



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère De l'Enseignement Supérieur et De la Recherche Scientifique

Université Abbès Laghrou-Khenchela

Faculté des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

FILIERE : MATHEMATIQUES

OPTION : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Thème

*L'existence et l'unicité de la solution d'une
équation integro-différentielle d'ordre
fractionnaire*

Présenté Par :

Sekkiou Abbes et Nasri Sabah

Devant le jury

-Président : *Boussada* MAA *Université Abbès Laghrou -Khenchela*
Mourad

-Examineur : *Nasrallah Ilhem* MAA *Université Abbès Laghrou -Khenchela*

-Encadreur : *Bragdi Ahmed* MCB *Université Abbès Laghrou -Khenchela*

Promotion 2022- 2023

Dédicaces

NOUS DÉDIONS CE TRAVAIL À

NOS PARENTS

NOS PROFESSEURS

NOS ENFANTS

MON MARI

MA FEMME

NOS FRÈRES ET NOS SŒURS

NOS CHÈRES AMIES

Remerciements

AVANT TOUT NOUS REMERCIONS ALLAH LE TOUT PUISSANT DE NOUS AVOIR DONNÉ LA VOLONTÉ D'ACCOMPLIR ET D'ACHEVER CE MÉMOIRE.

TOUT D'ABORD NOUS TENONS À REMERCIER LE DR. BRAGDI AHMED POUR LA DISPONIBILITÉ LA CONFIANCE L'ENCADREMENT TOUT AU LONG LA PÉRIODE DE RECHERCHE.

NOUS TENONS ÉGALEMENT À REMERCIER MESSIEURS LES MEMBRES DE JURY NOS PROFESSEURS BOUSSADA MOURAD ET NASRALLAH ILHEM POUR L'HONNEUR QU'ILS NOUS ONT FAIT EN ACCEPTANT DE JUGER NOTRE TRAVAIL

NOS REMERCIEMENTS S'ADRESSENT ÉGALEMENT À TOUS NOS PROFESSEURS POUR LEURS GÉNÉROSITÉS ET LA GRANDE PATIENCE DONT ILS ONT SU FAIRE PREUVE MALGRÉ LEURS CHARGES ACADÉMIQUES ET PROFESSIONNELLES.

NOS PROFONDS REMERCIEMENTS À TOUTE PERSONNE AYANT CONTRIBUÉ DE PRÈS OU DE LOIN À LA RÉALISATION DE CE TRAVAIL.

تظهر المعادلات الكسرية بشكل تلقائي في مختلف الميادين العلمية مثل : الفيزياء, الكيمياء الكهربائية, الطب, .. الخ حيث يساعد هذا النوع من المعادلات في نمذجة العديد من الظواهر الطبيعية والفيزيائية مما دفع بالباحثين الى دراسة جوانبها الكمية والنوعية.

تهدف هذه الرسالة الى دراسة وجود ووحدانية الحل لمعادلة تفا-تكاملية كسرية مرفقة بشروط محلية من خلال دراسة مسالة من هذه المعادلات في فضاءات بناخ معتمدين في ذلك على نظريات النقطة الصامدة.

بداية تطرقنا الى مقدمة قصيرة وبعض التمهيديات واهم الخواص و المبرهنات الاساسية والمفاهيم المعتمدة في فضاءات بناخ مع التركيز على نظريات النقطة الصامدة لنهتم بعد ذلك بمختلف الحسابات الكسرية والتكاملات الكسرية والمشتقات الكسرية وبعض الخواص معتمدين في ذلك على بعض الامثلة البسيطة للتوضيح .

بعد ذلك عالجنا مسالة اثبتنا فيها وجود و وحدانية الحل لمعادلة تفا-تكاملية ذات رتبة كسرية خاضعة لشروط محلية وذلك باستعمال تقنيات النقطة الصامدة ثم انهينا الدراسة بمثال تطبيقي لنبرر صحتها.

الكلمات و الجمل المفتاحية :

معادلات تفاضلية ذات رتب ناطقة، اشتقاقية ذات رتب ناطقة، تكاملات ذات رتب ناطقة، النقطة الصامدة، الحساب الكسري، شروط محلية، فضاء بناخ.

Résumé

Les équations fractionnaires apparaissent automatiquement dans divers domaines scientifiques tels que la physique, la chimie électrique, la médecine, etc. Ce type d'équations aide à modéliser de nombreux phénomènes naturels et physiques, ce qui a incité les chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

L'objectif de cette thèse est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégral-différentielle fractionnaire avec des conditions locales en étudiant un problème dans des espaces de Banach et en se basant sur les différents théorèmes du point fixe.

Nous avons d'abord présenté une brève introduction et quelques préliminaires, ainsi que les principales propriétés et preuves de base, en mettant l'accent sur les concepts utilisés dans les espaces de Banach et les théorèmes du point fixe. Ensuite, nous nous sommes penchés sur les différents calculs fractionnaires, les intégrales et les dérivées fractionnaires, en utilisant quelques exemples simples pour illustrer ces concepts.

Ensuite, nous avons abordé un problème dans lequel nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégral-différentielle d'ordre fractionnaire, soumise à des conditions locales, en utilisant les techniques du point fixe. Enfin, nous avons conclu l'étude par un exemple d'application pour justifier sa validité.

Phrases ET mots clés:

Équations différentielles fractionnaires, dérivées fractionnaires, intégrales fractionnaires, Point fixe, calcul fractionnaire, conditions locales, espace de Banach.

Abstract

Fractional equations automatically appear in various scientific fields such as physics, electrical chemistry, medicine, etc. This type of equation helps model many natural and physical phenomena, which has prompted researchers to study their quantitative and qualitative aspects.

The objective of this thesis is to study the existence and uniqueness of the solution to a fractional integro-differential equation with local conditions by investigating a problem in Banach spaces and relying on different fixed-point theorems.

We first provided a brief introduction and some preliminaries, along with the main properties and basic proofs, emphasizing the concepts used in Banach spaces and fixed-point theorems. Then, we delved into various fractional calculations, integrals, and fractional derivatives, using some simple examples to illustrate these concepts.

Next, we addressed a problem in which we proved the existence and uniqueness of the solution to a fractional integro-differential equation of fractional order, subject to local conditions, using fixed-point techniques. Finally, we concluded the study with an application example to justify its validity.

Key words and phrases:

Fractional differential equations, fractional derivation, the fractional order integral, fixed point, fractional calculus, local condition, Banach space.

