

Le système (3.3) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} A\triangle x = 0, \\ A^T\triangle y + \triangle s = 0 \\ s\triangle x + x\triangle s = -\mu\upsilon\left(\upsilon - \upsilon^{-1}\right). \end{cases} \tag{3.6}$$

Qui est équivalent à

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0, \\ \bar{A}^T\triangle y + d_s = 0 \\ d_x + d_s = \upsilon - \upsilon^{-1}, \end{cases} \tag{3.7}$$

où $\bar{A} = \frac{1}{\mu} AV^{-1}X, V = diag\,(v)\,, X = diag\,(x)$ noter que la partie droite de la troisième équation du système (3.7) n'est autre que l'opposé du gradient de la fonction barrière logarithmique $\Psi_l\,(v)\,, i.e., d_x + d_s = -\nabla\Psi_l\,(v)\,,$ alors le système (3.7) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0, \\ \bar{A}^T \triangle y + ds = 0 \\ d_x + d_y = -\nabla\Psi_l\,(v)\,, \end{cases} \tag{3.8}$$

où la fonction barrière $\Psi_l\,(v) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_+$ est définie comme suit :

$$\Psi_l\,(v) = \Psi_l\,(x, y, s) = \sum_{i=1}^{n} \psi_c\,(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \psi_c \left(\sqrt{\frac{x_i si}{\mu}} \right) \tag{3.9}$$

avec

$$\psi_c\,(v_i) = \frac{v_i^2 - 1}{2} - \log\,(v_i) \tag{3.10}$$

Lemme 3.1 *Si* $(d_x, \triangle y, d_s)$ *est une solution du système* (3.8) *alors* d_x, d_s *sont orthogonaux.*

Car :

$$d_x^T d_s = -d_x^T \left(\bar{A}^T \triangle y \right) = -\left(\bar{A} d_x \right)^T \triangle y = 0$$

Nous utilisons $\Psi\,(v)$ la fonction de proximité pour mesurer la distance entre l'itéré courant et et la trajectoire centrale pour $\mu > 0$ donné. Nous définissons également la mesure de proximité, basée sur la norme, $\delta\,(v) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_+$, comme suit :

$$\delta\,(v) = \delta\,(x, y, s) = \frac{1}{2}\,\|d_x + d_s\| = \frac{1}{2}\,\|\nabla\Psi\,(v)\| \tag{3.11}$$

Nous appelons $\psi\,(t)$ la fonction noyau de la fonction barrière logarithmique $\Psi\,(v)$. A noter que la paire (x, s) coïncide avec le μ-centre $(x\,(\mu)\,, s\,(\mu))$ si et seulement si $v = e$.

On peut facilement vérifier que la fonction noyau $\psi_c\,(t)$, définie par (3.10), est une fonction strictement convexe, qui est définie pour chaque $t \in \mathbb{R}_{++}$ et qui admet un minimum pour$t = 1$, dont la valeur de sa fonction est égale à 0. Il ressort clairement de la description précédente que la proximité de (x, s) à $(x\,(\mu)\,, s\,(\mu))$ est mesurée par la valeur de $\Psi\,(v)$ et avec $\tau > 0$ en tant que valeur de seuil. Si $\Psi(\upsilon) < \tau$, on commence une nouvelle itération externe en effectuant une mise à jour du paramètre μ via

$$\mu^{+} = (1-\theta)\,\mu, 0 < \theta < 1$$

Si non ($\Psi(\upsilon) > \tau$), nous entrons dans une itération interne par le calcul des directions de recherche à l'itération en cours par rapport à la valeur actuelle de μ et on applique (3.4) pour obtenir des nouvaux itérés. Si nécessaire, on va répéter la procédure jusqu'à ce qu'on trouve un itéré au voisinage de $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$. Alors est encore réduit par un facteur de $(1-\theta)$ avec $0 < \theta < 1$, et on applique la méthode de Newton pour trouver les nouveaux $\mu-$centres, et ainsi de suite. Ensuite, est à nouveau réduit par le facteur $(1-\theta)$ avec $0 < \theta < 1$, et nous appliquons la méthode de Newton ciblant les nouveaux centres, et ainsi de suite. Ce processus est répété jusqu'à ce que est suffisamment petit, c'est-à-dire jusqu'à ce que$n\mu < \varepsilon$. A ce stade, nous avons trouvé une solution approximative pour un **PL** : Les paramètres,τ ,θ et le pas α décris dans l'algorithme sont choisis tel que le nombre d'itérations produites par l'algorithme sera minimal que possible.

