



Université ABBES LAGHROUR Khenchela
Faculté de Sciences et Technologie جامعة عباس لغرور خنشلة
Département de Génie Mécanique كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة الميكانيكية



Mémoire

de fin d'études Pour l'obtention du diplôme
de MASTER (LMD)

Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Construction Mécanique

Thème

*Étude du flambement d'un poteau
par la méthode des éléments finis.*

Réalisé par :

- SAHBI Moncef
- MERAH Khireddine

Dirigé par : M. Gron Brahim

Membres de jury

- M. CHAHAOUI Oualid
- M. BREK Samir

Année universitaire : 2020-2021



Remerciement

En tout premier lieu, On remercie le Bon Dieu tout Miséricordieux de m'avoir accompagnée et accordée la patience et le courage pour voir enfin, le fruit de ce travail.

Ontient à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à mettre en lumière cette recherche, en prodiguant des conseils, en encourageant les moments sensibles de notre parcours universitaire.

*A notre encadrant **Mr, Gron Brahim***

Pour nous avoir suivis dans notre travail sous ce brief, pour ces précieux conseils, pour sa disponibilité et l'efficacité de son encadrement, pour lesquels vous trouverez ici notre gratitude et notre respect.

*Nous remercions également **tous les professeurs du Département de génie mécanique***

A tous ceux qui m'ont aidé à surmonter tous les obstacles au cours de ce travail.

*On remercie chaleureusement **tous les membres du jury** d'avoir accepté de noter ce modeste travail. On les remercie également d'avoir pris le temps de lire et d'enrichir cet article de leurs commentaires.*

S'il vous plaît pardonnez-moi tous ceux que j'ai oublié de mentionner, on espère qu'ils comprennent

Enfin, un grand merci à tous ceux qui ont contribué à cet humble travail d'une manière ou d'une autre

Merci du fond du cœur



Dédicace



Je dédie ce travail de master à :

Mon père Mahmoud

*La femme la plus affectueuse et la plus douce au monde, l'ange
le plus tendre qui a été toujours pour moi une source d'amour et
d'espoir ; ma très chère mère Souria*

A mon deuxième père : mon grand-père, mes sœurs : Amel, Safia, Imen

A mes oncles

A mes tentes

A L'âme de mes grands – mères

*A tous mes amis Moncef, Sami, Ghani, Djamel, Khirou,
Anis ..*

A Toute ma famille.

Khireddine Merah



Dédicace

Je dédie ce travail de master à :

Mon père Hassouna

*La femme la plus affectueuse et la plus douce au monde, l'ange
le plus tendre qui a été toujours pour moi une source d'amour et
d'espoir ; ma très chère mère Nouara Aidoud*

A mon deuxième père : mon grand-père, ma sœur : Achwak

A mes oncles

A mes tentes

A L'âme de mes grands – mères

*A tous mes amis Khireddine, Islem, Madjed, Zoubir, Youcef, Rabie,
Aymen*

A Toute ma famille.

Moncef Sahbi

Sommaire

Remerciements

Dédicace

Sommaire

Liste des Figures

Liste des Tableaux

Introduction générale.....2

CHAPITRE 01 : Rappel sur l'élasticité linéaire

<i>I.1. Introduction</i>	5
<i>I.2. Les équations générales d'élasticité</i>	5
<i>I.2.1. Les contraintes</i>	5
<i>I.2.1.1. Notion de contrainte</i>	5
<i>I.2.1.2. Equations internes</i>	6
<i>I.2.1.3. Equations externes</i>	8
<i>I.2.1.4. Les équations de compatibilité</i>	9
<i>I.2.2 Les déformations</i>	9
<i>I.2.2.1 Notion de déformation</i>	9
<i>I.2.2.2 Déplacements</i>	10
<i>I.2.2.3 Relations entre déplacements et déformations</i>	10
<i>I.2.3. Relations entre déformations et contraintes</i>	12
<i>I.2.4. Relations entre contraintes et déformations</i>	13
<i>I.2.5. Etat plan de contrainte et de déformation</i>	14
<i>A- Déformations planes</i>	14
<i>B- Contraintes planes</i>	15
<i>I.3. Les équations fondamentales de l'élasticité plane</i>	16
<i>I.3.1. Les équations d'équilibre</i>	16
<i>I.3.1.1. Les équations différentielles d'équilibre</i>	16
<i>I.3.1.2. Les conditions de contour</i>	16
<i>I.3.1.3. Changement d'axe</i>	17
<i>I.3.2. Les équations de compatibilité et le potentiel des contraintes</i>	17

Chapitre II : les phénomènes d'instabilité

<i>II-Introduction</i>	19
<i>II.1. Théorie linéaire du flambage élastique</i>	20

II .1.1. Principes	20
II.2.cas particulier du flambage par flexion et torsion	24
II.3. Cas particulier de la barre étré sillonnée	26
II.4. Résistance ultime au flambage	29
II.4.1. Principe du flambage par divergence	29
II.5. Imperfections des barres industrielles	30
II.5.1. Déformée initiale.....	30
II.5.2. Contraintes résiduelle	33
II.6. Courbes de flambage européennes	34

Chapitre III. Aspect théorique du flambement

III.1 Poutre bi-articulée	40
III.2. Poutre encastrée en pied et articulée en tête	42
III.3 Poutre bi-encastrée	44
III.4 Poutre encastrée en pied et libre en tête	45
III.5 Prise en compte des défauts de rectitude	47
III.6 Prise en compte des défauts de centrage	49
III.7 Flambement par flexion	51
III.7.1 Sous charge concentrée Q	52
III.7.2 Sous charge uniformément répartie q	53
III.8 Influence de l'effort tranchant sur le flambement des pièces.....	54

Chapitre IV : Application

Introduction.....	58
IV.1 Le flambement eulérien	58
IV.2 Calcul de la rigidité tangente	59
IV. 3 Calcul de la charge critique d'Euler.....	61
IV.3.1 Cas d'un poteau encastré à son pied.....	61
IV.3.2 Cas d'un poteau encastré-rotule, déplacement latéral bloqué.....	62
IV.3.3 Cas d'un poteau rotule-rotule, déplacement latéral bloqué.....	63
IV.3.4. Cas d'un poteau encastré-encastré, déplacement latéral bloqué.....	64
Conclusion générale.....	66
Références Bibliographiques	67

Liste des figures

Chapitre 01 : Elasticité Rappel sur élasticité linéaire

Figure I.1 : Equilibre d'un solide.....	5
Figure I.2 : notion de contraint e.....	6
Figure I.3 : Equilibre de volume.....	7
Figure I.4 : Equilibre de surface.....	8
Figure I.5 : déplacement d'un point.....	10
Figure I.6 : déformations planes.....	11
Figure I.7 : Etat plan de déformation.....	14
Figure I.8 : Etat plan de contrainte.....	15
Figure I.9 : Conditions de contour en contraintes planes.....	16
Figure I.10 : Contraintes sur deux facettes orthogonales.....	17

Chapitre 02 : les phénomènes d'instabilité

Figure II.1. stabilité de forme d'une barre comprimée.....	19
Figure II.2. flambage plan d'une barre bi articulée (bifurcation de l'équilibre).	21
Figure. II.3. longueurs de flambage l_k d'une barre comprimée pour différentes conditions d'appui.	22
Figure II.4. Allure des courbes de flambage selon les hypothèses effectuées.....	24
Figure II.5. Différents modes de flambage d'une barre comprimée.....	25
Figure .II.6. Flambage par flexion et torsion.....	26
Figure II.7. Barre étré sillonnée.	27
Figure II.8. courbe. Flambage par divergence de l'équilibre.	30
Figure. II.9. effet du second ordre.....	31
Figure. II.10. influence de la déformée initiale sur la résistance ultime au flambage.	33
Figure.II.11. influence des contraintes résiduelles dans une section comprimée.....	33
Figure. II.12. Influence des contraintes résiduelles sur la rigidité d'une section.....	34
Figure. II.13. principe d'établissement des courbes de flambage.	36
Figure. II.14. courbes de flambage.	37

Chapitre 03 : Aspect théorique du flambement

Figure III.1 . Poutre bi-articulée [3].....	40
Figure III.2 . Variation de la contrainte / L'élancement [3].....	42
Figure III.3. Poutre encastrée-articulée [3]	43
Figure III.4 . Poutre bi-encastrée [3].....	44

<i>Figure III.5. Poutre encastrée-libre</i>	46
<i>Figure III.6. Défaut de rectitude. [3]</i>	47
<i>Figure III.7. Défaut de centrage. [3]</i>	49
<i>Figure III.8 . Sous charge concentrée [3]</i>	52
<i>Figure III.9. Sous charge répartie [3]</i>	54

Chapitre 04 : Application

<i>Figure IV.1. poteau encastré-libre</i>	58
<i>Figure IV.2. La matrice de rigidité élémentaire en repère local</i>	60
<i>Figure IV.3. Poteau encastré-rotule, déplacement latéral bloqué</i>	62
<i>Figure IV.4. Poteau rotule-rotule, déplacement latéral bloqué</i>	63
<i>Figure IV.5. Poteau encastré-encastré, déplacement latéral bloqué</i>	64

Liste des tableaux

Tableau IV.1	61
Tableau IV.2	62
Tableau IV.3	63
Tableau IV.4	64

Introduction générale

Introduction générale

Le calcul d'une structure exige que, sous toutes les combinaisons d'actions possibles, définies réglementairement, la stabilité statique soit assurée.

tant globalement, au niveau de la structure qu'individuellement au niveau de chaque élément. Les actions développent diverses sollicitations, qui génèrent des contraintes, au sein du matériau et des déformations des éléments.

Il s'agit donc, afin de garantir le degré de sécurité souhaité ou souhaitable, de vérifier que les contraintes et les déformations restent en deçà des limites admissibles.

Deux cas de figure se présentent :

le cas des petites déformations

Tant que l'on reste dans le domaine des petites déformations, on admet que les sollicitations ne varient pas (ou peu) sous l'effet des déformations, ce qui conduit simplement à vérifier que les contraintes restent inférieures à la contrainte de ruine.

le cas des grandes déformations

Dans ce cas, les déformations modifient considérablement les sollicitations qui les ont initiées et nécessitent des calculs spécifiques.

L'apparition de déformations importantes dans certaines pièces peut survenir :

- Dans le domaine élastique, lorsque la corrélation linéaire efforts/déformations n'est plus vérifiée, les déformations augmentent plus vite que les efforts appliqués
- Dans le domaine élasto-plastique, lorsqu'il y a écoulement plastique.

Conception et calcul des structures métalliques selon l'eurocode 3

Les grandes déformations affectent les zones comprimées des pièces, qui peuvent présenter trois types de comportements caractéristiques, dénommés phénomènes d'instabilité, qui sont :

- Le flambement, qui affecte les barres simplement comprimées (flambement simple) ou comprimées et fléchies (flambement flexion), qui est très dangereux,
- Le déversement, qui affecte les semelles comprimées des pièces fléchies,
- Le voilement, qui affecte les âmes des pièces fléchies.

L'étude des phénomènes d'instabilité élastique est particulièrement importante en construction métallique, car ils sont très fréquents du fait de l'utilisation d'éléments minces et de grand élancement.

Nous nous proposons donc d'examiner successivement les trois principaux phénomènes d'instabilité (flambement, déversement, voilement), sous leurs aspects théoriques, expérimentaux et réglementaires.

Ce travail a pour objectif l'étude théorique du flambement des poteaux avec différentes liaisons aux extrémités et le calcul de la charge critique pour chaque cas en appliquant la méthode des éléments finis.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres,

- Le premier chapitre représente un rappel sur la théorie d'élasticité qui donne les relations les relations et les équations ainsi que le comportement des structures.
- Le deuxième chapitre est consacré à décrire les phénomènes d'instabilité existants dans les différentes structures et plus spécialement le flambement des éléments comprimés,
- Le chapitre troisième expose l'aspect théorique du flambement en citant les différents conditions aux rives inspirées des natures de liaison de l'élément flambé ainsi que la charge critique correspondante
- Le quatrième chapitre expose la méthode de calcul de la charge critique d'Euler par la méthode modale en utilisant les éléments finis.

Chapitre I : Rappel
Sur Elasticité
Linéaire

I.1. Introduction

La méthode des éléments finis est une méthode générale d'analyse structure dans laquelle une structure continue est remplacée par un nombre fini de points « nœuds ».

Tous les matériaux possèdent à un certain degré, la propriété d'être élastique, c'est-à-dire que si les forces extérieures, provoquant la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra au même temps que les forces qui lui donnent naissance.

Pour ces matériaux élastiques, il existe une théorie dite « théorie d'élasticité » qui permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action de différents systèmes de forces.

Nous présentons dans ce chapitre, une brève analyse des équations de base qui définissent les relations entre contraintes et déformations dans le cas bidimensionnel. Dans ce cas dérive les cas particuliers de l'élasticité plane (état plan de déformation, état plan de contrainte).

I.2. Les équations générales d'élasticité

I.2.1. Les contraintes

I.2.1.1. Notion de contrainte

Soit un solide en équilibre comportant 2 parties 1 et 2 limitées par une section S,

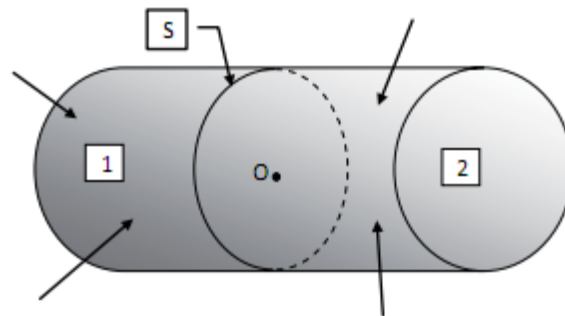


Figure I.1 : Equilibre d'un solide.

Son état d'équilibre permet d'établir que la somme vectorielle des forces issue de 1 et agissant sur 2 d'une part, et de 2 agissant sur 1 d'autre part, est nulle :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$$

L'équilibre de chacune des parties, 1 par exemple, est donc caractérisé par l'action des forces extérieures de volume et de surface qui lui sont appliquées mais également par les forces intérieures exercées par la partie 2 sur la section S.

On définit donc le vecteur contrainte \vec{f}_1 comme étant la limite de $\frac{d\vec{F}_1}{dS}$ lorsque la surface dS tend vers zéro. Quand dS est considérée dans le plan yz , ce vecteur \vec{f}_1 peut-être décomposé en trois composantes : une normale à cette surface et deux dans son plan. La première, égale à

$\sigma_{xx} = \sigma_x = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF_x}{dS}$, est appelée contrainte normale alors que les deux autres, notées respectivement $\tau_{xy} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF_y}{dS}$ et $\tau_{xz} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF_z}{dS}$ sont dites de cisaillement.

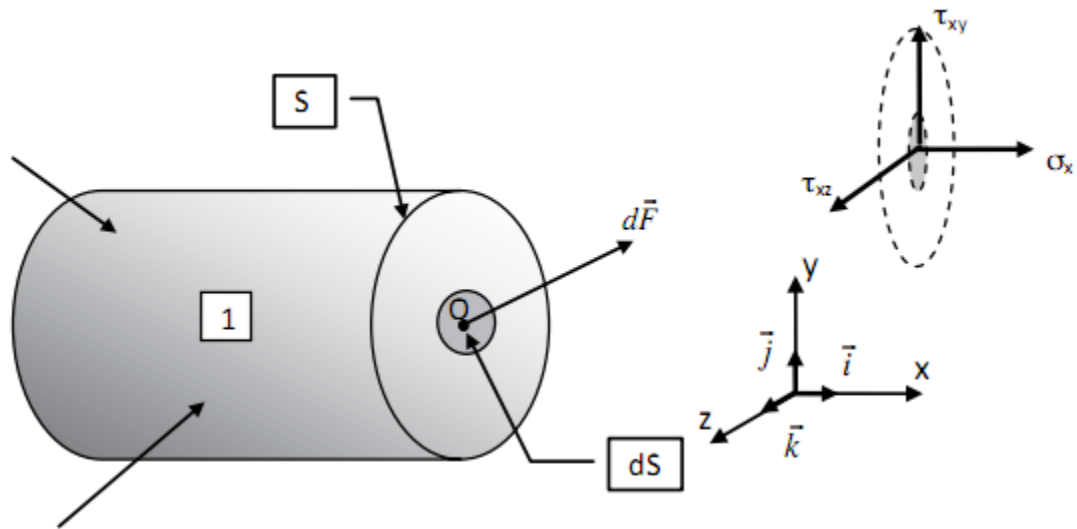


Figure. I.2 : notion de contrainte

En répétant pour les plans (xz) (\vec{f}_2) et (xy) (\vec{f}_3), deux contraintes normales et quatre de cisaillement viennent s'ajouter aux trois précédentes, soit $\sigma_{yy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ pour le premier et $\sigma_{zz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ pour le second. Finalement, les vecteurs contraintes ont pour expressions :

$$\vec{f}_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}; \vec{f}_2 = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}; \vec{f}_3 = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} \quad (I.1)$$

La convention de signes la plus souvent retenue dans les logiciels éléments finis est d'associer une contrainte normale positive à une traction [Caze.10].