Table des matières

Introduction	2
Chapitre 1 Rappels et notions fondamentales	4
1.1 Définition de quelques espaces fonctionnels	5
1.1.1 Espaces complet	5
1.1.2 Espaces de Banach	5
1.1.3 Espaces des fonctions intégrales	5
1.1.4 Espaces des fonctions absolument continues	6
1.2 Fonctions spéciales	7
1.2.1 Fonction Gamma	7
1.2.2 Fonction Bêta	9
1.3 Théorème de point fixe	10
1.3.1 Théorème du point fixe de Banach	10
1.3.2 Théorème du point fixe de type Schauder	11
1.3.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii	11
1.3.4 Théorème de Krasnoselskii d'expansion et de compression d'un cône	13
1.3.5 Théorème d'Ascoli-Arzelà	14
Chapitre 2 Notion de calcul fractionnaire	16
2.1 Intégrales et dérivées fractionnaires	17
2.1.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	17
2.1.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	20
2.1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	23
Chapitre 3 Existence et unicité de la solution	30
3.1 Existence de la solution	32
3.2 Unicité de la solution	38
3.3 Exemples	40
Conclusion perspective	42
Bibliographie	43

Introduction :

Parmi les domaines les plus importants de l'analyse mathématique qui traitent de la recherche et des applications du calcul avec des ordres non entiers dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} se trouve le domaine du calcul fractionnaire.

L'arithmétique fractionnaire est un sujet ancien, dont les origines remontent à la fin du 17^e siècle, lorsque Newton –Leibniz ont établi les bases du calcul différentielle et mettre le fameux symbole pour désigner la dérivée nième, puis il a commencé à s'interroger sur la dérivée dans le cas si $n = \frac{1}{2}$.

Les mathématiciens se sont intéressés au développement de ce domaine comme:

Lacroix en 1819 dans son livre sur la dérivée d'ordre fractionnaire, après cela, le mathématicien Abel est venu en 1823 avec la première application du calcul fractionnaire et de l'intégration dans les problèmes physiques.

Et en 1832 le mathématicien Liouville a commencé des recherches sur le sujet et a publié une série de recherches ou il a identifié le premier opérateur de l'intégration fractionnaire, après cela le sujet mathématicien a été développe par Riemann, et ce qui l'on appelle aujourd'hui la définition de Riemann-Liouville a émergé (opérateur fractionnaire de R-L).

Par la suite, un grand intérêt et un développement dans ce domaine ont suivi.

Présentation de la thèse:

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude d'un échantillon de problèmes d'équation intégro-différentielle d'ordre fractionnaire soumis à des conditions locales, elle est organisée en trois chapitres:

Dans le premier chapitre intitulé "préliminaire" nous présentons quelques notions préliminaires et les définitions nécessaires et les fonctions spéciales pour la bonne compréhension de ce manuscrit.

Ce chapitre est partagé en trois sections. La première section présente une base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour la développement des chapitres qui suivent.

Dans la deuxième section nous traitons des systèmes impulsifs. Enfin nous rappelons les différents théorèmes du point fixe utilisés dans ce travail.

L'objectif du deuxième chapitre est de définir des notions fondamentales sur les dérivées et les intégrales fractionnaires, ce chapitre est partagé en deux section: la première section présente les intégrales et les dérivées fractionnaires au sens de R-L avec les propriétés, et des exemples illustratifs. Et la deuxième section présente les dérivées fractionnaires au sens du Caputo avec leurs propriétés et des exemples illustratifs.

L'objectif du troisième chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution pour le problème intégral-différentielle d'ordre fractionnaires soumis à une condition local.

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta u)(t) = f(t, u(t), \varphi u(t), \psi u(t)) & (0 < t < 1) \\ u(1) = u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} .$$

Ou $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta \leq 1$, $f : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Pour démontrons les résultats d'existence et d'unicité, nous avons transformé le problème posé en un problème du point fixe puis nous avons appliqué les théorèmes du point fixe de Krasnoselskii et de Banach.

Nous avons terminé l'article avec quelques exemples numériques illustons les résultats obtenus.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre on a donné les espaces fonctionnels adéquats pour définir les intégrales et dérivées fractionnaires ainsi que les fonctions gamma et bêta qui jouent un rôle important dans la définition de ces concepts et on a aussi donné les différents théorèmes du point fixe, les théorèmes bien connu de Krasnoselskii, le principe de contraction de Banach, le théorème de Schauder, et théorème d'Ascoli – Arzela.

1.1 Définition de quelques espaces fonctionnels

On rappelle quelques définitions d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires.

1.1.1 Espace complet

On dit qu'un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de X est convergente dans X .

1.1.2 Espace de Banach

En mathématiques, plus particulièrement en analyse fonctionnelle, on appelle espace de Banach un espace vectoriel normé sur un corps K (en général $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), complet pour la distance issue de sa norme.

1.1.3 Espaces des fonctions intégrales

Définition 1.1

Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$) un intervalle fini ou infini de \mathbb{R} et $1 \leq p < \infty$. L'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions réelles f , définies et mesurable sur Ω telles que $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$.

On note alors $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Dans le cas où p est infini, on note par $L^{+\infty}(\Omega)$ l'espace des classe de fonctions réelles f , définies et mesurable sur Ω telles que $\inf \{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p. sur } \Omega\} < \infty$ on pose $\|f\|_{\infty} = \inf \{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p. sur } \Omega\}$.

Muni de la norme $\|f\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

1.1.4 Espaces des fonctions absolument continues

On désigne par $C^n(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$ l'espace des fonctions qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à n continues sur Ω .

Muni de la norme :
$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^n \max_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|, n \in \mathbb{N},$$

cet espace est un espace de Banach.

Définition 1.2

On note par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur un intervalle $[a,b]$ constitué des fonctions qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables :

$$f \in AC([a,b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b]), \text{ telle que } f = c + \int_a^x \varphi(t) dt.$$

Définition 1.3

On note par $AC^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$. L'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f à valeurs dans \mathbb{R} qui ont des dérivées continues sur $[a,b]$ jusque à l'ordre $(n-1)$ et que $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$. C'est-à-dire :
$$AC^n([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} : f^{(k)} \in C([a,b]), k = 0 \dots n-1, f^{(n-1)} \in AC([a,b]) \right\}.$$

Remarque 1.1

En particulier $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$. Une caractérisation de cet espace est donnée par le lemme suivant.

Lemme 1.1

Une fonction $f \in AC^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si elle est représentée sous la forme:

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k .$$

1.2 Fonctions spéciales

Dans cette partie nous introduisons les fonctions Gamma et Bêta qui seront utilisées ultérieurement. Ces fonctions jouent un rôle fondamental voire très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses applications.

1.2.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(\alpha)$ qui prolonge naturellement le factoriel aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexes à parties réelles positives).

Définition 1.4

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$. La fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt , \quad (1.1)$$

avec $\Gamma(1) = 1$

et $\Gamma(0^+) = +\infty$.