Algorithme 4 (Algorithme Générique Primal-dual IPMs pour LP)

Données :

Une fonction de proximité $\Psi(\upsilon)$;

Un paramètre de limite$\tau > 0$;

Un paramètre de précision $\varepsilon > 0$;

Un paramètre de mise à jour fixe ; $0 < \theta < 1$;

début :

Initialisation : soit (x^0, y^0, s^0) vérifie la **IPC** :

$k = 0, \mu^0 = 1, \upsilon^0 = \sqrt{\frac{x^0 s^0}{\mu^0}}$

Tant que : $n\mu^k > \varepsilon$ **faire** :

début (itération externe)

$\mu^{k+1} = (1-\theta)\,\mu^k$

Tant que : $\Psi(\upsilon) > \tau$ **faire** :

début (itération interne)

Résoudre le système (3.8) pour déterminer $(d_x, \triangle y, d_s)$puis $(\triangle x, \triangle y, \triangle s)$;

Calculer le pas de déplacement α ; et poser

$x_+ = x + \alpha\triangle x$

$y_+ = y + \alpha\triangle y$

$s_+ = s + \alpha\triangle s$

$\upsilon_+ = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$

fin (itération interne)

fin (itération externe)

fin.

3.1 Propriétés de la fonction noyau

Dans ce qui suit, au lieu d'utiliser la fonction noyau classique Ψ_c, on utilise la fonction noyau proposée par B. Bounibane et El. Djeffal [15] et nous donnons ses propriétés qui sont essentielles à notre analyse de la complexité. Nous rappelons que notre fonction, double barrière est définie par :

$$\psi(t) = t^2 - 1 - \log(t) + \frac{t^{-p} - 1}{p},\ p > 0 \tag{3.12}$$

Les trois premières dérivées de $\psi(t)$ par rapport à t sont :

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= 2t - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^{p+1}} && (3.13) \\ \psi''(t) &= 2 + \frac{1}{t^2} + \frac{p+1}{t^{p+2}} && (3.14) \\ \psi'''(t) &= -\left(\frac{2}{t^3} + \frac{(p+1)(p+2)}{t^{p+3}}\right) && (3.15) \end{aligned}$$

D'après (3.14)

$$\psi''(t) > 1,\ p > 0,\ t > 0. \tag{3.16}$$

En notant également que

$$\begin{cases} \textbf{i)}\ \psi(1) = \psi'(1) = 0, \\ \textbf{ii)}\ \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \psi(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \psi(t) = +\infty \end{cases} \tag{3.17}$$

(3.16) et (3.17) montrent que $\psi(t)$ et strictement convexe et minimale en 1. On définit $\psi(t)$ à partir de sa dérivée seconde comme suit :

$$\psi(t) = \int_0^t \int_0^x \psi''(y)\, dydx. \tag{3.18}$$

De plus, les deux conditions **i)** et **ii)** indique donc que notre fonction $\psi(t)$ est une fonction barrière noyau

3.1.1 Eligibilité (Qualification) de la nouvelle fonction noyau

Le lemme suivant sert à prouver que la nouvelle fonction noyau définie en (3.12) est éligible.

Lemme 3.2 *Soit $\psi(t)$, définie dans (3.12), et $t > 0$. Alors,*

$$\begin{aligned} t\psi''(t) + \psi'(t) &> 0, \quad t < 1 && (3.19) \\ t\psi''(t) - \psi'(t) &> 0, \quad t > 1 && (3.20) \\ \psi'''(t) &< 0, \ t > 0 && (3.21) \\ 2\left[\psi''(t)\right]^2 - \psi'(t)\psi'''(t) &> 0, \quad t < 1 && (3.22) \\ \psi''(t)\psi'(\beta t) - \beta\psi'(t)\psi''(\beta t) &> 0, \quad t > 1,\ \beta > 1 && (3.23) \end{aligned}$$

Preuve Pour montrer (3.19), on utilise (3.13) et (3.14) et on obtient :

$$t\psi''(t) + \psi'(t) = 4t + \frac{p}{t^{p+1}} > 0, \text{ pour toute } t > 0 \text{ et } p > 0.$$

donc la condition (3.19) est satisfaite.

Pour montrer (3.20), on utilise encore (3.13) et (3.14), on a :

$$t\psi''(t) - \psi'(t) = \frac{p+2}{t^{p+1}} + \frac{2}{t} > 0 \text{ pour toute } t > 1,$$

le côté droit de la dernière égalité est positif, ce qui prouve (3.20). La condition (3.21) est vérifiée à partir de l'expression du $\psi'''(t)$. Finalement pour montrer, (3.22) on à