I.2.1.2. Equations internes

L'étude de l'équilibre d'un élément fini infiniment petit de cotés dx, dy, dz , soumis à des forces internes de volume f_x^v, f_y^v, f_z^v permet d'établir dans un premier temps la réciprocité des contraintes de cisaillement. En effet et en se basant sur l'équilibre des moments, on peut déduire pour :

L'axe z

$$\sum M_{IOz} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz \right] \frac{dx}{2} + (\tau_{xy} dydz) \frac{dx}{2} - \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \right] \frac{dy}{2}$$

$$- (\tau_{yx} dx dz) \frac{dy}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} = 0$$

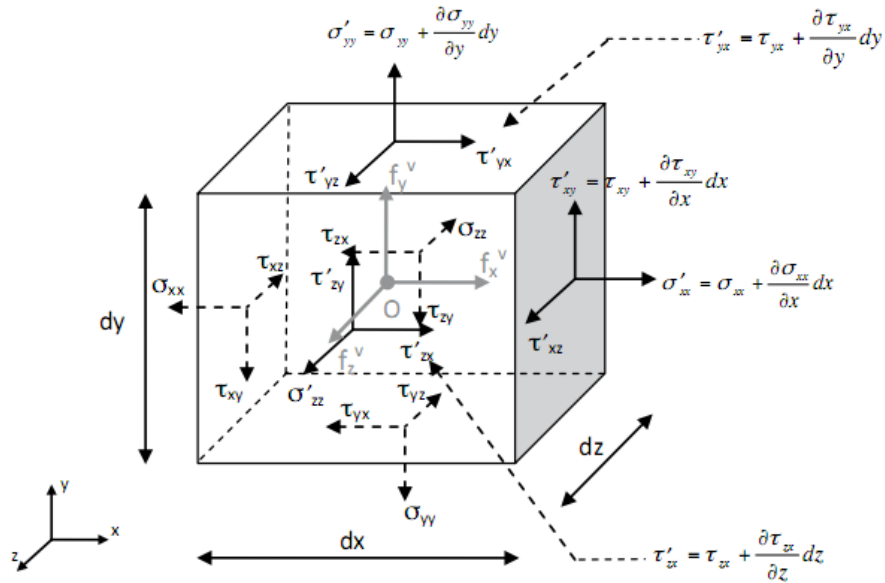


Figure I.3 : Equilibre de volume.

D'où

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{I.2}$$

Et les deux autres axes x et y

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ et } \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{I.3}$$

Le nombre de contraintes de cisaillement se réduit donc à trois. Es six valeurs caractérisant l'état de contrainte peuvent alors être regroupées au sein d'un vecteur de composantes :

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{xz}\} \tag{I.4}$$

Maintenant et en effectuant la somme des efforts suivant x, l'équation d'équilibre correspondante permet également de montrer que :

$$\begin{aligned} \sum F_{Ix} = 0 &\Leftrightarrow \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \\ &+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_{xx} dydz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy + f_x^v dx dy dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soit après extension de l'opération aux deux autres axes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x^v &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y^v &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^v &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \text{div}(\sigma) + f = 0 \quad (I.5)$$

Ces trois équations sont généralement appelées équations d'équilibre de volume.

1.2.1.3. Equations externes

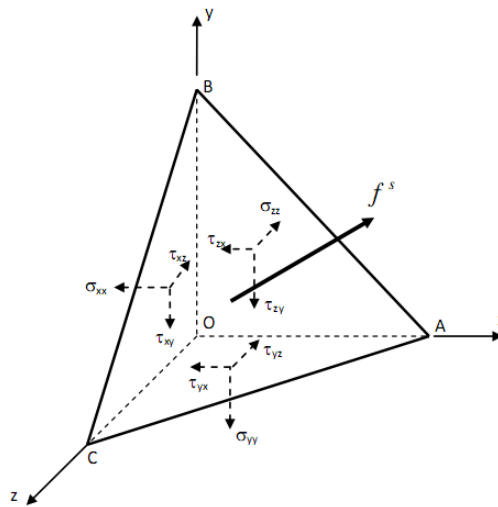


Figure I.4 : Equilibre de surface.

Soit un tétraèdre OABC infiniment petit dont l'aire ABC, notée \mathbf{dS} , constitue la surface du milieu solide.

Sachant qu'une charge répartie f^S de composantes $\begin{pmatrix} f_x^S \\ f_y^S \\ f_z^S \end{pmatrix}$ est appliquée sur cette surface

et que les cosinus directeurs de la normale au plan ABC sont notés l, m et n , l'équilibre du tétraèdre se résume à un système de trois équations :

$$f_x^s ds = l. ds. \sigma_{xx} + m. ds. \tau_{yx} + n. ds. \tau_{zx}$$

$$f_y^s ds = l. ds. \tau_{xy} + m. ds. \sigma_{yy} + n. ds. \tau_{zy}$$

$$f_z^s ds = l. ds. \tau_{xz} + m. ds. \tau_{yz} + n. ds. \sigma_{zz}$$

Soit après simplification :

$$f_x^s = l. \sigma_{xx} + m. \tau_{yx} + n. \tau_{zx}$$

$$f_y^s = l. \tau_{xy} + m. \sigma_{yy} + n. \tau_{zy}$$

$$f_z^s = l. \tau_{xz} + m. \tau_{yz} +$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = [\sigma] \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (I.6)$$

$n. \sigma_{zz}$

Ces équations d'équilibre de surface correspondent en fait aux conditions aux limites du système d'équations aux dérivées partielles (I.5). $[\sigma]$ est appelé tenseur des contraintes.

1.2.1.4. Les équations de compatibilité

Quand on connaît les déplacements, il est simple de déterminer les déformations. Mais le problème inverse n'est pas aussi simple : 3 composantes pour le déplacement et 6 composantes pour le tenseur des déformations. On a donc 6 inconnues et trois équations : le problème n'a pas de solution unique. Cela est dû au mouvement du corps solide : rotation d'ensemble, translation (Mécanique des milieux indéformable). Il existe des relations de compatibilité pour soulever ces indéterminations qui sont :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (I.7)$$

Cette équation générale permet d'exprimer six équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

1.2.2 Les déformations

1.2.2.1 Notion de déformation

L'action des forces extérieures sur un solide déformable entraîne pour chacun des points de sa géométrie un mouvement pouvant être décomposé en trois phases distinctes : une translation d'ensemble (mouvement de corps rigide en translation), une rotation d'ensemble (mouvement de corps rigide en rotation) et enfin une déformation pure.

La déformation qui correspond à un mouvement relatif par rapport à un référentiel donné, peut suivre plusieurs hypothèses comme celles des petites ou grandes déformations mais également être associée à des petits ou grands déplacements [Caze.10].

I.2.2.2 Déplacements

Le mouvement d'un point de O vers O' caractérisé par le vecteur \vec{q} peut-être décomposé dans un système xyz en 3 composantes u, v, w , qui représentent les déplacements de ce point sur les axes de référence soit :

$$\vec{q} = u.\vec{i} + v.\vec{j} + w.\vec{k} \tag{I.8}$$

On définit par ailleurs la norme du déplacement comme étant :

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \tag{I.9}$$

Ces déplacements u, v ou w sont généralement des fonctions de x pour les poutres, de x et y pour les plaques et coques, x, y et z pour les solides.

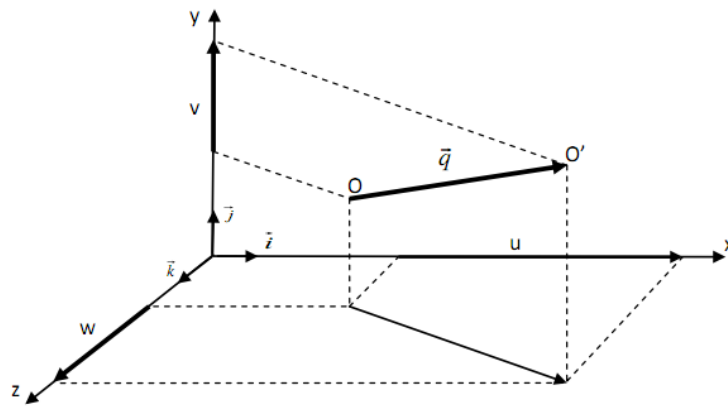


Figure I.5 : déplacement d'un point

I.2.2.3 Relations entre déplacements et déformations

En considérant dans un premier temps un état plan de déformation dans le plan xOy .

Les déformations normales et distorsion angulaire peuvent être obtenues en posant que :

$$\epsilon_{xx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A'D' - AD}{AD} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{dx + v + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{I.10}$$

$$\epsilon_{yy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{A'D' - AD}{AD} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{dy + v + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u - dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ dy \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - B'A'D' \right) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{I.11}$$

La généralisation de cette approche bidimensionnelle aux deux autres plans permettra d'obtenir :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \tag{I.12}$$

D'où l'expression générale des composantes du vecteur des déformations :

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\} \tag{I.13}$$

L'expression (I.13) pourra également être exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{I.14}$$

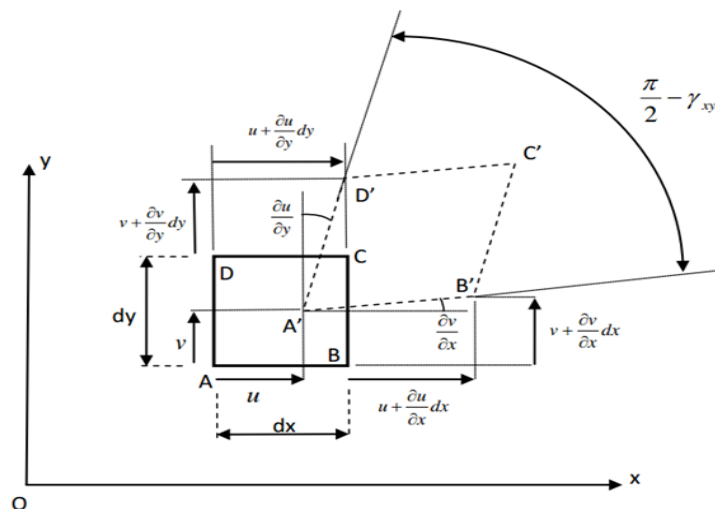


Figure I.6 : déformations planes.

I.2.3. Relations entre déformations et contraintes

Restant dans le domaine élastique linéaire, l'application de la démarche précédente aux deux autres axes y et z , amènerait inmanquablement à des résultats similaires (permutations croisées des indices x, y et z). De ce fait et toujours en raison de la linéarité, la relation tridimensionnelle entre déformations et contraintes normales peut être obtenue par superposition des trois états d'équilibre suivant x, y et z soit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]\end{aligned}\tag{I.15}$$

De plus, il est également possible via un essai de cisaillement pur de montrer qu'il existe des relations linéaires entre contraintes et déformations de cisaillement telles que :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \text{ avec } G = \frac{E}{2(1 + \nu)}\tag{I.16}$$

D'où la relation finale entre déformations et contraintes :

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\} &= [D]\{\sigma\} \\ \text{avec } [D] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{I.17}$$

I.2.4. Relations entre contraintes et déformations

L'inversion des expressions (I.15) et (I.16) permet de déduire les contraintes à partir des déformations, soit :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{xx}(1-\nu) + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{yy}(1-\nu) + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{zz}(1-\nu) + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})]\end{aligned}\tag{3.18}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\}$$

Avec

$$\begin{aligned}[H] &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \\ &= [D]^{-1}\end{aligned}$$

Ce qui permet de démontrer que [H] n'est pas définie pour $\nu = 0.5$

I.2.5. Etat plan de contrainte et de déformation

A- Déformations planes

Considérant un solide de section transversale constante, l'hypothèse de déformation plane consiste à considérer un comportement plan identique quelle que soit la profondeur. En d'autres termes, le solide peut être décomposé en « tranches » d'épaisseur unitaire, le calcul se limitant à l'étude d'une seule de ces tranches.

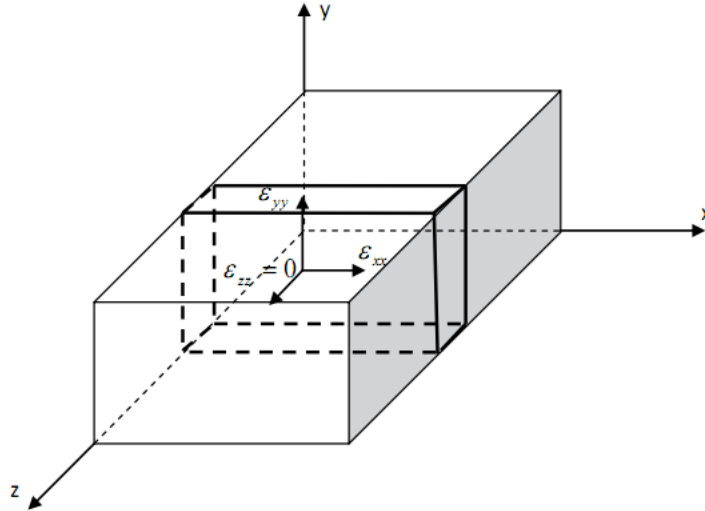


Figure I.7 : Etat plan de déformation.

En conséquence, toutes les déformations associées à l'axe transversal, z en l'occurrence, seront prises égales à zéro.

On a donc :

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \text{ et } \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (3.20)$$

En remplaçant (I.20) dans (I.19), la relation contrainte-déformation devient pour les déformations planes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (I.21)$$

De (I.15), on déduit également que :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (I.22)$$

B- Contraintes planes

A l'inverse de l'état de déformation plane, l'hypothèse de contrainte plane suppose que toutes les contraintes associées à l'axe transversal, z en l'occurrence, sont nulles.

On a donc :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{I.23})$$

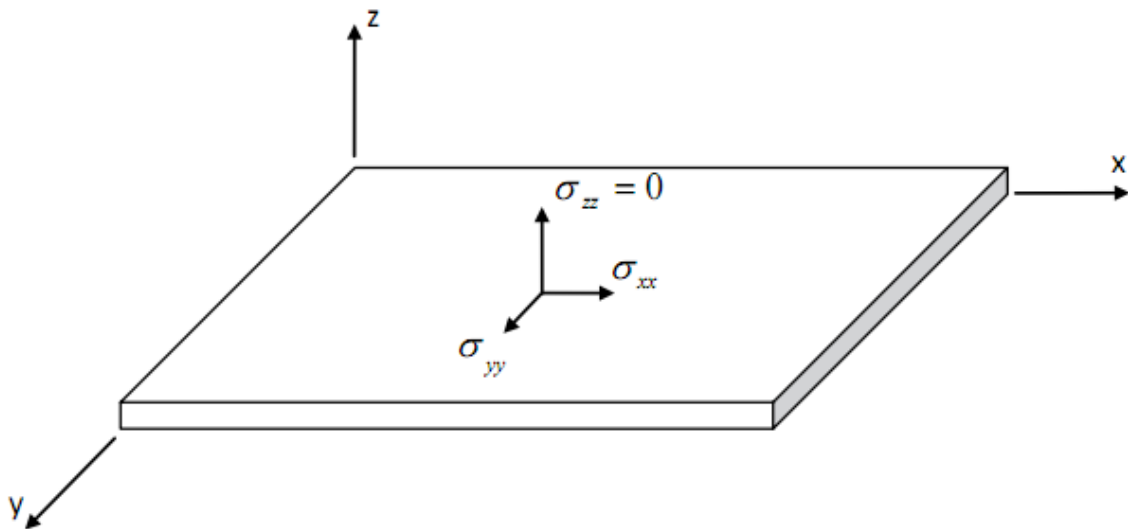


Figure I.8 : Etat plan de contrainte.

La relation (I.15) permet d'établir que :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{I.24})$$

Mais également que :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.25})$$

Cette approche étant directement applicable aux éléments de faibles épaisseurs, les éléments membranes, plaques et coques suivront cette hypothèse de contrainte plane.

I.3. Les équations fondamentales de l'élasticité plane

I.3.1. Les équations d'équilibre

I.3.1.1. Les équations différentielles d'équilibre

En annulant $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$ et en adoptant f_x^v et f_y^v pour les composantes des forces volumiques dans la direction x et dans la direction y respectivement, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y^v = 0 \end{cases} \quad (I.26)$$

I.3.1.2. Les conditions de contour

Soient $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour du disque en chargement plan. Soient f_x^s et f_y^s les tractions superficielles imposées sur le contour. La définition du tenseur contrainte permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha = f_x^s \\ \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha = f_y^s \end{cases} \quad (I.27)$$

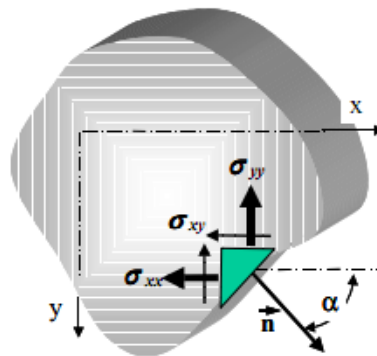


Figure I.9 : Conditions de contour en contraintes planes.

Ces conditions expriment l'équilibre de translation selon les deux axes coordonnée du prisme élémentaire sur la figure (I.9).

3.3.1.3. Changement d'axe

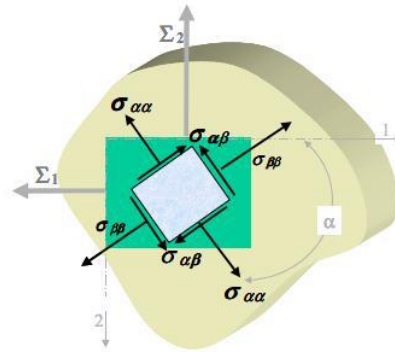


Figure I.10 : Contraintes sur deux facettes orthogonales.