Propriétés 1.1

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha), \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (1.2)$$

Qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^\alpha dt = \left[-e^{-t} t^\alpha \right]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

Il convient de noter que la propriété (1.2) nous permet d'établir que

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}.$$

En effet, on a $\Gamma(1) = 1$ et donc: $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$$

$$\dots = \dots = \dots$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \quad .$$

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^\alpha}{(\alpha+1) \dots (\alpha+n)} \quad . \quad \text{Re}(\alpha) > 0$$

1.2.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction fournit un outil fondamental quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.5

La fonction Bêta ou intégrale eulérienne de première espèce est définie pour α et β par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt.$$

$$\operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par l'équation suivante :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

$$\operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

Propriétés 1.2

1. $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$. $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ (Bêta est symétrique)
2. $\alpha B(\alpha, \beta + 1) = \beta B(\alpha + 1, \beta)$
3. $B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta)$
4. $B(1, \beta) = \frac{1}{\beta}$
5. $\frac{\partial}{\partial x} B(\alpha, \beta) = B(\alpha, \beta) \left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma'(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \right)$.

1.3 Théorèmes du point fixe

Les théorèmes du point fixe sont des résultats mathématiques importants dans le domaine de l'analyse fonctionnelle et de la théorie des points fixes. Ils concernent l'existence et la localisation de points fixes pour certaines classes de fonctions. Dans ce chapitre nous en donnons les théorèmes les plus importants.

Définition 1.6 (Point fixe)

Soit T une application d'un ensemble X dans lui-même. On appelle point fixe de T tout point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.

1.3.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème connu sous le nom de l'application contractante se trouve à la base de la théorie du point fixe. Cette théorie garantit l'existence d'un point fixe unique pour toute application contractante d'espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 1.1 (Principe de contraction de Banach).

Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $T : M \rightarrow M$ une application contractante i.e qu'il existe $0 < k < 1$ telle que $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) : \forall x, y \in M$ alors T admet un unique point fixe $x^* \in M$, de plus pour tout $x \in M$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x^*$$

et

$$d(T^n(x), x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x)).$$

Preuve:

La preuve est bien connue. Elle établit que toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie inductivement par $x_{n+1} = T(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers $x^* = T(x^*)$.

En ce qui concerne l'unicité en effet, nous obtenons la contradiction suivante en supposant l'existence de deux points fixes distincts x_1^* et x_2^* pour une contraction T ,

$$d(x_1^*, x_2^*) = d(T(x_1^*), T(x_2^*)) \leq k d(x_1^*, x_2^*) < d(x_1^*, x_2^*),$$

C'est-à-dire, $k \geq 1$ d'où la contradiction.

1.3.2 Théorème du point fixe de type Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est aussi l'un des résultats les plus célèbres de la théorie du point fixe et il affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.2 (*Théorème du point fixe de Schauder*).

Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe. Dans un espace de Banach E et supposons $T:K \rightarrow K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Théorème 1.3 (*Théorème du point fixe de Schauder généralisé*).

Soit F un ensemble fermé convexe sur un espace de Banach X et soit $T:F \rightarrow F$ une application continue telle que $T(F)$ soit un sous-ensemble relativement compact de F . Alors T admet un point fixe.

1.3.3 Théorèmes du point fixe de Krasnoselskii

En 1955 Krasnoselskii combina le théorème de point fixe géométrique de Banach et le théorème de point fixe topologique de Schauder en un théorème hybride qui affirme que dans un convexe compact. Toute application qui s'écrit sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est une contraction et l'autre est compacte admet au moins un point fixe. Depuis et jusqu'à l'heure actuelle ce théorème hybride qui porte d'ailleurs son nom est devenu extrêmement utile et il a été l'objet de plusieurs articles de recherche et possède de très nombreuses applications intéressantes en analyse non linéaire.

Théorème 1.4 (Théorème du point fixe de Krasnoselskii).

Soit M un convexe fermé et non vide d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$.

Supposons que A et B sont deux applications de M dans X telles que :

i) $Ax + By \in M. \forall x, y \in M.$

ii) A Est continue et AM est contenu dans un ensemble compact.

iii) B Est une contraction de constante $\alpha < 1$,

alors il existe $x \in M$ avec $Ax + Bx = x$.

Preuve:

Soit y fixé dans M . Comme B est une contraction. L'équation: $Ax + Bx = x$ admet une solution unique x dans M . On définit l'application :

$$L : M \rightarrow M$$

$$Ly = x$$

$$Ly = BLy + Ay \quad (y \in M)$$

Il est clair que $LM \subset M$. On va montrer que L est compact et continue et d'après le théorème de Schauder, on pourra conclure qu'il existe $x \in M$ tel que

$$Ly = y, \text{ D'où } Ay + By = y.$$

Soit y_n une suite de point de M . alors d'après la définition de L :

$$Ly_n = BLy_n + Ay_n$$

et

$$Ly - Ly_n = BLy - BLy_n + Ay - Ay_n,$$

$$\text{Alors} \quad \|Ly - Ly_n\| \leq \|BLy - BLy_n\| + \|Ay - Ay_n\|,$$

Et puisque B est une contraction on a :

$$\begin{aligned} \|Ly - Ly_n\| &\leq k \|Ly - Ly_n\| + \|Ay - Ay_n\| \\ &\leq \frac{1}{1-k} \|Ay - Ay_n\|. \end{aligned}$$

D'où la continuité de L . Reste à montrer que LM est relativement compact . en effet comme AM est relativement compact, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (1-k)\varepsilon$ réseau

By_1, By_2, \dots, By_n . C'est -à -dire les boules $\mathbf{B}(By_k, (1-k)\varepsilon)$ ($1 \leq k \leq n$) telles que :

$$BM \subset \bigcup_{k=1}^n \mathbf{B}(By_k, (1-k)\varepsilon).$$

Alors de $\|Ly - Ly_n\| \leq \frac{1}{1-k} \|Ay - Ay_n\|$, on en déduit que Ly_1, Ly_2, \dots, Ly_n est un réseau de LM .ce qui achève la démonstration.

Notons que si $A=0$ le théorème se résume au théorème de Banach si $B=0$ alors le théorème n'est autre que le théorème de Schauder.

1.3.4 Théorème de Krasnoselskii d'expansion et de compression d'un cône

Notons que l'une des théorèmes le plus utilisé lorsqu'il s'agit de la recherche du point fixe positif est le théorème Guo-Krasnoselskii d'expansion et de compression d'un cône.

