



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLICUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
التعليم
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR- KHENCHELA



Faculté des Sciences et de la Technologie

Département : Mathématiques & Informatique

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques Appliquées

**Existence ou non-existence des
solutions pour un système d'équation
différentielles fractionnaires.**

Réalisé par : GAAGAI Fadwa
BERKANE Dounia

Dirigé par : TEBESSI Faouzi
MAA Université de Khenchela

Membre de jury :

Président : BRAHIMI. S MCA Université de Khenchela

Examineur : AOUAFI. R MAA Université de Khenchela

Présenté le : 01 Juillet 2019

Dédicace

Remerciements et louanges à Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail.

Nous dédions ce modeste travail à :

- Nos petites familles et nos grandes familles*
- Tout nos chers enseignants.*
- Tous nos amis intimes et tout nos collègue de promotion **2018/2019**.*

Remerciements

Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la Bénédiction de Dieu.

Nous tenons donc à remercier et à adresser notre reconnaissance à toute personne qui nous a aidé de loin ou de près afin de réaliser ce travail.

Nous exprimons ici notre profonde reconnaissance à l'égard de

*L'encadreur **Mr. Faouzi Tebessi**, il a su orienter notre travail sur l'immense champ d'actualité de recherche. Les conseils et encouragements qu'il n'a jamais cessé de prodiguer sont inestimables, sa patience et sa compréhension nous ont permis d'avancer et de terminer ce travail.*

Que tous les membres du jury et tous les enseignants qui ont contribué à notre formation reçoivent notre gratitude et en particulier ceux du département des mathématiques.

موضوع هذه الأطروحة هو تحديد المعامل الحرج p لمعادلات تطويرية معينة مع مشتقات كسرية مكانية زمانية، ورتبة N لنظام معادلات تطويرية معينة مع مشتقات كسرية زمانية مكانية.

تتعلق الدراسة الأولى بعدم وجود حل كلي ضعيف لمعادلة تطويرية بمشتقات كسرية مكانية زمانية. يستند البرهان كونه بالنقض على اختيار دوال الاختبار المناسبة واستخدام خصائص التكامل لتحديد المعامل الحرج p .

تعلق الدراسة الثانية بعدم وجود حل يف لنظام معين من معادلات كسرية زمانية مكانية مبدأ الدراسة الأولى لتحديد N .

أخيراً، تكرر الدراسة الثالثة لتحديد شرط ضروري لوجود حل محلي.

Résumé

Le sujet de ce mémoire est la détermination de l'exposant critique p pour une certaines équations d'évolution avec des dérivés fractionnaires spatio-temporels, et d'un rang critique N pour un certain système d'équations d'évolution avec des dérivés fractionnaires spatio-temporels.

· La première étude concerne la non existence d'une solution global faible d'une équation d'évolution avec des dérivés fractionnaires spatio-temporels.

La démonstration étant par l'absurde, est basé sur le choix des fonctions test appropriées et l'utilisation des propriétés de l'intégrations pour déterminer l'exposant critique p .

· La deuxième étude concerne le non existence d'une solution global faible d'un certain système d'équations d'évolution avec des dérivés fractionnaires spatio-temporels par le même principe que la première étude pour déterminer le rang critique N .

Enfin la troisième étude est consacré à la détermination d'une condition nécessaire pour l'existence d'une solution locale et globale du premier problème

Abstract

The subject of this memory is the determination of the critical exponent p for a certain certain evolution equations with spatio-temporal fractional derivatives, and a critical rank N for a certain systems of equations of evolution spatio-temporal fractional derivatives.

The first study concerns the non-existence of a weak global solution of an evolution equation with spatio-temporal fractional derivatives. The demonstration being by the absurd, is based on the choice of the appropriate test functions and the use of the properties of the integrations to determine the critical exponent p .

The second study concerns the non-existence of a weak global solution of a certain system of equations of evolution with spatio-temporal fractional derivatives by the same principle as the first study to determine the critical rank N .

Finally, the third study is devoted to the determination of a necessary condition for the existence of a local and global solution of the first problem.

Introduction générale

De nombreux phénomènes physiques, dans des domaines scientifiques différents, se décrivent mathématiquement par les équations de diffusion. La diffusion couvre une gamme de phénomènes qui ont tous comme particularité d'être non réversibles dans le temps par exemple la diffusion d'un fluide dans un autre, résultant, en général, en un mélange dont l'homogénéité va croissant avec le phénomène de diffusion, comme le lait dans le café.

