



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Problèmes à valeurs aux bord initiales fractionnaire d'ordre supérieur pair avec conditions non locale de type purement intégrales

Réalisé par : Chenina Abir
Boudjellal Maissa

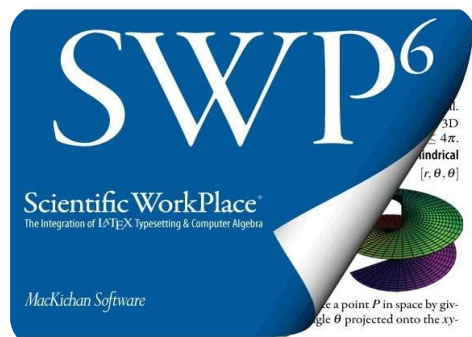
Dirigé par : Mlle. Chergui Djamila
Présenté le 06/09/2020

Membres de jury :

- Pr. Abdelkrim Abdelhalim Grade Président
- M. Achichi Ahlem Grade Examinateur

2019 /2020





Ce document est composé en utilisant *L^AT_EX*, *MikTeX*,
Scientific Workplace compilateur Mathématiques.

Abir Chenina

Boudjellal Maissa

*Je dédie mon diplôme à celui qui
a moissonné les épines de mon
chemin,*

*pour ouvrir la voie à la
connaissance pour moi, mon cher
père,*

*À celui qui m'a nourri avec
amour et tendresse et baume de
guérison*

ma mère bien-aimée,



Dédications



Je dédie ce modeste travail à

*À ma très chère Mère, qui me donne toujours l'espoir de
vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.*

*À mon très cher Père, pour ses encouragements, son soutien,
surtout pour son amour et son sacrifice afin que rien n'entrave
le déroulement de mes études.*

À mes frères Et mes sœurs,

À mes meilleurs amis Et mes chers collègues

*À tous mes enseignants pour Leurs utiles conseils, leurs
Patience, leur persévérance.*

À toute ma famille.

*Pour chacun des maintienne
mon cœur et oublié mon style.*



Remerciements

Au nom d'ALLAH Clément et Miséricordieux !

*Louange à ALLAH le Tout Puissant de m'avoir donné la force,
le courage et la volonté*

*En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout
puissant, de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail.*

*Je tiens à exprimer mon profond respect, et de reconnaissance à mon
encadreur de mémoire, Mlle : Chergui Djamilia, pour ces conseils,
et son encouragement durant la période de la préparation et la
rédaction de ce mémoire.*

Je remercie sincèrement les membres du jury :

Pr. : Abdelhakim Abdelkarim d'avoir accepté la présidence du jury.

Aussi je remercie vivement

M. Achichi Ahmed et d'avoir accepté l'examineur de ce travail.

*Je les remercie énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce
travail.*

*Il est important pour moi de remercier ma famille : qui ont toujours
été une source inépuisable d'encouragement.*

*Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants
d'université de Khenchela*

Un grand merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donné

*Merci à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à
l'aboutissement de ce travail*

Table des matières

Liste Des Notations	iii
Liste Des Abréviations	v
Liste Des Figures	vi
Introduction Générale	1
1 Préliminaires	7
1.1 Notions générale	9
1.1.1 Espaces Normé	9
1.1.2 Espaces de Banach	10
1.1.3 Espace de Hilbert	10
1.1.4 Opérateurs linéaires non-bornés	11
1.1.5 Relation entre l’orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert	13
1.1.6 Espaces des fonctions intégrables	14
1.1.7 Espace dse fonctions continues et absolument continues	14
1.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire	15
1.2.1 La fonction Gamma	16
1.2.2 la fonction Bêta	19
1.2.3 la fonction Mittag-Leffler	19

1.3	Rappels de quelques inégalités utiles	22
1.3.1	Inégalité de Young	22
1.3.2	Inégalité de Young avec ε	22
1.3.3	Inégalité de Cauchy-Schwarz	22
1.3.4	Inégalité de Cauchy	22
1.3.5	Inégalité de Cauchy avec ε	23
1.3.6	Inégalité de Hölder	23
1.4	Lemme de Gronwall	24
2	Dérivée et Intégrale fractionnaire	26
2.1	Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$	28
2.2	Intégrales d'ordre arbitraire	28
2.3	Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	29
2.4	Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles	30
2.5	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	35
2.6	Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles	36
2.7	Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	37
2.8	Intégrales et dérivées de quelques fonctions usuelles (résultats)	41
2.9	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	41
2.10	Dérivées de quelques fonctions usuelles au sens de Caputo	45
2.11	Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo	46
2.12	Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo	47
2.13	Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire	48
2.14	Comparaison entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et la dérivée au sens de Caputo	49
3	Etude d'une classe d'équations d'onde de diffusion avec des conditions aux limites non locales	51
3.1	Introduction	52
3.2	Position du problème	53

Table des matières

3.3	Estimations a priori et ses conséquences	54
3.4	Existence de solution	59
	Conclusion	64
	Annexe A	65
	Bibliographie	68

Résumé

Dans ce travail on étudie une classe de problèmes avec conditions purement non locales de type intégral.

On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel. La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

Mots clés : inégalités énergétiques, condition nonlocale, problème aux limites, dérivée de Caputo, équations différentielles fractionnaire, l'existence, l'unicité.

Abstract

In this work, we study a class of problem with purely nonlocal conditions of integral type.

We demonstrate the existence and uniqueness of the solution in functional space. The proof is based on a priori bilateral estimates and on the density of the image of the operator generated by the problem considere.

Key words : energy inequalities, nonlocal condition, boundary problem, Caputo derivative, fractional differential equations, existence, uniqueness.

Liste Des Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail :

Ensembles

- ▶ \mathbb{N} : ensemble des nombres entiers naturels.
- ▶ \mathbb{R} : ensemble des nombres réels.
- ▶ \mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.
- ▶ Ω : domaine borné dans \mathbb{R} .
- ▶ $L^p(\Omega)$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty[$ intégrables sur Ω .
- ▶ $C(\Omega)$: espace des fonctions continues sur Ω .
- ▶ $C^n(\Omega)$: espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois et $f^{(n)}$ continues.
- ▶ $AC(\Omega)$: espace des fonctions absolument continues sur Ω .
- ▶ $AC^n(\Omega)$: espace des fonctions f dérivables à l'ordre $n - 1$ et elle que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.
- ▶ E, F : des espaces de Banach de normes respectives $\| \cdot \|_E, \| \cdot \|_F$.
- ▶ $L(E, F)$: espace des opérateurs linéaires continus de E dans F , cet espace est muni de la norme $\| B \|_{L(E,F)} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Bu\|_F}{\|B\|_E}$.
- ▶ H : espace de Hilbert où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $|\cdot|, (\cdot, \cdot)$.
- ▶ $L(H)$: espace des opérateurs linéaires continus dans H .
- ▶ $[\cdot]$: partie entière d'un nombre réel
- ▶ $K(E, F)$: espace des opérateurs compacts de E dans F .
- ▶ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: ouvert borné, $\overline{\Omega}$ fermeture de Ω .

Fonctions

- ▶ $\Gamma(\cdot)$: la fonction Gamma.
- ▶ $B(\cdot, \cdot)$: la fonction Bêta.
- ▶ $E_\alpha(\cdot)$: la fonction de Mittag – Leffler.

- ▶ $\mathcal{F}_x u = \int_0^x u(\xi, t) d\xi$.
- ▶ $\mathcal{F}_x^2 u = \int_0^x \int_0^\eta u(\xi, t) d\xi d\eta$.

Dérivée et intégrale

- ▶ I_a^α : intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann – Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
- ▶ ${}^R_a D_t^\alpha$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann – Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
- ▶ ${}^C_a D_t^\alpha$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

Liste Des Abréviations

- ▶ $\text{Im}(Z)$: partie imaginaire du nombre complexe z .
- ▶ $\text{Re}(Z)$: partie réelle du nombre complexe z .
- ▶ T : opérateur linéaire.
- ▶ $D(T)$: domaine de définition de l'opérateur T .
- ▶ T^{-1} : inverse de T .
- ▶ $G(T)$: graphe de l'opérateur T .
- ▶ $R(T)$: image de l'opérateur T .
- ▶ $N(T)$: noyau de l'opérateur T .
- ▶ M^\perp : orthogonal de l'ensemble M .

Liste Des Figures

1. Figure de Gottfried Wilhelm Leibniz et L'hôpital	2
2. Graphe représentative de la fonction Gamma	26
3. Graphe de La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre	29
4. Graphe de La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres	29
5. Graphe de la dérivée à droite et à gauche de $f(x)$	48
6. Figure de Georg Friedrich Bernhard Riemann	73
7. Figure de Joseph-Liouville	74
8. Figure de Michele Caputo	75

Introduction Générale

Le sujet du calcul fractionnel (**c'est-à-dire le calcul des intégrales et des dérivés arbitraire, réel ou complexe**) a acquis une popularité et une importance considérables au cours des trois dernières décennies, principalement en raison de ses applications démontrées dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie.

En mathématiques, le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse, qui étudie la généralisation de la dérivation et d'intégration d'ordre entier n (**ordinaire**) à l'ordre non entier (**fractionnaire**).

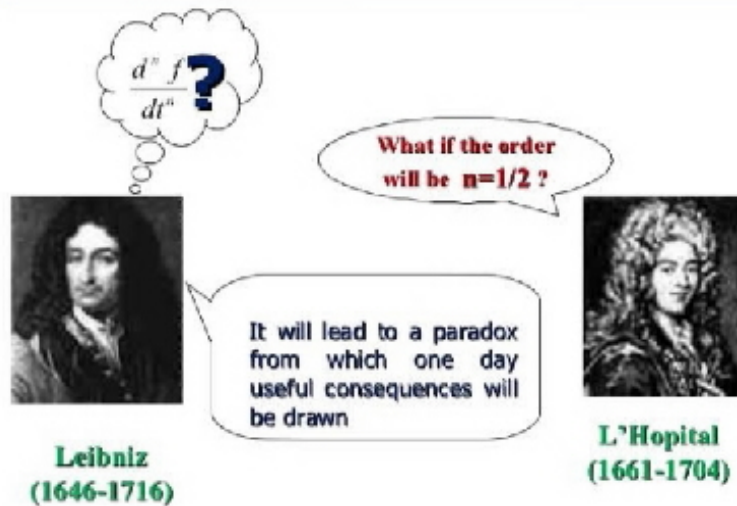
La théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{ème} siècle.

L'époque où Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction f quand il a annoncé dans une lettre à Guillaume l'Hôpital datée du 30 septembre 1695, avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$, l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? Leibniz lui a répondu :

"Cela conduirait à un paradoxe à partir du quel un jour, on pour ratirer des conséquences utiles" [Oldham et Spanier, 1974].

Cette lettre de l'Hôpital, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire une fraction (**nombre rationnel**), a en fait donné lieu au nom de ce domaine des mathématiques.

A Bit of History: 1695 (Igor Podlubny)



Une mention ultérieure de dérivés fractionnaires a été faite, par (par exemple) Euler en 1730, Lagrange en 1772, Laplace en 1812, Lacroix en 1819, Fourier en 1822, Liouville en 1832, Riemann en 1847, Greer 1859, Holmgren en 1865, Grünwald en 1867, Letnikov en 1868, Sonin en 1869, Laurent en 1884, Nekrassov en 1888, Krug en 1890 et Weyl en 1917.

Les équations différentielles d'ordre fractionnaire sont révélées récemment des outils précieux dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. En effet, nous pouvons trouver de nombreuses d'applications en viscoélasticité, électrochimie, contrôle, média poreux, électromagnétiques, ... ect.

Au cours de ces dernières années, de nombreux phénomènes en physique ont été modélisés par des problèmes aux limites avec conditions non locales. Ces problèmes ont beaucoup d'applications dans divers contextes tels que la dynamique des populations, le processus de conduction de la chaleur, la théorie du contrôle...etc. L'importance des conditions non locales apparaissent lors de la modélisation mathématique des phénomènes de la physique, la chimie, l'économie, la biologie, ...etc., qui exigent la présence de terme intégrale sur le domaine spatial. Le terme intégral peut apparaître dans des conditions aux limites, dans ce cas, ces conditions sont appelées non locales. Physiquement, les conditions intégrales représentent une moyenne, énergie totale, masse totale, moments, ...etc. Ces problème peuvent être rencontrés dans la théorie de transmission de la

chaleur voir : J.R.Cannon [22], W.D.Day [68], L.I :Kamynin [40], en élasticité et thermoélasticité, voir : A.Samarkii [3], dans la théorie de population, voir : P.A.Raviart[59]. Les conditions non locales ont été étudié la première fois par Byszewsked quand il a montré l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy non locale, les conditions non locales peuvent être plus utiles que la condition initiale standard pour décrire des phénomènes physiques.

L'une des méthodes les plus importantes utilisées et appliquées au différentiel partiel linéaire et non linéaire des équations d'ordre entier complétées par des conditions classiques est la méthode d'analyse fonctionnelle. Cependant, pour les équations avec ordre fractionnaire temporel de Caputo et conditions non locales, il n'y a que quelques résultats obtenus en utilisant la méthode des inégalités énergétiques.