Ce théorème généralise celui des valeurs intermédiaires connu sur \mathbb{R} à un espace de Banach quelconque, une généralisation qui assure l'existence d'un point fixe positif bien sur si on prend un cône positif pour un opérateur

complètement continue sous certaines conditions imposées uniquement sur la frontière de certains ouverts des cônes K .

Théorème 1.5 (Théorème de Krasnoselskii d'expansion et de compression d'un cône)

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés d'un espace de Banach E tels que $0 \in \Omega_1$. $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Et K un convexe de E .

$$A: K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow K,$$

un opérateur complètement continu, tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

- i) $\|Au\| \leq \|u\|$. $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Au\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.
- ii) $\|Au\| > \|u\|$. $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Au\| < \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors l'opérateur A admet au moins un point fixe dans $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

Définition 1.7 (Opérateur complètement continu)

Soient E un espace de Banach et Ω une partie de E . On dit que l'opérateur $T: \Omega \rightarrow E$ est complètement continu s'il est continu et compact i.e. Pour toute partie bornée B de Ω . $T(B)$ est relativement compact dans E .

1.3.5 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications entre autres la compacité de certains opérateurs. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace quelconque.

Théorème 1.6 (Ascoli-Arzelà)

Soit $X = C[a,b]$ muni de la norme ; $\|u\| = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)|$, avec $-\infty < a < b < +\infty$ Si M est un sous ensemble de X tel que :

i) M Est uniformément bornée, i.e $\exists r > 0$, $\forall u \in M : \|u\| \leq r$.

ii) M est équicontinu, i.e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall u \in M$, $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$:

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \varepsilon .$$

Alors M est relativement compact.

Chapitre 2

Notions de calcul fractionnaire

2.1 Intégrales et dérivées fractionnaires

Le but de cette partie est de définir les notions fondamentales de la dérivée et l'intégrale fractionnaire, en l'occurrence nous introduisons les deux plus importantes approches à savoir celles de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi que quelques-unes de leurs propriétés.

2.1.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, b pouvant être fini ou infini. Une primitive de f est donnée par :

$$I^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$I^2 f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u) du .$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$I^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt .$$

Plus généralement. L'intégration successive de la fonction $f(x)$ s'écrit sous la forme suivant :

$$\begin{aligned} I^n f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt. \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy. Pour définir l'intégrale d'ordre non entier de la fonction f , On remplace le factoriel par la fonction Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Définition 2.1

Si $f \in C[a, b]$, $\Omega = [a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. les intégrales fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville $I_{a^+}^\alpha f$ et $I_{b^-}^\alpha f$ d'ordre α sont définies respectivement par :

$$I_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (x > a) \quad (2.1)$$

$$I_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (x < b) \quad (2.2)$$

Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les définitions (2.1) et (2.2) coïncident avec les intégrales nième de la forme :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{(n)} f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{b^-}^{(n)} f(x) &= \int_x^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^b f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Théorème 2.1

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $f \in L^p([a, b])$, $p \geq 1$. l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante.

$$I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta f(x) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x). \quad (2.3)$$

Propriété 2.1

Soit $\alpha > 0$. $n = [\alpha] + 1$. On a :

$$I_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

$$I_{b^-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

Preuve:

Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$. Alors

$$I_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt.$$

Pour évaluer cette intégrale on procède par le changement de variable $t = a + (x-a)s$, il s'ensuit que $dt = (x-a)ds$, d'où

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a - (x-a)s)^{\alpha-1} (a + (x-a)s - a)^{\beta-1} (x-a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds. \end{aligned}$$

On utilisant la fonction bêta on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}, \end{aligned}$$

on voit bien que c'est une généralisation du cas où $\alpha = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^1 (x-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)} (x-a)^\beta = \frac{(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}{\beta\Gamma(\beta)} (x-a)^\beta \\
&= \frac{(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}{(\beta-1)\beta\Gamma(\beta-1)} (x-a)^\beta = \frac{1}{\beta} (x-a)^\beta .
\end{aligned}$$

Grace à la relation bien connue (2.2), de la même manière, on montre que

$$I_{b^-}^\alpha (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1} .$$

2.1.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Pour définir les dérivées de Riemann – Liouville on adopte une méthode simple, par exemple la dérivée d'ordre un demi au sens de R-L d'une fonction f donnée par :

$$D^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{d}{dx} \left(I^{\frac{1}{2}} f \right) (x) ,$$

C'est à dire la dérivée (ordinaire) de l'intégrale fractionnaire d'ordre un demi

Définition 2.2

Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$

Les dérivées fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville

$D_{a^+}^\alpha f$ et $D_{b^-}^\alpha f$ d'ordre α sont définies respectivement par :

$$\begin{aligned}
D_{a^+}^\alpha f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f(x) \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad . \quad x > a
\end{aligned}$$

Et

$$D_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left(I_{b^-}^{n-\alpha} f(x) \right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad . \quad x < b$$

En particulier quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$ on a :

$$D_{a^+}^0 f(x) = D_{b^-}^0 f(x) = f(x) ,$$

Et

$$D_{a^+}^n f(x) = f^{(n)}(x) \quad . \quad D_{b^-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x) .$$

Où $f^{(n)}(x)$ est la dérivée ordinaire de $f(x)$.

Remarque 2.1

Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville de la fonction f en un point x est à caractère non local, elle dépend de toutes les valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (α, x)

Remarque 2.2

Si $0 < \alpha < 1$ alors

$$D_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad . \quad x > a$$

Et

$$D_{b^-}^\alpha f(x) = -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad . \quad x < b$$

Propriété 2.2

Pour tout $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, on a :

$$D_{a^+}^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}$$

Et

$$D_{b^-}^\alpha (b-x)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (b-x)^{\beta-\alpha}$$

Preuve :

On a par définition de la dérivée de R-L

$$D^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^\beta dt .$$

Par le changement de variable $t = a + (x-a)s$ on obtient

$$\begin{aligned} D^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{n+\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^\beta ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1) B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1) \Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1) \Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta-\alpha+1) \Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \quad a < x < b , \end{aligned}$$

Donc
$$D_{a^+}^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} .$$

Da la même façon on montre que
$$D_{b^-}^\alpha (b-x)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (b-x)^{\beta-\alpha} .$$

Remarque 2.3

Dans le cas particulier ou $\beta = 0$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante est en générale non nulle.

Proposition 2.1

Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ alors pour $j = 1, 2, \dots, n$ On a :

$$D_{a^+}^\alpha (x-a)^{\alpha-j} = D_{b^-}^\alpha (b-x)^{\alpha-j} = 0.$$

Corollaire 2.1

1. la relation $D_{a^+}^\alpha f(x) = 0$ est vraie si et seulement si

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j (x-a)^{\alpha-j},$$

Ou $c_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) sont des constantes arbitraires.