$$\begin{aligned}
2\left[\psi''(t)\right]^2 - \psi'(t)\,\psi'''(t) &= 2\left[\left(2+\frac{1}{t^2}\right)^2 + \frac{(p+1)^2}{t^{2p+4}} + 2(p+1)\frac{1}{t^{p+2}}\left(2+\frac{1}{t^2}\right)\right] \\
&\quad + \left[\begin{array}{c} \frac{2(p+1)(p+2)}{t^{p+2}} + \frac{4}{t^2} - \frac{(p+1)(p+2)}{t^{p+4}} - \frac{2}{t^4} \\ -\frac{(p+1)(p+2)}{t^{2p+4}} - \frac{2}{t^{p+4}} \end{array}\right] \\
&= 8 + \frac{12}{t^2} + \frac{p(p+1)}{t^{2p+4}} + \frac{2p^2+14p+12}{t^{p+2}} - \frac{p(p-1)}{t^{p+4}} \\
&\quad + \frac{1}{t^{2p+4}}\left[8t^{2p+4} + 12t^{2p+2} + \left(2p^2+14p+12\right)t^{p+2} + pg_p(t)\right],
\end{aligned}$$

où $g_p(t) = p + 1 - (p-1)t^p$. On a deux cas à discuter :

Si $p \in]0,1]$ la condition (3.22) est satisfaite.

Si $p > 1$. Alors

$$2\left[\psi''(t)\right]^2 - \psi'(t)\,\psi'''(t) > 0 \Leftrightarrow g_p(t) \geq 0.$$

Cela est certainement vrai si

$$t^p \leq \frac{p+1}{p-1} = 1 + \frac{2}{p-1} \Leftrightarrow t \leq \left(1+\frac{2}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } t \in]0,1].$$

Ceci est une inégalité valide, lorsque $0 < t \leq 1$, et par conséquent

$$2\left[\psi''(t)\right]^2 - \psi'(t)\,\psi'''(t) > 0$$

Finalement on obtient la démonstration du (3.22). Pour (3.23), d'après le Lemme 2.4 [7] il suffît que $\psi(t)$ satisfait (3.20) et (3.21). ■

Finalement, $\psi(t)$ est une fonction noyau éligible (qualifée). Ce qui termine la preuve.

Le lemme suivant montre que toute fonction noyau éligible $\psi(t)$ est exponentielement convexe, dont l'importance de ce lemme est justifié par la suite (voir [1], [11])

Lemme 3.3 [*Lemme* 2.12 *dans [11]*] *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1$-$ $\psi\left(\sqrt{t_1 t_2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\psi(t_1) + \psi(t_2)\right)$ *pour tout* $t_1,\ t_2 > 0$ *;*

2$-$ $t\psi''(t) + \psi'(t) > 0, \quad t > 0$

3$-$ *la fonction* $t \mapsto \psi(e^t)$ *est convexe*

Cette propriété est demontré par plusieurs chercheurs voir El Ghami et al. [18] and Peng et al.[8].

Maintenant, on présente les lemmes techniques les plus utilsés dans ce chapitre concernant la nouvelle fonction noyau.

Lemme 3.4 *Pour* $\psi(t)$*, nous avons :*

$$\frac{1}{2}(t-1)^2 \leq \psi(t) \leq \frac{1}{2}\left[\psi'(t)\right]^2,\ t > 0 \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{2}\psi'(t) \leq \psi(t) \leq \frac{p+4}{2}(t-1)^2,\ t \geq 1 \tag{3.25}$$

$$\|v\| \leq \sqrt{n} + \sqrt{2\Psi(v)},\ v \in \mathbb{R}^n_{++} \tag{3.26}$$

Preuve Pour montrer (3.24), en utilisant (3.16), et (3.18) on a

$$\psi(t) = \int_0^t \int_0^x \psi''(y)\, dydx \geq \int_0^t \int_0^x dydx = \frac{1}{2}(t-1)^2,$$

ce qui prouve la première inégalité.

Nous allons maintenant passer à la démonstration de la deuxième inégalité :

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int_0^t \int_0^x \psi''(y)\, dydx \leq \int_0^t \int_0^x \psi''(x)\, \psi''(y)\, dydx \\ &= \int_0^t \psi''(x)\, \psi'(x)\, dx = \int_0^t \psi'(x)\, d\left[\psi'(x)\right] dx = \frac{1}{2}\left[\psi'(x)\right]^2.\end{aligned}$$

Pour (3.25) si $f(x) = 2\psi(t) - (t-1)\psi'(t)$, alors $f'(x) = \psi'(t) - \psi''(t)(t-1)$, $f''(x) = -(t-1)\psi'''(t)$ et $f'(1) = f(1) = 0$. Et comme $\psi'''(t) < 0$ on a $f''(x) \geq 0$ pour $t \geq 1$ on peut résumer ce qui est acquis de la manière suivante $f'(x)$ est une fonction croissante positive il en est de même de $f(x)$. Ce qui prouve la premiére inégalitè

Nous arrivons maintenant à démontrer l'inégalité droite de (3.25), comme $\psi(1) = \psi'(1) = 0$, et en utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \psi(1) + \psi'(1)(t-1) + \frac{1}{2}\psi''(1)(t-1)^2 + \frac{1}{6}\psi'''(\xi)(\xi-1)^3, \\
&= \frac{1}{2}\psi''(1)(t-1)^2 + \frac{1}{6}\psi'''(\xi)(\xi-1)^3 \\
&\leq \frac{1}{2}\psi''(1)(t-1)^2 = \frac{p+4}{2}(t-1)^2
\end{aligned}$$

pour certains ξ vérifant $1 \leq \xi \leq t$. Ce qui termine la preuve.