L'équation de la chaleur proposée par **Fourier** en 1822 a été pensée pour décrire l'évolution de la température dans un matériau, après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de **Fourier** et transformées de **Fourier**, permettant une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes, en particulier pour les fondements de la thermodynamique, et qui ont entraîné aussi des travaux mathématiques très importants pour les rendre rigoureuses, véritable révolution à la fois physique et mathématique, sur plus d'un siècle.

En outre, Les systèmes paraboliques non linéaires de type réaction diffusion sont des modèles pour décrire plusieurs phénomènes comme la dynamique de la population dans la biologie ou la chimie, où les non linéarités représentent par exemple la croissance de la population ou la production de chaleur.

Il existe un grand nombre d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type parabolique dont la solution pour des données initiales ne peut pas être étendue globalement en temps et développe une singularité en temps fini, disons T . Un tel phénomène s'appelle explosion et T s'appelle le temps d'explosion. Dans de nombreux cas, certaines normes de solutions qui explosent tendent vers l'infini quand t approche de T . L'étude des phénomènes d'explosion n'est pas seulement intéressante du point de vue mathématiques, mais aussi importante pour la compréhension profonde de la nature des phénomènes.

Depuis le travail pionnier de Fujita, les phénomènes d'explosion dans les équations paraboliques non linéaires ont fait l'objet d'études approfondies, un accent particulier a été mis sur la question

de savoir : quand, ou et comment les solutions explosent, ainsi l'explosion de la solution est un problème très important tant du point de vue théorique ou pratique.

Notre travail comporte trois chapitres :

1. Dans le premier chapitre, nous présentons quelques définitions de base relatives à l'espace L^p , et des définitions, des propriétés et des résultats concernant le calcul fractionnaire.

2. Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons au phénomène par lequel les solutions d'un problème cessent d'exister globalement dit phénomène de l'explosion, on donne une définition à ce phénomène, un historique sur son étude lié à l'apparition des modèles de type Fujita et on termine par donner une définition au laplacien fractionnaire.

3. Le troisième chapitre c'est la partie pratique consacrée à détailler le travail de " **K. Hayakawa** et **F. Weissler**" intitulé "Non existence de la solution global d'un système d'équations d'évolutions avec des dérivés fractionnaires spatio-temporels " qui comporte trois parties :

·La première sur la démonstration de la non existence de la solution global d'une équations d'évolution avec des dérivés fractionnaires spatio-temporels.

·La deuxième sur la démonstration de la non existence de la solution global d'un système d'équations d'évolutions avec des dérivés fractionnaires spatio-temporels.

·La troisième sur la démonstration des conditions nécessaires pour l'existence d'une solution local et global d'une équation d'évolution avec des dérivés fractionnaires spatio-temporels.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives à l'espace L^p , et aux calculs fractionnaires .

1.1 Définition et propriétés de base

1.1.1 Espace des fonctions intégrables L^p

Définition 1.1 Soient $p \in [1, +\infty[$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

Pour $f \in L^p(\Omega)$, on note

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.2 On dit qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est essentiellement bornée s'il existe un réel $C \geq 0$ telle que

$$|f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega.$$

On note

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)| = \inf \{ (C \geq 0; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega) \}$$

Définition 1.3 On appelle espace $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω :

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \exists C \geq 0, |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}.$$

Pour $f \in L^\infty(\Omega)$, on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)|$$

Remarque 1.1 $L^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions intégrables :

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \int_{\Omega} |f| dx < \infty$$

1.1.2 Inégalité de ε -Young

Lemme 1.1 Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, et $p, q \in]1; +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^q$$

Avec

$$C_\varepsilon = \frac{1}{q} (p\varepsilon)^{\frac{-q}{p}}$$

1.1.3 Inégalité d'Hôlder :

Lemme 1.2 Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $p, q \in]1; +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soient

$$f \in L^p(E, T, m) \text{ et } g \in L^q(E, T, m)$$

alors

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

1.1.4 Support d'une fonction :

Définition 1.4 Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur \mathbb{R}^n . Le support de la fonction f , noté $\text{supp}(f)$ est l'adhérence des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que : $f(x) \neq 0$, i.e :

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}}$$

Le support de f est donc un ensemble fermé en dehors duquel f est nulle, en d'autre terme, c'est le plus petit ensemble fermé possédant cette propriété.