2. la relation $D_{b^-}^\alpha f(x) = 0$ est vraie si et seulement si

$$f(x) = \sum_{j=1}^n d_j (x-a)^{\alpha-j},$$

Ou $d_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) sont des constantes arbitraires.

Corollaire 2.2

Soit $a > 0$ et $f \in C[a, b]$.alors :

$$I_{0^+}^\alpha D_{0^+}^\alpha f(t) = f(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + \dots + c_n t^{\alpha-n},$$

Ou $c_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) et $n = [\alpha] + 1$.

2.1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo :

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ait joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire , plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisée , car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie exigent des conditions initiales physiquement interprétables par

des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

On utilisant une approche différentes de celle de Riemann-Liouville, Caputo a défini la dérivée fractionnaire à l'opposé de R-L on appliquant l'opérateur de la dérivation puis celui de l'intégrale (R-L font l'inverse, ils intègrent puis ils dérivent). C'est-à-dire la dérivée d'ordre un demi par exemple, au sens de Caputo sera donnée par :

$${}^c D^{\frac{1}{2}} f(x) = I^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} f(x),$$

Cependant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est toujours une

généralisation de la dérivée ordinaire dans le sens ${}^c D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ si $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.3

Soit $\alpha > 0$ avec $n = [\alpha] + 1$. Si f est une fonction telle que $f \in AC^n([a, b])$

Alors les dérivées fractionnaires (à gauche et à droite) d'ordre α au sens de Caputo existent sur $[a, b]$ et sont définies par :

$$\begin{aligned} {}^c D_{a^+}^\alpha f(x) &= I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \\ {}^c D_{b^-}^\alpha f(x) &= (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

En particulier quand $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a, b])$.

$$\begin{aligned} {}^c D_{a^+}^\alpha f(x) &= I_{a^+}^{1-\alpha} Df(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt \\ {}^c D_{b^-}^\alpha f(x) &= -I_{b^-}^{1-\alpha} Df(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{-\alpha} f'(t) dt. \end{aligned}$$

Remarque 2.4

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ alors ${}^c D_{a^+}^\alpha f(x)$ et ${}^c D_{b^-}^\alpha f(x)$ sont données par :

$${}^c D_{a^+}^\alpha f(x) = f^{(n)}(x) \quad \text{et} \quad {}^c D_{b^-}^\alpha f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x),$$

en particulier : ${}^c D_{a^+}^0 f(x) = f(x)$ et ${}^c D_{b^-}^0 f(x) = f(x)$.

Remarque 2.5

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est aussi à caractère non local.

Propriété 2.3

Pour tout $\alpha > 0$ tel que $n-1 < \alpha < n$ et $\beta > 0$, on a :

$${}^c D_{a^+}^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha},$$

$${}^c D_{b^-}^\alpha (b-x)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (b-x)^{\beta-\alpha},$$

et

$${}^c D_{a^+}^\alpha (x-a)^k = 0, \quad {}^c D_{b^-}^\alpha (x-a)^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Donc en particulier on a

$${}^c D_{a^+}^\alpha 1 = 0 \quad \text{et} \quad {}^c D_{b^-}^\alpha 1 = 0$$

Preuve:

$$\begin{aligned} {}^c D_{a^+}^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\beta-n} dt, \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = a + s(x-a)$ on obtient :

$$\begin{aligned} {}^c D_{a^+}^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\beta(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.$$

De même on trouve :

$${}^c D_{b^-}^\alpha (b-x)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (b-x)^{\beta-\alpha}.$$

Pour la dernière propriété, il suffit appliquer la définition de la dérivée au sens de Caputo.

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.

La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Riemann-Liouville sur l'intervalle $[a, b]$ est décrite par le théorème suivant.

Théorème 2.2

Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ si f possède $n-1$ dérivées en a et si $D_{a^+}^\alpha f$ et $D_{b^-}^\alpha f$ existent, alors :

$${}^c D_{a^+}^\alpha f(x) = D_{a^+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right].$$

$${}^c D_{b^-}^\alpha f(x) = D_{b^-}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-x)^k \right].$$

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$ les relations précédentes prennent les formes suivantes :

$${}^c D_{a^+}^\alpha f(x) = D_{a^+}^\alpha [f(x) - f(a)].$$

Et

$${}^c D_{b^-}^\alpha f(x) = D_{b^-}^\alpha [f(x) - f(b)].$$

Remarque 2.6

En utilisant les dérivées fractionnaires de R-L calculées précédemment de $(x-a)^k$ on trouve :

$${}^c D_{a^+}^\alpha f(x) = D_{a^+}^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\alpha] + 1).$$

Et

$${}^c D_{b^-}^\alpha f(x) = D_{b^-}^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-x)^{k-\alpha}, \quad (n = [\alpha] + 1).$$

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$ on a :

$${}^c D_{a^+}^\alpha f(x) = D_{a^+}^\alpha f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}.$$

Et

$${}^c D_{b^-}^\alpha f(x) = D_{b^-}^\alpha f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{-\alpha}.$$

Remarque 2.7

Si $\alpha \notin \mathbb{N}^*$ la dérivée de Caputo coïncide avec celle de R-L dans les cas suivants :

i) ${}^c D_{a^+}^\alpha f(x) = D_{a^+}^\alpha f(x)$ si $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $(n = [\alpha] + 1)$.

ii) ${}^c D_{b^-}^\alpha f(x) = D_{b^-}^\alpha f(x)$ si $f(b) = f'(b) = \dots = f^{(n-1)}(b) = 0$, $(n = [\alpha] + 1)$.

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$ nous avons :

Si $f(a) = 0$ ${}^c D_{a^+}^\alpha f(x) = D_{a^+}^\alpha f(x)$

Et si $f(b) = 0$ ${}^c D_b^\alpha f(x) = D_b^\alpha f(x)$

Les théorèmes suivants expriment certaines propriétés de l'opérateur de dérivation de Caputo.

Théorème 2.3

Soient f et g deux fonction dont les dérivées fractionnaires de Caputo existent, alors pour tous $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, ${}^c D^\alpha(\lambda f + \gamma g)$ existe, et l'on a :

$${}^c D^\alpha(\lambda f(x) + \gamma g(x)) = \lambda {}^c D^\alpha f(x) + \gamma {}^c D^\alpha g(x).$$

Théorème 2.4

Si $\alpha > 0$ tel que $n = [\alpha] + 1$ et si $f \in C[a, b]$ alors :

$${}^c D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(x) = {}^c D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha f(x) = f(x).$$

En d'autre terme la dérivée fractionnaire de Caputo est toujours l'inverse de l'intégrale fractionnaire.