Pour (3.26) alors en utilisant la première inégalité de (3.24), et l'inégalité de Cauchy-Schwartz peut obtenir

$$\begin{aligned}
\Psi(v) &= \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i) \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(v_i-1)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} v_i + n\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\|v\|^2 - 2e^T v + \|1\|^2\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[\|v\|^2 - 2\|v\|\|e\| + n\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\|v\| - \sqrt{n}\right]^2.
\end{aligned}$$

Cela implique que $\|v\| \leq \sqrt{n} + \sqrt{2\Psi(v)}$, $v \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 3.1 *Soit* $g(t) = -\log(t) + \frac{t^{-p}-1}{p}$, $t > 0$. *Alors* $\psi(t) = t^2 - 1 + g(t)$, *puisque* $g'(t) = -\left(\frac{1}{t} + t^{-p-1}\right) < 0$, $g(t)$ *est decroissante par rapport a* $t \geq 1$

Soit $\varrho : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ la fonction inverse de $\psi(t)$ pour $t \geq 1$ et soit $\rho : [0, +\infty[\longrightarrow]0, 1]$ la fonction inverse de $-\frac{1}{2}\psi'(t)$ pour tout $t \in]0, 1]$. Alors nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.5 *Pour $\psi(t)$ on à :*

$$\sqrt{u+1} \leq \varrho(u) \leq \sqrt{2u}+1, \; u \geq 0 \tag{3.27}$$

$$\rho(z) \geq \left(\frac{1}{2z+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}. \tag{3.28}$$

Preuve Pour montrer (3.27) soit $u = \psi(t)$ $t \geq 1$. Alors $\varrho(u) = t$, on utilisant (3.24) on a $u = \psi(t) \geq \frac{1}{2}(t-1)^2$, $t \geq 1$, ce qui implique que

$$t = \varrho(u) \leq \sqrt{2u+1}.$$

Par la définition de $\psi(t)$ on a $u = \psi(t) = g(t) + t^2 - 1$. On utilisant (remarque 3.1) et $g(1) = 0$, on a $g(t) \in \left]-\infty, 0\right]$, puisque $t^2 - 1 = u - g(t) \geq u$. Ce qui implique

$$t = \varrho(u) \geq \sqrt{u+1}.$$

Pour montrer (3.28), soit

$$z = \frac{-1}{2}\psi'(t), \; t \in \left]0,1\right] \Leftrightarrow 2z = -\psi'(t)$$

En utilisant la définition de

$$\rho : \rho(z) = t, \; t \in \left]0,1\right].$$

et en utilisant la défnition de $\psi'(t)$, on a

$$-2t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^{p+1}} = 2z \Leftrightarrow \frac{1}{t^{p+1}} = 2t - \frac{1}{t} + 2z$$

puisque la fonction $h : t \longrightarrow 2t - \frac{1}{t}$ monotone strictement croissante $t \in \left]0,1\right]$ et $h(1) = 0$. Donc

$$\frac{1}{t^{p+1}} \leq 2z+1 \Leftrightarrow t = \rho(z) \geq \left(\frac{1}{2z+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}, \; p > 0 \text{ et } t \in \left]0,1\right].$$

D'ou le résultat. ■

Lemme 3.6 *Soit* $\beta \geq 1$. *Alors*

$$\psi(\beta t) \leq \psi(t) + \left(\beta^2 - 1\right) t^2.$$

Preuve Utilisant (remarque 3.1) on a $g(\beta t) - g(t) \leq 0$ for $\beta \leq 1$. Puisque

$$\begin{aligned}
\psi(\beta t) &= \beta^2 t^2 + g(\beta t) + t^2 - 1 + g(t) - t^2 - g(t) \\
&= \left(\beta^2 - 1\right) t^2 + g(\beta t) + \psi(t) - g(t) \\
&= \left(\beta^2 - 1\right) t^2 + \psi(t) + \left(g(\beta t) - g(t)\right) \leq \psi(t) + \left(\beta^2 - 1\right) t^2
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Lemme 3.7 *Soit* $0 \leq \theta < 1$, $v_+ = \frac{v}{\sqrt{1-\theta}}$. *Si* $\Psi(v) \leq \tau$ *alors pour* $p > 0$ *on a*

$$\Psi(v_+) \leq \frac{p+4}{2(1-\theta)} \left[\sqrt{2\tau} + \sqrt{n\theta}\right]^2 \tag{3.29}$$

et

$$\Psi(v_+) \leq \frac{\tau(1+\theta) + n\theta + 2\theta\sqrt{2\tau n}}{1-\theta} \tag{3.30}$$