L'étude des problèmes unidimensionnelles avec conditions intégrales pour les équations de type : parabolique, hyperbolique, parabolique intégro-différentielle, hyperbolique intégro-différentielle, pseudo parabolique, pseudo hyperbolique par la méthode des inégalités énergétiques (estimations à priori) voir : les travaux de A. Merad [4],[5], [6],[7], : Les équations multidimensionnelles avec des conditions intégrales sont traitées dans les travaux de L.S.Pulkina [42].

Pour le cas des équations d'onde de diffusion fractionnaire avec des dérivées d'ordre supérieur et des conditions aux limites classiques, il n'y a que peu d'articles traitant de l'existence et du caractère unique d'une solution telle comme [7,42].

Dans cet article, on étudié un problème de valeur aux limites initiale avec des contraintes purement non locales de type intégrale pour une équation d'onde de diffusion fractionnaire d'ordre paire de Caputo. En appliquant la méthode d'analyse fonctionnelle, la méthode dite d'inégalité d'énergie basée principalement sur des estimations a priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème étudié. Ce travail peut être considéré comme une contribution au développement de la méthode d'analyse fonctionnelle utilisée pour prouver le bien posé des problèmes d'ordre fractionnaire. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de cette méthode pour étudier l'existence et l'unicité de la solution pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire temporel avec des conditions non locales.

Contenu de la thèse

Cette thèse se décompose de trois chapitres partagés de façon suivante :

Le premier chapitre est destiné aux différents outils et techniques mathématiques utilisées par la suite : espaces de fonctions (intégrables, continues et absolument continues) et quelques notions et résultats de la théorie d'analyse fonctionnelles, des fonctions spéciales utiles tout au long de notre thèse telles que : la fonction gamma d'Euler, la fonction bêta, la fonction de Mittag-Leffler avec des exemples et quelques propriétés intéressantes.

Dans le second chapitre est consacré pour les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires aux sens de Riemann-Liouville et Caputo et les liens entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés complémentaires.

Dans le troisième chapitre, On montre l'existence et l'unicité de la solution forte. La démonstration est basée sur ce qu'on appelle la méthode des inégalités énergétiques (dite aussi, méthode des estimations a priori).

Soit $Q = (0, 1) \times (0, T)$ un rectangle borné de \mathbb{R}^2 . On considère l'équation suivante :

$$\mathcal{L}v = \partial_t^{\alpha+1}v + (-1)^m \theta(t) \frac{\partial^{2m}v}{\partial x^{2m}} = f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (\text{E})$$

avec les conditions non locales :

$$\begin{cases} l_1 v = v(x, 0) = \varphi(x), & x \in (0, 1) \\ l_2 v = v_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (\text{NC})$$

$$\int_0^1 x^i v(x, t) dx = 0, \quad i = \overline{0, 2m-1}, \quad t \in (0, T).$$

Pour ce type de problème on établit des théorèmes d'existence, d'unicité de la solution forte généralisée, sa dépendance continue par rapport aux données (f, φ, ψ) , ainsi que sa continuité par rapport aux paramètres (x, t) .

Ces résultats sont obtenus grâce à la méthode des estimations a priori (dite aussi, méthode des inégalités énergétiques) basée sur la technique des multiplicateurs. Cette méthode résulte des idées introduites par J.Leray [23], L. Garding [41], I.G. Petrovsky [32] dans leurs travaux,

et de celles développées dans l'ouvrage de A.A. Dezin [9], et dans les travaux de N.I. Yurchuk [48.49.50.51.52.53].

Elle consiste en :

- d'abord écrire le problème posé sous forme opérationnelle :

$$\mathcal{L}u = \Upsilon, \quad u \in D(\mathcal{L}), \quad (1)$$

ou l'opérateur \mathcal{L} est engendré par l'équation (E) et les conditions (NC) et est considéré de l'espace de Banach B dans l'espace de Hilbert V .

- établir ensuite les estimations a priori pour l'opérateur \mathcal{L} .

- démontrer ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace V .

Plus précisément, on suivra le schéma suivant :

On établit l'estimation a priori du type :

$$\|u\|_B \leq c \|\mathcal{L}u\|_V. \quad (2)$$

Cette démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu contenant la fonction u ou ses dérivées et une certaine fonction poids, et en intégrant sur le domaine.

Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites.

Ensuite dans les topologies fortes des espaces B et V on construit la fermeture $\overline{\mathcal{L}}$ de l'opérateur \mathcal{L} , et la solution de l'équation

$$\overline{\mathcal{L}}u = F \quad (3)$$

est appelée solution forte généralisée du problème considéré.

Par passage à la limite, l'estimation (2) est prolongé aux solution fortes généralisées, i.e :

on a

$$\|u\|_B \leq c \|\overline{\mathcal{L}}u\|_V. \quad (4)$$

A partir de là, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (3), l'égalité des ensembles

$R(\overline{\mathcal{L}})$ et $\overline{R(\mathcal{L})}$, et l'inversibilité de $\overline{\mathcal{L}}$, l'inverse $(\overline{\mathcal{L}})^{-1}$ étant défini sur l'ensemble des valeurs de l'opérateur $\overline{\mathcal{L}}$.

La dernière étape, consiste à établir la densité de l'ensemble $R(\overline{\mathcal{L}})$ dans V et donc l'existence d'une solution forte généralisée du problème (1).

Commentaire. La méthode des estimations a priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode, on est confronté à difficultés, parmi lesquelles :

- 1- Le choix de l'espace des solutions.
- 2- Le choix du multiplicateur.
- 3- Le choix de l'opérateur de régularisation.

Finalement, nous concluons par une conclusion puis nous présentons une bibliographie complète principalement sur les sujets traités et ceux en relation.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est destiné aux différents outils et techniques mathématiques utilisés par la suite : fonctions spéciales (les fonction Gamma, Bêta et celle de Mittag-Leffler) espaces de fonctions (continues et absolument continues) et quelques notions et résultats de la théorie d'analyse fonctionnelles.

Sommaire

1.1 Notions générale

1.1.1 Espaces Normé

1.1.2 Espaces de Banach

1.1.3 Espaces de Hilbert

1.1.4 Opérateurs linéaires non-bornés

1.1.5 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert

1.1.6 Espaces des fonctions intégrables

1.1.7 Espace des fonctions continues et absolument continues

1.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

1.2.1 la fonction Gamma

1.2.2 la fonction Bêta

1.2.3 la fonction Mittag-Leffler

1.3 Rappels de quelques inégalités utiles

1.3.1 Inégalité de Young

1.3.2 Inégalité de Young avec ε

1.3.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

1.3.4 Inégalité de Cauchy

1.3.5 Inégalité de Cauchy avec ε

1.3.6 Inégalité de Hölder

1.4 Lemme de Gronwall

1.1 Notions générale

1.1.1 Espaces Normé

Définition 1.1 (voir [29, page 21])

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{k} ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Une norme sur E , est une application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant les conditions suivantes :

$$1- \|x\| \geq 0 \text{ et } \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

$$2- \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \text{ pour tout } x \in E \text{ et pour tout } \lambda \in \mathbb{k}.$$

$$3- \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \text{ pour tout } x, y \in E.$$

L'espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par $(E, \| \cdot \|)$.

Remarque 1.1

1. $E = \mathbb{R}^n$, nous avons les normes suivant :

$$\begin{aligned} i) \quad \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ ii) \quad \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } p \geq 1 \\ iii) \quad \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \end{aligned}$$

2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace vectoriel des fonction de carré intégrable sur Ω est :

$$L^2(\Omega) = \left\{ g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

l'application $\| \cdot \| : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$: donnée par :

$$\|g\| = \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$i) \quad \|f\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \{|f(t)| / t \in [a, b]\}$$

$$ii) \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

$$iii) \quad \|f\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

1.1.2 Espaces de Banach

Définition 1.2 [Suite de Cauchy]

Soit F un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F est de Cauchy si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > m > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.3 [Espace complet]

Soit F un espace vectoriel normé. On dit que F est complet si toute suite de Cauchy dans F est convergente dans F .

Définition 1.4 [Espace de Banach]

Un espace de Banach est un espace normé complet.

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.5 [produit scalaire]

Soit F un espace vectoriel sur le corps \mathbb{k} . Un produit scalaire sur F est une application

$\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times F \longrightarrow \mathbb{k}$ telle que pour tout $x, y, x_1, y_2 \in F$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{k}$ on a :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
3. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.
4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

Définition 1.6 [*Espace préhilbertien*](voir[61,page 6])

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Un produit scalaire sur F définit une norme sur F donnée par :

$$\forall x \in F : \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.7 [*Espace de Hilbert*]

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur \mathbb{k} complet pour la norme induite par le produit scalaire.

1.1.4 Opérateurs linéaires non-bornés**Définition 1.8**

Soient E et F deux espaces vectoriels. Un opérateur T est une application de E dans F :

$$T : E \rightarrow F$$

Tout opérateur T linéaire est complètement défini par son graphe $G(T)$ qui est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ défini par $G(T) = \{(u, Tu), u \in D(T)\}$, où $D(T)$ est le domaine de définition de l'opérateur T .

Définition 1.9

Un opérateur T de E dans F est dit linéaire si et seulement si :

$$\forall u_1, u_2 \in E, \quad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}, \quad T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda T(u_1) + \mu T(u_2)$$

Où \mathbb{C} est le corps des scalaires de E et F .

Définition 1.10

On dit que S est une extension de T si $D(T) \subset D(S)$ et $Tu = Su$ pour tout $u \in D(T)$ (Autrement dit, $G(T) \subset G(S)$).

Remarque 1.2

Il n'est pas vrai que tout sous espace de $E \times F$ est le graphe d'un opérateur.

Définition 1.11

On dit que T est fermé si son graphe $G(T)$ est un fermé de $E \times F$.

Proposition 1.1

Un sous espace $G \subset E \times F$ est le graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si :

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0$$

Preuve ■

On note $p_1 : G \rightarrow E$ la projection donnée par $p_1(x; y) = x$. Si la propriété (1.1) est vraie, alors $(x; y_1) \in G$ et $(x; y_2) \in G$ implique que $y_1 = y_2$

Donc, l'application $T : p_1G \rightarrow F$ qui associe à $x \in p_1G$, l'unique $y \in F$ tel que $(x; y) \in G$ est bien définie et possède G comme son graphe.

Définition 1.12

On dit qu'un opérateur linéaire T est fermable dans E s'il admet un prolongement fermé.

On vérifie aussi tôt que T est fermable dans E si et seulement si l'adhérence $\overline{G(T)}$ de son graphe est un graphe (Car, on a $T \subset \overline{T}$ implique $G(T) \subset G(\overline{T})$, comme le prolongement \overline{T} est fermé, alors $G(\overline{T})$ est fermé. Donc $G(T) \subset G(\overline{T})$ implique $\overline{G(T)} \subset \overline{G(\overline{T})} = G(\overline{T})$).

Autrement dit T est fermable si et seulement si pour toute suite $(u_n) \subset D(T)$ telle que $u_n \rightarrow 0$ et $Tu_n \rightarrow v$, alors $v = 0$.

L'opérateur fermé \bar{T} dont le graphe $G(\bar{T}) = \overline{G(T)}$ est appelé fermeture de T . ($G(\bar{T}) = \overline{G(T)}$) implique que $\overline{G(T)}$ soit un graphe : $\forall (u_n; Tu_n) \in G(T) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} Tu_n) \in \overline{G(T)}$ et $(0; v) \in \overline{G(T)}$, qui nécessite $v = 0$ pour assurer que $\overline{G(T)}$ soit un graphe).

Théorème 1.1 [Théorème de l'isomorphisme]

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F . Alors T^{-1} est continu de F dans E .

Théorème 1.2 [Théorème du graphe fermé]

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F . On suppose que le graphe de T , $G(T)$ est fermé dans $E \times F$, Alors T est continu.

1.1.5 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert

Définition 1.13

Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F , on définit M^\perp l'orthogonal de M , par

$$M^\perp = \{f \in F, \langle f, g \rangle_F = 0, \forall g \in M\}.$$

Proposition 1.2

Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F , Alors M est dense dans F si et seulement si $M^\perp = \{0\}$.

Preuve ■

Supposons d'abord que M est dense dans F . Soit $f \in M^\perp \subset F$, soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de M qui converge vers f . On a $\langle f, f_n \rangle_F = 0$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). En passant à la limite, on en conclut que $\|f\|_F = 0$, Donc $f = 0$, qui donne $M^\perp = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $M^\perp = \{0\}$. Alors on a $(M^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = F$, et comme $M \subset \overline{M}$ il s'en suit que $(\overline{M})^\perp \subset M^\perp$, et donc $(M^\perp)^\perp \subset ((\overline{M})^\perp)^\perp$, mais \overline{M} est un fermé, Alors $((\overline{M})^\perp)^\perp = \overline{M}$, alors on trouve $(M^\perp)^\perp \subset \overline{M} \Rightarrow F \subset \overline{M}$. D'où $F = \overline{M}$.

1.1.6 Espaces des fonctions intégrables

Définition 1.14 [Podlubny, 1999]

Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini de \mathbb{R} et $1 \leq p \leq \infty$.

1) Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$$

2) Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω .

Théorème 1.3 [Podlubny, 1999]

Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini de \mathbb{R} .

1) Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

2) l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \{M \geq 0 : |f(t)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

1.1.7 Espace des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.15 [Kilbas et al., 2006]

Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini de \mathbb{R} et $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \max_{t \in \Omega} |f^{(k)}(t)|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

Définition 1.16 [Kilbas et al., 2006]

Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini de \mathbb{R} . On désigne par $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions f primitives des fonctions intégrables, c'est-à-dire :

$$AC(\Omega) = \left\{ f \mid \exists \phi \in L^1(\Omega) : f(t) = c + \int_0^t \phi(s) ds, \forall t \in [a, b] \right\}$$

et on appelle $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω

Définition 1.17 [Kilbas et al., 2006]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par $C_\mu^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont des dérivées continues sur Ω jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$ c'est-à-dire :

$$AC^n(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, f^{(k)} \in C(\Omega), k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}, f^{(n-1)} \in AC(\Omega) \}$$

En particulier $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$.

Une caractérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1 [Kilbas et al., 2006]

Une fonction $f \in AC^n(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si elle est représentée sous la forme :

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \forall t \in [a, b]$$

1.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette partie, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et l'exponentielle de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses application.

1.2.1 La fonction Gamma

Définition 1.18 [*Podlubny, 1999*]

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0 \quad (1.1)$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad , \quad Re(z) > 0 \quad (1.2)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= [-e^{-t}t^z]_{t=0}^{t=+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$ et en utilisant la relation (1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n! \quad (1.3)$$

Nous montrons maintenant que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

De la définition (1.1) nous avons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Si nous posons $t = y^2$, alors $dt = 2ydy$, et nous obtenons maintenant

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \quad (1.4)$$

De façon équivalent, on peut écrire

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \quad (1.5)$$

Si nous multiplions ensemble (1.4) et (1.5) nous obtenons :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \quad (1.6)$$

L'équation (1.6) est une intégrale double, qui peut être en coordonnées polaires pour obtenir

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr d\theta = \pi. \quad (1.7)$$

Ainsi, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

L'équation fonctionnelle (1.2) entraîne pour les entiers relatifs n

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) = \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) = \frac{1.5.9\dots(4n-3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5\dots(2n-1)} \sqrt{\pi}.$$

Aucune expression de base est connue pour $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ ou $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, mais il a été prouvé que ces chiffres sont transcendants (respectivement par Le Lionnais en 1983 et Chudnovsky en 1984).

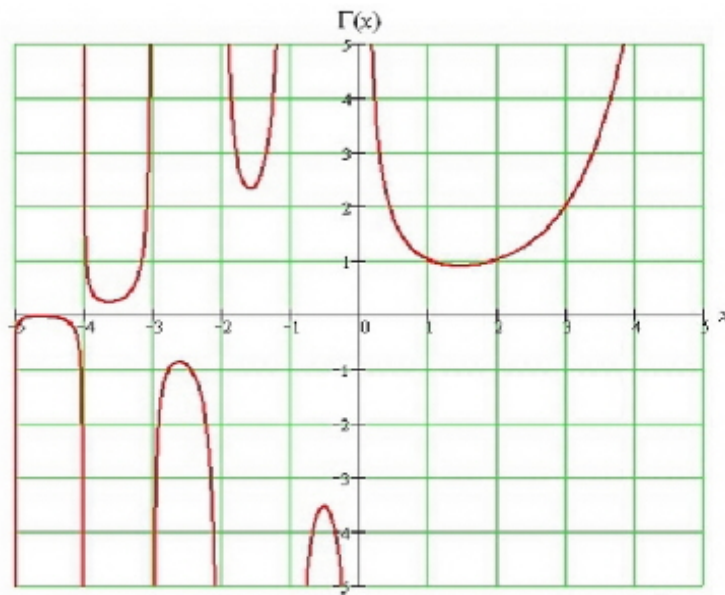
Maximum de chiffres, les valeurs numériques de certaines de ces constantes sont :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1.77245385090551602729816748334114518279754945612238\dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2.67893853470774763365569294097467764412868937795730\dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3.62560990822190831193068515586767200299516768288006\dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) = 4.590843711998803053200475827592915200343410999829340\dots$$



Graphe(1.1)-Courbe représentative de la fonction Gamma

1.2.2 la fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.19 [Podlubny, 1999]

La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes z et ω par :

$$B(z, \omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1} dt, \quad \forall (z, \omega) \in \mathbb{C}^2 \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad \operatorname{Re}(\omega) > 0. \quad (1.8)$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z + \omega)}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad \operatorname{Re}(\omega) > 0. \quad (1.9)$$

il s'ensuit de (1.9) que :

$$B(z, \omega) = B(\omega, z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad \operatorname{Re}(\omega) > 0.$$

il est symétrique

1.2.3 la fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Elle est aussi largement utilisée dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire, cette fonction à été introduite par G .M. Mittag-Leffler [MittagLeffler, 1905].

Définition 1.20 [Podlubny, 1999]

Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie comme suit :

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad (\alpha > 0, z \in \mathbb{C}). \quad (1.10)$$

En particulier :

$$E_1(z) = e^z, \quad E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}), \quad (1.11)$$

$$E_2(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cosh(z), \quad (1.12)$$

$$E_2(-z^2) = \cos(z). \quad (1.13)$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en 1953 - 1954 et elle est définie par un développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (1.14)$$

A partir de la relation (1.14), on trouve les relations suivantes

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} = E_{\alpha}(z),$$

$$E_{1,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z,$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

et en général

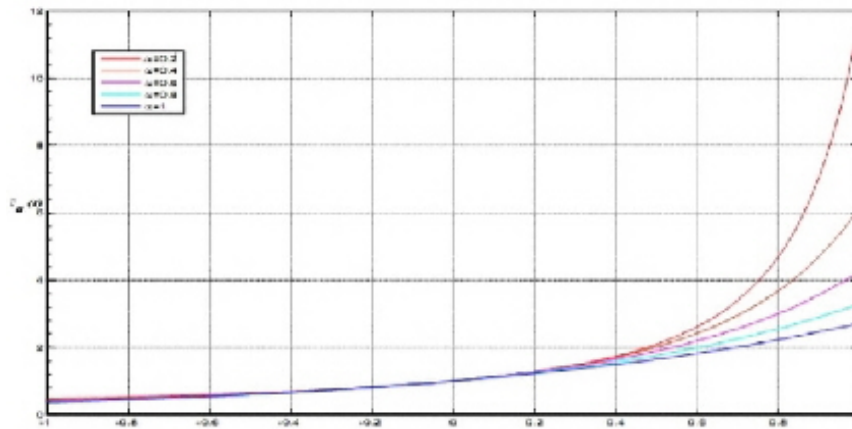
$$E_{1,p}(z) = \frac{1}{z^{p-1}} \left\{ e^z - \sum_{n=0}^{p-2} \frac{z^n}{n!} \right\}.$$

Les cosinus et les sinus hyperboliques sont aussi des cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler (1.10) :

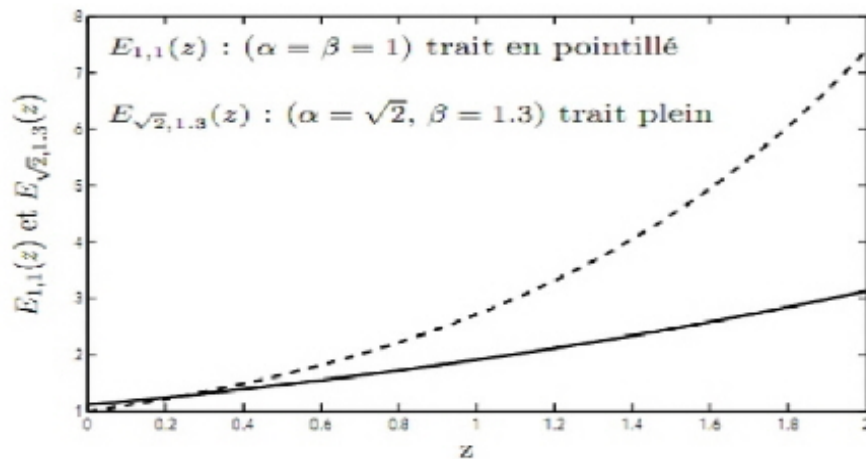
$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\Gamma(2n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle. Les deux figure ci-dessous montrent le comportement de la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre pour différentes valeurs de α et à deux paramètres pour différentes valeurs de α et β .



Graphe(1.2)- la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre



Graphe(1.3)- la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

1.3 Rappels de quelques inégalités utiles

Pour obtenir les estimations à priori, nous avons besoin des quelques inégalités auxiliaires.

1.3.1 Inégalité de Young

Soit p, q deux nombres réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

alors : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

1.3.2 Inégalité de Young avec ε

Pour $p = 2, q = 2$.

Soit ε un nombre strictement positif, alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^2 + \frac{|b|^2}{4\varepsilon}$$

1.3.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall (f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_{\Omega} (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} (g(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

où

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

1.3.4 Inégalité de Cauchy

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$|ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

1.3.5 Inégalité de Cauchy avec ε

Soit ε un nombre strictement positif, alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$$

1.3.6 Inégalité de Hölder

$\forall (f, g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$, Alors $f.g \in L^1$ et

$$\left| \int_{\Omega} |f(t)g(t)dt| \leq \left(\int_{\Omega} (f(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} (g(t))^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

où : p, q sont strictement positifs telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.2 [Inégalité de type Poincaré]

Pour $m \in \mathbb{N}$, on a l'estimation

$$\| \mathcal{F}_x^{2m} v \|_{L^2(0,A)}^2 \leq \left(\frac{A}{2} \right)^{2m} \| v \|_{L^2(0,A)}^2$$

où

$$\mathcal{F}_x^{2m} v = \int_0^x \int_0^{\zeta_1} \dots \int_0^{\zeta_{2m-1}} v(\eta, t) d\eta d\zeta_{2m-1} \dots d\zeta_1 = \int_0^x \frac{(x - \zeta)^{2m-1}}{(2m-1)!} v(\zeta, t) d\zeta.$$

Lemme 1.3 [Alikhanov, A.A]

Pour toute fonction $J(s)$ absolument continue sur l'intervalle $[0, T]$, on a l'inégalité suivante :

$$J(s) \partial_s^\alpha J(s) \geq \frac{1}{2} \partial_s^\alpha J^2(s), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Lemme 1.4 [Ladyzhenskaya. O.A]

Soit $\phi(t)$ non négatif et absolument continu sur $[0, T]$ et pour tout $t \in [0, T]$, satisfait l'inégalité

$$\frac{d\phi}{dt} \leq C(t)\phi(t) + B(t),$$

où les fonctions $C(t)$ et $B(t)$ sont sommables et non négatives sur $[0, T]$. Alors,

$$\begin{aligned}\phi(t) &\leq e^{\int_0^t C(\tau)d\tau} \left(\phi(0) + \int_0^t B(\zeta) e^{\int_0^\zeta C(\tau)d\tau} d\zeta \right) \\ &\leq e^{\int_0^t C(\tau)d\tau} \left(\phi(0) + \int_0^t B(\tau)d\tau \right).\end{aligned}$$

Le lemme (1.4)[Alikhanov,A.A] peut être généralisé comme.

Lemme 1.5 [Alikhanov,A.A]

Soit une fonction absolument continue non négative $Z(t)$ satisfaire l'inégalité

$$\partial_t^\alpha Z(t) \leq c_1 Z(t) + c_2(t), \quad 0 < \alpha < 1,$$

pour tout $t \in [0, T]$, où c_1 est une constante positive et $c_2(t)$ est une fonction non négative intégrable sur $[0, T]$. Alors,

$$Z(t) \leq Z(0)E_\alpha(c_1 t^\alpha) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1 t^\alpha)D_t^{-\alpha}c_2(t),$$

où

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad \text{et} \quad E_{\alpha,\alpha^*}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha^*)}$$

sont des fonctions de Mittag – Leffler.

1.4 Lemme de Gronwall

La forme standard du lemme de Gronwall-Bellman est donnée dans le lemme suivant :

Lemme 1.6 [Gronwall-Bellman]

Soient $f(t) \geq 0$, $h(t) \geq 0$ et $k(t) \geq 0$ des fonctions intégrables et définies sur l'intervalle $[a, b]$ si $f(t)$ satisfait :

$$f(t) \leq h(t) + \int_0^t k(t)f(t)dt, \quad \forall t \in [a, b]$$

alors on a :

$$f(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)k(s) \exp\left(\int_s^t k(\tau)d\tau\right) ds, \quad \forall t \in [a, b]$$

en particulier si $k(t)$ est constante et $h(t)$ est non décroissante, Alors :

$$f(t) \leq h(t) \exp(ct), \quad \forall t \in [a, b]$$

Chapitre 2

Dérivée et Intégrale fractionnaire

Le calcul fractionnaire a 300 ans d'existence mathématique, tout le long de ces années, connaissait les contributions de nombreux mathématiciens qui ont donné plusieurs approches et définitions.