Preuve:

Soit $f \in C[a, b]$, $\alpha > 0$ et comme $D^k I_{a^+}^\alpha f(a) = 0$, pour $k = 0, 1, \dots, n-1$

Alors on a pour : ${}^c D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(x) = {}^c D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha f(x) = f(x)$.

La dérivée fractionnaire de Caputo est un inverse droit de l'intégrale fractionnaire.

Théorème 2.5

Soient $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$ si $f \in AC^n([a, b])$ alors on a :

$$I_{a^+}^\alpha {}^c D_{a^+}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k .$$

$$I_{b^-}^\alpha {}^c D_{b^-}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k .$$

En d'autre termes il existe de constantes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ telles que :

$$I_{a^+}^\alpha {}^c D_{a^+}^\alpha f(x) = f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k ,$$

$$I_{b^-}^{\alpha} {}^c D_{b^-}^{\alpha} f(x) = f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (b-x)^k .$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$ et $f(x) \in [a, b]$ alors on a :

$$I_{a^+}^{\alpha} {}^c D_{a^+}^{\alpha} f(x) = f(x) - f(a) .$$

$$I_{b^-}^{\alpha} {}^c D_{b^-}^{\alpha} f(x) = f(x) - f(b) .$$

Preuve:

On a par définition :

$${}^c D f(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f(x) ,$$

en appliquant à gauche les opérateurs d'intégration $I_{a^+}^{\alpha}$, $I_{b^-}^{\alpha}$. On trouve :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha} {}^c D_{a^+}^{\alpha} f(x) &= I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f(x) . \\ &= I_{a^+}^n D^n f(x) \\ &= I_{a^+}^n D_{a^+}^n f(x) \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k . \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} I_{b^-}^{\alpha} {}^c D_{b^-}^{\alpha} f(x) &= I_{b^-}^{\alpha} I_{b^-}^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= I_{b^-}^n D^n f(x) \\ &= I_{b^-}^n D_{b^-}^n f(x) \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k . \end{aligned}$$

Chapitre 3

Existence et unicité de

la solution d'un

problème

fractionnaire

Le but de ce chapitre est de prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème suivante :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta u)(t) = f(t, u(t), \varphi u(t), \psi u(t)) & (0 < t < 1) \\ u(1) = u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (\mathbf{P}),$$

où $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta \leq 1$, $f : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et

$$\varphi u(t) = \int_0^t \gamma(t, s) u(s) ds, \quad \psi u(t) = \int_0^t \lambda(t, s) u(s) ds$$

Où $\gamma, \lambda : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0, +\infty[$ avec la propriété $\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 \lambda(t, s) ds \right| < +\infty$ et

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 \gamma(t, s) ds \right| < +\infty.$$

L'idée générale du travail consiste à transformer ce problème en un problème de point fixe. Pour commencer étudions un problème auxiliaire donné par le lemme suivant.

Lemme 3.1

Pour $y \in C[0,1]$, alors le problème aux limites

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta u)(t) = y(t) & , \quad 0 < t < 1 & , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad \text{et} \quad 0 < \beta \leq 1 \\ u(1) = u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Admet une solution unique donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 (t-s)^{\beta+\alpha-1} y(s) ds \\ &+ \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha + \beta)} (-\beta - 1 + \beta t) \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} y(s) ds \\ &+ \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha + \beta - 1)} (1-t) \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} y(s) ds \end{aligned} \quad (3.2)$$

Preuve:

En vertu du théorème (2.5) le problème (3.1) est équivalent à l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 (t-s)^{\beta+\alpha-1} y(s) ds + \frac{t^\beta}{\beta \Gamma(\beta)} c_0 + \frac{t^{\beta+1}}{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)} c_1 + c_2, \quad (3.3)$$

par dérivation des deux membres de (3.3), on obtient:

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta - 1)} \int_0^1 (t-s)^{\beta+\alpha-2} y(s) ds + \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} c_0 + \frac{t^\beta}{\beta \Gamma(\beta)} c_1,$$

en utilisant les conditions aux limites $u(1) = u(0) = u'(1) = 0$, on trouve:

$$\begin{aligned} c_0 &= - \left(\frac{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} y(s) ds + \frac{\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - 1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} y(s) ds, \\ c_1 &= \frac{\beta^2(\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} y(s) ds - \frac{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - 1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} y(s) ds, \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans (3.3) on obtient (3.2) ce qui achève la démonstration.

On remarque bien que notre problème est transformé en une autre forme

$$T(u) = u. \text{ où (en substituant } y \text{ par } f(t, u(t), \varphi u(t), \psi u(t))$$

$$T(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 (t-s)^{\beta+\alpha-1} y(s) ds + \frac{t^\beta}{\beta \Gamma(\beta)} c_0 + \frac{t^{\beta+1}}{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)} c_1 + c_2.$$

3.1 Existence de la solution

Nous donnons à présent le théorème principal de ce chapitre, soit celui d'existence de la solution du problème (p) basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Soit $X = C(I)$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles sur $I = [0,1]$ muni de la norme $\|u\| = \max_{t \in I} |u(t)|$.

Théorème 3.1

Supposons qu'il existe $\alpha + \beta - 2 \geq 0$ et qu'il existe une fonction positive $\theta(t) \in L^1([0,1])$ tels que

$$|f(t, x, y, z) - f(t, x', y', z')| \leq \theta(t)(|x - x'| + |y - y'| + |z - z'|). \quad (3.4)$$

Pour tout $t \in [0,1]$ et $t, x, y, z, t', x', y', z' \in \mathbb{R}$. Alors le problème (P) admet au moins une solution dans X quand

$$\frac{(1 + \gamma_0 + \lambda_0)(\alpha + 2\beta + 1)\theta^*}{\Gamma(\alpha + \beta)} < 1, \quad (3.5)$$

où $\gamma_0 = \sup_{t \in I} \left| \int_0^t \gamma(t, s) ds \right|$, $\lambda_0 = \sup_{t \in I} \left| \int_0^t \lambda(t, s) ds \right|$ et $\theta^* = \int_0^1 \theta(s) ds$.