Soient 1 et 2 les directions principales des contraintes ($\sigma_{12} = 0$) σ_1 et σ_2 les contraintes principales. Dans ce cas on montre que 1 et 2 sont aussi les directions principales des déformations. Les formules de changement d'axes établies pour le tenseur des contraintes en 3 dimensions prennent des expressions particulièrement simples en contraintes planes ou en déformations planes :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

I.3.2. Les équations de compatibilité et le potentiel des contraintes

Dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité s'écrivent précédant.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{jk} = 0$$

Si les déformations ε_{xz} , ε_{yz} sont nulles et que toutes déformations sont indépendantes de z, les équations de compatibilité se réduisent à l'unique équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{I.29})$$

Comme dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité peuvent être exprimées en fonction des contraintes. En contraintes planes ou déformations planes, on part ce pendant plus souvent de la fonction d'Airy.

*Chapitre II : les
phénomènes
d'instabilité*

II- Introduction

La résistance ultime des éléments comprimés est très souvent définie non pas par un critère de résistance en section, mais par un critère de stabilité de forme. afin d'illustrer en quoi consiste un problème de stabilité de forme, on peut faire une analogie entre le flambage d'une barre bi articulée parfaitement rectiligne et l'équilibre d'une balle parfaitement sphérique sur une surface sans frottement.

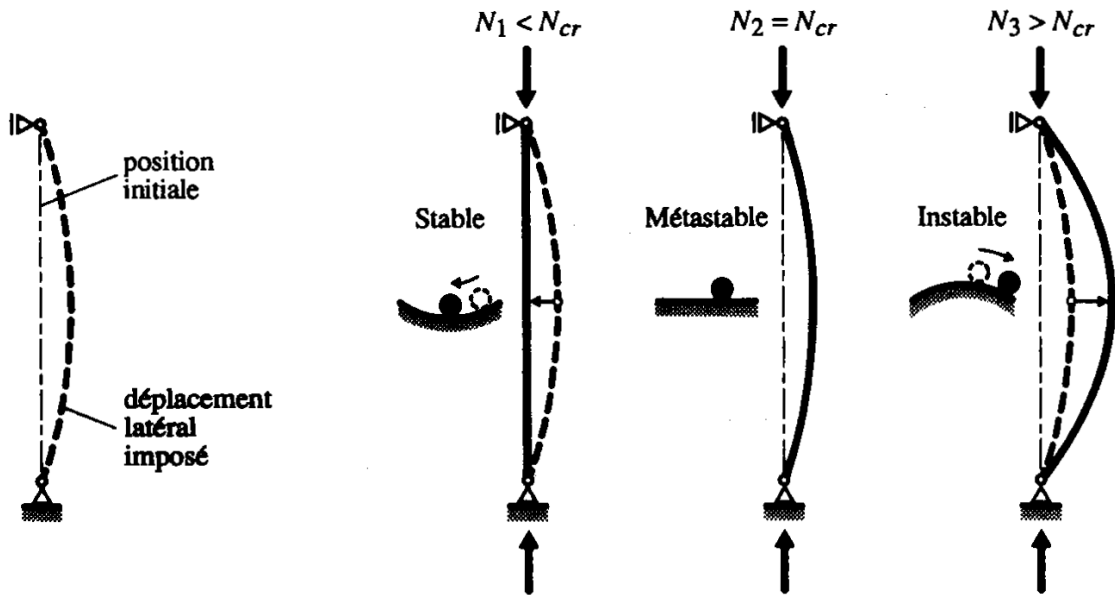


Figure .II.1. stabilité de forme d'une barre comprimée

La barre étant soumise à une charge axiale de compression N_1 , supposons qu'on lui impose un petit déplacement latéral ; si la barre revient à sa position initiale lorsque la cause de ce déplacement est supprimée, on dit qu'elle est en équilibre stable. il existe une charge N_2 supérieure N_1 , pour laquelle la barre garde sa position déformée la suppression de la cause du déplacement latéral. Quelle que soit la grandeur de ce dernier ; elle a alors trouvé un nouvel état d'équilibre et on dit qu'elle est en équilibre métastable ou indifférent. la charge N_2 est appelée charge critique de flambage élastique N_{cr} . Pour une charge N_3 supérieure à N_{cr} , la barre se dérobe si on lui impose un petit déplacement latéral ; la déformation s'accroît et devient inacceptable : le système est alors instable.

L'étude de la stabilité d'un système consiste à déterminer la valeur de la charge critique pour laquelle le système est en équilibre métastable. la charge critique dépend de la forme de la barre à l'état métastable, qui est caractérisée par la longueur de flambage l_K .

La théorie développée dans ce chapitre se concentre essentiellement sur la détermination de cette longueur.

On peut classer le problème de stabilité en plusieurs catégories suivant que l'on étudie une structure dans son ensemble ou les différents éléments qui la composent :

- Stabilité d'une barre : analyse d'un élément linéaire à axe rectiligne (barre droite), curviligne (arc) ou quelconque, soumis à des actions conduisant à des sollicitations d'effort normal N , de moment de flexion M , d'effort tranchant V et de moment de torsion T . dans ce volume, ne seront traitées que les barres droites sollicitées en compression simple, en flexion simple et en flexion composée.
- Stabilité d'un ensemble d'éléments linéaires et plans : étude des cadres bi- ou tridimensionnels
- Stabilité d'une plaque ou d'une coque : analyse de plaques sollicitées par des charges agissant dans leur plan et de coques, tels que cylindres ou voiles.
- Le but de ce chapitre est d'examiner le phénomène d'instabilité qu'est le flambage des barres comprimées, en mettant en évidence le principal paramètre qui régit ce phénomène. Pour atteindre ce but, les points suivants y sont traités :
 - Section 1 : présentation de la théorie linéaire du flambage élastique.
 - Section 2 : étude de la résistance ultime au flambage d'une barre réelle.

La connaissance de la matière de ce chapitre est importante, car elle forme la base du dimensionnement des éléments comprimés présentés au chapitre.

II.1. théorie linéaire du flambage élastique :

Principes :

Cette théorie, établie dans ses fondements les plus simples par Euler en 1744 [1], est traitée dans le volume 2 ; elle ne fait donc ici que l'objet d'un bref rappel pour le flambage plan (ou flambage par flexion) d'une barre droite simplement comprimée. Les principales hypothèses à la base de cette théorie sont :

- barre prismatique bi-articulée parfaitement rectiligne.
- barre idéale sans imperfections (déformation initiale, contraintes résiduelles, etc...).
- barre sollicitée en compression pure par une charge parfaitement centrée.
- matériau infiniment élastique linéaire.

- déformation par torsion empêchée.

Considérons la barre comprimée de la figure 1.2 la charge critique N_{cr} est égale à la charge pour laquelle la barre est en équilibre indifférent .pour obtenir cette valeur , on impose une déformation à la barre chargée et l'on écrit son équation d'équilibre dans la position déformée . Cette position représente donc un état d'équilibre possible. la représentation graphique du phénomène est caractérisée par une augmentation de la charge N sans aucune déformation w jusqu'à une valeur de charge $N = N_{cr}$, ou le déplacement latéral w comporte un point de bifurcation. l'ensemble des points situés sur les deux tronçons horizontaux de la courbe $N - w$ de la figure 1.2 représentent également un état d'équilibre possible .ce phénomène est par conséquent appelé flambage par bifurcation.

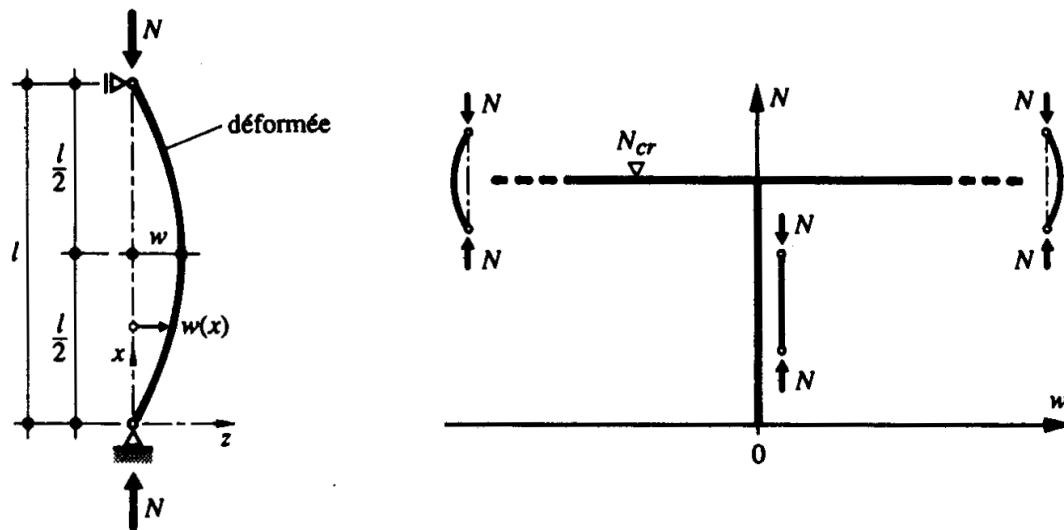


Figure II.2. flambage plan d'une barre bi articulée (bifurcation de l'équilibre).

La condition d'équilibre entre les moments extérieur et intérieur permet d'écrire les équations différentielles ci-après, suivant le type de flambage :

Selon l'axe y :

$$EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + Nw(x) = 0 \quad (\text{II.1.a})$$

Selon l'axe z :

$$EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + Nv(x) = 0 \quad (\text{II.1.b})$$

Il est nécessaire de préciser la terminologie employée ici pour désigner le type de flambage, que nous allons toujours considérer selon un axe. ainsi, le flambage selon l'axe y dépend de l'inertie I_y , mais correspond à une déformation w dans la direction de l'axe z

donc perpendiculairement à l'axe y . de même, le flambage selon l'axe z dépend de l'inertie I_z , mais correspond à une déformation v dans la direction de l'axe y , donc perpendiculairement à l'axe z .

En admettant une déformée sinusoïdale et une rigidité EI constante, on obtient par intégration, en introduisant les conditions aux limites pour une barre bi articulée, la valeur de la charge de flambage élastique N_{cr} , ou charge critique d'Euler N_E , donnée par :

$$N_{cr} = N_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (\text{II.2})$$

E : Module d'élasticité

I : Inertie de la section de la barre par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de déformation

l : Longueur de la barre

Il est important de préciser que la charge critique correspond en fait à une résistance, et non pas à une sollicitation (même si l'on utilise le terme de charge) d'une barre idéale comprimée.

Le cas de la barre bi articulée correspond au cas fondamental de flambage. il est possible de déduire la charge critique de barre présentant d'autres conditions d'appui en introduisant la notion de longueur de flambage l_K . Celle-ci est égale à la longueur de la barre bi articulée fictive qui aurait la même charge critique que la barre étudiée ; c'est aussi la distance entre deux points d'inflexion de la déformée (fig.II.3). d'où l'expression généralisée donnant la valeur de la charge critique de flambage élastique :

$$N_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L_K^2} \quad (\text{II. 3})$$

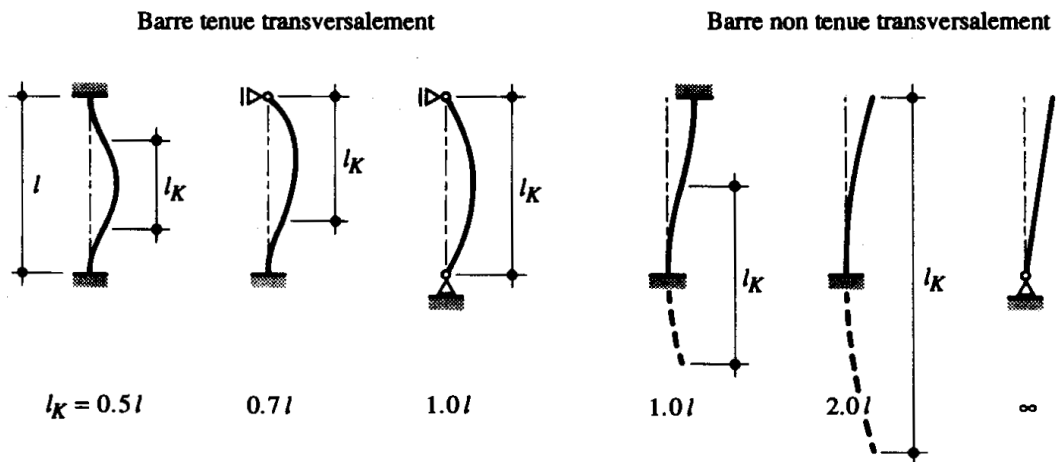


Figure. II.3. longueurs de flambage l_K d'une barre comprimée pour différentes conditions d'appui.

La contrainte moyenne de compression, définie comme la contrainte critique de flambage élastique, vaut alors :

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L_K^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_K^2} \quad (\text{II.4})$$

A : aire de la section

i : rayon de giration de la barre par rapport à la l'axe perpendiculaire au plan de déformation ($i = \sqrt{I/A}$)

Avec l'élancement λ_K de la barre défini comme étant égal au rapport entre sa longueur de flambage l_k et son rayon de giration i :

$$\lambda_K = \frac{l_k}{i} \quad (\text{II.5})$$

Il faut relever que permet d'exprimer l'élancement λ_K en fonction de la charge critique de flambage élastique selon l'expression suivant, qui sera utilisée au paragraphe :

$$\lambda_K = \pi \sqrt{\frac{EA}{N_{cr}}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}} \quad (\text{II.6})$$

Si l'on représente graphiquement, on obtient la courbe de σ_{cr} en fonction de λ_K donnée à la figure II.4, appelée hyperbole d'Euler, qui est la courbe de flambage pour des barres parfaitement rectilignes constituées d'un matériau infiniment élastique linéaire. Dans le cas de l'acier, en admettant le diagramme idéalisé contrainte –déformation spécifique définie pour le calcul plastique à la figure, la courbe de flambage est limitée par la droite horizontale correspondant à la limite d'élasticité f_y .

Pratiquement, si l'on effectue des essais en employant des barres industrielles, on obtient les courbes de flambage. Pour de grands élancements, ces courbes sont très proches de l'hyperbole d'Euler ; mais lorsque l'élancement diminue, elles s'en écartent passablement, pour s'approcher de la limite d'élasticité dans le cas de très faible élancement. On constate que la contrainte de flambage est plus faible que la contrainte critique de flambage élastique σ_{cr} obtenue par la théorie élastique. Ceci est dû principalement à l'effet défavorable des contraintes résiduelles et des imperfections géométriques inhérentes à chaque profilé.

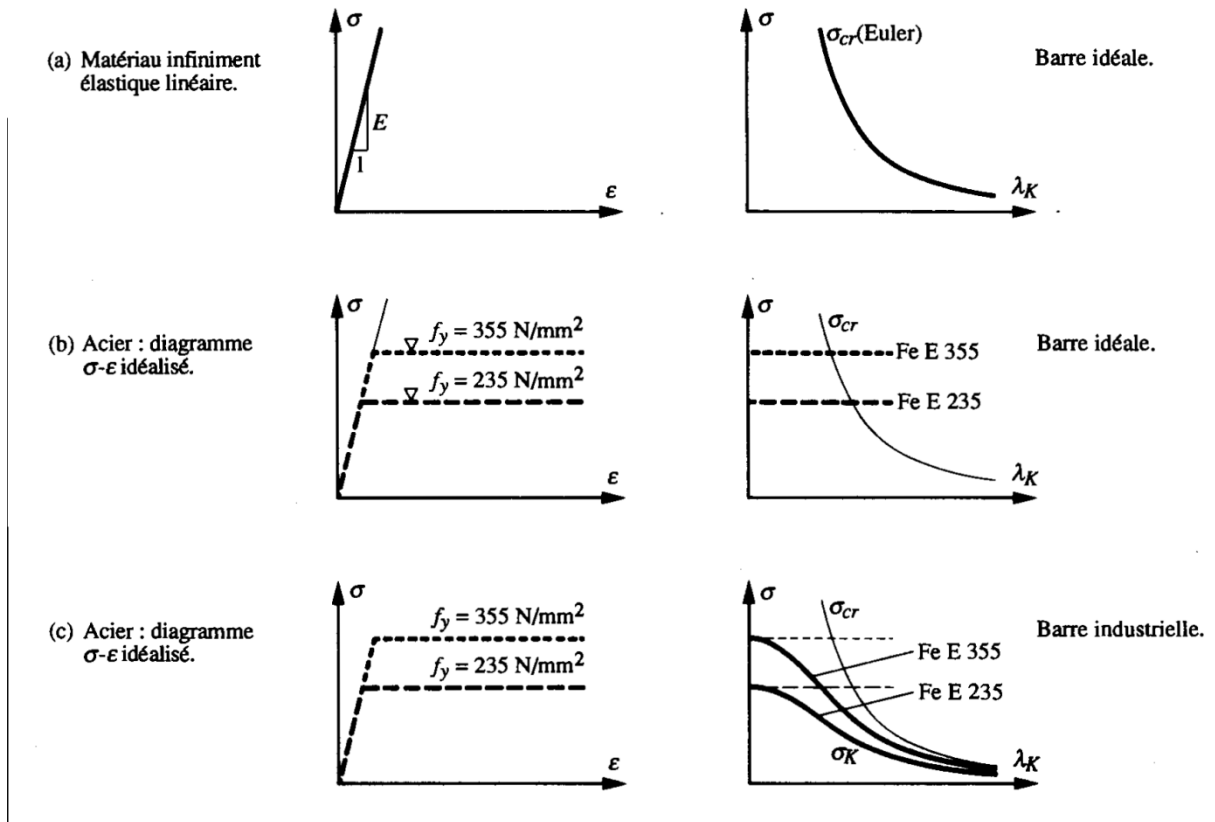


Figure II.4. Allure des courbes de flambage selon les hypothèses effectuées.