Dans ce chapitre nous abordons un aperçu sur le calcul fractionnaire. on se restreindra à deux approches seulement des dérivées fractionnaires les plus populaires et les plus pratiques (de Riemann Liouville et celle de Caputo) ainsi que leurs propriétés.

Sommaire

- 2.1** Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$
- 2.2** Intégrales d'ordre arbitraire
- 2.3** Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville
- 2.4** Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles
- 2.5** Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville
- 2.6** Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles
- 2.7** Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville
- 2.8** Intégrales et dérivées de quelques fonctions usuelles (résultats)
- 2.9** Dérivée fractionnaire au sens de Caputo
- 2.10** Dérivées de quelques fonctions usuelles au sens de Caputo

2.11 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo

2.12 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

1.13 Composition avec l'opérateur d'intégrations fractionnaire

2.14 Comparaison entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et la dérivée au sens de Caputo

2.1 Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, on considère l'intégrale :

$$\begin{aligned} I^{(1)}f(x) &= \int_a^x f(t)dt \\ I^{(2)}f(x) &= \int_a^x dt \int_a^t f(u) du \end{aligned}$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

Plus généralement le n^{ieme} itéré de l'opérateur I peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} I^{(n)}f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n \\ I^{(n)}f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)}f(t)dt. \end{aligned} \tag{2.1}$$

pour tout entier n .

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma :

$(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann a rendu compte que le second membre de (2.1) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel donc de définir l'intégration fractionnaire .

2.2 Intégrales d'ordre arbitraire

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, b pouvant être fini ou infini.

Une primitive de f est donnée par l'expression

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t) dt \right) ds.$$

Le théorème de Fubini, nous donne

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

en itérant, on arrive à

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n - 1)!} f(\tau) d\tau.$$

2.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.1 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006]

Soit $f \in L^1([a, b])$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$) notée I_a^α est définie par :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \tag{2.2}$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma donnée par (1.1).

Théorème 2.1 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006]

Si $f \in L^1([a, b])$, alors $I^\alpha f$ existe pour presque tout $t \in [a, b]$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a, b])$.

Démonstration : En introduisant (2.2) puis en utilisant le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_a^b |I_a^\alpha f(t)| dt &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} |f(\tau)| d\tau dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(\tau)| \left(\int_\tau^b (t - \tau)^{\alpha-1} dt \right) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(\tau)|(b-\tau)^\alpha d\tau \\ &\leq \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(\tau)|d\tau. \end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1([a, b])$ la dernière quantité est fini, ce qui établit le résultat.

2.4 Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ où $\beta > -1$.

$$I_a^\alpha(t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^\beta d\tau.$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variable $\tau = a + (t-a)s$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha(t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^\beta ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} \end{aligned}$$

$$I_a^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}. \quad (2.3)$$

La relation (2.3) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par :

$${}^R D_t^{-\alpha} C = I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha.$$

Et en particulier, Si $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} {}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\ {}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\ {}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1

Soient α et β deux nombres complexes et $f \in \mathbb{C}^0([a, b])$.

$$i) I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f, \quad (Re(\alpha) > 0, (Re(\beta) > 0) \tag{2.4}$$

$$ii) \frac{d}{dt} (I_a^\alpha f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t), \quad (Re(\alpha) > 1) \tag{2.5}$$

$$iii) \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) = f(t), \quad (Re(\alpha) > 0) \tag{2.6}$$

Preuve ■

i) Pour la demonstration on utilise la fonction Bêta d'Euler. En effet :

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha (I_a^\beta f)](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds, \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$$[I_a^\alpha (I_a^\beta f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right] d\tau.$$

Le changement de variable $s = \tau + (t - \tau)\mu$, nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}d\mu \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

D'où

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}d\tau = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t).$$

ii) Pour justifier la deuxième identité on utilise les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et la relation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1).$$

iii) Pour la dernière identité, on considère la fonction $f \in \mathbb{C}^0([a, b])$, on a

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau.$$

De la relation (2.3) on peut écrire :

$$(I_a^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \rightarrow 1 \text{ quand } \alpha \rightarrow 0^+.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(t) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(t)d\tau \right| (2.7) \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau) - f(t)|d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau) - f(t)|d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau) - f(t)|d\tau. \end{aligned}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a, b]$ qui nous permet d'écrire :

$$\forall t, \tau \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \varepsilon,$$

ce qui entraîne :

$$\int_{t-\delta}^t (t - \tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \varepsilon \int_{t-\delta}^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha} \quad (2.8)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t - \tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t - \tau)^{\alpha-1} (|f(\tau)| + |f(t)|) d\tau \quad (2.9) \\ &\leq 2 \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)| \int_a^{t-\delta} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad \forall t \in [a, b] \\ &= 2M \left(\frac{(t - a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha} \right), \quad \text{où } M = \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)| \end{aligned}$$

Une combinaison de (2.7), (2.8) et (2.9) nous donne :

$$\begin{aligned} \left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} f(t) \right| &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((t - a)^\alpha - \delta^\alpha)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((t - a)^\alpha - \delta^\alpha)], \end{aligned}$$

en faisant tendre α vers 0^+ , on obtient :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} f(t) \right| \leq \varepsilon$$

autrement dit :

$$\left| \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) - f(t) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) = f(t)$$

Proposition 2.2 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006]

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0, \text{Re}(\beta) > 0$), pour toute fonction $f \in L^1([a, b])$,

on a :

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f(t)) = I_a^{\alpha+\beta} f(t) = I_a^\beta (I_a^\alpha f(t)),$$

pour presque tout $t \in [a, b]$. Si de plus $f \in \mathbb{C}([a, b])$, alors cette identité est vraie $\forall t \in [a, b]$.

Démonstration : Supposons d'abord que $f \in L^1([a, b])$, on a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (I_a^\beta f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} I_a^\beta f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \int_a^\tau (\tau - \zeta)^{\beta-1} f(\zeta) d\zeta d\tau. \end{aligned}$$

D'après le théorème (2.1), les intégrales figurant dans l'égalité précédente existent pour presque tout $t \in [a, b]$, et le théorème de Fubini permet donc d'établir

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left(\int_\zeta^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - \zeta)^{\beta-1} d\tau \right) f(\zeta) d\zeta.$$

En effectuant le changement de variable $\tau = \zeta + (t - \zeta)s$,

où $s = 0$ quand $\tau = \zeta$ et $s = 1$ quand $\tau = t$ et $d\tau = (t - \zeta)ds$, on obtient :

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \zeta)^{\alpha+\beta-1} \left(\int_a^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \right) f(\zeta) d\zeta.$$

Enfin, en tenant compte de la définition de la fonction Bêta (1.8) puis de la relation (1.9), on obtient :

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^t (t - \zeta)^{\alpha+\beta-1} f(\zeta) d\zeta = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t).$$

Supposons maintenant que $f \in \mathbb{C}([a, b])$, alors (d'après les théorèmes sur les intégrales dépendant de paramètres) $I_a^\alpha f \in \mathbb{C}([a, b])$, et par suite $I_a^{\alpha+\beta} f, I_a^\alpha I_a^\beta f \in \mathbb{C}([a, b])$.

Ainsi, d'après ce qui précède, les deux fonctions continues $I_a^{\alpha+\beta} f, I_a^\alpha I_a^\beta f$ coïncident presque partout sur $[a, b]$, elles doivent donc coïncider partout sur $[a, b]$.

Le théorème suivant fournit un résultat concernant l'inversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire.

2.5 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006]

Soit $f \in L^1([a, b])$, une fonction intégrable sur $[a, b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) notée ${}^R D_t^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha f(t) &= D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n [I_a^{n-\alpha} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \forall t \in [a, b]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

où $n-1 < [\operatorname{Re}(\alpha)] < n$, et $[\operatorname{Re}(\alpha)]$ est la partie entière de $\operatorname{Re}(\alpha)$.

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$${}^R D_t^0 f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dt}\right) \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t).$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

$${}^R D_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\right) \int_a^t f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t), \forall t \in [a, b]$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Si de plus $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, \forall t \in [a, b].$$

2.6 Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Calculons la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t - a)^\beta$.

En utilisant (2.3) on peut écrire

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha (t - a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} (t - a)^{\beta + n - \alpha} \right], \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t - a)^{\beta + n - \alpha}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

on sait que

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^n (t - a)^{\beta + n - \alpha} = (\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1) (t - a)^{\beta - \alpha} \quad (2.12)$$

Par substitution de (2.10) dans (2.11) on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)}{(\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1) \Gamma(\beta - \alpha + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Remarque 2.1

i) La formule de dérivation (2.13) se réduit pour $\alpha = 1$ à

$${}_a^R D_t^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} = \beta (t - a)^{\beta - 1} = \frac{d}{dt} (t - a)^\beta. \quad (2.14)$$

ii) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$${}_a^R D_t^\alpha 1 = \frac{(t - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)},$$

c'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle

ni constante mais on a

$${}_a^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

2.7 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans les propositions suivantes :

Proposition 2.3 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006]

Pour $n-1 < \alpha \leq n$, $m-1 < \beta \leq m$, on a :

1) L'opérateur de Riemann-Liouville est linéaire

$${}_a^R D_t^\alpha(\lambda f + g)(t) = \lambda({}_a^R D_t^\alpha f)(t) + ({}_a^R D_t^\alpha g)(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) En général

$${}_a^R D_t^\alpha({}_a^R D_t^\beta f(t)) \neq {}_a^R D_t^\beta({}_a^R D_t^\alpha f(t)).$$

Démonstration : 1) Soit $f, g \in L^1([a, b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha(\lambda f + g)(t) &= D^n I_a^{n-\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) \\ &= \lambda D^n I_a^{n-\alpha}((f + g)(t)). \end{aligned}$$

Comme la dérivée n^{ieme} et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha(\lambda f + g)(t) &= \lambda D^n I_a^{n-\alpha} I f(t) + D^n I_a^{n-\alpha} g(t) \\ &= \lambda({}_a^R D_t^\alpha f)(t) + ({}_a^R D_t^\alpha g)(t). \end{aligned}$$

2) on a :

$${}_a^R D_t^\alpha({}_a^R D_t^\beta f(t)) = {}_a^R D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} {}_a^R D_t^{\beta-k} f(a) \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)},$$

et

$${}^R D_t^\beta (D^\alpha f(t)) = {}^R D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} {}^R D_t^{\alpha-k} f(a) \frac{(t-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(1-\beta-k)}$$

Par suite les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ne commutent que si $\alpha = \beta$

et ${}^R D_t^{\alpha-k} f(a) = 0$, pour tout $k = 1, 2, \dots, n$,

et ${}^R D_t^{\beta-k} f(a) = 0$, pour tout $k = 1, 2, \dots, m$.

Ce qui complète la preuve.

Proposition 2.4 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006]

Soient $\alpha, \beta > 0$ telle que $n - 1 < \alpha \leq n$, $m - 1 < \beta \leq m$ telle que $n, m \in \mathbb{N}^*$

1) Pour $f \in L^1([a, b])$, l'égalité :

$${}^R D_t^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t),$$

est vraie pour presque tout $t \in [a, b]$.

2) Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a, b])$, la relation :

$${}^R D_t^\beta (I_a^\alpha f(t)) = I_a^{\alpha-\beta} f(t),$$

est vraie pour presque tout $t \in [a, b]$.

En particulier, lorsque $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $\alpha > k$, alors :

$${}^R D_t^k (I_a^\alpha f(t)) = I_a^{\alpha-k} f(t)$$

3) Si $\beta \geq \alpha > 0$, et la dérivée fractionnaire ${}^R D_t^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a :

$${}^R D_t^\beta (I_a^\alpha f(t)) = I_a^{\beta-\alpha} f(t).$$

4) Pour $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires ${}^R D_t^\alpha f$, ${}^R D_t^{k+\alpha} f$ existent, alors on a :

$${}^R D_t^k ({}^R D_t^\alpha f(t)) = {}^R D_t^{k+\alpha} f(t).$$

Démonstration : 1) En utilisant (2.10) et la Proposition (2.1), on a pour $n = [\alpha] + 1$

$${}^R D_t^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(t) = f(t), \text{ p.p sur } [a, b].$$

2) D'après (2.10) et la Proposition (2.1) on obtient :

Pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\beta (I_a^\alpha f(t)) &= D^n I_a^{n-\beta} (I_a^\alpha f)(t) \\ &= D^n (I_a^{n+\alpha-\beta} f)(t) \\ &= D^n I_a^n (I_a^{\alpha-\beta} f)(t) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(t) \end{aligned}$$

3) Pour $\beta \geq \alpha > 0$, on a :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\beta (I_a^\alpha f(t)) &= D^m I_a^{m-\beta} (I_a^\alpha f)(t) \\ &= D^m (I_a^{m-(\beta-\alpha)} f)(t) \\ &= D_a^{\beta-\alpha} f(t) \end{aligned}$$

existe pour $i - 1 \leq \beta - \alpha \leq i$ et $i \leq m$

4) On a pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} {}^R D_t^k ({}^R D_t^\alpha f(t)) &= D^k D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= D^{k+n} I_a^{n-\alpha+k-k} f(t) \\ &= D^{k+n} I_a^{k+n-(k+\alpha)} f(t) \\ &= {}^R D_t^{k+\alpha} f(t) \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve.