Preuve:

La preuve est basée sur le théorème de Krasnoselskii

Choisissons

$$R \geq \frac{\varpi(\alpha + 2\beta + 1)}{1 - \theta^*(1 + \lambda_0 + \gamma_0)(\alpha + 2\beta + 1)},$$

et soit $\varpi = \max \{f(t, 0, 0, 0) : t \in I\}$. Considérons l'ensemble $B_R = \{u \in X : \|u\| \leq R\}$

alors B_R est un ensemble fermé, borné et convexe de X . Définissant deux opérateurs A et B sur X comme suit :

$$Au(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) ds.$$

$$\begin{aligned}
Bu(t) &= \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha + \beta)} (-\beta - 1 + \beta t) \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) ds \\
&+ \frac{t^\beta (\alpha + \beta - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (1-t) \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) ds .
\end{aligned}$$

Pour tout $u \in B_R$ et $t \in I$, on obtient à l'aide de l'inégalité (3.4)

$$\begin{aligned}
|Au(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s))| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) - f(s, 0, 0, 0)| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, 0, 0, 0)| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \theta(s) (|u(s)| + |\varphi u(s)| + |\psi u(s)|) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, 0, 0, 0)| ds \\
&\leq \frac{(1 + \lambda_0 + \gamma_0) \|u\|}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 \theta(s) ds + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
&\leq \frac{\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|u\| + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha + \beta)} .
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|Au\| \leq \frac{\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|u\| + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha + \beta)} . \quad (3.6)$$

De la même façon nous estimons $\|Bv\|$. Soit $v \in B_R$ et $t \in I$, alors

$$\begin{aligned}
|Bv(t)| &\leq \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\beta+1-\beta t) \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, v(s), \varphi v(s), \psi v(s))| ds \\
&\quad + \frac{t^\beta (\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (1-t) \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} |f(s, v(s), \varphi v(s), \psi v(s))| ds \\
&\leq \frac{\beta+1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} \theta(s) (|v(s)| + |\varphi v(s)| + |\psi v(s)|) ds \\
&\quad + \frac{\beta+1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} |f(t, 0, 0, 0)| ds \\
&\quad + \frac{(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} \theta(s) (|v(s)| + |\varphi v(s)| + |\psi v(s)|) ds \\
&\quad + \frac{(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} |f(t, 0, 0, 0)| ds \\
&\leq \theta^* (1+\lambda_0 + \gamma_0) \frac{(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \|v\| + \frac{\varpi(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&\quad + \frac{(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \theta^* (1+\lambda_0 + \gamma_0) \|v\| + \frac{\varpi(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\theta^* (1+\lambda_0 + \gamma_0)(\alpha+2\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \|v\| + \frac{\varpi(\alpha+2\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\|Bv\| \leq \frac{(\alpha+2\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\theta^* (1+\lambda_0 + \gamma_0) \|v\| + \varpi). \quad (3.7)$$

En tenant compte des estimations (3.6) et (3.7) on obtient pour tout $u, v \in B_r$ et

$t \in I$:

$$\|Au + Bv\| \leq \|Au\| + \|Bv\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \|u\| + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{(\alpha+2\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0) \|v\| + \varpi) \\ &\leq R \frac{\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)(\alpha+2\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{\varpi(\alpha+2\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \end{aligned}$$

comme

$$R \geq \frac{\varpi(\alpha+2\beta+1)}{1-\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)(\alpha+2\beta+1)},$$

alors $\|Au+Bv\| \leq R$ donc $Au+Bv \in B_R$.

Prouvons maintenant que B est une contraction. Soient $u, v \in B_R$ et $t \in I$. en vertu de (3.4), il résulte que :

$$\begin{aligned} |Bu(t) - Bv(t)| &\leq \frac{t^\beta(\beta+1-\beta t)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \times \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) - f(s, v(s), \varphi v(s), \psi v(s))| ds \\ &\quad + \frac{t^\beta(1-t)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} \times \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) - f(s, v(s), \varphi v(s), \psi v(s))| ds \\ &\leq \frac{\beta+1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} \theta(s) (|u(s) - v(s)| + |\varphi u(s) - \varphi v(s)| + |\psi u(s) - \psi v(s)|) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} \theta(s) (|u(s) - v(s)| + |\varphi u(s) - \varphi v(s)| + |\psi u(s) - \psi v(s)|) ds \\ &\leq \frac{(\beta+1)(1+\lambda_0+\gamma_0) \|u-v\|}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 \theta(s) ds + \frac{(1+\lambda_0+\gamma_0)(\alpha+\beta-1) \|u-v\|}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 \theta(s) ds \\ &\leq \frac{(1+\lambda_0+\gamma_0)(\alpha+2\beta)\theta^*}{\Gamma(\alpha+\beta)} \|u-v\| \end{aligned}$$

Ainsi $\|Bu - Bv\| \leq \frac{(1+\lambda_0+\gamma_0)(\alpha+2\beta)\theta^*}{\Gamma(\alpha+\beta)} \|u-v\|$.

En vertu de la condition (3.5), on en déduit que B est une contraction.

Prouvons maintenant que A est compact et continu. La continuité de f implique que A est continu. De plus A est uniformément borné sur B_R , en effet, de (3.6) on a :

$$\begin{aligned}\|Au\| &\leq \frac{\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\|u\| + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &\leq \frac{\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)}{\Gamma(\alpha+\beta)}R + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha+\beta)},\end{aligned}$$

soit $L = \max_{0 \leq s \leq 1} \left\{ |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s))|, u \in B_R \right\}$. Soient $t_1, t_2 \in I, t_1 \leq t_2$ et $u \in B_R$.

On a :

$$\begin{aligned}|Au(t_2) - Au(t_1)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} \left| (t_2-s)^{\alpha+\beta-1} - (t_1-s)^{\alpha+\beta-1} \right| |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s))| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s))| ds \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} \left((t_2-s)^{\alpha+\beta-1} - (t_1-s)^{\alpha+\beta-1} \right) ds + \frac{L}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\ &= \frac{L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t_2^{\alpha+\beta} - t_1^{\alpha+\beta}).\end{aligned}$$

Ainsi si $t_2 \rightarrow t_1$, alors $|Au(t_2) - Au(t_1)| \rightarrow 0$. Alors A est équicontinu. En vertu du théorème d'Ascoli-Arzela, on déduit que A est compact dans B_r . donc l'opérateur A est complètement continu. Ainsi toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Krasnoselskii sont satisfaites, par conséquent le problème (P) admet au moins une solution dans X .