Preuve Montrons (3.29), Comme $\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \geq 1$ et $\varrho\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right) \geq 1$, nous avons $\frac{\varrho\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}} \geq 1$. Utilsant le (théorème 2.6) avec $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$, les inégalités (3.25), (3.27), et $\Psi(v) \leq \tau$, on a

$$\begin{aligned}
\Psi(v_+) &\leq n\psi\left(\frac{\varrho\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}}\right) \leq \frac{n(p+4)}{2}\left[\frac{\varrho\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}} - 1\right]^2 \\
&= \frac{n}{2}\left(\frac{p+4}{1-\theta}\right)\left[\varrho\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right) - \sqrt{1-\theta}\right]^2 \\
&\leq \frac{n}{2}\left(\frac{p+4}{1-\theta}\right)\left[\sqrt{\frac{2\Psi(v)}{n}} + 1 - \sqrt{1-\theta}\right]^2 \\
&= \frac{n}{2}\left(\frac{p+4}{1-\theta}\right)\left[\sqrt{\frac{2\Psi(v)}{n}} + \frac{\theta}{1+\sqrt{1-\theta}}\right]^2 \\
&\leq \frac{p+4}{2(1-\theta)}\left[\sqrt{2\tau} + n\theta\right]^2
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité decoule de $\frac{\theta}{1+\sqrt{1-\theta}} = 1 - \sqrt{1-\theta} \leq \theta$.

Pour montrer (60), utilisant le théorème (50) avec $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$, $\Psi(v) \leq \tau$, inégalité (57) et lemme (67) nous obtenon autre borne de $\Psi(v)$ comme suit

$$
\begin{aligned}
\Psi(v_+) &\leq n\psi\left(\frac{\varrho\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}}\right) \leq n\left[\psi\left(\varrho\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right)\right) + \frac{\theta}{1-\theta}\varrho^2\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right)\right] \\
&= \Psi(v) + \frac{n\theta}{1-\theta}\varrho^2\left(\frac{\Psi(v)}{n}\right) \leq \Psi(v) + \frac{n\theta}{1-\theta}\left[\sqrt{\frac{2\Psi(v)}{n}} + 1\right]^2 \\
&\leq \tau + \frac{n\theta}{1-\theta}\left(\sqrt{\frac{2\tau}{n}} + 1\right)^2 = \frac{\tau + \tau\theta + n\theta + 2\theta\sqrt{2\tau n}}{1-\theta}
\end{aligned}
$$

D'ou le résultat. ■

Notation 3.1 *On note par*

$$\bar{\Psi}_0 = \frac{\tau(1+\theta) + n\theta + 2\theta\sqrt{2\tau n}}{1-\theta} \tag{3.31}$$

et

$$\tilde{\Psi}_0 = \frac{p+4}{2(1-\theta)}\left[\sqrt{2\tau} + \sqrt{n\theta}\right]^2 \tag{3.32}$$

On désigne par $\bar{\Psi}_0$ la borne supérieure de $\Psi(v_+)$, pour les méthodes à long-pas (respectivement) $\tilde{\Psi}_0$ dans le cas des méthodes à court-pas, durant la procédure de Newton dans l'algorithme.

Remarque 3.2 *Pour les méthodes à long-pas avec $\tau = \mathcal{O}(n)$, $\theta = \Theta(1)$, on a $\bar{\Psi}_0 = \mathcal{O}(n)$, et dans le cas des méthodes à court-pas,avec $\tau = \mathcal{O}(1)$, $\theta = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, on a $\tilde{\Psi}_0 = \mathcal{O}(1)$.*

3.2 Analyse de la complexité

Lemme 3.8 *Soit $\delta(v)$ défini dans* (3.11)*. Alors, on a*

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{\Psi(v)}{2}}, \ v \in \mathbb{R}^n_{++}$$

En utilisant la seconde, inégalité (3.24) *du* (*lemme* 3.4)*on a*

$$\begin{aligned}\Psi(v) &= \sum_{i=1}^{n}\psi(v_i) \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\psi'(v_i)\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\|\nabla\Psi\right\|^2 = 2\delta^2(v).\end{aligned}$$

Alors on a bien que

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{\Psi(v)}{2}}, v \in \mathbb{R}^n_{++}.$$

Ce qui termine la preuve.