Définition 2.3 [Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche]

$$\forall t > a, {}^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Définition 2.4 [Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche]

$$\forall t > a, {}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Les deux définitions précédentes utilisent le passé de f , c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $a < \tau < t$. Nous pouvons définir des opérateurs similaires, qui utilisent le futur de f , c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $t < \tau < b$. On définit ensuite les deux opérateurs suivants :

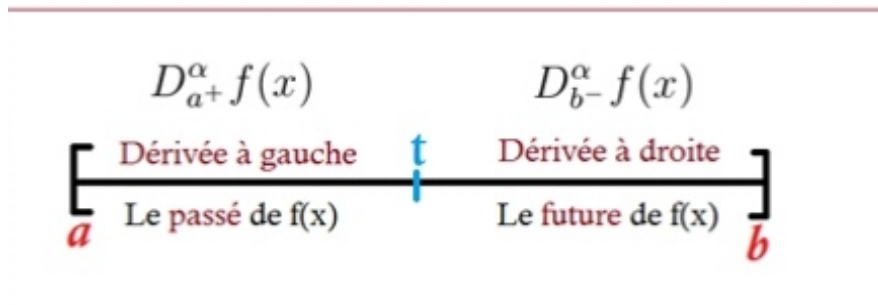
Définition 2.5 [Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite]

$$\forall t < b, {}^R D_b^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (t - \tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau$$

Définition 2.6 [Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite]

$$\forall t < b, {}^R D_b^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (t - \tau)^{n-\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}^R D_t^\alpha f(t), {}^R D_b^\beta f(t)$ sont définies.



Graph(2,1)-Les dérivées à droite et à gauche de $f(x)$

2.8 Intégrales et dérivées de quelques fonctions usuelles (résultats)

$f(t)$	${}_a I_t^\alpha$	${}_a D_t^\alpha$	Spécification
$(t-a)^\beta$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > -1$
t^β	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}t^{\alpha+\beta}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-\alpha}$	$a = 0, \alpha > 0, \beta > -1$
C	$\frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha$	$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, C \in \mathbb{R}$
$\exp(kt)$	$k^{-\alpha} \exp(kt)$	$k^\alpha \exp(kt)$	$a = -\infty, a > 0, k > 0$

2.9 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouer un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs dont Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisé [Caputo, 1967], car les problèmes appliqués en viscoélasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques comme par exemple $u(0), u'(0), \dots$ ect, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires. Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, la solution de ce problème a été proposée par M.Caputo dans sa définition qu'il a adapté avec F. Mainardi dans la structure de la théorie de viscoélasticité [Caputo et Mainardi, 1971]. Dans cette partie on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles. Soit $[a, b]$ un intervalle fini de \mathbb{R} , et soit $I_a^\alpha, {}_a D_t^\alpha$ les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires donnés par (2.10) et (2.14) respectivement.

Définition 2.7 [*Kilbas et al., 2006*]

La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^C D_t^\alpha f(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) \geq 0$), sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right), \quad (2.15)$$

où

$$n = [\text{Re}(\alpha)] + 1 \text{ pour } \alpha \notin \mathbb{N}, \quad n = \alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

Si $\alpha = 0$, alors :

$${}^C D_t^0 f(t) = f(t).$$

En particulier, lorsque $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$, la relation (2.15) prend la forme :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha [f(t) - f(a)].$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (2.15) est définie pour les fonctions $f(t)$ pour lesquelles la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville existe en particulier, elle est définie pour les fonctions $f \in AC^n([a, b])$. On a le théorème suivant :

Théorème 2.2 [*Kilbas et al., 2006*]

Soit $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ et soit n donné par (2.16). Si $f \in AC^n([a, b])$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^C D_t^\alpha f(t)$ existe presque partout sur $[a, b]$.

1. Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}^C D_t^\alpha f(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [a, b] \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n f(t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

En particulier, lorsque $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$ et $f \in AC([a, b])$, alors :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, \forall t \in [a, b] \\ &= I_a^{1-\alpha} f'(t). \end{aligned} \quad (2.18)$$

2. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

Démonstration : D'après les Définitions (2.2) et (2.7) on a :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha f(t) &= {}^R D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right) \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right). \end{aligned}$$

Par :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha f(t) &= D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0. \end{aligned}$$

On pose :

$$F(t) = I_a^{n-\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right).$$

D'après (2.2) on a :

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau - a)^k \right) d\tau.$$

En intégrant par partie, on aura :

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau - a)^k \right) d\tau$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[-\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right) d\tau \right]_{\tau=a}^{\tau=t} \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} D \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right) d\tau \right] \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha+1-1} D \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right) d\tau \\
 &= I_a^{n-\alpha+1} D \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right).
 \end{aligned}$$

En répétant ce procédé n fois, on trouve :

$$\begin{aligned}
 F(t) &= I_a^{n-\alpha+n} D^n \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) \\
 &= I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right).
 \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$, par conséquent

$$F(t) = I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 {}^C D_t^\alpha f(t) &= D^n F(t) \\
 &= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\
 &= I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve.

Théorème 2.3 [Kilbas et al.,2006]

Soit $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ et soit n donnée par (2.16) et $f \in \mathbb{C}^n([a, b])$. Alors la dérivée fractionnaire de

Caputo ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ est continue sur $[a, b]$.

1. Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ est donnée par (2.17). En particulier, elle prend la forme (2.18) pour $0 < \alpha < 1$.
2. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

2.10 Dérivées de quelques fonctions usuelles au sens de Caputo

– la dérivée de la fonction $f(t) = (t - a)^\alpha$

Soient n un nombre entier et p un nombre non entier avec $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ et $\beta > n - 1$.

Alors

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} (\tau - a)^{\alpha - n},$$

d'où

$${}_a^C D_t^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - n} d\tau.$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t - a)$ nous arrivons à :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{\beta - n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)\delta(n - \alpha, \beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

– La dérivée d'une fonction constante

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit :

$${}^C D_t^\alpha C = 0.$$

2.11 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo, ont les propriétés résumées dans les propositions suivantes :

Proposition 2.5 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006]

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $n-1 < \text{Re}(\alpha) < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que ${}^C D_t^\alpha f(t)$ et ${}^C D_t^\alpha g(t)$ existent. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire :

$${}^C D_t^\alpha (\lambda f + g)(t) = \lambda ({}^C D_t^\alpha f)(t) + ({}^C D_t^\alpha g)(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : On a d'après (2.17)

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha (\lambda f + g)(t) &= I_a^{n-\alpha} D^n ((\lambda f + g)(t)) \\ &= \lambda I_a^{n-\alpha} D^n f(t) + I_a^{n-\alpha} D^n g(t) \\ &= \lambda ({}^C D_t^\alpha f)(t) + ({}^C D_t^\alpha g)(t). \end{aligned}$$

Comme la dérivée $n^{\text{ième}}$ et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha (\lambda f + g)(t) &= \lambda I_a^{n-\alpha} D^n f(t) + I_a^{n-\alpha} D^n g(t) \\ &= \lambda ({}^C D_t^\alpha f)(t) + ({}^C D_t^\alpha g)(t). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Proposition 2.6 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006]

On suppose que $n - 1 < \text{Re}(\alpha) < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^C D_t^\alpha f(t)$ existe, alors :

$${}^C D_t^\alpha D^n f(t) = {}^C D_t^{\alpha+n} f(t) \neq D^n {}^C D_t^\alpha f(t).$$

2.12 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 2.4 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006]

Soit $\text{Re}(\alpha) > 0$ avec $n - 1 < \text{Re}(\alpha) < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) et soit f une fonction telle que les dérivées fractionnaires ${}^C D_t^\alpha f(t)$ et ${}^R D_t^\alpha f(t)$ existent alors :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k-\alpha}$$

Démonstration : On considère le développement limité en série de Taylor de la fonction f en $t = a$

$$\begin{aligned} f(t) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(t-a)^{n-1} + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k + R_{n-1}. \end{aligned}$$

Avec

$$R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1} d\tau.$$

En utilisant les propriétés d'intégration d'ordre n , on a :

$$R_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau = I_a^n f^{(n)}(t).$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville on a :

$$\begin{aligned}
 {}^R D_t^\alpha f(t) &= {}^R D_t^\alpha f \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (t-a)^k + R_{n-1} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} {}^R D_t^\alpha f(t-a)^k + {}^R D_t^\alpha R_{n-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) \Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1) \Gamma(k+1)} (t-a)^{k-\alpha} + {}^R D_t^\alpha f I_a^n f^{(n)}(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} + ({}^C D_t^\alpha f)(t).
 \end{aligned}$$

Donc

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}.$$

D'où le résultat.

Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, on aura :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha f(t).$$

2.13 Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

L'opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville mais pas un inverse à droite car : Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ on a :

$${}^C D_t^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t) \text{ et } I_a^\alpha ({}^C D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k. \tag{2.19}$$

L'avantage principal de l'approche Caputo et que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour

les équations différentielles d'ordre entier.

2.14 Comparaison entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et la dérivée au sens de Caputo

Dans une modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de R-L mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires à la borne inférieure de l'intervalle. Caputo a utilisé une approche pour éviter ce problème.

Pour $0 \leq n - 1 \leq \alpha < n$, et une fonction f telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a, b]$; La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction f est donnée par :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} \frac{d^n}{dt^n} f(\tau) d\tau = I_a^{n - \alpha} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right],$$

avec $n - 1 \leq \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

Et la relation entre les dérivés de Riemann-Liouville et Caputo est donnée comme suit :

supposons que f est fonction telle que ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$, ${}_a^R D_t^\alpha f(t)$ existent, alors

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t - a)^{k - \alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(a).$$

Les deux dérivées sont égales dans le cas où $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n - 1$

- L'avantage principale de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équation différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.

- Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est $\frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}$.

- Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville), c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $n - 1 < \alpha < n$ par l'approche de

Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(n - \alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m , mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $n - 1 < \alpha < n$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(n - \alpha)$.

Chapitre 3

Etude d'une classe d'équations d'onde de diffusion avec des conditions aux limites non locales

Dans ce chapitre on étudie une équation d'onde de diffusion fractionnaire de Caputo d'ordre paire avec des conditions purement non locales de type intégral. On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel. La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

Sommaire

- 3.1 Introduction
- 3.2 Position du problème
- 3.3 Estimations a priori ses conséquences
- 3.4 Existence de solution

3.1 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires sont obtenues en généralisant les équations différentielles à un ordre arbitraire, elles jouent un rôle crucial dans l'ingénierie, la physique et les mathématiques appliquées. Des phénomènes complexes peuvent être modélisés en utilisant ces équations. De ce fait, on peut trouver de nombreuses applications dans l'étude de la viscoélasticité, l'électrochimie, traitement du signal, théorie du contrôle, milieux poreux, mécanique des études, la rhéologie, le transport par diffusion, les réseaux électriques, la théorie électromagnétique et de nombreux autres processus physiques [28,60]. Récemment, il ya eu un développement significatif dans le domaine des équations fractionnaires aux dérivées partielles ; voir les monographies de Kilbas et al. [12] et dans les papiers [20,61].

La théorie de l'existence et l'unicité des solutions des problèmes aux limites et aux valeurs initiales pour les équations différentielles fractionnaires est largement étudiée par de nombreux auteurs, voir par exemple [19,46,62,63,69].

Pour le cas des équations d'onde de diffusion fractionnaire avec des dérivées d'ordre supérieur et des conditions aux limites classiques, il n'y a que peu d'articles traitant de l'existence et du caractère unique d'une solution telle comme [44]. Dans ce chapitre, un problème de valeur aux limites initiale avec des contraintes purement non locales de type intégral pour une équation d'onde de diffusion fractionnaire d'ordre paire de Caputo est étudié en appliquant la méthode d'analyse fonctionnelle, la méthode dite d'inégalité d'énergie basée principalement sur des estimations a priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème étudié.

Ce travail peut être considéré comme une contribution au développement de la méthode d'analyse fonctionnelle utilisée pour prouver le bien posé des problèmes d'ordre fractionnaire. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de cette méthode pour étudier l'existence et l'unicité de la solution pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire temporel avec des conditions non locales.

L'objectif de ce chapitre est démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel. La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

Dans ce chapitre, il est aussi intéressant de détailler le trevaile, de Said Mesloub et Faten Aldosari dans [65] pour une équation d'onde de diffusion fractionnaire de Caputo d'ordre paire avec des conditions purement non locales de type intégral.

3.2 Position du problème

Dans le domaine rectangulaire

$$Q = (0, 1) \times (0, T) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < t < T\} \text{ où } 0 \leq T < \infty,$$

on considère une équation différentielle

$$\mathcal{L}v = \partial_t^{\alpha+1}v + (-1)^m \theta(t) \frac{\partial^{2m}v}{\partial x^{2m}} = f(x, t), \quad x \in (0, 1) \quad t \in (0, T). \quad (3.1)$$

Avec les conditions initiales

$$\begin{cases} l_1 v = v(x, 0) = \varphi(x), & x \in (0, 1) \\ l_2 v = v_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (3.2)$$

et les conditions intégrales

$$\int_0^1 x^i v(x, t) dx = 0, \quad i = \overline{0, 2m-1}, \quad t \in (0, T), \quad (3.3)$$

où $\theta(t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions qui satisfont certaines conditions qui seront précisées ultérieurement.