En conclusion, la théorie linéaire du flambage élastique est insuffisante pour déterminer la résistance ultime d'une barre comprimée. Elle montre cependant l'importance de l'élançement λ_K sur la valeur de la charge critique. Notons enfin que l'emploi d'un acier à haut résistance n'est pas avantageux pour les pièces élancées, car la charge critique n'est pas directement proportionnelle à la limite d'élasticité de l'acier. En fait, pour le grand élançement, le calcul de la charge critique n'est pas un problème de résistance, mais plutôt de déformation (flèche inacceptable), u fortement influencé par le module d'élasticité du matériau. Ce phénomène est d'ailleurs encore plus marqué pour des éléments élancés en aluminium, car le module d'élasticité de ce matériau vaut environ le tiers de celui de l'acier

II.2. Cas particulier du flambage par flexion et torsion :

Nous avons étudié jusqu'ici le phénomène du flambage par flexion en admettant que la déformation par torsion de la barre était empêchée .or, pratiquement, cette condition n'est pas toujours réalisée ; le phénomène d'instabilité qui dicte la ruine d'une barre est alors le flambage par flexion et torsion. Ce dernier représente en fait le mode d'instabilité le plus général d'une barre droite ; le flambage par flexion seule ou par torsion seule sont des cas particuliers.

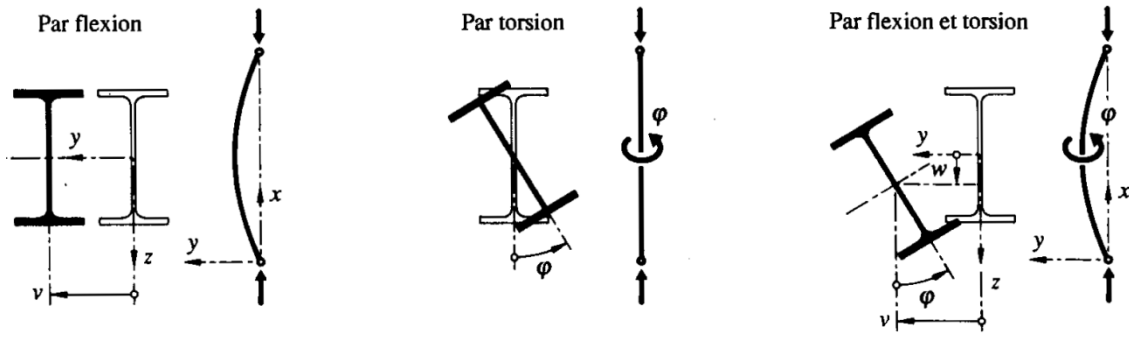


Figure II.5. Différents modes de flambage d'une barre comprimée.

Le phénomène du flambage par flexion et torsion (appelé aussi flambage spatial) d'une barre simplement comprimée peut être étudié comme un phénomène d'instabilité par bifurcation de l'équilibre.

La position d'équilibre indifférent de la barre est une position dans laquelle les sections ont subi une translation et une rotation par rapport à l'état non déformé de la barre (fig. II.5). Les équations différentielles de la déformée pour une charge axiale dont le point d'application est au centre de gravité G de la section. Sont très semblables à l'équation différentielle utilisée pour le flambage par flexion ; elles sont les suivantes :

Flexion selon l'axe y :

$$EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N[w(x) - yc \varphi(x)] = 0 \quad (\text{II.7})$$

Flexion selon l'axe z :

$$EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + N[v(x) + zc \varphi(x)] = 0 \quad (\text{II.8})$$

Torsion autour de l'axe x (axe longitudinal) :

$$EI_\omega \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} + (Ni_c^2 - GK) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + N_{zc} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} - N_{yc} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.9})$$

yc : Coordonnée y du centre de cisaillement C

zc : Coordonnée z du centre de cisaillement C

y : Déplacement du centre de cisaillement C dans la direction de l'axe y

w : Déplacement du centre de cisaillement C dans la direction de l'axe z

φ : Rotation de la section

I_ω : Moment d'inertie sectoriel de la section

i_c : Rayon de giration pour le flambage par flexion et torsion ($i_c^2 = y_c^2 + z_c^2 + (I_y + I_z)/A$)

G : module de glissement

K : constante de torsion uniforme

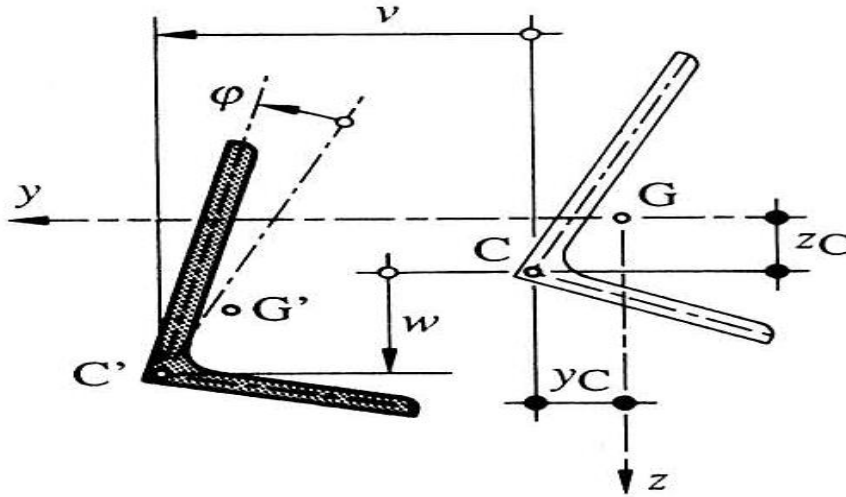


Figure II.6. Flambage par flexion et torsion

En intégrant le système d'équations ci-dessus et en tenant compte des conditions aux limites pour une barre bi articulée selon ses deux axes d'inertie, on obtient l'expression suivante :

$$i_c^2(N_{cr} - N_{cry})(N_{cr} - N_{crz})(N_{cr} - N_{cr\phi}) - N_{cr}^2 z_c^2 c(N_{cr} - N_{cry}) - N_{cr}^2 y_c^2(N_{cr} - N_{crz}) = 0 \quad (\text{II.10})$$

N_{cr} : Charge critique de flambage élastique de la barre (flambage par flexion et torsion)

N_{cry} : Charge critique de flambage élastique (flambage par flexion seule) selon l'axe y (axe fort) ($N_{cry} = \pi^2 EI_y / l_y^2$)

N_{crz} : charge critique de flambage élastique (flambage par flexion seule) selon l'axe z (axe faible) ($N_{crz} = \pi^2 EI_z / l_z^2$)

$N_{cr\phi}$: Charge critique de flambage élastique par torsion ($N_{cr\phi} = [GK + (\frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2})] / i_c^2$)

II.3. Cas particulier de la barre étré sillonnée :

L'idée, à la base de la conception d'une barre étré sillonnée, est de construire une barre comprimée avec un minimum de matière. On utilise à cet effet deux ou plusieurs profilés ayant leur centre de gravité placé à une distance b et dont les sections sont solidarisées à intervalles réguliers au moyen d'étrésillons (fig. II.7), de cette façon, on

augmente considérablement l'inertie de la barre par rapport à l'un de ses axes de flexion, sans pour autant augmenter le poids d'acier.

La résistance ultime au flambage d'une telle barre ne peut toutefois pas être calculée en considérant une section monolithique. En effet, les déformations dues à l'effort tranchant, d'ordinaire négligées,

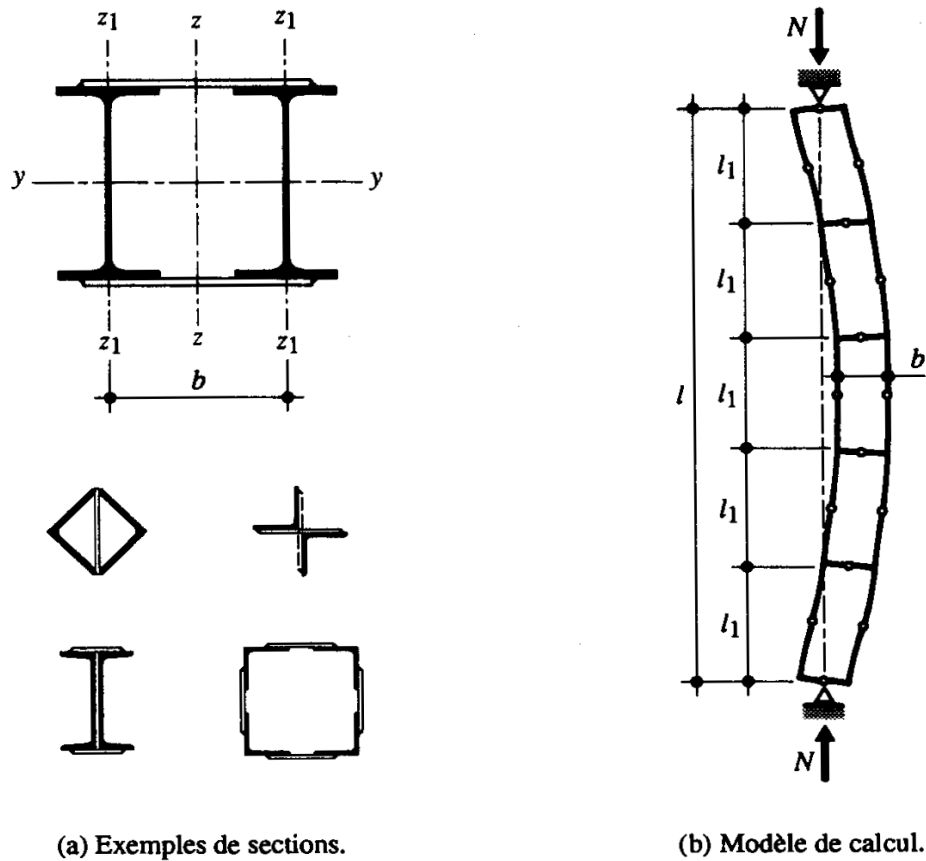


Figure II.7. Barre étrésoillonnée.

Deviennent importantes : elles peuvent être de même ordre de grandeur que la déformation due à la flexion.

Pour calculer la charge critique de flambage élastique d'une barre étrésoillonnée, constituée de deux membrures, on assimile cette barre à une poutre Vierendeel dont on lève l'hyperstatique en admettant des rotules au milieu des membrures entre chaque étrésoillon et au milieu de chaque étrésoillon (fig. II.7).

En considérant l'état déformé de la barre, on a l'équation différentielle suivant, qui n'est autre qu'à laquelle le terme correspondant à l'effort tranchant est ajouté :

$$EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + N v(x) + EI_z \frac{\eta N}{AG} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.11})$$

I_z : Inertie de la section totale de la barre par rapport à l'axe z

η : Coefficient dépendant de la géométrie de la section de la barre

A : Aire de la section totale de la barre (somme des aires A_1 de chaque membrure)

Pour une barre bi articulée, on peut obtenir par intégration, la valeur de la charge critique de flambage élastique suivante :

$$N_{cr} = \frac{N_E}{1 + \frac{\eta N_E}{AG}} \quad (\text{II.12})$$

N_E : charge critique d'Euler de la barre considérée comme étant monolithique (flambage selon l'axe) ($N_E = \pi^2 EI_z / l^2$)

Dans(II.12), le terme $\frac{\eta}{AG}$ représente l'inclinaison additionnelle de la barre due à un effort tranchant unitaire. Pour une barre étrésoillonnée, dont l'écartement b des centres de gravité deux membrures n'est pas trop grand et dont les étrésoillons présentent une grande rigidité (ce qui est en général le cas), on peut adopter la valeur suivante, résultant d'un calcul simplifié :

$$\frac{\eta}{AG} = \frac{l_1^2}{24 EI_{z1}} \quad (\text{II.13})$$

l_1 : Écartement entre étrésoillons

I_{z1} : sertia de la section d'une membrure par rapport à son axe z_1 (fig. II.7(a))

En remplaçant N_E Ne par son expression analytique, on obtient la charge critique de flambage élastique suivant :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\frac{l^2}{I_z} + \frac{\pi^2 l_1^2}{24 I_{z1}}} \quad (\text{II.14})$$

A partie de (II.4) et de (II.6), on peut calculer l'élancement idéalise $\lambda_{z,id}$ de la barre étrésoillonnée qui correspond à d'une barre bi articulée dont la charge critique de flambage élastique est identique

$$\lambda_{z,id} = \sqrt{\frac{\pi^2 EA}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{Al^2}{I_z} + \frac{A\pi^2 l_1^2}{24 I_{z1}}} \quad (\text{II.15})$$

En posant $A = 2A_1$ (A_1 : section d'une membrure) dans le deuxième terme de (II.15) faisant l'hypothèse conservatrice que $\frac{\pi^2}{12} \approx 1$.

$$\lambda_{z,id} = \sqrt{\lambda_z^2 + \frac{\pi^2}{12} \lambda_1^2} \approx \sqrt{\lambda_z^2 + \lambda_1^2} \quad (\text{II.16})$$

λ_z : Élancement de la barre étré sillonnée comme monolithique (flambage selon l'axe z)

λ_1 : Élancement d'une membrure (la longueur de flambage est égale à l'écartement l_1 des étré sillons)

La relation (II .6) repose sur les conditions suivantes :

- Etré sillons rigides, assemblés rigidement aux deux membrures.
- Elancement λ_1 des membrures entre les étré sillons inférieure à 50,
- Barre composée de deux membrures et comportant plusieurs étré sillons (au minimum deux, car usuel étré sillon au milieu de la barre est inutile, l'effort tranchant étant nul au milieu de la barre).

Pour des barres étré sillonnées comportant plus de deux membrures, on peut employer la formule approchée suivante :

$$\lambda_{z,id} = \sqrt{\lambda_z^2 + \left(\frac{m}{2}\right) \lambda_1^2} \quad (\text{II.17})$$

m : Nombre de membrures

La théorie exposée dans ce paragraphe sert de base au dimensionnement des barres étré sillonnées traité à la section.

II.4. Résistance ultime au flambage

II.4.1. Principe du flambage par divergence

L'étude classique du phénomène d'instabilité d'une barre comprimée considère une barre idéale, exécutée en un homogène, ayant un axe parfaitement rectiligne et une application centrée de la charge : il s'agit des hypothèses à la base de la théorie linéaire du flambage élastique traité à la section I .2. En réalité, l'axe d'une barre industrielle présente une déformée initiale due tolérances d'exécution ; elle n'est de ce fait jamais absolument rectiligne et les charge sont appliquées avec une certaine excentricité w_0 par rapport a l'axe X, comme le montre l a figure II.8. La section d'une barre industrielle se différencié également de celle d'une barre idéale par la présence de la contraintes résiduelles dues au laminage et au refroidissement de la section (§3.2.7). L'ensemble de ces imperfections conduit à des efforts supplémentaires dans la barre (efforts du second ordre) et à chaque valeur de la charge N correspond une déformation w non nulle.

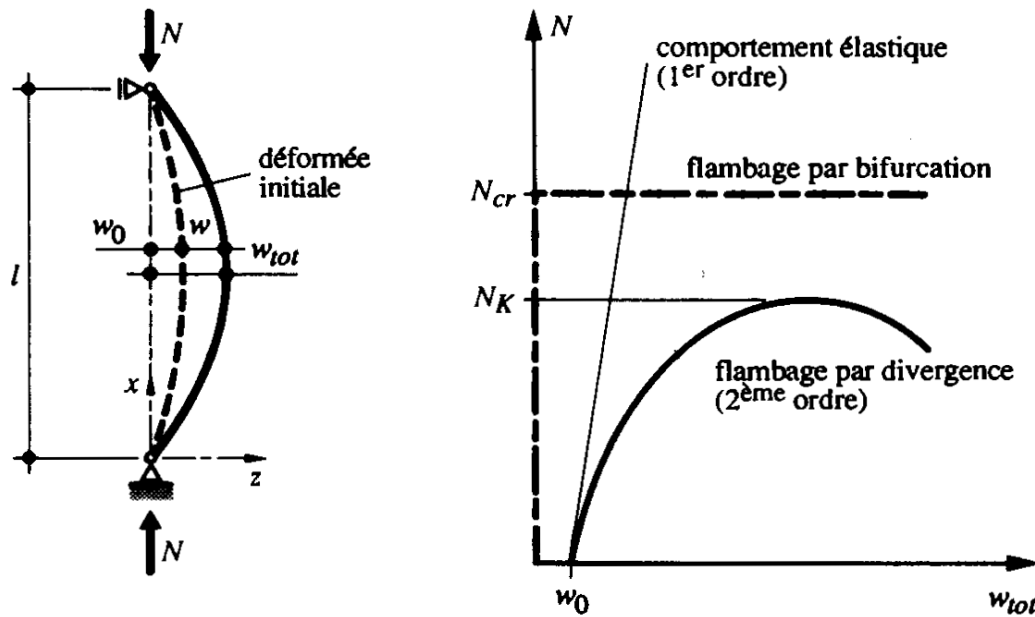


Figure II.8. courbe. Flambage par divergence de l'équilibre.

