

Exercice 1 (9 points)

Soit le système à 1 degré de liberté et formé :

- d'un pendule simple de longueur $2L$ et de masse M
- d'une roue de rayon R , de masse M et de moment d'inertie I ,
- d'une masse M soumise à un amortissement de coefficient de frottement visqueux α ,
- 2 ressorts de raideurs K, K' ,
- et d'une corde enroulée autour de la roue.

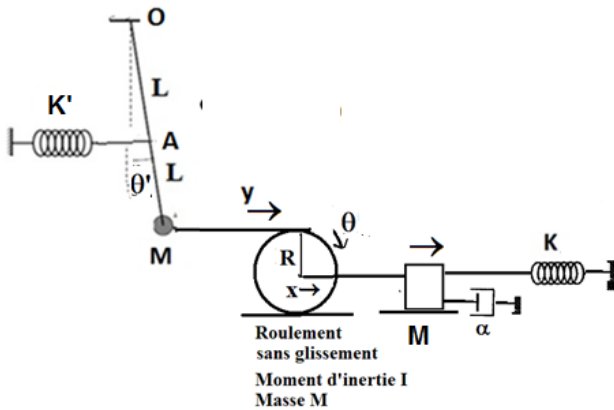
1. Déterminer les relations entre les coordonnées x, y, θ, θ'

2. Calculer l'énergie cinétique E_c , l'énergie potentielle E_p et le Lagrangien en fonction de θ .

3. Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ .

Déterminer la condition d'un mouvement oscillatoire pseudo-périodique et la solution de l'équation différentielle.

4. Dans le cas sans frottement, déterminer l'équation différentielle et sa solution.



Exercice 2 (11 points)

On considère le système à 2 degrés de liberté et composé :

- d'une roue en roulement de rayon R , de masse M et de moment d'inertie I ,
- d'une poulie en rotation de rayon R' et de moment d'inertie I' ,
- et de 3 ressorts de raideurs K, K'

La roue est en roulement sur un plan horizontal et son mouvement est repéré par les coordonnées X et θ .

1. Calculer l'énergie cinétique E_c , l'énergie potentielle E_p et le Lagrangien en fonction de X, Y .

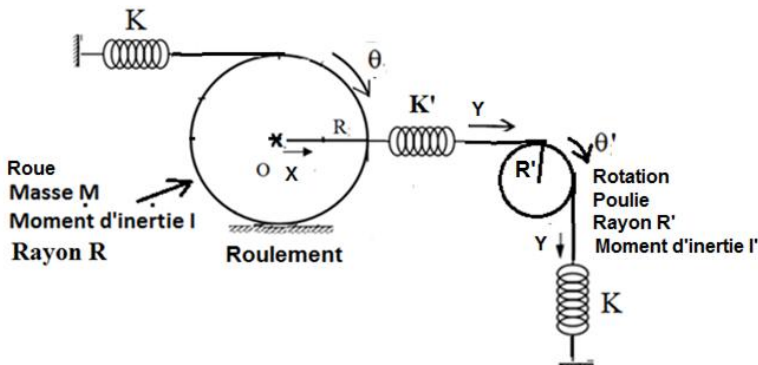
2. Pour simplifier, supposons : $I/R^2 = I'/R'^2 = M$ et $K = K'$

Montrer que les équations différentielles du mouvement s'écrivent :

$$2\ddot{X} + 5aX - aY = 0 \quad \ddot{Y} + 2aY - aX = 0$$

Avec a constante à déterminer.

3. Calculer les pulsations propres du système.



Solution Exercice 1 (9 pts)

1. Relations entre coordonnées :

Roulement sans glissement : $x = R\theta$ et $y = 2x = 2R\theta = 2L\theta' \rightarrow \theta' = R\theta/L$

2. Calcul des énergies cinétique et potentielle

 $E_c = E_c(\text{rotation roue}) + E_c(\text{Translation roue}) + E_c(\text{masse})$

$$E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} M (2R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} (I + 6MR^2) \dot{\theta}^2$$

Posons $a = I + 6MR^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2} a \dot{\theta}^2$

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} K' (L\theta)^2 + \frac{1}{2} Mg 2L\theta = \frac{1}{2} K (R\theta)^2 + \frac{1}{2} K' (R\theta)^2 + Mg(R\theta)^2 / L$$

$$E_p = \frac{1}{2} b \theta^2 \quad \text{avec} \quad b = KR^2 + K'R^2 + 2MgR^2 / L$$

Lagrangien : $L = E_c - E_p = \frac{1}{2} a \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} b \theta^2$