La solution du problème (3, 1) peut être considérée comme une solution du problème sous la forme opérationnelle :

$$\mathcal{L}v = \Upsilon, \quad (3.4)$$

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ \begin{array}{l} v \in L^2(Q), \quad \partial_t^{\alpha+1}v, \quad \frac{\partial^{2m}v}{\partial x^{2m}} \in L^2(Q) \\ \int_0^1 x^i v dx = 0, \quad i = \overline{0, 2m-1}, \quad t \in (0, T) \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

où $\mathcal{L} = (\mathcal{L}, l_1, l_2)$ est considéré de B à V , et B est l'espace de Banach des fonctions $v \in L^2(Q)$, dont la norme est :

$$\|v\|_B^2 = \sup_{0 \leq t \leq T} \left(D_t^{\alpha-1} \|\mathcal{F}_x^m v_t(x, t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 v^2(x, t) dx \right), \quad (3.6)$$

qui est fini, et V est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments $\Upsilon = (f, \varphi, \psi)$ dont la norme est :

$$\|\Upsilon\|_V^2 = \|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (3.7)$$

Ici, \mathcal{L} désigne l'opérateur différentiel fractionnaire temporel

$$\mathcal{L} = {}^C \partial_t^{\alpha+1} + (-1)^m \theta(t) \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}. \quad (3.8)$$

Pour tout entier positif $0 < \sigma < 1$, la dérivée de Caputo et de Riemann Liouville sont respectivement définies comme suit :

1. Dérivée au sens de **Caputo à gauche**

$${}_0^C \partial_t^\sigma u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^t \frac{\partial u(x, t)}{\partial \tau} \frac{1}{(t-\tau)^\sigma} d\tau.$$

2. Dérivée au sens de **Riemann-Liouville à gauche**

$${}_0^R \partial_t^\sigma u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, t)}{(t-\tau)^\sigma} d\tau.$$

3.3 Estimations a priori et ses conséquences

Théorème 3.1

Supposons que la fonction $\theta(t)$ satisfait les conditions

$$i) c_2 \leq \theta(t) \leq c_1, \quad ii) c_4 \leq \theta'(t) \leq c_3, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.9)$$

où c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes positives.

Alors, pour tout $v \in D(\mathcal{L})$, il existe une constante k positive telle que l'estimation a priori suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \left(D_t^{\alpha-1} \|\mathcal{F}_x^m v_t(x, t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 v^2(x, t) dx \right) \\ & \leq k(\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2), \end{aligned} \quad (3.10)$$

où $k = k(\eta, \delta, \rho)$ est donnée par

$$k = \rho \left(1 + \frac{T^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right). \quad (3.11)$$

Preuve ■

Pour $v \in D(\mathcal{L})$, on considère le produit scalaire en $L^2(0, 1)$ de l'équation différentielle du problème (3, 1) et l'opérateur intégrodifférentiel $Nv = 2(-1)^m \mathcal{F}_x^{2m} v_t$, on a

$$\begin{aligned} & 2(-1)^m (\partial_t^{\alpha+1} v, \mathcal{F}_x^{2m} v_t)_{L^2(0,1)} + 2 \left(\theta(t) \frac{\partial^{2m} v}{\partial x^{2m}}, \mathcal{F}_x^{2m} v_t \right)_{L^2(0,1)} \\ & = (\mathcal{L}v, Nv)_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'intégration par parties de chaque terme du côté gauche de l'équation (3.12) donne

$$\begin{aligned} 2(-1)^m (\partial_t^{\alpha+1} v, \mathcal{F}_x^{2m} v_t)_{L^2(0,1)} & = 2(-1)^m (\partial_t^\alpha v_t, \mathcal{F}_x^{2m} v_t)_{L^2(0,1)} \\ & = 2 (\partial_t^\alpha (\mathcal{F}_x^m v_t), \mathcal{F}_x^m v_t)_{L^2(0,1)}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} 2 \left(\theta(t) \frac{\partial^{2m} v}{\partial x^{2m}}, \mathcal{F}_x^{2m} v_t \right)_{L^2(0,1)} & = 2 \int_0^1 \theta(t) \frac{\partial^{2m} v}{\partial x^{2m}} \mathcal{F}_x^{2m} v_t dx \\ & = 2(-1)^m \left(\theta(t) \frac{\partial^m v}{\partial x^m}, \mathcal{F}_x^m v_t \right)_{L^2(0,1)} \\ & = 2(\theta(t)v, v_t)_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Substitution de (3, 13) et (3, 14) dans (3, 12), on obtient

$$\begin{aligned} & 2(\partial_t^\alpha(\mathcal{F}_x^m v_t), \mathcal{F}_x^m v_t)_{L^2(0,1)} + 2(\theta(t)v, v_t)_{L^2(0,1)} = (\mathcal{L}v, Nv)_{L^2(0,1)} \\ & = 2(-1)^m(f, \mathcal{F}_x^{2m} v_t)_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Par les lemmes (1, 2) et (1, 3) et l'inégalité de Cauchy avec ε , l'identité (3, 15) se réduit à

$$\partial_t^\alpha \|\mathcal{F}_x^m v_t\|_{L^2(0,1)}^2 + (\theta(t)v, v_t)_{L^2(0,1)} \leq \|f\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2^m} \|\mathcal{F}_x^m v_t\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (3.16)$$

Remplacement de t par τ , intégrant par rapport à τ de zéro à t et en utilisant des conditions données, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^t \partial_\tau^\alpha \|\mathcal{F}_x^m v_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^t \int_0^1 \theta(\tau) v v_\tau dx d\tau \\ & \leq \int_0^t \|f(x, \tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \frac{1}{2^m} \int_0^t \|\mathcal{F}_x^m v_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Le deuxième terme sur le côté gauche peut être évalué comme

$$2 \int_0^t \int_0^1 \theta(\tau) v v_\tau dx d\tau = \int_0^1 \theta(\tau) v^2 dx - \theta(0) \int_0^1 \varphi^2(x) dx - \int_0^t \int_0^1 \theta'^2 v^2 dx d\tau. \quad (3.18)$$

Ainsi, l'inégalité (3, 17) devient

$$\begin{aligned} & \int_0^t \partial_\tau^\alpha \|\mathcal{F}_x^m v_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^1 \theta(t) v^2 dx \\ & \leq \theta(0) \int_0^1 \varphi^2(x) dx + \int_0^t \int_0^1 \theta'^2 v^2 dx d\tau \\ & \quad + \int_0^t \|f(x, t)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \frac{1}{2^m} \int_0^t \|\mathcal{F}_x^m v_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \partial_\tau^\alpha \|\mathcal{F}_x^m v_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau & = D^{\alpha-1} \|\mathcal{F}_x^m v_t\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \quad - \frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \|\mathcal{F}_x^m \psi\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

En évoquant l'inégalité de Young avec ε et en utilisant (3, 20), on déduit de (3, 18) que

$$\begin{aligned} & D^{\alpha-1} \|\mathcal{F}_x^m v_t\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq \eta \left(\|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \|f\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \right) \\ & \quad + \eta \left(\int_0^t \|\mathcal{F}_x^m v_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^t \int_0^1 v^2(x, \tau) dx d\tau \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

où

$$\eta = \frac{\max \left(1, c_1, c_3^2, 2^{-m}, \frac{T^{1-\alpha} 2^{-m}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right)}{\min(1, c_2)}. \quad (3.22)$$

Si, dans le lemme (1.3), on pose

$$\phi(t) = \int_0^t \int_0^1 v^2(x, \tau) dx d\tau, \quad \phi'(t) = \|v\|_{L^2(0,1)}^2, \quad \text{et} \quad \phi(0) = 0. \quad (3.23)$$

En obtient

$$\begin{aligned} \phi(t) & = \int_0^t \int_0^1 v^2(x, \tau) dx d\tau \\ & \leq T e^{\eta T} \eta \left(\int_0^t \|f(x, \tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^t \|\mathcal{F}_x^m v_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \right) \\ & \quad + T e^{\eta T} \eta \left(\|\varphi(x)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\psi(x)\|_{L^2(0,1)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Par conséquent (3, 22) se transforme en

$$\begin{aligned} & D^{\alpha-1} \|\mathcal{F}_x^m v_t\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq \delta \left(\int_0^t \|f(x, \tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^t \|\mathcal{F}_x^m v_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \right) \\ & \quad + \delta \left(\|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

où

$$\delta = \max\{\eta, \eta^2, T e^\eta\}. \quad (3.26)$$

Maintenant, on posons

$$Z(t) = \int_0^t \|\mathcal{F}_x^m v_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau, \quad \partial_t^\alpha Z(t) = D^{\alpha-1} \|\mathcal{F}_x^m v_t\|_{L^2(0,1)}^2,$$

dans le lemme (1.4) on obtient

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_0^t \|\mathcal{F}_x^m v_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \\ &\leq \delta \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(\delta t^\alpha) \left(D_t^{-\alpha-1} \|f\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{T}{\alpha \Gamma(\alpha)} \|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{T}{\alpha \Gamma(\alpha)} \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \\ &\leq \delta \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(\delta t^\alpha) \max \left\{ 1, \frac{T}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right\} \left(D_t^{-\alpha-1} \|f\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

La combinaison de (3, 25) et (3, 38) conduit à

$$\begin{aligned} &D_t^{\alpha-1} \|\mathcal{F}_x^m v_t\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq \rho \left(\int_0^t \|f(x, \tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + D_t^{-\alpha-1} \|f\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\phi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

où

$$\rho = \delta \max \left(1, \delta \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(\delta t^\alpha) \max \left\{ 1, \frac{T}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right\} \right). \quad (3.29)$$

Il est évident que

$$\begin{aligned} D_t^{-\alpha-1} \|f\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \|f\|_{L^2(0,1)}^2 dt \\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^T \|f\|_{L^2(0,1)}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ensuite, il découle de (3, 29) et (3, 28) que

$$D_t^{\alpha-1} \|\mathcal{F}_x^m v_t\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v\|_{L^2(0,1)}^2 \leq k \left(\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 \right), \quad (3.31)$$

où

$$k = \rho \left(1 + \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right).$$

Observez que le côté droit de (3, 31) est indépendant de la variable t , nous sommes donc autorisés à prendre la plus petite borne supérieure du côté gauche par rapport à t sur $[0, T]$, et l'estimation a priori (3, 10) puis suit et dont on déduit l'unicité et la dépendance continue de la solution sur les données d'entrée du problème (3, 1).

3.4 Existence de solution

Dans cette section, nous démontrons le résultat principal concernant l'existence de la solution du problème (3, 1) L'estimation a priori (3, 10) montre que l'opérateur non borné \mathcal{L} a une inverse $\mathcal{L}^{-1} : R(\mathcal{L}) \rightarrow B$. Puisque $R(\mathcal{L})$ est un sous-ensemble de V , nous pouvons donc construire sa fermeture $\overline{\mathcal{L}}$ de manière à ce que l'estimation (3, 10) soit valable pour cette extension et $R(\overline{\mathcal{L}})$ coïncide avec tout l'espace B . Par conséquent, ce qui suit :

Corollaire 3.1

L'opérateur $\mathcal{L} : B \rightarrow V$ admet une fermeture (la preuve est similaire à celle de [47]). L'estimation (3, 10) peut ensuite être étendue à

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left(D_t^{\alpha-1} \|\mathcal{F}_x^m v_t\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 v^2(x, t) dx \right) \leq k \left(\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 \right), \quad (3.32)$$

pour tout $v \in D(\overline{\mathcal{L}})$.

Il résulte de (3, 32) que la solution forte du problème (3, 1) est unique, c'est-à-dire $\overline{\mathcal{L}}v = V$. On déduit également de l'estimation (3, 32) ce qui suit :

Corollaire 3.2

$R(\overline{\mathcal{L}})$ est un sous-ensemble fermé dans V et $R(\mathcal{L}) = R(\overline{\mathcal{L}})$ et $\overline{\mathcal{L}}^{-1} = \overline{\mathcal{L}^{-1}}$.

Nous sommes maintenant prêts à donner le résultat de l'existence de la solution du problème (3, 1).

Théorème 3.2

Supposons que les conditions du Théorème (3.1) sont satisfaites. Alors, pour tout

$\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \in V$, il existe une solution forte unique $v = \overline{\mathcal{L}}^{-1}\Upsilon = \overline{\mathcal{L}}^{-1}\Upsilon$ du problème (3, 1).

Preuve ■

L'estimation (3, 32) affirme que, si une solution forte de (3, 1) existe, elle est unique et dépend continuellement des données. Le corollaire (3, 2) dit que, pour prouver que le problème (3, 1) admet une solution forte pour tout $\Upsilon = (f, \varphi, \psi) \in V$, il suffit de montrer que la fermeture du domaine de l'opérateur \mathcal{L} est dense en F . Pour établir l'existence de la solution forte du problème (3, 1), on utilise un argument de densité. Autrement dit, nous montrons que l'intervalle $R(\mathcal{L})$ de l'opérateur \mathcal{L} est dense dans l'espace V pour chaque élément v dans l'espace B de Banach. Pour cela, nous considérons le cas particulier de densité suivant.