1.1.5 Fonction test :

Définition 1.5 Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . Une fonction test φ sur Ω est une fonction de Ω dans \mathbb{R} , indéfiniment dérivable et à support compact

Corollaire 1.1 1) L'ensemble D des fonctions-test est un sous-espace vectoriel.

2) Si φ est une fonction-test, il en est de même de φ' .

3) Si φ est une fonction-test de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et f une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors : $f \circ \varphi$ est une fonction-test.

1.1.6 Distributions :

Définition 1.6 On note $D'(\Omega)$ le dual topologique (formes linéaires continues) de $D(\Omega)$. C'est l'espace des distributions sur Ω .

Remarque 1.2 Si T est une distribution et φ une fonction test, on notera $T(\varphi) \in \mathbb{R}$ où $\langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$ l'image de φ par T .

Définition 1.7 Soit f une fonction localement intégrable sur Ω . L'application

$$T_f : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

défini une distribution sur Ω . L'application de $L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow D'(\Omega)$ définie par $f \rightarrow T_f$ est injective.

1.1.7 Formulation Variationnelle :

Définition 1.8 En mathématiques, la formulation variationnelle d'un problème régi par des équations aux dérivées partielles correspond à une **formulation faible** de ces équations qui s'exprime en termes d'algèbre linéaire dans le cadre **d'un espace de Hilbert**. A l'aide du **théorème de Lax-Milgram**, elle permet de discuter l'existence et de l'unicité de solutions. on peut dire que la formulation variationnelle est une autre manière d'énoncer un problème physique régi par des équations différentielles ou aux dérivées partielles.

1.2 Calcul Fractionnaire

De même que la nature a horreur du vide, le mathématicien en a horreur du discontinu. Alors n'existe-il vraiment rien entre $\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right)$ et $\left(\frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}}\right)$?

Il faut remonter à 1695 pour trouver dans une lettre de **G.W. Leibnitz** à **G.A. L'Hôpital**, la mention d'une différentielle fractionnaire ($d^{1/2}x$), qualifiée de « paradoxe apparent ». Dès le 18^{ème} siècle, les prémices du concept de dérivation fractionnaire, c'est-à-dire d'un opérateur de dérivation de degré non entier, apparaissent dans des écrits de **L. Euler** de **J.L. Lagrange** et au début du 19^{ème} siècle, avec **P.S. Laplace** et **N.H. Abel**.

Les avancées les plus marquantes sont celle de **J-Liouville** dans ses multiples mémoires à l'école polytechnique entre 1832 et 1835. Puis la contribution de **B. Reimann** en 1847 faisant que les noms de ces deux mathématiciens restent attachés à la fameuse définition que nous rappellerons plus loin.

Durant les études de la théorie générale et l'application de la dérivation et l'intégration d'ordre fractionnaire, il a été découvert que, bien que ce sujet soit ancien remontant au moins à **Leibnitz** dans sa théorie et à **Heaviside** dans son application, il a été relativement peu étudié dans les premiers articles.

Les applications de ce concept incluent des domaines non connexes tels que le traitement de signal, le traitement d'image, l'automatique et les domaines de la biologie, l'économie, l'électrochimie et le domaine de la thermique.

Le calcul fractionnaire fournit un excellent instrument pour la description des propriétés de mémoire et d'héréditaire des différents matériaux et processus. Ceci est l'avantage principal de la différentiation fractionnaire en comparaison avec des modèles classiques d'ordre entier, dont lesquels tels effets sont négligés. L'avantage de la différentiation fractionnaire devient apparent pour

la modélisation des propriétés mécanique et électrique des matériaux.

L'idée de la dérivée fractionnaire semble être un sujet assez étrange, très dure à expliquer du fait que, contrairement aux opérateurs différentiels couramment utilisés, elle n'est pas liée à un sens géométrique important. Cependant plusieurs phénomènes physiques ont une description intrinsèque d'ordre fractionnaire et donc le calcul fractionnaire est nécessaire pour les expliquer.