► Tout au long de cette section, nous supposons que $\tau \geq 1$. En utilisant le (lemme 3.8) et l'hypothèse que $\Psi(v) \geq \tau$ on a

$$\delta(v) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lemme 3.9 *Soit $\bar{\alpha}$, la valeur définie dans le lemme* 2.6 *vérifiant $\bar{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))}$. Alors si $\Psi(t) \geq \tau \geq 1$, on a*

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{2 + (p+2)(4\delta+1)^{\frac{p+2}{p+1}}}.$$

Preuve En utilisant les lemmes 2.2, 2.10 inégalité (3.28) et la définition de $\psi''(t)$, on a $\bar{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))}$ et pour $\rho(2\delta) = t \in (0,1]$, cela implique que

$$\psi''(\rho(2\delta)) \geq 2 + \frac{p+1}{\left[\rho(2\delta)\right]^{p+2}} + \frac{1}{\left[\rho(2\delta)\right]^2},$$

on a

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))} \geq \frac{1}{2 + (p+1)(4\delta+1)^{\frac{p+2}{p+1}} + (4\delta+1)^{\frac{2}{p+1}}}.$$

Puisque $(4\delta+1)^{\frac{2}{p+1}} < (4\delta+1)^{\frac{p+2}{p+1}}$ pour $p \in]0, +\infty[$ ce qui implique que

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{2 + (p+2)(4\delta+1)^{\frac{p+2}{p+1}}}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

On pose

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2 + (p+2)\,(4\delta + 1)^{\frac{p+2}{p+1}}}. \tag{3.33}$$

$\tilde{\alpha}$ est le pas de déplacement et $\bar{\alpha} \geq \tilde{\alpha}$

En combinant les deux résultats, du lemme 2.9 et le pas de déplacement, défini dans 3.33 on obtient le lemme suivant :

Lemme 3.10 *On considère $\tilde{\alpha}$ le pas de déplacement, défini dans* 3.33, *et* $\delta \geq 1$. *Alors :*

$$f\,(\tilde{\alpha}) \leq -\frac{\delta^2}{2 + (p+2)\,(4\delta + 1)^{\frac{p+2}{p+1}}}$$

Maintenant, nous exprimons la decroissance d'une itération interne en terme $\Psi\,(v)$ ont utilisant lemme 3.8

Lemme 3.11 *Supposons $\delta \geq 1$ On a*

$$f\,(\tilde{\alpha}) \leq -\frac{\Psi^{\frac{p}{2(p+1)}}}{128\,(p+2)}$$

Preuve Utilisant lemme 3.8, l'inégalitè $\sqrt{2}\delta\,(v) \geq 1$, et on substitution la valeur de $\tilde{\alpha}$, on obtient

$$\begin{aligned} f\,(\tilde{\alpha}) &\leq -\frac{\delta^2}{2 + (p+2)\,(4\delta + 1)^{\frac{p+2}{p+1}}} \leq -\frac{\delta^2}{3\,(p+2)\,\left(4\delta + \sqrt{2}\delta\right)^{\frac{p+2}{p+1}}} \\ &\leq -\frac{\delta^2}{90\,(p+2)\,\delta^{\frac{p+2}{p+1}}} \leq -\frac{\delta^{\frac{p}{p+1}}}{90\,(p+2)} \leq -\frac{\Psi^{\frac{p}{2(p+1)}}}{90\sqrt{2}\,(p+2)} \\ &\leq -\frac{\Psi^{\frac{p}{2(p+1)}}}{128\,(p+2)},\ \ 90\sqrt{2} \backsimeq 128. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Après la mise à jour de μ à $(1-\theta)\,\mu$, on a

$$\Psi(v_+) \leq \frac{\tau\,(1+\theta) + n\theta + 2\theta\sqrt{2\tau n}}{1-\theta} = \bar{\Psi}(v_+)$$

D'après la définition de $f(\alpha)$ on a

$$f(\tilde{\alpha}) = \Psi(v_+) - \Psi(v) \leq -\frac{\Psi^{\frac{p}{2(p+1)}}}{128(p+2)} \text{ pour tout } p > 0$$

Donc on comparant avec le lemme 2.12

$$\eta = \frac{1}{128(p+2)} \text{ et } \gamma = 1 - \frac{p}{2(p+1)} = \frac{p+2}{2(p+1)}$$

Soientt K_1 le nombre total d'itérations internes dans l'itération externe pour les algorithmes à petit pas, et K_2 le nombre total d'itérations internes dans l'itération externe pour les algorithmes à grand pas.

Alors pour $p > 0$, en utilisant le Lemme 3.11, on a

$$\begin{aligned} K_1 &\leq \frac{\left(\bar{\Psi}_0\right)^{\gamma}}{\eta\gamma} = 156p\bar{\Psi}_0^{\frac{p+2}{2(p+1)}} \\ K_2 &\leq \frac{\left(\tilde{\Psi}_0\right)^{\gamma}}{\eta\gamma} = 156p\tilde{\Psi}_0^{\frac{p+2}{2(p+1)}} \end{aligned}$$

Soit $\bar{\Psi}_0$ définit 2.13 alors, le nombre total d'itérations pour avoir une solution approchée avec $n\mu < \varepsilon$ est majoré par

$$156p\bar{\Psi}_0^{\frac{p+2}{2(p+1)}} \frac{1}{\theta} \log \frac{n}{\varepsilon} \tag{3.34}$$