Lors de la mise en charge de la barre, la courbe charge-déformation commence déjà avec une déformation w_0 . Puis elle va s'éloigner de la droite correspondant au comportement élastique (1er ordre) de la barre (fig. II.8). La déformation w_{tot} devient rapidement excessive, et la résistance ultime au flambage N_K de la barre est alors atteinte lorsque les efforts intérieurs excèdent sa résistance en section.

A noter que la résistance ultime au flambage N_K est toujours inférieure à la charge critique de flambage N_{cr} . On parle dans ce cas de *flambage par divergence*, par opposition au flambage par bifurcation (§II.2.1).

On peut calculer la valeur de résistance ultime N_K à partir des courbes de flambage européennes établies par la CECM (Convention Européenne de la Construction Métallique) [2], en tenant compte des différentes affectant les barres industrielles. Ces imperfections sont de différentes natures comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

II.5. Imperfections des barres industrielles

II.5.1. Déformée initiale

Comme nous l'avons déjà vu au paragraphe (3.2.6), les barres industrielles (profilés laminés ou composés soudés) comportent des imperfections géométriques. Les imperfections de fabrication font que l'axe des barres n'est pas absolument rectiligne, mais qu'il décrit une courbe quelconque dans l'espace. Cette déformée initiale engendre des efforts secondaires qui se traduisent par une réduction de la résistance ultime au flambage.

Considérons une barre bi articulée comprimée comportant une déformée initiale $w_0(x)$ (fig.II.9).

Admettons que l'équation de sa déformée initiale soit sinusoïdale :

$$w_0(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (\text{II.18})$$

w_0 : Déformation initiale de la barre à mi-hauteur ($x = \frac{l}{2}$)

On remarquera la simplification de notation utilisée pour la déformation initiale de la section à mi-hauteur de la barre : on utilise w_0 à la place de $w_0 (x = \frac{l}{2})$ pour alléger l'écriture.

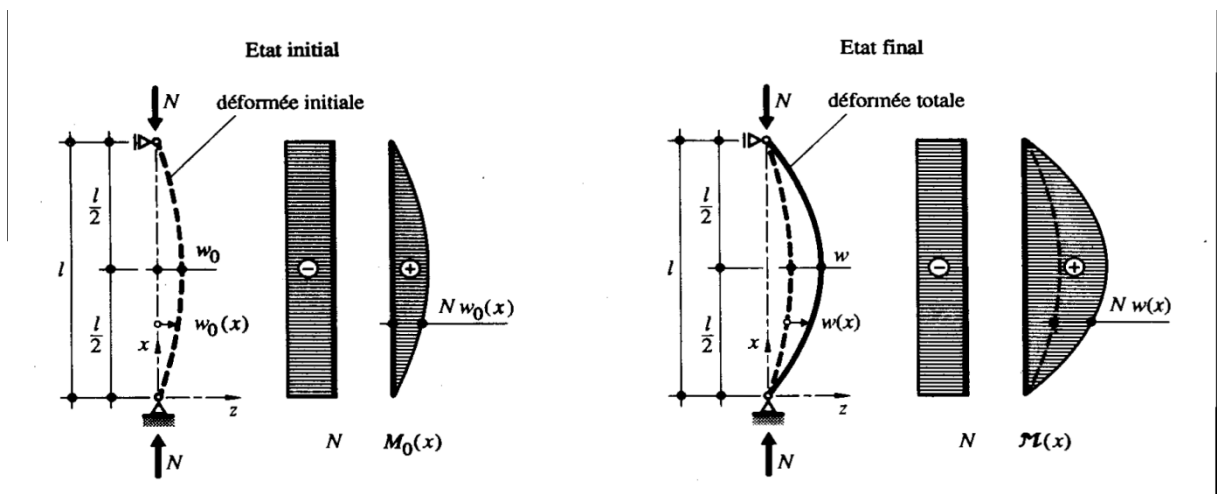


Figure. II.9. effet du second ordre

A cause de la déformée initiale $w_0(x)$, la barre est soumise non seulement à un effort normal de compression, mais également à un moment de flexion $M_0(x)$ qui vaut $Nw_0(x)$. Ce moment provoque une déformation supplémentaire $w_1(x)$, qui crée à son tour un moment de flexion supplémentaire $M_1(x)$ égal à $Nw_1(x)$. Ce dernier provoque alors une déformation $w_2(x)$, qui crée à son tour un moment $M_2(x)$, et ainsi de suite ... On parle alors d'**effet du second ordre** (ou du deuxième ordre). La déformée totale due à l'effet du second ordre, qui correspond en fait à la somme des déformations $w_i(x)$, est désignée par $w(x)$, tandis que le moment dû à $w(x)$ sera noté $M(x)$.

En écrivant selon (II.1) l'équation différentielle de la barre :

$$EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N[w_0(x) + w(x)] = EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N\left[w_0 \sin \frac{\pi x}{l} + w(x)\right] = 0 \quad (\text{II.19})$$

et en intégrant celle –ci en tenant compte des conditions aux limites (à savoir $w(x) = 0$ pour $x = 0$ et l), on peut calculer l'expression de la déformation additionnelle $w(x)$ due à l'effet du second ordre :

$$w(x) = \frac{w_0}{\frac{\pi^2}{\left(\frac{Nl^2}{EI}\right)} - 1} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (\text{II.20})$$

Sachant que $\pi^2 \frac{EI}{l^2} = N_{cr}$ (charge critique de flambage élastique (II.3), la déformation additionnelle au milieu de la barre ($x = l/2$) vaut :

$$w\left(x = \frac{l}{2}\right) = w = \frac{w_0}{\frac{N_{cr}}{N} - 1} \quad (\text{II.21})$$

et la déformation totale :

$$w_{tot} = w_0 + w = w_0 \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad (\text{II.22})$$

On remarquera également la simplification de notation utilisée pour la déformation additionnelle de la section à mi-hauteur due à l'effet du second ordre : on utilise w à la place de $w\left(x = \frac{l}{2}\right)$ pour alléger l'écriture.

La relation (II.22) permet de constater que la déformation totale w_{tot} correspond à la déformation initiale w_0 majorée par un facteur d'amplification, qui ne dépend que du rapport entre la charge appliquée N et la charge critique de flambage élastique (N_{cr}) de la barre. On retrouve ce même facteur d'amplification, par exemple dans (6.16), quand il s'agit d'établir le moment de flexion M du aux effets du second ordre, connaissant le moment de flexion M du premier ordre.

Du fait de la flèche totale maximale (w_{tot}), la section à mi-hauteur de la barre est donc sollicitée par un effort normal N et par un moment de flexion $M = Nw_{tot}$ dû à l'effet du second ordre. par exemple, pour un profilé HEA 200 flambant selon l'axe de faible inertie avec ($l_K = 3500\text{mm}$, $w_0 = 4\text{mm}$ et $N = 820\text{kN}$) on trouve ($w_{tot} = 6.3\text{mm}$). L'augmentation de la flèche (environ 50%) et le moment de flexion M qui en résulte ne sont donc pas négligeables.

La figure (II.10) illustre l'influence de la déformée initiale sur la résistance ultime au flambage pour deux valeurs d'élancement. Les diagrammes charge-déformation représentés sont déduits d'essais [3] effectués sur des barres comprimées bi articulées de section rectangulaire, auxquelles on a imposé une courbure initiale dans la plan de flexion.

On constate pour un élancement faible ($\lambda_K = 40$), le comportement des barres est quasi linéaire jusqu'à la ruine. Pour des grands élancements ($\lambda_K = 120$), les flèches sont beaucoup plus grandes et les courbes ne sont plus linéaires. On y voit également que la diminution de la résistance ultime peut être très importante suivant la valeur de la flèche initiale.

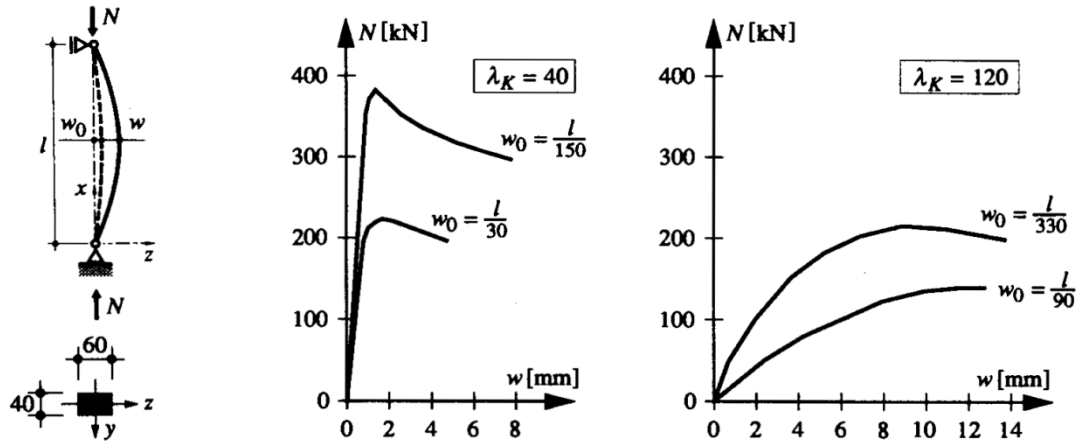


Figure. II.10. influence de la déformée initiale sur la résistance ultime au flambage.

II.5.2. Contraintes résiduelle

Les contraintes résiduelle, qui forment un état de contraintes auto-équilibré sur une section droite, peuvent être d'origine thermique (laminage, découpage au chalumeau, soudage) ou mécanique (dressage) (§3 /2.7et7.3.3). Montre la répartition des contraintes résiduelles dans la section d'un profilé en double té. L'évolution des contraintes dans une section rectangulaire comprimée, soumise à des contraintes résiduelle, est mise schématiquement en évidence à la (figure II.11), qui montrait ceci pour une section tendue.

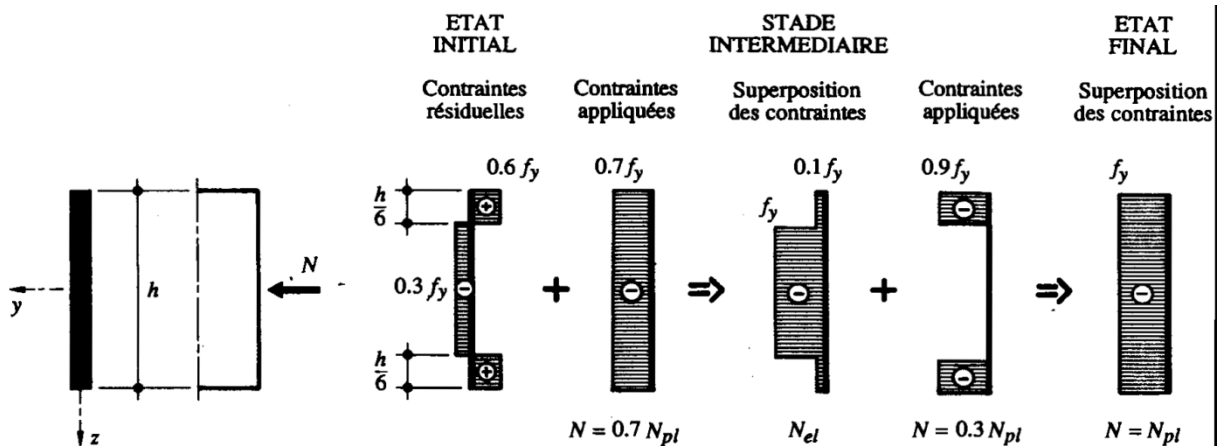


Figure.II.11. influence des contraintes résiduelles dans une section comprimée.

La figure II.11 montre que certaines fibres de la section se plastifient avant que l'effort normal appliqué ne soit égal à l'effort normal plastique (N_{pl}). Les contraintes résiduelles influencent donc le comportement d'une barre comprimée, car les zones plastifiées prématurément diminuent la rigidité de la section. En effet, lorsque la déformation spécifique ε d'une fibre dépasse l'allongement limite élastique ε_y , le module d'élasticité E de cette fibre est nul. Ce phénomène est illustré à la figure I.12, qui montre que la rigidité de la section est constante jusqu'à un effort normal de compression N égal à la charge N_{el} , correspondant à la charge maximale que peut supporter la section sans qu'aucune fibre ne soit plastifiée. Dès que la charge dépasse N_{el} , la rigidité de la section baisse alors relativement rapidement, pour finalement être nulle lorsque toutes les fibres de la section sont plastifiées ($N = N_{pl}$).

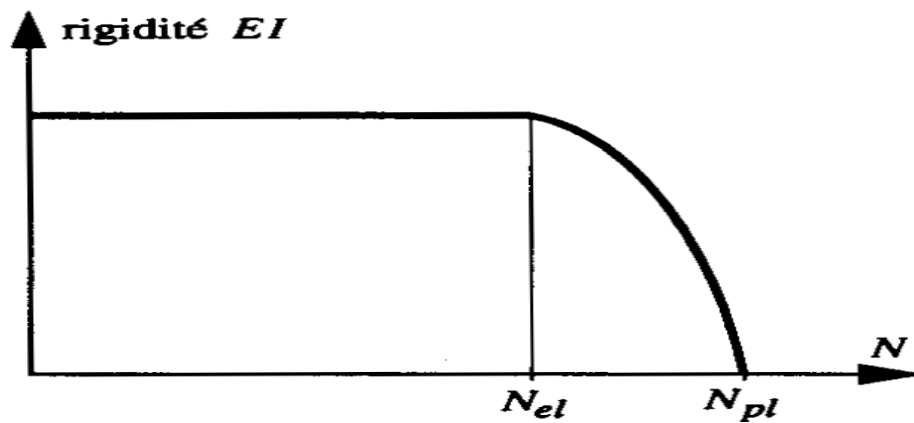


Figure. II.12. Influence des contraintes résiduelles sur la rigidité d'une section.

II.6. Courbes de flambage européennes

La conclusion la plus importante des travaux de la CEEM est que l'on ne peut pas vérifier toutes les pièces comprimées à partir d'une seule et unique courbe de flambage. Il est nécessaire de considérer chaque cas séparément, en tenant compte des caractéristiques relatives à la forme de la section, à son mode d'élaboration et à sa géométrie, les imperfections influençant la résistance ultime de barres comprimées ont pu être classées, selon leur ordre d'importance, de la manière suivante :

- La déformée initiale. Les mesures effectuées sur des barres comprimées existantes ont montré qu'il était conservateur d'adopter une déformée initiale de forme avec un rapport entre la déformation initiale w_0 et la longueur l de la barre de $1/1000$. Les courbes de flambage ont donc été établies en considérant des barres dont la déformée initiale était de ce type.

- Les contraintes résiduelles. Celles-ci ont un effet plus ou moins défavorable selon que le flambage de la barre crée une flexion sur l'axe faible ou l'axe fort, c'est-à-dire suivant que la traction. Par ailleurs, la répartition des contraintes résiduelles étant semblable pour un ensemble de section de même type, il est possible de classer certaines sections dans une seule catégorie. Par exemple, on peut considérer tous les profilés en double T laminés (IPE, HEA, HEB, etc.) ensemble.
- La variation de la limite d'élasticité f_y . La valeur moyenne de la limite d'élasticité de l'acier dépend en effet de l'épaisseur du produit (§ 3.3.1). On doit tenir compte de cette influence en adoptant des valeurs de f_y différentes suivant l'épaisseur maximale de la section (la norme SIA 161 contient ce type d'information).
- Parmi les autres imperfections ayant une influence sur la résistance au flambage des barres, on peut notamment citer :
 - La dispersion de la valeur du module d'élasticité E , qui peut en général être négligée car son influence est très faible ;
 - La forme réelle de la section d'une barre (tolérances de laminage), dont l'influence est déjà incluse dans les courbes de flambage, qui sont basées sur des essais effectués avec des barres réelles ;
 - L'excentricité des charges axiales, qui est déjà considérée par la déformée initiale admise lors de l'établissement des courbes de flambage, mais dont il s'agit de tenir compte dans le modèle de calcul adopté si elle ne peut pas être évitée par des dispositions de constriction adéquates.

Les courbes de flambage adoptées pour le dimensionnement découlent des travaux d'une commission de la CECM chargée de l'étude du flambage des barres simplement comprimées. Ces travaux comprennent d'une part des essais (plus de mille), effectués sur des profilés du commerce et sur des sections composées à âme pleine, et d'autre part une simulation sur ordinateur du comportement de telles barres [2]

Pour chaque paramètre étudié expérimentalement (excentricité des charges, rectitude des barres, limite d'élasticité des aciers, distribution des contraintes résiduelles, intensité de ces contraintes, etc.), on disposait d'un certain nombre de valeurs déduites de mesures. À partir de ces valeurs, la résistance ultime de la différente barre a été calculée analytiquement. Pour un type de section et pour un élancement donné, on a constaté que la valeur de la résistance ultime avait une distribution correspondant à peu près à une courbe de Gauss (fig.II.13). Les valeurs adoptées pour tracer la courbe de flambage théorique sont des

valeurs caractéristiques, obtenues en retranchant deux fois l'écart type à la valeur moyenne. Les courbes ainsi obtenues ont été comparées aux valeurs caractéristiques de la résistance ultime déduites des essais. Cette comparaison a montré une bonne concordance entre les essais et les simulations.