Théorème 3.3

Supposons que les conditions du théorème (3, 1) soient satisfaites. Si pour toutes les fonctions $v \in D(\mathcal{L})$ telles que

$$\begin{cases} l_1 v = v(x, 0) = 0 \\ l_2 v = v_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

et pour une fonction $\omega \in L^2(Q)$, on a

$$\int_0^\tau (\mathcal{L}v, \omega)_{L^2(0,1)} dt = 0, \quad (3.33)$$

alors ω disparaît a.e dans Q .

Preuve ■

Identité (3, 32) équivaut à

$$\int_0^T (\partial_t^{\alpha+1} v + (-1)^m \theta(t) \frac{\partial^{2m} v}{\partial x^{2m}}, \omega)_{L^2(0,1)} dt = 0. \quad (3.34)$$

Supposons qu'une fonction $\sigma(x, t)$ vérifie les conditions aux limites et les conditions initiales en (3, 1) et telles que $\sigma, \sigma_x, \mathcal{F}_t \sigma, \mathcal{F}_t \mathcal{F}_x^{2m} \sigma, \mathcal{F}_t^2 \sigma$ et $\partial_t^{\beta+1} \sigma \in L^2(Q)$, nous avons mis

$$v(x, t) = \mathcal{F}_t^2 \sigma = \int_0^t \int_0^s \sigma(x, z) dz ds. \quad (3.35)$$

L'équation (3, 34) devient alors

$$\int_0^T \left(\partial_t^{\alpha+1} \mathcal{F}_t^2 \sigma + (-1)^m \theta(t) \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} (\mathcal{F}_t^2 \sigma), \omega \right)_{L^2(0,1)} dt = 0. \quad (3.36)$$

Nous introduisons maintenant la fonction

$$\omega(x, t) = \mathcal{F}_t \sigma + (-1)^m \mathcal{F}_x^{2m} \mathcal{F}_t \sigma. \quad (3.37)$$

L'équation (3, 36) se réduit alors à

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\partial_t^{\alpha+1} \mathcal{F}_t^2 \sigma, \mathcal{F}_t \sigma)_{L^2(0,1)} dt + \int_0^T (\partial_t^{\alpha+1} \mathcal{F}_t^2 \sigma, (-1)^m \mathcal{F}_x^{2m} \mathcal{F}_t \sigma)_{L^2(0,1)} dt \\ & + \int_0^T \left((-1)^m \theta(t) \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} (\mathcal{F}_t^2 \sigma), \mathcal{F}_t \sigma \right)_{L^2(0,1)} dt + \int_0^T \left(\theta(t) \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} (\mathcal{F}_x^{2m}), \mathcal{F}_t \sigma \right)_{L^2(0,1)} dt = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Rappelons que la fonction σ satisfait les conditions aux limites dans (3, 1) et ensuite, en calculant les produits internes dans (3, 37), on a

$$\begin{aligned} (\partial_t^{\alpha+1} \mathcal{F}_t^2 \sigma, \mathcal{F}_t \sigma)_{L^2(0,1)} &= (\partial_t^\alpha \mathcal{F}_t \sigma, \mathcal{F}_t \sigma)_{L^2(0,1)} \\ &\geq \frac{1}{2} \partial_t^\alpha \|\mathcal{F}_t \sigma\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t^{\alpha+1} \mathcal{F}_t^2 \sigma, (-1)^m \mathcal{F}_x^{2m} \mathcal{F}_t \sigma)_{L^2(0,1)} &= (\partial_t^\alpha \mathcal{F}_x^m \mathcal{F}_t \sigma, \mathcal{F}_x^m \mathcal{F}_t \sigma)_{L^2(0,1)} \\ &\geq \frac{1}{2} \partial_t^\alpha \|\mathcal{F}_x^m \mathcal{F}_t \sigma\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \left((-1)^m \theta(t) \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} (\mathcal{F}_t^2 \sigma), \mathcal{F}_t \sigma \right)_{L^2(0,1)} &= \left(\theta(t) \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathcal{F}_t^2 \sigma), \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathcal{F}_t P) \right)_{L^2(0,1)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta(t) \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathcal{F}_t^2 \sigma) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \theta'(t) \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathcal{F}_t^2 \sigma) \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \left(\theta(t) \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} (\mathcal{F}_t^2 \sigma), \mathcal{F}_x^{2m} \mathcal{F}_t \sigma \right)_{L^2(0,1)} &= (\theta(t) (\mathcal{F}_t^2 \sigma), \mathcal{F}_t \sigma)_{L^2(0,1)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta(t) (\mathcal{F}_t^2 \sigma)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \theta'(t) (\mathcal{F}_t^2 \sigma)^2 dx. \end{aligned} \quad (3.42)$$

En évoquant (3, 39), (3, 43), remplacer t par τ , en intégrant par rapport à τ de zéro à t et en utilisant les conditions (3, 9), on obtient

$$D_t^{\alpha-1} \|\mathcal{F}_t \sigma\|_{L^2(0,1)}^2 + D_t^{\alpha-1} \|\mathcal{F}_x^m \mathcal{F}_t \sigma\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathcal{F}_t^2 \sigma) \right)^2 dx \quad (3.43)$$

$$+ \int_0^1 (\mathcal{F}_t^2 \sigma)^2 dx \leq \frac{c_3}{\min(1, c_1)} \left(\int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathcal{F}_\tau^2 \sigma) \right)^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 (\mathcal{F}_\tau^2 \sigma)^2 dx d\tau \right).$$

En laissant tomber les deux premiers termes sur le côté gauche de (3, 42) et en appliquant le lemme de Gronwall, en posant $Z_1(t) = 0$, $Z_3(t) = 0$ et

$$Z_2(t) = \int_0^1 \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathcal{F}_t^2 \sigma) \right)^2 dx + \int_0^1 (\mathcal{F}_t^2 \sigma)^2 dx,$$

on a

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m} (\mathcal{F}_t^2 \sigma) \right)^2 dx + \int_0^1 (\mathcal{F}_t^2 \sigma)^2 dx \leq 0, \quad (3.44)$$

pour tout $t \in [0, T]$. Par conséquent, $\omega = 0$ a.e dans Q .

Pour compléter la démonstration du théorème (3, 2), et prouver la densité ($\overline{R(\mathcal{L})} = V$) dans un cas général, supposons que, pour un élément $(\mu_1, \theta_1, \theta_2) \in R(\mathcal{L})^\perp$, on a

$$\int_0^T (\mathcal{L}v, \mu_1)_{L^2(0,1)} ds + (l_1 v, \theta_1)_{L^2(0,1)} + (l_2 v, \theta_2)_{L^2(0,1)} = 0, \quad (3.45)$$

et alors on prouve que $\mu_1 = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0$. Si on met $v \in D(\mathcal{L})$ satisfaisant les conditions $l_1 v = v(x, 0) = 0$ et $l_2 v = v_t(x, 0) = 0$ dans (3, 44), on obtient

$$\int_0^T (\mathcal{L}v, \mu_1)_{L^2(0,1)} ds = 0 \quad \forall v \in D(\mathcal{L}). \quad (3.46)$$

D'après le théorème (3, 3), l'équation (3, 46) implique que $\mu_1 = 0$ dans Q . Alors, (3, 44) devient

$$(l_1 v, \theta_1)_{L^2(0,1)} + (l_2 v, \theta_2)_{L^2(0,1)} = 0 \quad \forall v \in D(\mathcal{L}). \quad (3.47)$$

Puisque l'intervalle des opérateurs trace l_1 et l_2 est dense dans $L^2(0, 1)$, il découle alors de (3, 47) que $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$. Ceci termine la démonstration du théorème (3, 2).

Conclusion

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires, elles peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science.

L'existence et l'unicité d'une solution généralisée pour une équation d'onde de diffusion fractionnaire d'ordre supérieur au sens de Caputo sous réserve de conditions aux limites intégrales initiales et pondérées sont établies. On constate que la méthode des inégalités d'énergie est appliquée avec succès pour obtenir des bornes a priori pour la résolution de problèmes de valeurs limites initiales fractionnaires d'ordre supérieur avec des contraintes non locales comme dans le cas classique. Les résultats obtenus contribueront au développement de la méthode d'analyse fonctionnelle et enrichiront la littérature non exhaustive existante sur les problèmes mixtes fractionnaires non locaux au sens de Caputo.

Annexe A

Dans ce qui suit, nous avons essayé de donner un compte rendu historique de certaines des personnalités mentionnées dans notre mémorandum, ce qui a eu un impact important sur le travail et les recherches qu'ils ont présentés au monde



Figure (2.1) -Georg Friedrich Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, état de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à l'analyse et à la géométrie différentielle, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale.

En 1840, Bernhard s'établit à Hanovre pour vivre chez sa grand-mère et aller au Lyceum (collège). Après le décès de sa grand-mère en 1842, il va à Lunebourg pour continuer ses études secondaires. Au lycée, Riemann étudie la Bible intensivement, mais il est distrait par les mathématiques; Il essaye même de prouver, mathématiquement, l'exactitude de la Genèse. Ses professeurs sont surpris par ses capacités à résoudre des problèmes complexes en mathématique. En 1846, âgé de 19 ans, grâce à l'argent de sa famille, il commence à étudier la philosophie et la théologie pour devenir pasteur afin de financer sa famille.

En 1847, son père l'autorise à étudier les mathématiques. Il étudie d'abord à l'université de Göttingen où il rencontre Carl Friedrich Gauss, puis à l'université de Berlin, où il a entre autres

comme professeurs Jacobi, Steiner et Dirichlet. Il effectue sa thèse à Göttingen sous la direction de Gauss.

Dans sa thèse, présentée en 1851, Riemann met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe, introduisant notamment le concept des surfaces qui portent son nom, notamment la sphère de Riemann. Il approfondira cette théorie en 1857, en faisant progresser la théorie des fonctions abéliennes.

On lui doit également d'importants travaux sur les intégrales, poursuivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann.

Intéressé par la dynamique des fluides, il jette les bases de l'analyse des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et résout un cas particulier de ce qu'on appelle maintenant le problème de Riemann en introduisant les invariants de Riemann.



Figure (2.1)-Joseph-Liouville

Joseph Liouville, né le 24 mars 1809, Joseph est le fils d'un militaire qui survit aux campagnes napoléoniennes et qui, en 1814, établit sa famille à Toul.

Il est diplômé de l'école polytechnique. Deux ans plus tard, il intègre l'école des ponts et chaussées, dont il n'obtient pas le diplôme en raison de problèmes de santé et, surtout, de sa volonté de suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur. Il obtient le doctorat ès sciences mathématiques en 1836 devant la faculté des sciences de Paris sous la direction de Siméon Denis Poisson et Louis Jacques Thenard.

Après quelques années dans diverses institutions comme assistant et comme professeur à l'école centrale (1833, où il est répétiteur depuis 1831), il est nommé professeur à l'école polytechnique en 1838.

À côté de ses réussites académiques, il est un remarquable organisateur. Liouville fonde en 1836 le Journal de mathématiques pures et appliquées parfois appelé Journal de Liouville, qui garde sa haute réputation au XXI^e siècle. Il publie beaucoup dans ce journal, en son nom ou en utilisant le pseudonyme de « Besge ».

Liouville publia dans divers domaines des mathématiques, dont la théorie des nombres, l'analyse complexe, la géométrie différentielle et la topologie différentielle, mais aussi la physique mathématique et même l'astronomie .



Figure (2.3)-Michele Caputo
Michele Caputo

Anniversaire : le 5 mai 1927.

Lieu de naissance : Ferrara, Italie.

Degrés :

- 1950 Mathématiques (laurea) Université de Ferrare.
- 1955 Physique (laurea) Université de Bologne.
- 1959 Géodésie (libera docenza) Ministère de la éducation d'Italie.

Bibliographie

- [1] Amele Taieb .Etude analytique des équations différentielles fractionnaires et applications. Doctorat LMD, Université Abdelhamid Ben Badis Mostaganem .Algérie 2016
- [2] A.Bouziani, A Merad. La méthode de Laplace transforme l'hyperbole unidimensionnel équation aux conditions purement intégrales, Journal roumain de mathématiques et Informatique (3) 2;191-204, 2013.
- [3] A.Samarskii. Quelques problèmes dans la théorie des équations différentielles, *different-sial'nye Uraveniya*, n ° 11, 1980, 1221-1228.
- [4] A.Merad, A Bouziani, S Araci. Existence et unicité pour une solution de pseudo-équation hyperbolique avec condition de limite non locale *appl. Math. Inf. Sci* 9, no 4, 1855-1861, 2015.
- [5] A.Merad, A Bouziani, O Cenap, A Kilicman. Sur la solvabilité de l'intériodifférentiel équation hyperbolique à conditions purement non locales. *Acta mathematica Scientia* 35(3); 601-609. 2015.
- [6] A.Merad, J Martin-Vaquero. Une méthode de Galerkin pour l'inclusion hyperbolique bidimensionnelle conditions intégrales, *Applied Mathematics and Computation* 291, 386-394, 2016.
- [7] A.Merad, A Bouziani, C Ozel. Transformation de Laplace d'inversion pour le par équation hyperbolique avec conditions purement non locales, *revue Hacettepe de mathématiques et statistiques* 44 (5), 1087-1097, volume 45, numéro 2, 2016.