1.2.1 Bases mathématiques du calcul fractionnaires

Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

La fonction Gamma : La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes (excepté en certains points)

Définition 1.9 Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Remarque 1.3 1. La propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

si $z \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Corollaire 1.2 qu'on peut démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

2. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0+) = +\infty$ et aussi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3. $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

La fonction Bêta : Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire la fonction Bêta joue un rôle très important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma

Définition 1.10 La fonction Bêta (qui est un type d'intégrale, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par :

$$\beta(p; q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1-\tau)^{q-1} d\tau; Re(p) > 0; Re(q) > 0$$

Remarque 1.4 La fonction Gamma et la fonction Bêta sont liées par la relation suivante :

$$\beta(p; q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

1.2.2 Dérivées fractionnaires

Dans la littérature il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer deux approches qu'on va utiliser dans les chapitres suivants.

Intégrale et dérivée Fractionnaires de Riemann-Liouville

Considérons f une fonction définie pour tout $t > 0$. On pose

$$(If)(t) = \int_0^t f(x) dx;$$

$$(I^2f)(t) = \int_0^t (If)(u) du = \int_0^t \left(\int_0^u f(x) dx \right) du$$

en répétant n fois, on obtient d'après la formule de Cauchy :

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-x)^{n-1} f(x) dx$$

En utilisant la fonction Γ , on aura la définition suivante :

Définition 1.11 Soit $f \in [a; b]$; $\alpha \in \mathbb{R}^+$. On appelle intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de f d'ordre α à gauche et on la note ${}_a I_t^\alpha$, la fonction définie par :

$$({}_a I_t^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

Et l'intégrale

$$({}_t I_b^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de **Riemann-Liouville** d'ordre α .

Corollaire 1.3 Pour $\alpha, \beta > 0$ on a :

$$I^\alpha \circ I^\beta = I^\beta \circ I^\alpha = I^{\alpha+\beta}$$

et

$$\frac{d}{dx} I^\alpha f = I^{\alpha-1} f$$

Théorème 1.1 Soient $f \in L^1[a, b]$ et $\alpha > 0$, l'intégrale $(I^\alpha f)(t)$ existe pour tout $t \in [a, b]$ et la fonction $I^\alpha f$ elle-même est un élément de $L^1[a, b]$.

Dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.12 Soit f une fonction intégrable sur $[a; t]$; alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (avec $n - 1 < \alpha < n$) au sens de **Riemann-Liouville** est définie par :

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - x)^{n-\alpha-1} f(x) dx = \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-\alpha} f(t))$$

Exemple 1.1 La fonction puissance $f(t) = t^p$ pour $p \geq 0$, est d'une grande importance, sa dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n$ est donné comme suit :

$${}^R D_t^\alpha t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t - x)^{n-\alpha-1} x^p dx$$

En faisant le changement de variable $x = \lambda t$, on a :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha t^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t(1 - \lambda))^{n-\alpha-1} (t\lambda)^p d\lambda \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n-\alpha+p} \int_0^1 (1 - \lambda)^{n-\alpha-1} \lambda^p d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(n - \alpha + p + 1) \beta(n - \alpha, p + 1)}{\Gamma(n - \alpha)} t^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n - \alpha + p + 1) \Gamma(n - \alpha) \Gamma(p + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(p - \alpha + 1) \Gamma(n - \alpha + p + 1)} t^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(p - \alpha + 1)} t^{p-\alpha} \end{aligned}$$

Corollaire 1.4 Les dérivées fractionnaires au sens de $R - L$ ont les propriétés suivantes :

1. La propriété qui peut être la plus importante de la dérivée fractionnaire au sens de $R - L$, pour $\alpha > 0$ et $t > a$ est que :

$${}^R D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t)$$

qui signifie que l'opérateur de différentiation fractionnaire de $R-L$ est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de $R-L$ de même ordre.

2. Si $\alpha > \beta > 0$ et $f(t) \in L^p(a, b)$, ($1 \leq p \leq +\infty$), la relation

$${}^R D^\beta I^\alpha f(t) = I^{\alpha-\beta} f(t)$$

est satisfaite presque partout sur l'intervalle $[a, b]$.

En particulier, quand $\beta = k \in \mathbb{N}$, et $\alpha > k$, alors :

$${}^R D^k I^\alpha f(t) = I^{\alpha-k} f(t)$$

3. Si la dérivées fractionnaires d'ordre α , ($n-1 \leq \alpha < n$), d'une fonction $f(t)$ est intégrable, alors :

$$I^\alpha ({}^R D^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n [D^{\alpha-j} f(t)]_{n=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j-1)}$$

En générale nous voyons que les dérivées fractionnaires et les intégrales fractionnaires au sens de $R-L$ de même ordre ne commutent pas entre elles.