Pour les algorithmes à grand pas, on considère $\tau = \mathcal{O}(n)$, $\theta = \Theta(1)$, par conséquent,

$$\Psi_0 \leq \bar{\Psi}_0 = \mathcal{O}(n)$$

et on a

$$\mathcal{O}\left((p+1)\, n^{\frac{p+2}{2(p+1)}} \log \frac{n}{\epsilon}\right) \text{ itérations.}$$

Si on prend $p = \frac{\log n}{2} - 1$, la borne d'itérations devienne

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{n} \log(n) \log \frac{n}{\epsilon}\right)$$

qui est la meilleure complexité pour les algorithmes à grand pas jusqu'à maintenant.

Pour les algorithmes à petit pas, on considère $\tau = \mathcal{O}(1)$, $\theta = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. En utilisant la borne supérieure $\tilde{\Psi}_0$, nous obtenons un majorant de nombre total d'itérations suivant :

$$156p\tilde{\Psi}_0^{\frac{p+2}{2(p+1)}}\frac{1}{\theta}\log\frac{n}{\varepsilon}, \tag{3.35}$$

par conséquent,

$$\Psi_0 \leq \tilde{\Psi}_0 = \mathcal{O}(p),$$

et la complexité algorithmique devienne

$$\mathcal{O}\left(p\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon}\right) \text{ itérations.}$$

Si on prend $p = 1$, alors la borne d'itérations devienne

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon}\right)$$

qui est la meilleure complexité pour les algorithmes à pas court.

Nous résumons dans le tableau ci-après décrivant quelques résultats de la complexité algorithmique pour l'optimisation linéaire [19]

Fonction noyau ψ_j	Long-pas	Court-pas	Réf
$\frac{t^2-1}{2} - \frac{e^{b(1-t)}-1}{b},\ b>0$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{n}\log n \log \frac{n}{\epsilon}\right),\ b=\log(n)$	$--$	[13]
$\frac{t^2-1}{2} + \frac{6}{\pi}\tan\left(\pi\frac{1-t}{4t+2}\right)$	$\mathcal{O}\left(n^{\frac{3}{4}}\log \frac{n}{\epsilon}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{n}\log \frac{n}{\epsilon}\right)$	[18]
$\frac{t^2-1}{2} - \log t + \frac{1}{8}\tan^2\left(\frac{1-t}{4t+2}\pi\right)$	$\mathcal{O}\left(n^{\frac{2}{3}}\log \frac{n}{\epsilon}\right)$	$--$	[24]
$\frac{t^2-1}{2} - \int_1^t e^{3\left(\left(\tan\frac{\pi}{2x+2}\right)-1\right)}d\xi$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{n}\left(\log n\right)^2\log \frac{n}{\epsilon}\right)$	$--$	[23]
$\frac{t^2-1}{2} - \log t + \lambda\tan^2\left(\frac{\pi(1-t)}{3t+2}\right)$, $0<\lambda\leq\frac{8}{25}$	$\mathcal{O}\left(n^{\frac{2}{3}}\log \frac{n}{\epsilon}\right)$	$--$	[16]
$t^2-2t+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi t}{t+1}\right)}$	$\mathcal{O}\left(n^{\frac{3}{4}}\log \frac{n}{\epsilon}\right)$	$--$	[19]
$\frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^2}{2t} + \frac{1}{8}\tan^2\left(\frac{1-t}{4t+2}\pi\right)$	$\mathcal{O}\left(n^{\frac{2}{3}}\log \frac{n}{\epsilon}\right)$	$--$	[20]
$\frac{t^2-1}{2} + \frac{4}{\pi p}\left[\tan^p\left(\frac{\pi}{2t+2}\right)-1\right],\ p\geq 2$	$\mathcal{O}\left(pn^{\frac{p+2}{2(p+1)}}\log \frac{n}{\epsilon}\right)$	$\mathcal{O}\left(p^2\sqrt{n}\log \frac{n}{\epsilon}\right)$	[14]
$t^2-1-\log(t)+\frac{t^{-p}-1}{p},\ p>0$	$\mathcal{O}\left(pn^{\frac{p+1}{2p}}\log \frac{n}{\epsilon}\right)$	$\mathcal{O}\left(p\sqrt{n}\log \frac{n}{\epsilon}\right)$	[15]

Conclusion

Notre objectif dans ce travail est de proposer une nouvelle fonction noyau paramètrée (qualifiée) pour améliorer la complexité algorithmique de l'algorithme de points intérieurs : Sous un choix spécial du paramètre p, telque p dépend de n, c'est la valeur minimisant la complexité de l'itération. En particulier, en prenant $p = \left(\frac{\log n}{2} - 1\right)$, et on obtient la meilleure complexité connue jusqu'à présent pour ces algorithmes à grand pas qui est de l'ordre $\mathcal{O}\left(\sqrt{n}\,(\log n)\log\frac{n}{\epsilon}\right)$. Pour les méthodes à court-pas, nous obtenons la meilleure borne de complexité, à savoir $\mathcal{O}\left(\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon}\right)$, en prenant simplement $p = \mathcal{O}(1)$.