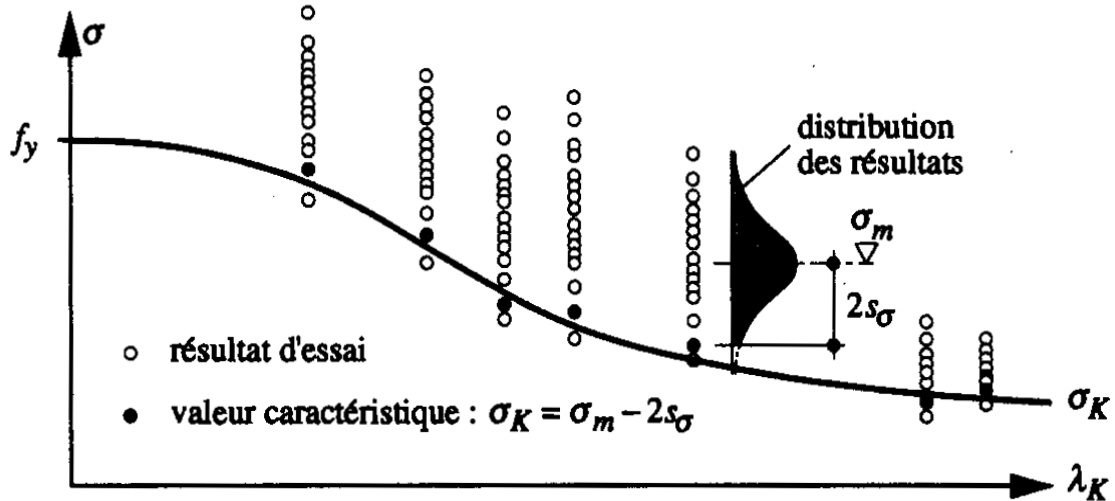


Figure. II.13. principe d'établissement des courbes de flambage.

Les résultats des études de la CECM ont finalement montré qu'il était possible de considérer trois courbes de flambage fondamentales pour l'ensemble des barres comprimées utilisées couramment dans la pratique. La figure (II.14(a)) montre l'allure générale de ces courbes, pour lesquelles la contrainte de flambage σ_K est donnée en fonction de l'élancement λ_K . Une telle représentation a cependant le désavantage d'être dépendante du type d'acier. Pour éviter cela, les deux notions suivantes ont été introduites :

- Le coefficient de flambage κ , qui correspond au rapport entre la contrainte de flambage σ_K et la limite d'élasticité f_y :

$$\kappa = \frac{\sigma_K}{f_y} \quad (\text{II.23})$$

- Le coefficient d'élancement λ_K , défini comme le rapport entre les élancements λ_K et λ_E :

$$\lambda_K = \frac{\lambda_K}{\lambda_E} \quad (\text{II.24})$$

L'élancement limite élastique λ_E (Euler) correspond à l'intersection de la courbe σ_{cr} avec la limite d'élasticité f_y (fig. II.14 (a)). Il peut par conséquent être obtenu en posant $\sigma_{cr} = f_y$ dans (II.4) :

$$\lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (II.25)$$

Les définitions des élancements λ_E et λ_K , données respectivement par (II.25) et (II.26), permettent finalement d'exprimer le coefficient d'élancement $\bar{\lambda}_K$ défini par (II.24) par l'expression suivant :

$$\bar{\lambda}_K = \sqrt{\frac{N_{pl}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} \quad (II.26)$$

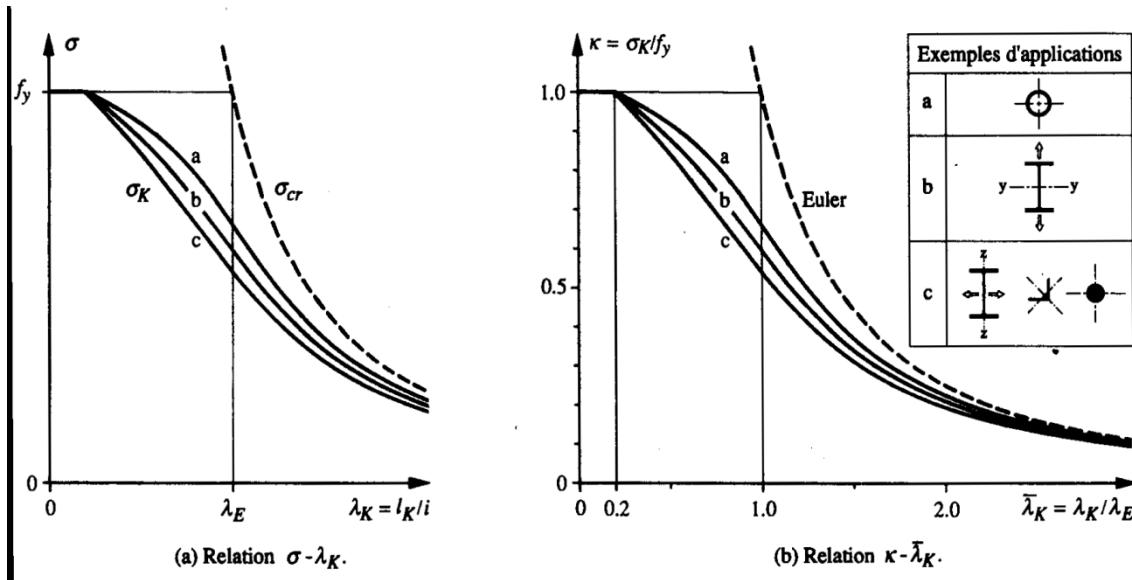


Figure. II.14. courbes de flambage.

Avec la définition des coefficients de flambage κ et d'élancement $\bar{\lambda}_K$, il est possible d'établir des courbes de flambage indépendantes de la nuance de l'acier utilisé (fig. II.14(b)). Une représentation analytique des trois courbes de flambage est donnée dans les normes de construction métallique (par exemple SIA 161 ou Euro code 3). On consultera ces dernières pour les indications concernant leur domaine d'application, qui dépend essentiellement de la répartition des contraintes résiduelles dans la section. Il est en général le suivant :

- Courbe a : applicable aux sections dont les fibres extrêmes, dans la direction de flambage considérée, sont sollicitées par des contraintes résiduelles de traction ou des sections libres de contraintes résiduelles (par exemple les profilés tubulaires ou les profilés recuits) ;
- Courbe c : applicable aux sections dont les fibres extrêmes, dans la direction de flambage considérée, sont soumises à des contraintes résiduelles de compression (par exemple les profilés en double té flambant selon leur axe faible, les cornières ou les fers ronds et carrés) ;
- Courbe b : applicable aux profilés en double té flambant selon leur axe fort, ainsi qu'à tous les cas ne faisant pas partie des courbes a et c.

L'Euro code 3 (§ 5.5.1) définit une quatrième courbe de flambage (courbe d), qui s'applique aux profilés laminés en double té et aux sections composées à âme pleine dont l'épaisseur des ailes dépasse respectivement 100 mm et 40 mm.

La contrainte de flambage σ_K pouvant être définie à partir de (II.23) comme étant égale au produit de la limite d'élasticité f_y avec le coefficient de flambage κ

$$\sigma_K = \kappa f_y \quad (\text{II.27})$$

La résistance ultime au flambage N_K d'une barre peut finalement être établie de la façon suivante :

$$N_K = \sigma_K A = \kappa f_y A = \kappa N_{pl} \quad (\text{II.28})$$

Les tables SZS C4.1 contiennent des tableaux donnant directement la résistance ultime au flambage d'une barre comprimée en fonction du type de section, du type d'acier, de la direction du flambage et de la longueur de flambage l_K . Elles représentent un outil de travail dont l'utilisation permet d'éviter de nombreux calculs, mais dont il faut vérifier soigneusement les conditions d'application.

*Chapitre III : Aspect
théorique du
flambement*

III.1 Poutre bi-articulée :

Le flambement simple affecte les pièces soumises à la compression simple, son Étude est due à EULER.

La théorie d'Euler est fondée :

- sur une poutre droite, bi-articulée à ses extrémités,
- soumise à un effort normal de compression centré N appliqué dans l'axe Ox
- dont les dimensions transversales sont faibles en regard de la longueur (grand élancement).
- dont les inerties sont maximale dans le plan zOx et minimale dans le plan yOx (voir figure 1).

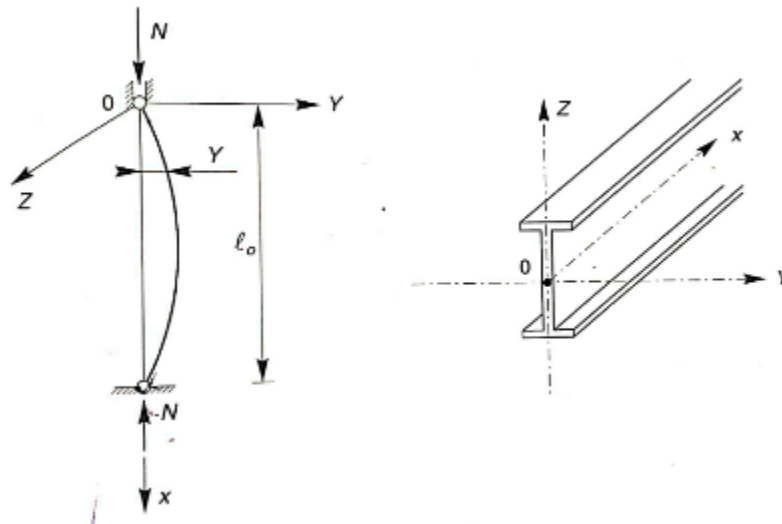


Figure III.1 . Poutre bi-articulée [4]

Lorsque N croît, à partir de zéro, l'état d'équilibre rectiligne initial évolue vers un état Curviligne fléchi.

D'après la loi fondamentale de la flexion, issue de la résistance des matériaux, le Moment fléchissant s'écrit :

$$M = -EI_z \frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{III.1})$$

Or, $M = Ny$ donc : $EI_z \frac{d^2y}{dx^2} + Ny = 0$

En posant $\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}$, on obtient l'équation de l'élastique :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0 \quad (\text{III.2})$$

Equation différentielle du seconde ordre, dont la solution générale est de la forme :

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x \quad (\text{III.3})$$

La résolution de cette équation s'opère grâce aux conditions aux limites :

- Si $\sin \alpha l_0 \neq 0, A = 0$ et $y(x) = 0$ quel que soit x . Dans ce cas, seul l'équilibre Rectiligne est possible.
- Si $\sin \alpha l_0 = 0, \alpha l_0 = k\pi$

Soit :

$$\alpha = \frac{k\pi}{l_0} = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (\text{III.4})$$

D'où :

$$N = \frac{k^2 \pi^2 EI}{l_0^2} \quad (\text{III.5})$$

- Si $k = 0, N = 0$ et la poutre est rectiligne, pour qu'elle reste fléchie, il faut que k soit au moins égal à 1, ce qui conduit à la valeur minimale de N , correspondant à un équilibre fléchi de la poutre, qui vaut :

$$N_k = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad (\text{III.6})$$

N_k =Force critique d'Euler

L'allure de la déflexion correspondant à cette force est :

$$y = A \sin \alpha x$$

Donc l'allure de la déflexion est une courbe sinusoidale, il n'est pas possible d'obtenir l'amplitude du flambement notée par A. [5]

A la force critique d'Euler N_k correspond une contrainte critique $\sigma_k = \frac{N_k}{A}$, A étant la section droite de la poutre, qui s'écrit encore :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{l_0^2} \cdot \frac{I}{A} = \frac{\pi^2 E}{l_0^2} \cdot i^2 \quad (\text{III.7})$$

Avec $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$, rayon de giration minimal, correspondant à l'inertie I minimale et à

l'élanement maximal $\lambda = \sqrt{\frac{l_0}{A}}$, d'où finalement :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{III.8})$$

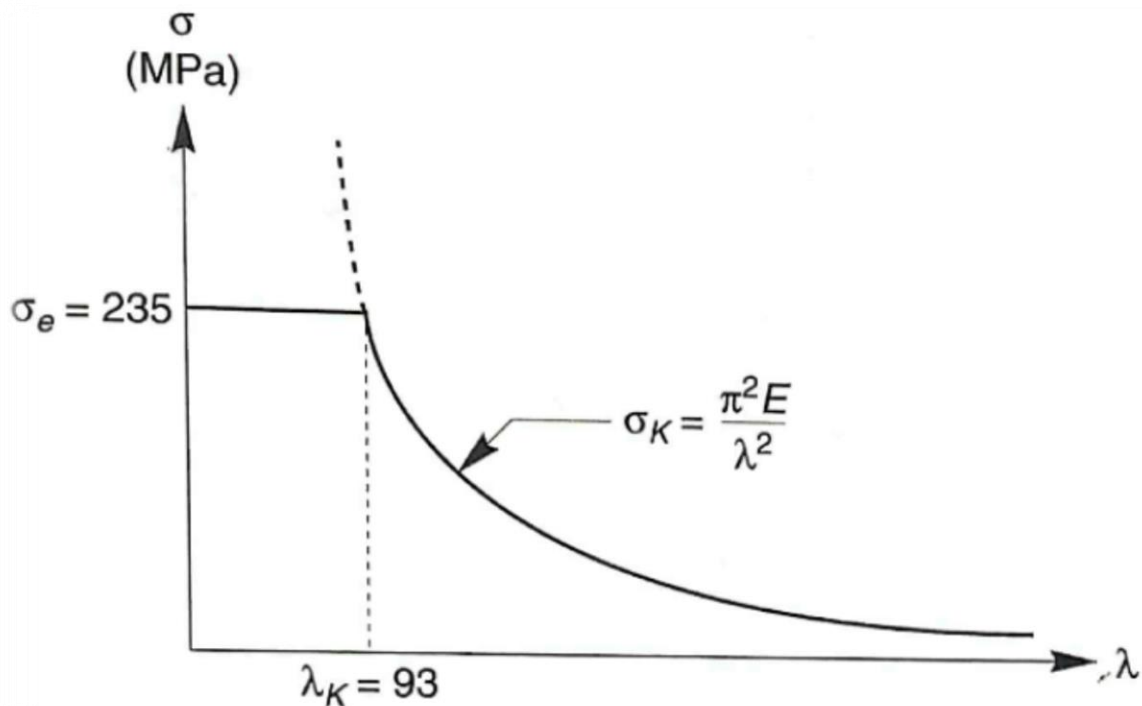


Figure III.2 . Variation de la contrainte / L'élancement [4]

- lorsque $\sigma_k > \sigma_e$ aucun risque de flambement n'est à craindre et la ruine survient pour $\sigma = \sigma_e$.
- lorsque $\sigma_k < \sigma_e$, il y a ruine par flambement dès lors que $\sigma = \sigma_k$.

A la limite de bifurcation d'équilibre, pour laquelle $\sigma_k = \sigma_e$, correspond un élancement critique dans le cas d'un poteau bi-articulée en acier **E235** vaut : [4]

$$\lambda_k = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_k}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{235}} = 93 \quad (\text{III.9})$$

III.2. Poutre encastree en pied et articulée en tête :

La ligne d'action de N tend à se déplacer dans la section d'encastrement et génère une réaction transversale P la ligne d'action passe par A point d'inflexion de la déformée.

L'équation de la déformée s'écrit :

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M = -Ny + Px \quad (\text{III.10})$$

Et a pour solution, en posant $\alpha \sqrt{\frac{N}{EI}}$:

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{P}{N} x \quad (\text{III.11})$$

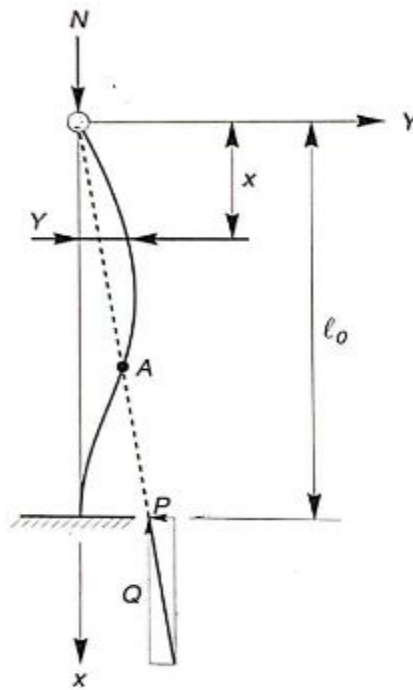


Figure III.3. Poutre encastée-articulée [4]

La résolution s'effectue grâce aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 0, & \text{soit } B &= 0 \\
 y(l_0) &= 0, & \text{soit } A \sin \alpha l_0 + \frac{P}{N} l_0 &= 0 \\
 y'(l_0) &= 0, & \text{soit } A \alpha \cos \alpha l_0 + \frac{P}{N} &= 0
 \end{aligned}$$

D'où l'on tire l'équation transcendante $\tan \alpha l_0 = \alpha l_0$, qui a pour plus petite racine $\alpha l_0 = 4,5$.