4. Soit $\alpha \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ et $D = \frac{d}{dt}$, si les deux dérivées fractionnaires ${}^R D^\alpha f(t)$ et ${}^R D^m f(t)$ existent, nous avons

$${}^R D^m ({}^R D^\alpha f(t)) = {}^R D^{\alpha+m} f(t)$$

5. Nous avons aussi la formule de composition suivante :

Soient $m-1 \leq \alpha \leq m$ et $n-1 \leq \beta \leq n$:

$${}^R D^\alpha ({}^R D^\beta f(t)) = {}^R D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^n [D^{\beta-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}$$

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Les problèmes appliqués demandent des définitions des dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, les quelles contiennent $f(a)$, $f'(a)$, etc... malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, la solution de ces problèmes a été proposée par **M. Caputo** (dans les années soixante) dans sa définition, qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de visco-élastique. Donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de **Reimann-Liouville**.

Définition 1.13 Soient $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}$) et f une fonction telle que :

$$\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a; b]$$

La dérivée fractionnaire d'ordre α à gauche de f au sens de Caputo est définie par :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx = I^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right)$$

Exemple 1.2 La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$ d'une fonction puissance $f(t) = t^p$ pour $p \geq 0$ est définie par :

$${}^C D_t^\alpha t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} = {}^R D^\alpha t^p, & (p > n-1) \\ 0, & (p \leq n-1) \end{cases}$$

En effet, en utilisant la substitution ($x = \lambda t, 0 \leq \lambda \leq 1$), alors :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha t^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_0^1 (t(1-\lambda))^{n-\alpha-1} (\lambda t)^{p-n} t d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \int_0^1 (1-\lambda)^{n-\alpha-1} \lambda^{p-n} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \beta(p-n+1, n-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \frac{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p-\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \end{aligned}$$

Corollaire 1.5 Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo ont les propriétés suivantes :

1. **La linéarité** : Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que ${}^C Df(t)$ et ${}^C Dg(t)$ existent.

La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur bilinéaire

$${}^C D(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^C Df(t) + {}^C Dg(t)$$

2. **La non-commutativité** : On suppose que $n-1 < \alpha < n; m; n \in \mathbb{N}; \alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^C Df(t)$ existe, alors :

$${}^C D^\alpha D^m f(t) = {}^C D^{\alpha+m} f(t) \neq D^{m\alpha} D^\alpha f(t)$$

3. Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, et

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, (n = [\alpha] + 1)$$

alors la dérivée fractionnaire au sens de Caputo coïncide avec la dérivée fractionnaire de **R-L** ie ;

$${}^c D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t)$$

4. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, et la dérivée usuelle $f^{(n)}(t)$ existe, alors la dérivée fractionnaire ${}^c D^\alpha f(t)$ de Caputo d'ordre n coïncide avec $f^n(t)$ ie ;

$${}^c D^n f(t) = f^n(t)$$

5. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :

Si f est une fonction continue on a :

$${}^c D^\alpha I^\alpha f(t) = f$$

et

$$I^\alpha ({}^c D^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^k}{k!}$$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

· Soit $f(t)$ une fonction tels que les deux opérateurs ${}^R D^\alpha f(t)$ et ${}^c D^\alpha f(t)$ existent.

Avec $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$, en général on a :

$${}^R D^\alpha f \neq {}^c D^\alpha f$$

Exemple 1.3 La différentiation de la fonction constante $f(t) = c$, avec c une constante et nulle pour l'opérateur de Caputo.

Cependant pour **Riemann-Liouville** est :

$${}^R D^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}$$

· L'avantage principale de l'approche de **Caputo** est que les conditions initiales des équation différentielles fractionnaires avec dérivées de **Caputo** acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.