Bibliographie

[1] R. T. Rockafellar, Convex analysis, published by Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540, (1988).

[2] . Roos, T. Terlaki, J. Vial, Optimization Theory and Algorithm for Linear Programming Optimization, Princton University, (2001).

[3] Wang, G.Q. Bai, Y.Q., Roos, C., Primal-dual interior-point algorithms for semi definite optimization based on a simple kernel function, Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, 4 (4) (2005), 409-433.

[4] M.Bierlaire, Introduction l'optimisation différentiable, presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR), (2005).

[5] Menniche,L.(2007) Etude théorique et numérique d'une classe des méthodes de points intèrieur pour la programmation linèaire, thèse de doctorat,Université Ferhat Abbas, Setif-1,Algérie.

[6] N. K. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, in : Proceedings of the 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 4, 373–395, (1984).\

[7] Y. Q. Bai, C. Roos, A primal-dual interior point method based on a new kernel function with linear growth rate, in : Proceedings of the 9th Australian Optimization Day, Perth, Australia, (2002).

[8] J. Peng, C. Roos, T. Terlaky. Self-regularity. A new paradigm for Primal-Dual Interior Point Algorithm. Princeton University Press. Princeton, (2002).

[9] C. Roos, T. Terlaky, J. Ph. Vial, Theory and algorithms for linear optimization, An Interior-Point Approach, John Wiley & Sons, Chichester, UK, (1997).

[10] Y. Ye, Interior point algorithms. Theory and Analysis, John-Wiley. Sons, Chichester, UK, (1997).

[11] Y. Q. Bai, M. El Ghami, C. Roos, A comparative study of kernel functions for primaldual interior point algorithms in linear optimization, SIAM Journal on Optimization, $15, 101-128, (2004)$.

[12] Y. Q. Bai, C. Roos, A primal-dual interior point method based on a new kernel function with linear growth rate, in : Proceedings of the 9th Australian Optimization Day, Perth, Australia, (2002).

[13] Y. Q. Bai, M. El Ghami and C. Roos, A new efficient large-update primal-dual interior-point method based on a finite barrier, SIAM J. Optim. 13 (2003) 766-782 (electronic).

[14] Bouafia. M, Benterki, D., Yassine, A. : An efficient primal-dual interior point method for linear programming problems based on a new kernel function with a trigonometric barrier term. J. Optim. Theory Appl. **170**, 528–545 (2016)

[15] B. Bounibane, E.a. Djeffal. (2019). 'Kernel function-based interior-point algorithms for linear optimisation', Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, Vol. **9**, No. 2, pp 158-177

[16] X. Z. Cai, G. Q. Wang, M. El Ghami, and Y. J. Yue, Complexity analysis of primaldual interior-point methods for linear optimization based on a new parametric kernel function with a trigonometric barrier term, Abstract and Applied Analysis, 11 pages, Art. ID 710158, (2014)

[17] M. El Ghami. New primal-dual interior-point methods based on kernel functions. Phd thesis. Delft University, Netherland, (2005)

[18] M. El Ghami, Z.A. Guennoun, S. Bouali, T. Steihaug, , Interior point methods for linear optimization based on a kernel function with a trigonometric barrier term. J. Comput. Appl. Math. 236, 3613–3623 (2012)

[19] B. Kheirfam, M. Moslem. :Apolynomial-time algorithme for linear optimization based on a new kernel function with trigonometric barrier term. Yujor 25 (2), 233-250 (2015)

[20] Xin, Li , Mingwang Zhang, Interior-point algorithm for linear optimization based on a new trigonometric kernel function, Operations Research Letters, 43(5), 471–475, (2015).

[21] J. Peng, C. Roos, T. Terlaky. Self-regularity. A new paradigm for Primal-Dual Interior Point Algorithm. Princeton University Press. Princeton, (2002).

[22] J. Peng, C. Roos, T. Terlaky. Self-regular functions and new search directions for linear and semide-finite optimization. Mathematical Programming, 93 : 129-171, (2002).

[23] M. R. Peyghami, S. Fathi Hafshejani, Complexity analysis of an interior-point algorithm for linear optimization based on a new proximity function, Numerical Algorithms, 67, 33–48, (2014).

[24] M. R. Peyghami, S. Fathi Hafshejani, L. Shirvani, Complexity of interior-point methods for linear optimization based on a new trigonometric kernel function, Journal of Computational and Applied Mathematics, 255, 74–85, (2014).