3.2 L'unicité de la solution

Nous donnons maintenant le théorème de l'unicité de la solution, basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 3.2

On conservant les mêmes hypothèses du théorème précédent, c.-à-d. il existe $\alpha + \beta - 2 \geq 0$ et une fonction positive $\theta(t) \in L^1([0,1])$ tels que

$$|f(t, x, y, z) - f(t, x', y', z')| \leq \theta(t)(|x - x'| + |y - y'| + |z - z'|), \quad (3.8)$$

Pour tout $t \in [0,1]$ et $t, x, y, z, t', x', y', z' \in \mathbb{R}$. Alors le problème (P) admet une solution unique dans X quand

$$\frac{\theta^*(1 + \gamma_0 + \lambda_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (1 + \alpha + 2\beta) < 1, \quad (3.9)$$

$$\text{où } \gamma_0 = \sup_{t \in I} \left| \int_0^t \gamma(t, s) ds \right|, \quad \lambda_0 = \sup_{t \in I} \left| \int_0^t \lambda(t, s) ds \right| \text{ et } \theta^* = \int_0^1 \theta(s) ds.$$

Preuve:

Montrons que A est une contraction

On a :

$$|Au(t) - Av(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) - f(s, v(s), \varphi v(s), \psi v(s))| ds,$$

On utilisant (3,4)

$$|Au(t) - Av(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \theta(s) (|u(s) - v(s)| + |\varphi u(s) - \varphi v(s)| + |\psi u(s) - \psi v(s)|) ds,$$

Après avoir utilisé les définitions de φ et ψ on trouve :

$$|\varphi u(s) - \varphi v(s)| \leq \int \gamma(s, t) |u(t) - v(t)| dt \leq \int \gamma(s, t) dt \|u - v\| \leq \gamma_0 \|u - v\|,$$

et

$$|\psi u(s) - \psi v(s)| \leq \int_0^t \lambda(s, t) \|u - v\| \leq \lambda_0 \|u - v\|,$$

d'où :

$$\begin{aligned} |Au(t) - Av(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \theta(s) (1 + \gamma_0 + \lambda_0) \|u - v\| ds \\ &= \frac{(1 + \gamma_0 + \lambda_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|u - v\| \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \theta(s) ds \\ &\leq \frac{1 + \gamma_0 + \lambda_0}{\Gamma(\alpha + \beta)} \|u - v\| \int_0^1 \theta(s) ds \\ &\leq \frac{1 + \gamma_0 + \lambda_0}{\Gamma(\alpha + \beta)} \theta^* \|u - v\| \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi on a } \|Au - Av\| \leq \frac{1 + \gamma_0 + \lambda_0}{\Gamma(\alpha + \beta)} \theta^* \|u - v\|,$$

de plus on a de la démonstration du théorème précédent :

$$\|Bu - Bv\| \leq \frac{\theta^* (1 + \gamma_0 + \lambda_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (\alpha + 2\beta) \|u - v\|$$

D'où
$$\|Tu - Tv\| \leq \frac{\theta^*(1 + \gamma_0 + \lambda_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)}(1 + \alpha + 2\beta)\|u - v\|.$$

Il suffit de supposer que $\frac{\theta^*(1 + \gamma_0 + \lambda_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)}(1 + \alpha + 2\beta) < 1$ pour conclure que l'opérateur T est une contraction et qu'il admet ainsi un point fixe unique qui est la solution de notre problème.

3.3 Exemples

Exemple 3.3.1

On considère le problème aux limites (P) avec

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4} \times \sum_{i=1}^3 \frac{1}{1 + x_i^2(t)}, \quad \alpha = \frac{9}{5}, \quad \beta = \frac{3}{5}. \text{ Ainsi nous avons:}$$

$$f(t, 0, 0, 0) = \frac{3t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4} \text{ et } \varpi = 0.31. \text{ Considérons } \lambda(t, s) = \gamma(t, s) = ts, \text{ de sorte que}$$

$$\gamma_0 = \lambda_0 = \frac{1}{2}.$$

On peut vérifier que la condition (3.1) est satisfaite

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, x_2, x_3) - f(t, y_1, y_2, y_3)| &\leq \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4} \sum_{i=1}^3 \left(\left| \frac{1}{1 + x_i^2} - \frac{1}{1 + y_i^2} \right| \right) \\ &\leq \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4} \sum_{i=1}^3 \frac{|x_i - y_i| |x_i + y_i|}{(1 + x_i^2)(1 + y_i^2)} \\ &\leq \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4} \sum_{i=1}^3 |x_i - y_i|, \end{aligned}$$

Donc $\theta(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4}$ et $\theta^* = \frac{0.37894}{4}$. De plus, la condition (3.9) est vraie

$$\frac{\theta^*(1 + \gamma_0 + \lambda_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)}(1 + \alpha + 2\beta) = 0.61013 < 1.$$

Donc, d'après le théorème 3.2, le problème admet au moins une solution dans B_R avec

$$R \geq \frac{\varpi(\alpha + 2\beta + 1)}{1 - \theta^*(1 + \lambda_0 + \gamma_0)(\alpha + 2\beta + 1)} = 5.1214.$$

Exemple 3.3.2

Considérons le problème aux limites (P) avec /

$$f(t, x, y, z) = 10^{-2} \left(t \sin x + e^t \sin 2y + \frac{1+t^2}{1+z^2} \right),$$

$\alpha = 1.3$, $\beta = 0.4$. Ainsi nous avons $f(t, 0, 0, 0) = 10^{-2}(1+t^2)$ et $\varpi = 0.02$.

Prenons $\lambda(t, s) = e^{t-s}$, $\gamma(t, s) = (t-s)^\beta$, de sorte que $\gamma_0 = 1.7183$, $\lambda_0 = 0.71429$.

On peut vérifier que la condition (3.1) est satisfaite

$$|f(t, x_1, x_2, x_3) - f(t, y_1, y_2, y_3)| \leq 0.02e^t \sum_{i=1}^3 |x_i - y_i|$$

Donc $\theta(t) = 0.02e^t$ et $\theta^* = 3.4366 \times 10^{-2}$. De plus, la condition (3.9) est vraie

$$\frac{\theta^*(1 + \gamma_0 + \lambda_0)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (1 + \alpha + 2\beta) = 0.40246 < 1.$$

Donc, d'après le théorème 3.2, le problème admet au moins une solution dans B_R avec

$$R \geq \frac{\varpi(\alpha + 2\beta + 1)}{1 - \theta^*(1 + \lambda_0 + \gamma_0)(\alpha + 2\beta + 1)} = 9.7744 \times 10^{-2}$$

Conclusion et perspective

L'objectif principal de cette thèse est de présenter les résultats démontrant l'existence et l'unicité d'une solution pour une certaine classe d'équations integro-différentielles d'ordre fractionnaires, avec des conditions locales dans les espaces de Banach. Ces résultats ont été obtenus en utilisant les théorèmes du point fixe de Krasnoselskii et de Banach.

Étant donné l'intérêt que portent les chercheurs pour ce type d'équation, nous prévoyons d'étudier à l'avenir le comportement de la solution dans des situations similaires.

Bibliographie

- [01] A.A.Kilbas Theory and applications of fractional differential equations
- [02] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999
- [03] K.S. Miller and B. Ross. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [04] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations, Electron. J. Differential Equations 2006, No. 36,12 pp.
- [05] M. Benchohra and D. Seba, Impulsive fractional differential equations in Banach spaces. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2009, Special EditionI, No. 8, 14 pp.