Soit

$$\alpha = \frac{4,5}{l_0} = \sqrt{\frac{N}{EI}} \tag{III.12.a}$$

D'où

$$N_k = 2 \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \tag{III.12 .b}$$

Ce qui montre, en se référant à la formule d'Euler pour une poutre bi-articulée, que : [4]

$$\frac{2}{l_0^2} = \frac{1}{l_k^2}, \text{ soit } l_k = \frac{l_0 \sqrt{2}}{2} = 0,7 l_0 \tag{III.12}$$

III.3 Poutre bi-encastée :

L'équation différentielle est :

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = M \tag{III.13}$$

L'expression du moment est de la forme :

$$M = -Ny + Cx + D \tag{III.14}$$

Par conséquent :

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} + Ny = Cx + D \tag{III.15}$$

Et par intégration, il vient :

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + Cx + D \tag{III.16}$$

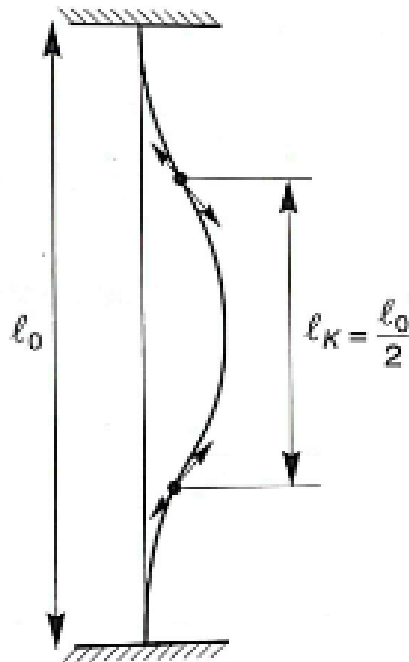


Figure III.4 . Poutre bi-encastée [4]

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$y(0) = y(l_0) = 0$$

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{l} A + D = 0 \\ B\alpha l_0 + C = 0 \\ A \cos \alpha l_0 + \cos \alpha l_0 + Cl_0 + D = 0 \text{ et} \\ A \alpha \sin \alpha l_0 + B \alpha \cos \alpha l_0 + Cl_0 = 0 \end{array} \right. \tag{III.17}$$

$$y(0) = y'(l_0) = 0$$

La déformation ne sera pas nul si le système obtenu en élimant D et C une solution

différente de zéro :

$$A(1 - \cos \alpha l_0) + B(1 - \sin \alpha l_0) = 0 \quad (\text{III.18.a})$$

$$A \sin \alpha l_0 + B(1 - \cos \alpha l_0) = 0 \quad (\text{III.18.b})$$

C'est-à-dire si :

$$(1 - \cos \alpha l_0)^2 (\alpha l_0 - \sin \alpha l_0) \sin \alpha l_0 = 0 \quad (\text{III.18.c})$$

Soit en développant :

$$1 - 2\cos \alpha l_0 + \cos^2 \alpha l_0 - \alpha l_0 \sin \alpha l_0 + \sin^2 \alpha l_0 = 0 \quad (\text{III.18.d})$$

Ou :

$$2(1 - \cos \alpha l_0) = \alpha l_0 \sin \alpha l_0 \quad (\text{III.18.e})$$

La plus petite racine non nulle de cette équation est :

$$\alpha l_0 = 2\pi \quad (\text{III.18.f})$$

La force critique d'Euler est donc égale à :

$$N_k = 4\pi^2 \frac{EI}{l_0^2} \quad (\text{III.18.g})$$

D'une manière générale, selon les conditions aux appuis, la force critique d'Euler vaut :

$$N_k = m \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad (\text{III.18.h})$$

l_0 Étant la longueur réelle de la barre. En introduisant la longueur de flambement l_f , elle s'écrit alors :

$$N_k = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad \text{Avec } l_f = \frac{l_0}{\sqrt{m}} \quad (\text{III.18})$$

On peut déduire alors que :

$$K_f = \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (\text{III.19})$$

III.4 Poutre encastrée en pied et libre en tête :

L'équation de la déformée s'écrit :

$$EI_{Gz} y'' = M_z(x) \Leftrightarrow EI_{Gz} y'' - M_z(x) = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$\Leftrightarrow EI_{Gz} y'' + N_y = 0 \quad (\text{III.21.a})$$

$$\Leftrightarrow y'' + \frac{N}{EI_{Gz}} y = 0 \quad \text{Équation différentielle 2^{ème} ordre}$$

La solution générale de cette équation est de cette forme :

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad \text{Avec } \alpha^2 = \frac{N}{EI_{Gz}} \quad (\text{III.21})$$

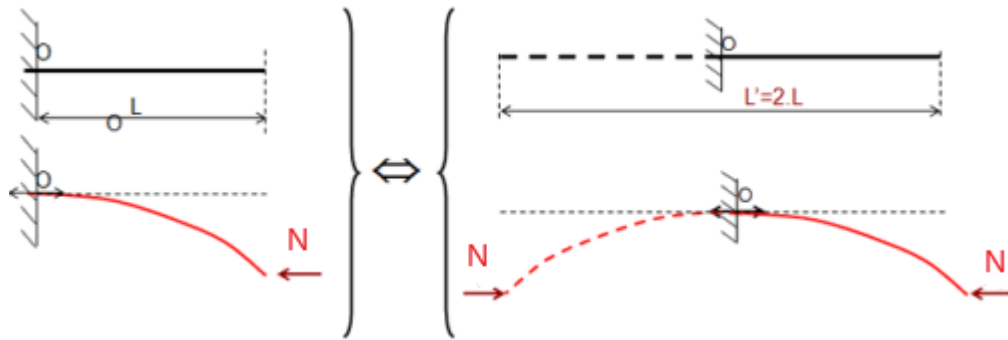


Figure III.5. Poutre encastrée-libre.

Détermination des constantes avec les conditions aux limites :

Pour $x = 0$, $y(0) = 0$; donc $A = 0$

Pour $x = 2l$, $y(2l) = 0$; donc $B \sin \alpha 2l = 0$

A étant nul, il est évident que $B \neq 0$ (si non pas de flambement),

$$\Rightarrow \sin \alpha 2l = 0 \quad (\text{III.22.a})$$

$$\Leftrightarrow \alpha 2l = n \pi \text{ avec } n = \text{nombre entier}$$

$n = 1$ 1^{er} mode de flambement

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2l} \quad (\text{III.22.b})$$

Equation de déformée ;

$$y(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \quad (\text{III.22.c})$$

De l'équation 1 et 2

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{\pi^2}{4l^2} = \frac{N}{EI_{Gz}} \quad (\text{III.22})$$

La résolution de cette équation permet de trouver N provoquant la déformée, c'est-à-dire la charge critique d'Euler N_c au-delà de laquelle le flambement se produit :

$$N_c = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{4l^2} \quad (\text{III.23})$$

On se référant à la formule d'Euler pour une poutre bi-articulé, que :

$$\frac{1}{4l^2} = \frac{1}{l_f^2}, \text{ soit } l_f = 2l \quad (\text{III.24})$$

Pour une poutre comprimée de section S la contrainte critique σ_c est définie par la relation :

$$\sigma_c = \frac{N_c}{S} \Leftrightarrow \sigma_c = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{l_f^2 \cdot S} \quad (\text{III.25})$$

On sait que $r = \sqrt{\frac{I_{min}}{s}}$ le rayon de giration,

Et : $\lambda = \frac{l_f}{r}$ avec $l_f = 2l \Leftrightarrow \lambda = \frac{2l}{r}$

La contrainte critique s'exprime alors sous la forme :

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{III.26})$$

III.5 Prise en compte des défauts de rectitude :

Considérons une poutre dotée d'une courbure initiale $y_0 = f(x)$ et chargée centriquement (figure 6).

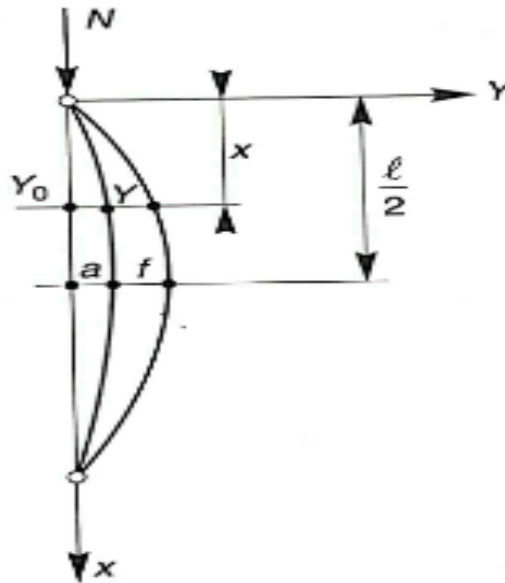


Figure III.6. Défaut de rectitude. [4]

Dans une section courante z , le moment fléchissant vaut :

$$M(x) = N(y + y_0) \quad (\text{III.27})$$

L'équation de la déformée s'écrit :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -N(y + y_0) \quad (\text{III.28.a})$$

D'où :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha^2 (y + y_0) = 0 \quad (\text{III.28.b})$$

La déformée de la poutre, à vide, s'exprime par le développement en série de sinus suivante :

$$y_0 = \alpha_1 \frac{\sin \pi x}{l} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (\text{III.29})$$

Qui, en première approximation (les autres termes étant négligeables), se résume à :

$$y_0 = \alpha \sin \frac{\pi x}{l}, \text{ soit :} \quad (III.30)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 \left(y + \alpha \sin \frac{\pi x}{l} \right) = 0$$

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$y = D \sin \frac{\pi x}{l} \quad (III.31.a)$$

Les dérivées sont :

$$\frac{dy}{dx} = D \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \quad (III.31.b)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -D \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (III.31.c)$$

L'équation (1) devient alors :

$$\sin \frac{\pi x}{l} \left(\alpha \alpha^2 + D \alpha^2 - D \frac{\pi^2}{l^2} \right) = 0 \quad (III.31.d)$$

D'où l'on tire :

$$D = \frac{\alpha}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} \quad (III.31.e)$$

La flèche additionnelle y prise par la poutre vaut donc :

$$y = \frac{\alpha \sin \frac{\pi x}{l}}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} \quad (III.32)$$

Elle est maximale à l'abscisse $x = \frac{l}{2}$

Soit :

$$y_{max} = f = \frac{\alpha}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} \quad (III.33)$$

Compte tenu que $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$ et $N_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, (2) s'écrit encore :

$$f = \frac{\alpha}{\frac{N_k}{N} - 1} \quad (III.34.a)$$

Les déformations croissent hyperboliquement avec N .

La flèche totale f_t (flèche initiale + flèche additionnelle) vaut donc :

$$f_t = a + f = \frac{a}{1 - \frac{N}{N_k}} \quad (\text{III.34})$$

- _ lorsque $N = 0$, $f_t = a$ (état initial)
- _ lorsque $N \rightarrow N_k$, $f_t \rightarrow \infty$ (état de ruine)

La contrainte maximale, caractérisant l'état de ruine, est obtenue pour :

$$\sigma_e = \frac{N}{A} + \frac{Nf_v}{I} \quad (\text{III.35.a})$$

Compte tenu que $C = \frac{1}{vA} = \frac{i^2}{v}$, i étant le rayon de giration et C distance du centre de gravité de la frontière du noyau central, on a :

$$\sigma_e = \left(1 + \frac{a}{c} \frac{\sigma}{\sigma_k - \sigma} \right) \quad (\text{III.36})$$

$\frac{\sigma}{\sigma_k - \sigma}$ = Coefficient d'amplification de la flèche initiale

$\left(1 + \frac{a}{c} \frac{\sigma}{\sigma_k - \sigma} \right)$ = Coefficient d'amplification de la contrainte.

La charge de ruine N est obtenue par la relation (4), en portant $\sigma = \frac{N}{A}$ et $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$. On obtient l'équation suivante du second degré, qui donne N :[4]

$$\frac{\lambda^2}{\pi^2 EA} N^2 - \left(\frac{\lambda^2 \sigma_e}{\pi^2 E} + \frac{a}{c} + 1 \right) N + A\sigma_e = 0 \quad (\text{III.37})$$

III.6 Prise en compte des défauts de centrage :

Considérons cette fois-ci une poutre rectiligne, chargée d'une force normale N parallèle à son axe moyen, mais excentrée de e (Figure 7)

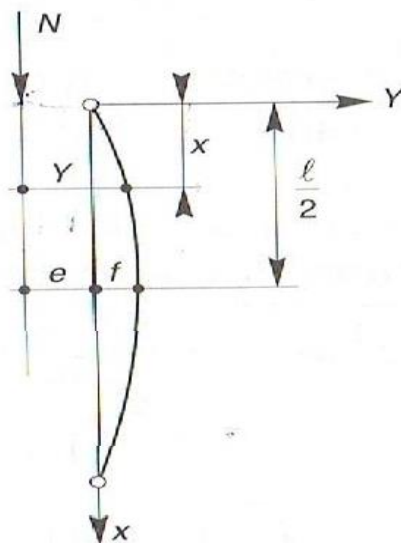


Figure III.7. Défauts de centrage. [4]

- Equation de la déformée :

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0 \quad (\text{III.38})$$

- Solution générale :

$$Y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x \quad (\text{III.39})$$

- Condition aux limites

$$y(0) = e, \quad \text{soit } B = e \quad (\text{III.40.a})$$

$$y(l) = e, \text{ soit } A = e \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \quad (\text{III.40.b})$$

D'où

$$y = e \left(\cos \alpha x + \sin \alpha x \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \right) \quad (\text{III.40})$$

- Flèche totale maximale, pour $x = \frac{l}{2}$

$$e + f = e \left[\cos \alpha \frac{l}{2} + \sin \alpha \frac{l}{2} \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \right] \quad (\text{III.41.a})$$

$$\cos \alpha l = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha l}{2} \quad (\text{III.41.b})$$

$$\sin \alpha l = 2 \sin \frac{\alpha l}{2} \cos \frac{\alpha l}{2} \quad (\text{III.41.c})$$

$$\frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} = \tan \frac{\alpha l}{2} \quad (\text{III.41.d})$$

La flèche totale vaut alors :

$$e + f = e \left(\cos \frac{\alpha l}{2} + \sin \frac{\alpha l}{2} \cdot \tan \frac{\alpha l}{2} \right) = \frac{e}{\cos \frac{\alpha l}{2}} \quad (\text{III.41})$$

Soit :

$$f = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) \quad (\text{III.42})$$

- Lorsque $N = 0$, $f = 0$ (état initial)

- Lorsque $N \rightarrow N_k$, $f \rightarrow \infty$ (état de ruine)

f Varie hyperboliquement en fonction de N et a pour asymptote horizontale N_k Le moment fléchissant maximal vaut :

$$M_f = N(e + f) = \frac{N \cdot e}{\cos \frac{\alpha l}{2}} \quad (\text{III.43})$$

La contrainte maximale, caractérisant l'état de ruine, est obtenue pour

$$\sigma_e = \frac{N}{A} + \frac{N(e+f)v}{I} \quad (\text{III.44})$$

Qui s'écrit encore, en portant $c = \frac{i^2}{v}$ et f tirée de la relation (5) :

$$\sigma_e = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{c \cdot \cos \frac{\alpha l}{2}} \right) \quad (\text{III.45})$$

$$\text{Or, } \cos \frac{\alpha l}{2} = \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} \cdot \frac{l}{2} = \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (\text{III.46})$$

Soit enfin :

$$\sigma_e = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{c} \frac{1}{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}}} \right) \quad (\text{III.47})$$

La charge de ruine N peut être obtenue par résolution de l'équation (6) ; cependant,

Plus simplement, tant que N reste faible vis-a-vis de N_k (petites déformations), on

Peut admettre avec une précision suffisante, αl étant faible, que :

$$\cos \frac{\alpha l}{2} = 1 - \frac{\alpha^2 l^2}{8} \quad (\text{III.48})$$

L'équation (5) s'écrit alors :

$$f = e \left(\frac{1}{1 - \frac{\alpha^2 l^2}{8}} - 1 \right) \quad (\text{III.49})$$

En portant $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$, on obtient finalement :

$$N = \frac{8EI f}{l^2(e+f)} \quad (\text{III.50})$$

III.7 Flambement par flexion :

Il s'agit dans ce cas, d'une poutre idéale rectiligne, soumise simultanément à un effort normal N et à un moment fléchissant M_0 .

En comparaison au flambement simple, il y a dans e une amplification de la déformée et donc des contraintes de flexion et de compression.

Si $M_0(x)$ est le moment fléchissant initial, le moment fléchissant total dans la poutre, comprimée et fléchie, vaut :

$$M(x) = M_0(x) + Ny \quad (\text{III.51})$$

La déformée a pour équation :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Ny = -M_0(x) \quad (\text{III.52})$$

Pour les fonctions simple de $M_0(x)$, l'intégration est possible.

Considérons les deux cas les plus courants de moment :

- Moment sous charge concentrée transversale.
- Moment sous charge uniformément répartie transversale.