- [8] A.Necib, A.Merad. Méthodes de transformée de Laplace et de perturbation de l'homotopie pour des problèmes pseudo-hyperboliques intégro-diélectriques à conditions purement intégrales, *Kragujevac Journal of Mathematics*, accepté. 2018.
- [9] A. A. Dezin, Théorèmes d'existence et d'unicité pour des solutions de problèmes aux limites pour équations différentielles partielles dans les espaces fonctionnels », *Uspekhi Mat. Nauk*, 14 : 3 (87) (1959), 21-73.
- [10] A. Kilbas, H. M. Srivastava, et J. J. Trujillo. *Theory and Application of Fractional Differential equations*. Elsevier, North-Holland, 2006.
- [11] Alikhanov, A.A Estimations a priori pour les solutions aux problèmes de valeur aux limites pour les équations d'ordre fractionnaire. arXiv 2010, arXiv : 1105.4592v1.
- [12] AA. Kilbas, HM. Srivastava et JJ. Trujillo, théorie et applications de la division fractionnelle équations différentielles. Elsevier, Amsterdam., (2006)
- [13] A.A. Kilbas, S.A. Marzan, Equations différentielles non linéaires avec la fraction de Caputo dérivée dans l'espace des fonctions continuellement différentiables, *Dişer. Equ. V 41 (1) (2005)*,84-89.
- [14] A. Anguraj, P. Karthikeyan, Existence de solutions pour rebond d'évolution semi-linéaire fractionnaire problème de valeur, *Commun. Appl. Anal.*, V 14 (2010), 505 à 514.
- [15] A.M.A. El-Sayed, équations différentielles fonctionnelles non linéaires d'ordres arbitraires, non linéaires *Anal, Theory Methods Appl.*, V 33 (1998), 181-186.
- [16] Belakroum Kheireddine. Existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire. Magister , Université Badji-Mokhtar Annaba. Algérie 2013.
- [17] Benrabah Abderafik. Etude d'un problème d'évolution non local et régularisation d'un problème elliptique mal posé. Thèse de Doctorat , Université Badji-Mokhtar Annaba. Algérie 2011.
- [18] Brahim Tellab. Résolution des équations différentielles fractionnaires. Doctorat en sciences, Université des Frères Mentouni Constantine 1. Algérie , 2018.

- [19] B. Ahmad, J. Nieto, Résultats d'existence pour les problèmes de valeur limite non linéaire de frac-équations intégrales différentielles avec conditions aux limites intégrales, valeur aux limites *Problems.*, V 2009 (2009), ID d'article 708576, 11 pages.
- [20] D. Baleanu, J.A. Tenreiro Machado et Z.B. Guvenc, *Nouvelles tendances en nanotechnologie et Applications de calcul fractionnaire*, Springer-Verlag, Londres, 2010.
- [21] E.R. Kaufmann, E. Mboumi, Solutions positives d'un problème de valeur aux limites pour un équation différentielle fractionnaire, *Electron. J. Qual. Théorie Dişer. Equ.* 3 (2007) 1 à 11.
- [22] J.R.Cannon. La solution de l'équation de la chaleur soumise à la spéciation de l'énergie, *Quart.Appl.Math*, 1963, 155-160.
- [23] J. Leray, *Conférence sur les équations diélectriques hyperboliques à coefficients variables*, Princeton, Justfor adv. Étude, 1952.
- [24] Hamidou Anis .Etude d'une classe de problèmes d'évolution avec conditio non local.Master,Universite Larbi Ben M'hidi-Oum El Boughi .Algérie , 2015.
- [25] Hillon. *Les Solutions mathématiques démocratiques des populations*, presses universitaires de France, 1986.
- [26] He, JH, Oscillation non linéaire avec dérivée fractionnaire et ses applications, In : *International Conference on Vibrating Engineering*98, Dalian, Chine., Pp. 288-291 (1998).
- [27] He, JH, Quelques applications des équations différentielles fractionnaires non linéaires et leurs mations, *Bull Sci Technol*15. 86-90 (1996).
- [28] He, JH, Solution analytique approximative pour les eaux d'infiltration avec des dérivés fractionnaires dans milieu poreux. *Comput Methods Appl Mech Eng.*, V 167 (1998), 57-68.
- [29] Hillon. *Les Solutions mathématiques des populations*, presses universitaire de France, 1986.
- [30] H. BERRAH, I. LADGHAM, Étude de certains problèmes aux limites de type fractionnaire, thèse Master, Université Hamma Lakhdar El Oued, Algeria, 2018.
- [31] I.Nídoye. Généralisation du lemme de Gronwall-Bllman pour la stabilisation des systèmes tèmes Fractionnaires, Thèse de deoctorat, UniversitÈ Henri poincarÈ-nancy 1 et de l'université Hassan II ain chock-casablanca, 2011, 21-22.

- [32] I. G Petrovsky, Uber Das Cauchyshe problem for system von linearen partiallen différential geichungen in gebit der nichtanalytischen funktionen, Bull. Univ dietat, Moscou., (1938), N 7,1-74.
- [33] Guermit Djamilia Nourelimen. Sur quelques opérateurs de dérivation fractionnaires , théorie et applications. Master en Mathématique , Universite Kasdi Merbah Ouargla. Algérie 2016.
- [34] Khalouta Ali. Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non- linéaires moyennant des approches analytiques.Extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire ,Doctorat En Sciences,Universite Ferhat Abbas Sétif 1 .Algérie 2019.
- [35] Khoukhou Sabah. Etude de quelques problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionnaires.Master ,Universite Kasdi Merbah Ouargla .Algérie, 2016.
- [36] K.M. Furati, N.Tatar, Un résultat d'existence pour un problème différentiel fractionnaire non local, J. Fract. Calc. 26 (2004) 43 à 51.
- [37] Kilbas, H.M. Srivastava et J. J. Trujillo. Théorie et application de la fracture équations différentielles traditionnelles. Elsevier, Hollande du Nord, 2006.
- [38] K.M. Furati, N.Tatar, Comportement des solutions pour un diffentiel fractionnaire pondéré de type Cauchy problème rentiel, J. Fract. Calculé, V 28 (2005), 23-42.
- [39] Lakhel Fahim. Sur une classe de problèmes aux limites avec conditions aux bords de type intégrales , Doctorat en Mathématiques , Universite Mentouri Constantine. Algérie 2011.
- [40] L.I.Kamynin. Problème de valeur limite dans la théorie de la conduction thermique avec condition aux limites non classiques, Z.Vychisl. Mat.6, 1964.
- [41] L. Garding, Problème de Cauchy pour les équations hypeboliques, Université de Chicago, Conférence notes, 1957.
- [42] L.S.Pulkina. Problème non local avec une condition intégrale de premier parent pour Équation hyperbolique mensionnelle, D oklady Akademii, 2007, 597-599.
- [43] Ladyzhenskaya, O.A. Les problèmes des valeurs limites de la physique mathématique ; Springer : New York, NY, États-Unis, 1985.
- [44] Mesloub, S. Un problème mixte non linéaire non-local pour une équation parabolique du second ordre. J. Math. Anal. Appl 2006, 316, 189–209. [CrossRef].

- [45] M. Belmekki, M. Benchohra, Résultats d'existence pour la fonction semi-linéaire d'ordre fractionnaire équations différentielles, Proc. A. Razmadze Math. Inst., V 146 (2008), 9 à 20.
- [46] M. Benchohra, J.R. Graef, S. Hamani, Résultats d'existence pour les problèmes de valeur aux limites avec équations différentielles fractionnaires non linéaires, Appl. Anal., V 87 (2008), 851 à 863.
- [47] Nada Taleb. Etude de la stabilité des équations différentielles d'ordre fractionnaire implicites. Master en Mathématique , Université Belhadj Bouchaïb D Ain-Témouchent. Algérie ,2019.
- [48] N.I. Yurchuk, Problème mixte avec une condition intégrale pour certaines équations paraboliques, *Differentsialnye Uravneniya.*, V 22 (1986), 2117-2126.
- [49] N. I. Yurchuk, Problème mixte pour les équations paraboliques d'ordre variable, soviétique. *Math. Dokl.*, V 26 (1982), N 12, 39-41.
- [50] N. I. Yurchuk, La méthode des inégalités énergétiques dans l'étude des équations, Dissertation, Moscou, (1981).
- [51] N. I. Yurchuk, The energy inequality method in the investigation of certain degenerate linear operational differential equations, *Differential Equations.*, V 14 (1978), N 12, 1558-1567.
- [52] N. I. Yurchuk, Solvabilité des problèmes de valeur aux limites pour certaines équations différentielles., V 13 (1977), N 4, 423-429.
- [53] N. I. Yurchuk, Problèmes de valeur limite pour les équations différentielles avec valeur d'opérateur coefficients selon le paramètre, *Équations différentielles.*, V 12 (1976), N 9, 1157-1168.
- [54] N.J. Ford, J. Xiao et Y. Yan, A finite element method for time fractional partial differential equations. *Calcul fractionnaire et analyse appliquée.*, V 14 (2011), N 3, 454-474. doi : 10.2478 / s13540-011-0028-2.
- [55] Oussaeif Taki Eddine. L'étude de la solution des problèmes pour une classe d'équations aux dérivées partielles avec une condition non local de type intégrale. Doctorat en Mathématique, Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Boughi .Algérie , 2015.
- [56] O.DaniLkina. Sur un problème non local pour une équation de chaleur, *Global Journal de Analyse mathématique*, Science Publishing Corporation, 2014, 1-18.

- [57] O. Zigen, Existence et unicité des solutions pour une classe d'ordre fractionnaire non linéaire équations différentielles partielles avec retard, ordinateurs et mathématiques avec applications, Volume 61, numéro 4, février 2011, pages 860 à 870.
- [58] Podlubny. Équations différentielles fractionnaires. Academic Press, New York, 1999.
- [59] P.A.Raviart, V.Giranly. Approximation par éléments finis de l'équation de Navier-Stokes conférences notes mathématiques, E.D.A. Sold et Beckmann, Springer-verlag, Balin, 1979.
- [60] R. Metzler, J.Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion : a fractional approach dynamique. Phys Rep., V 339 (2000), 1-77.
- [61] R.P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, Problèmes de valeur aux limites pour les équations différentielles fractionnaires, Adv. Goujon. Contemp. Math., V 16 (2008), 181 à 196.
- [62] R.P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, Une enquête sur les résultats d'existence pour la valeur limite problèmes d'équations différentielles fractionnaires non linéaires et inclusions, Acta Appl. Math. DOI 10.1007 / s10440-008-9356-6.
- [63] R.W. Ibrahim, S. Momani, Sur l'existence et l'unicité des solutions d'une classe de fractionnaires équations différentielles, Journal of Mathematical Analysis and Applications., 3334 (2007), 1-1.
- [64] S.M. Momani, S.B. Hadid, Z.M. Alawneh, Quelques propriétés analytiques des solutions de différentielles équations différentielles d'ordre non entier, Int. J. Math. Math. Sci., V 13 (2004), 697 à 701.
- [65] Saïd Mesloub. Faten Aldosari, valeur limite initiale fractionnelle d'ordre supérieur encore Problème avec les contraintes non locales de type purement intégral, Symmetry 2019, 11, 305.
- [66] S. Zhang, Solutions positives pour les problèmes de valeur aux limites de différentielle fractionnaire non linéaire équations, Electron. J. Équations différentielles., V 36 (2006), 1 à 12.
- [67] V. Daftardar-Gejji, H. Jafari, Problèmes de valeur aux limites pour l'équation, Aust. J. Math. Anal. Requête, V 3 (2006), 1 à 8.

- [68] W.A.Doy. Extensions d'une propriété de l'équation thermique à la thermoélasticité linéaire et autres théories, *Quart.Appl.Math*, 1983, 319-330.
- [69] X. J. Li, C. J. Xu, Existence et unicité de la solution faible du fractionnaire espace-temps équation de diffusion et une approximation de méthode spectrale, *Communications in Computational Physics*, V 8 (2010), N 5, pages 1016 à 1051.
- [70] X. J. Li, C. J. Xu, Une méthode spectrale spatio-temporelle pour l'équation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol.47, n ° 3, pp. 2108–2131, 2009.

L'attention portée à la connaissance

et à l'éducation est l'une des plus importantes obéissance qui nous rapproche de Dieu comme Dieu Tout-Puissant l'a mentionné dans son noble livre et a mentionné le mérite des érudits et la véracité du Messager de Dieu, que ses prières et la paix de Dieu soient sur lui, quand il a dit: « Quiconque poursuit un chemin dans lequel il cherche la connaissance, Dieu lui facilitera un chemin vers le Ciel » et nous comprenons à partir de ce hadith combien Science et érudits, j'espère aussi que nous serons tous intéressés à éduquer nos enfants pour qu'ils ne tombent pas dans le cercle de l'ignorance et qu'ils soient des imbéciles qui ne comprennent rien. Que Dieu nous aide et vous à ce qu'il aime et se satisfait.