3. Equation différentielle

Equation de LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = - \frac{\partial D}{\partial \theta}$$

En dérivant, on obtient :

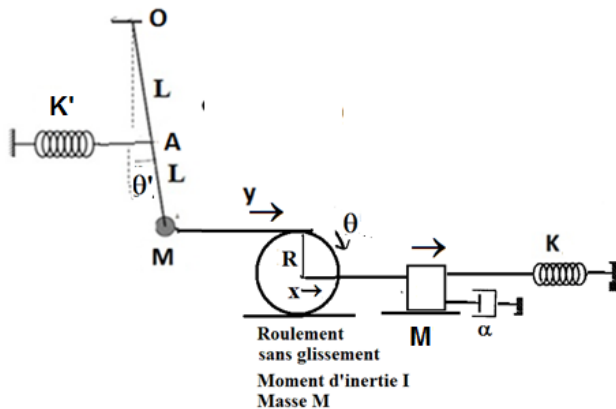
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = a \ddot{\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -b\theta$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha V^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \alpha (R\dot{\theta})^2 \rightarrow \frac{\partial D}{\partial \theta} = \alpha R^2 \dot{\theta}$$

On obtient l'équation différentielle suivante : $a\ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta} + b\theta = 0$ en posant $2\gamma = \alpha R^2 / a$ et $\omega_0^2 = b/a$ \rightarrow équation différentielle : $\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ Condition pour qu'il y'ait un mouvement oscillatoire pseudo-périodique : $\gamma < \omega_0$ Pseudo-pulsation d'oscillation : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Solution de l'équation différentielle :

$$x(t) = C \cdot \exp(-\gamma t) \cdot \cos(\omega_a t + \varphi)$$

avec C, φ = constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales (à $t = 0$)4. Si $\alpha = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \rightarrow$ Solution : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 

Solution Exercice 2 (11 points)

1. Calcul de E_c et E_p

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I' \dot{\theta}'^2$$

$$X = R\theta \text{ et } Y = R'\theta'$$

$$\rightarrow E_c = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{X}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} I' \left(\frac{\dot{Y}}{R'}\right)^2 = \frac{1}{2} (M + I/R^2) \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \dot{Y}^2 I'/R'^2$$

Energie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2} K (2X)^2 + \frac{1}{2} K' (X - Y)^2 + \frac{1}{2} KY^2 = \frac{1}{2} K 4X^2 + \frac{1}{2} K' (X^2 + Y^2 - 2XY) + \frac{1}{2} KY^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} X^2 (4K + K') + \frac{1}{2} Y^2 (K + K') - K' XY$$

Pour simplifier, supposons : $M = I/R^2 = I'/R'^2$ et $K = K' \rightarrow$

$$\text{Lagrangien : } L = E_c - E_p = \left[\frac{1}{2} M (2\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \right] - \left[\frac{1}{2} X^2 5K + Y^2 K - KXY \right]$$

2. Equations différentielles

Equations de LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial Y} = 0$$

En dérivant, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) = 2M\ddot{X} \text{ et } \frac{\partial L}{\partial X} = -[5XK - KY]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \right) = M\ddot{Y} \text{ et } \frac{\partial L}{\partial Y} = -[2YK - KX]$$

On obtient les 2 équations différentielles suivantes :

$$2M\ddot{X} + 5KX - KY = 0$$

$$M\ddot{Y} + 2KY - KX = 0$$

$$\text{Posons } a = \frac{K}{M}$$

on obtient un système de 2 équations différentielles du second ordre:

$$2\ddot{X} + 5aX - aY = 0 \quad \ddot{Y} + 2aY - aX = 0$$

3. Calcul des pulsations propres

Recherche de solutions particulières harmoniques :

$$X = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ et } Y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \ddot{X} = -\omega^2 X \text{ et } \ddot{Y} = -\omega^2 Y$$

En remplaçant dans les équations (1) et (2), on obtient :

$$(-2\omega^2 + 5a)X - aY = 0 \quad -aX + (-\omega^2 + 2a)Y = 0$$

Le système admet des solutions non nulles si le déterminant $D = (2\omega^2 - 5a)(\omega^2 - 2a) - a^2 = 2\omega^4 - 9a\omega^2 + 9a^2 = 0$

$$\text{Discriminant : } \Delta = 81 a^2 - 72 a^2 = 9a^2$$

$$\text{D'où 2 pulsations propres } \omega' \text{ et } \omega'' : \omega'^2 = \frac{9a - 3a}{4} = 3a/2 \text{ et } \omega''^2 = \frac{9a + 3a}{4} = 3a \text{ (avec } \omega' < \omega'')$$