III.7.1 Sous charge concentrée Q :

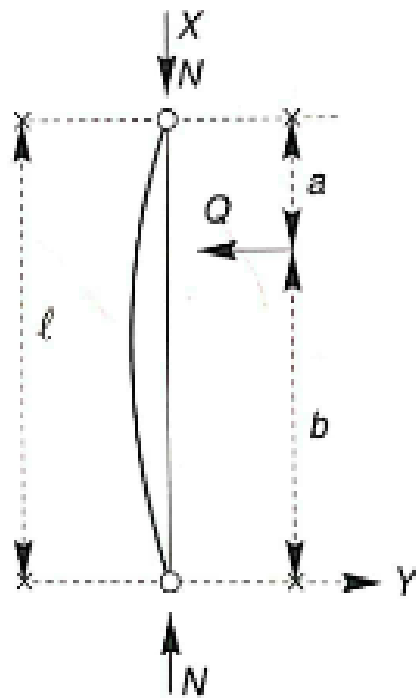


Figure III.8 . Sous charge concentrée [4]

Nous avons :

$$\text{si } x \leq a \mu(x) = Q_x \frac{l-a}{l} \quad (\text{III.53})$$

$$\text{Si } x \geq a \mu(x) = Q_a \frac{l-x}{l} \quad (\text{III.54})$$

L'intégrale générale a pour expression :

- Si $0 \leq x \leq a$

$$y(x) = A \cos \alpha x + \beta \sin \alpha x + \frac{Q}{N} x \frac{l-a}{l} \quad (\text{III.55})$$

- Si $a \leq x \leq l$

$$y(x) = C \cos \alpha x + D \sin \alpha x + \frac{Q}{N} \alpha \frac{l-x}{l} \quad (\text{III.56})$$

Les coefficients A, B, C, D sont des déterminés en écrivant que :

$$A = 0 \quad \text{(III.57.a)}$$

$$B = -\frac{Q}{\alpha N} \frac{\sin \alpha(l-a)}{\sin \alpha l} \quad \text{(III.57.b)}$$

$$C = -D \cos \alpha l ; \quad \text{(III.57.c)}$$

$$D = \frac{Q}{\alpha N} \frac{\sin \alpha a}{\tan \alpha l} \Rightarrow C = -\frac{Q}{\alpha N} \sin \alpha a \quad \text{(III.57.d)}$$

Finalement :

- Si $0 \leq x \leq a$

$$y(x) = -\frac{Q}{\alpha N} \frac{\sin \alpha(l-a)}{\sin \alpha l} \sin \alpha a + \frac{Q}{N} x \frac{l-a}{l} \quad \text{(III.57)}$$

- Si $a \leq x \leq l$

$$y(x) = \frac{Q}{\alpha N} \frac{\sin \alpha a}{\sin \alpha l} \sin \alpha(l-x) + \frac{Q}{N} \alpha \frac{l-x}{l} \quad \text{(III.58)}$$

Pour $x = \frac{l}{2}$ et $a = \frac{l}{2}$

$$u = \frac{\alpha l}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{N}{El_z}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_k}} \quad \text{(III.59)}$$

$$y_{max} = \frac{Ql^3}{48El_z} \frac{3(t g u - u)}{u^3} \quad \text{(III.60)}$$

$$y_{max} = \frac{Ql}{4} \frac{t g u}{u} \quad \text{(III.61)}$$

III.7.2 Sous charge uniformément répartie q :

$$\mu(x) = \frac{qx}{2}(l-x) \quad \text{En posant : } u = \frac{\alpha l}{2}; \text{ il vient} \quad \text{(III.62)}$$

$$y(x) = \frac{Ql^4}{16El_z u^4} \left[1 - \frac{\cos \left[u \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right]}{\cos \mu} \right] + \frac{ql^2 x}{8El_z u^2} (l-x) \quad \text{(III.63)}$$

La flèche maximale pour $x = \frac{l}{2}$ s'écrit :

$$y_{max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{El_z} \frac{24(1 - \cos u) - 12u^2 \cos u}{5u^4 \cos u} \quad \text{(III.64)}$$

$$y_{max} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(\cos u - 1)}{u^2 \cos u} \quad \text{(III.65)}$$

Les résultats, pour les cas usuels, sont rassemblés dans le tableau ci-après, dans lequel, $t = \frac{\alpha l}{2}$, [4]

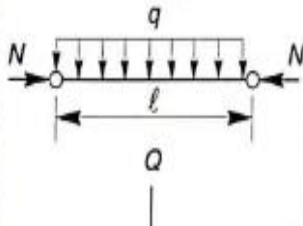
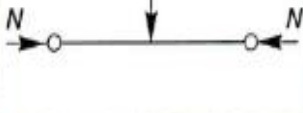
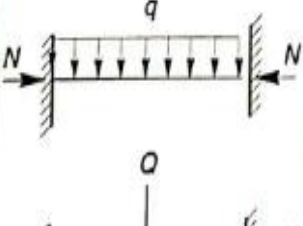
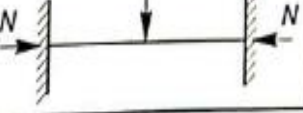
Cond. aux appuis	Cas de charges	M_0 max. pour $z = \frac{\ell}{2}$	M max. pour $z = \frac{\ell}{2}$	Coefficient d'amplification des moments : $r = \frac{M \text{ max}}{M_0 \text{ max}}$
Bi-articulé		$q \frac{\ell^2}{8}$	$q \frac{\ell^2}{8} r$	$\frac{2}{t^2} \left(\frac{1}{\cos t} - 1 \right)$
		$Q \frac{\ell}{4}$	$Q \frac{\ell}{4} r$	$\frac{1}{t} \operatorname{tg} t$
Bi-encasté		$q \frac{\ell^2}{24}$	$q \frac{\ell^2}{24} r$	$\frac{3}{t \sin 2t} - \frac{3}{2t^2}$
		$Q \frac{\ell}{8}$	$Q \frac{\ell}{8} r$	$\frac{1}{t} \operatorname{tg} t$

Figure II.9. Sous charge répartie [4]

III.8 Influence de l'effort tranchant sur le flambement des pièces :

La sollicitation d'effort tranchant, généralement présente dans les pièces fléchies, entraîne des déformations dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'à présent. En fait, la présence d'un effort tranchant ne modifie d'une manière sensible la charge critique.

Reprenons le cas simple de la poutre d'Euler bi-articulé sollicitée en compression simple.

Nous avons :

$$M = Ny \quad \text{et} \quad V = \frac{dM}{dx} = N \frac{dy}{dx} \quad (\text{III.66})$$

L'équation de la déformée s'écrit, en prenant en compte les déformations engendrées par l'effort tranchant :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V}{GA_1} \right) \quad (\text{III.67.a})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{N_y}{EI} + \frac{N}{GA_1} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{III.67})$$

Soit : (III.68)

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left(1 - \frac{N}{GA_1}\right) + \frac{N}{EI} y = 0$$

Posons :

$$\beta^2 = \frac{N}{EI \left[1 - \frac{N}{GA_1}\right]} \quad (\text{III.69})$$

L'équation devient :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \beta^2 y = 0 \quad (\text{III.70})$$

Elle est analogue à l'équation différentielle du (II.1) Précédent, et se résout de la même façon.

La force critique de flambement, qui valait $N_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$ est réduite en raison de l'influence de l'effort tranchant et devient :

$$N_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \frac{1}{GA_1}} \quad (\text{III.71.a})$$

Ou :

$$N_k = \frac{N_k}{1 + \frac{N_k}{GA_1}} \quad (\text{III.71})$$

A_1 étant la section réduite à l'effort tranchant.

_ Si A_1 est très grande :

$$\beta^2 = \alpha^2 = \frac{N}{EI} \text{ et } N_k = N_k \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \quad (\text{III.72})$$

_ Si, au contraire est I est très grand :

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left(1 - \frac{N}{GA_1}\right) = 0 \quad (\text{III.73})$$

Ce qui est vérifié pour $\frac{N}{GA_1} = 1$. C'est à-dire que la force critique de flambement

D'effort tranchant est :

$$N_k = GA_1 \quad (\text{III.74})$$

En général, on a :

$$N_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \left(1 - \frac{N_k}{GA_1}\right) \quad (\text{III.75.a})$$

C'est à-dire :

$$N_k = N'_k \left(1 - \frac{N_k}{N''_k} \right) \quad (\text{III.75.b})$$

Ou encore :

$$\frac{1}{N_K} = \frac{1}{N'_K} + \frac{1}{N''_K} \quad (\text{III.75})$$

Si la diminution est faible pour les poutres à âme pleine, et négligeable, elle est, au contraire, sensible pour les poutres triangulées. [4]

Chapitre IV :
Application

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons déterminer par la méthode des éléments finis la charge critique pour un poteau avec différents modes de liaisons.

Afin d'éclaircir l'approche de la méthode, on considère un poteau encasté à son pied et libre à l'autre extrémité (Encasté-libre ou encasté-rotule : déplacement latéral permis)



Figure IV.1 poteau encasté-libre

IV.1. Le flambement eulérien

Nous avons vu au chapitre précédent que le moment fléchissant pouvait être exprimé en fonction de la courbure de la déformée à partir de la relation :

$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M_z(x)$. Par ailleurs, le moment fléchissant vaut également en tout point de la

déformée : $M_z(x) = P.v(x)$ d'où :

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} + P.v(x) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

En posant $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI_z}}$, l'équation ci-dessus devient

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2.v(x) = 0 \quad (\text{IV.2})$$

et dont la solution générale réelle est de la forme

$$A.\sin(\alpha x) + B.\cos(\alpha x) \quad (\text{IV.3})$$

En utilisant les conditions aux limites, on aboutit à

$$\alpha = \frac{k\pi}{L} \quad (\text{IV.4})$$

Et par conséquent on trouve la charge critique :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (\text{IV.5})$$

IV.2. Calcul de la rigidité tangente

Le fait de considérer un problème en déplacements importants, résulte d'ajouter à la déformation relative d'une poutre en flexion avec variation de longueur le terme $\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$

soit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (\text{IV.6})$$

L'élément utilisé est une poutre bi-articulée, le champ de déformation correspondant aura la forme :

$$\varepsilon_{xx} = [\mathbf{B}] \{q_e\} \quad (\text{IV.7})$$

avec

$$[\mathbf{B}] = \left[-\frac{1}{L} \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \cdot y \quad \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \cdot y \quad \frac{1}{L} \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \cdot y \quad \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \cdot y \right] \quad (\text{IV.8})$$

et

$$\{q_e\} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \quad (\text{IV.9})$$

La matrice de rigidité élémentaire en repère local $[\mathbf{K}_0]$ aura de fait la même expression que celle donnée par la figure VI.2 ci-dessous.

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Rigidité du nœud i
Facteur de transmission du nœud i vers j

Facteur de transmission du nœud j vers i
Rigidité du nœud j

Figure IV.2 La matrice de rigidité élémentaire en repère local

La démarche est de calculer tout d'abord la matrice $[K]$ associée aux contraintes initiales. Celle-ci dépendant essentiellement des déplacements transversaux, le calcul de la matrice $[G]$ associée au champ de déplacement transversal $v(x)$ qui est exprimé sous la forme :

$$v(x) = [0 \ N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4] \cdot \{q_e\} \quad (IV.10)$$

Et qui permet d'établir que :

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_1(x)}{dx} & \frac{dN_2(x)}{dx} & 0 & \frac{dN_3(x)}{dx} & \frac{dN_4(x)}{dx} \end{bmatrix} \quad (IV.11)$$

d'où l'expression de la matrice de la rigidité élémentaire dans le repère local pour notre cas est donnée par :

$$[K_\sigma] = \int_{v_e} [G]^T \cdot [\sigma] \cdot [G] \cdot dV_e = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (IV.12)$$

La matrice tangente $[K_T]$ exprimée dans le repère global est ensuite obtenue en effectuant un changement de base sur la somme des deux matrices précédentes $[K_0]$ et $[K_\sigma]$. Cette

approche revient en fait à calculer la structure dans son état déformé de manière successive en posant :

$$[K_T] = [T(\theta_j)]^T \cdot ([K] + [K_\sigma]) \cdot [T(\theta_j)] \quad (IV.13)$$

avec

$$[T(\theta_j)] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (IV.14)$$

IV. 3. Calcul de la charge critique d'Euler

IV.3.1. Cas d'un poteau encastré à son pied

Dans cette partie, on utilise l'analyse modale de flambement afin de calculer la charge critique d'Euler pour notre structure. Cette analyse est basée sur une recherche de valeurs et vecteur propres, permet de déterminer le plus petit coefficient critique pondérant le chargement appliqué. Si ce coefficient est inférieur à l'unité, la charge critique est déjà atteinte et par conséquent, la structure est donc considérée dans ce cas comme instable

Et à titre d'application de l'analyse de flambement sur le cas cité ci-dessus on a pris les dimensions et caractéristiques suivantes :

Longueur L (m)	Section S (m ²)	Moment d'inertie I (m ⁴)	Module de Young E (N/m ²)	Charge Normale P (N)
2	0.0001	6.10⁻⁸	2.1 10 ¹¹	10000

Tableau IV.1

Avec ces données reprenons le système 4.12 après avoir calculé la rigidité tangente qui représente la matrice globale et après introduction des conditions aux limites, le système global se réduit à :

$$\det \left(\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} - \lambda \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{2L^2}{15} & -\frac{L}{10} \\ -\frac{L}{10} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (IV.15)$$

Et après calcul, on trouve deux solutions pour polynôme caractéristique correspondant

$$\lambda_1 = 0.7839 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 10.1372$$

Chapitre IV : Application

Seule la première solution est retenue $\lambda_1 = 0.7839 < 1$, la charge critique est donc égale à

$P_{Cr} = \lambda_1 P = 7839 \text{ N}$ avec pour mode de flambement associé $m_1 = \begin{Bmatrix} 0.7839 \\ 1 \end{Bmatrix}$. Cette valeur

bien que comparable, diffère légèrement de celle obtenue avec la relation théorique

$$N_{Cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{(L_1)^2} = 7772 \text{ N} \quad (\text{IV.16})$$

IV.3.2. Cas d'un poteau encasté-rotule, déplacement latéral bloqué

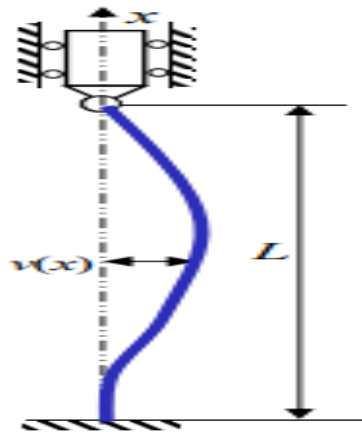


Figure IV.3. Poteau encasté-rotule, déplacement latéral bloqué

Longueur L (m)	Section S (m ²)	Moment d'inertie I (m ⁴)	Module de Young E (N/m ²)	Charge Normale P (N)
2	0.0001	6.10⁻⁸	2.1 10 ¹¹	10000
$P_{Cr} = 6414.3 \text{ N}$				

Tableau IV.2

IV.3.3. Cas d'un poteau rotule-rotule, déplacement latéral bloqué

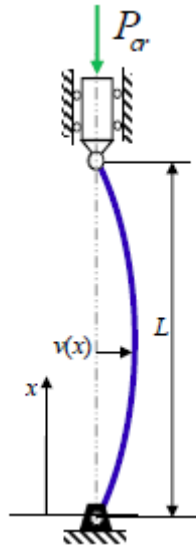


Figure IV.4 Poteau rotule-rotule déplacement latéral bloqué

Longueur L (m)	Section S (m ²)	Moment d'inertie I (m ⁴)	Module de Young E (N/m ⁴)	Charge Normale P (N)
2	0.0001	6.10 ⁻⁸	2.1 10 ¹¹	10000
$P_{Cr} = 3217 \text{ N}$				

Tableau IV.3

IV.3.4. Cas d'un poteau encastré-encastré, déplacement latéral bloqué

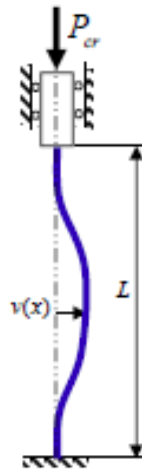


Figure IV.5 Poteau encastré-encastré, déplacement latéral bloqué

Longueur L (m)	Section S (m ²)	Moment d'inertie I (m ⁴)	Module de Young E (N/m ⁴)	Charge Normale P (N)
2	0.0001	6.10 ⁻⁸	2.1 10 ¹¹	10000
$P_{Cr} = 12421.7 \text{ N}$				

Tableau IV.4

Conclusion générale

Conclusion générale

D'après l'étude théorique qu'on a fait, il est très claire de constater que les poteaux élancés sont très sensible aux efforts de compressions et par conséquent de flexion qui provoque en suite le flambement qui est un phénomène instable et nuisible pour les pièces comprimées c'est pourquoi la connaissance des charges critiques est indispensable et nécessaire dans la réalisation dans la conception des systèmes mécaniques stables.

Et d'après les résultats obtenus, on conclut que les conditions aux rives jouent un grand rôle dans la détermination des charges critiques donc leurs choix est très indispensable et doit être précis pour les structures mécaniques.

Et ce qui concerne la détermination de la charge critique, il est néanmoins tout à fait possible de retrouver précisément les résultats obtenus en augmentant le maillage de l'élément (structure).

Références bibliographiques

- [1] *CONSTRUCTION METALLIQUE Volume 10, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne*
- [2] *Méthode des éléments finis, approche pratique en mécanique des structures , DUNOD , Paris 2010*
- [3] *Etude de flambement des structures métalliques, ZIANI Hocine MAKHLOUF Omar, MANSOUR Nabi*
- [4] *Modélisations des éléments finis*
- [5] *M. Cazenave. Méthodes éléments finis : approche en mécanique des structures*