Remarque 1.5 · On peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de **Caputo** est également l'inverse quand on suit l'autre sens de **Riemann Liouville**, c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 < \alpha < m$ par l'approche de **Riemann-Liouville**,

on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m - \alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m , mais pour trouver la dérivée fractionnaire du même ordre par l'approche de **Caputo** on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(m - \alpha)$

Relation entre l'opérateur de Riemann-Liouville et de Caputo

Théorème 1.2 Soient : $t > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $n - 1 < \alpha < n \in \mathbb{N}^*$, alors la relation entre l'opérateur de Riemann-Liouville et Caputo est :

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0) \quad ((1))$$

Preuve. On considère $D.L$ en série de Taylor de la fonction f au point $t = 0$;

$$\left[f(t) = f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + \frac{t^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_{n-1} \right]$$

On a

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1}$$

avec :

$$R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(x)(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

En utilisant les propriétés d'intégration d'ordre n , on a :

$$R_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f^{(n)}(x)(t-x)^{n-1} dx = I^n f^{(n)}(t).$$

d'où, en utilisant la linéarité de l'opérateur de **Riemann-Liouville** on a :

$$\begin{aligned} {}^R D^\alpha f(t) &= {}^R D^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^\alpha t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D^\alpha R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1) \Gamma(k+1)} t^{k-\alpha} f^{(k)}(0) + {}^R D^\alpha I^n f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + {}^C D^\alpha f(t) \end{aligned}$$

Donc :

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0)$$

■

Remarque 1.6 La formule (1) implique que les opérateurs fractionnaires de **Caputo** et de **Riemann-Liouville** coïncident si et seulement si $f(t)$ et en même temps que les premières $(n-1)$ dérivées sont nulles au point $t = 0$

Chapitre 2

Le phénomène d'explosion des solutions des équations aux dérivées partielles

2.1 Explosion de solutions et Exposant critique

2.1.1 Solution locale et global :

Définition 2.1 *Considérons une équation différentielle ordinaire :*

$$F(t, u(t), u'(t); u''(t); \dots) = 0 \quad (2.1)$$

avec : $t \in I \subset \mathbb{R}$ et $u : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Supposons que u une solution de (1.1).

· On dit que u est une solution locale si elle définie sur un temps finie c-à-d :

$\exists T > 0 \forall t \in [0, T], u(t)$ existe ($u(t)$ est définie pour tout $t \leq T$)

· Si $u(t)$ est définie sur $[0, +\infty[$ donc u est appelée solution globale.

2.1.2 Explosion de la solution dans les équations différentielles ordinaires :

La forme la plus simple qui représente le phénomène de l'explosion dans des problèmes non-lineaires apparaît quand la variable (ou les variables) tendent à l'infini quand le temps approche une certaine limite finie $T > 0$.

Exemple 2.1 *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} u' = u^2, & t > 0 \\ u(0) = \alpha, & \alpha > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Le problème (2,2) est un exemple très simple des problèmes différentiables ordinaires (EDO), il admet une solution unique dans l'intervalle $0 < t < T$, elle est de la forme

$$u(t) = \frac{1}{t - T}$$

On voit que

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = +\infty$$

De l'exemple (2.1), on peut constater que le concept de l'explosion peut être largement généralisé comme phénomène par lequel les solutions cessent d'exister globalement à temps en raison de la croissance infinie des variables décrivant le processus d'évaluation.

2.1.3 Explosion de solutions des équations de type réaction-diffusion

Le phénomène d'explosion apparaît notamment quand le problème a une structure spatiale, de sorte que les inconnus dépendent non seulement du temps mais également d'une variable de l'espace :

$$u = u(x, t), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

et en particulier dans les problèmes de réaction diffusion, et dans les théories de propagation qui sont en général de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u, \Delta u, x, t) + B(u, \Delta u, x, t) \quad (2.3)$$

et qui est considéré comme un modèle non-linéaire de propagation de la chaleur dans un milieu réactif, où u représente une température.

Exemple 2.2 *Considérons l'équation de la chaleur non linéaire suivante :*

$$u_t = \Delta u + f(u) \quad (2.4)$$

pour différents choix de f . Si on considère un ouvert convexe borné et régulier Ω de \mathbb{R}^n et si l'on ajoute des conditions aux limites de type Dirichlet, l'équation (2.4) généralise de nombreux phénomènes rencontrés en combustion, en biologie, en médecine et en chimie.

On peut formuler le concept de l'explosion, dans ce cas où on tient compte de la structure spatiale des solutions ; comme suit :

Il existe un moment $T < \infty$, appelé le temps d'explosion, telle que la solution est bien définie pour tout $0 < t < T$,

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x, t)| \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad t \rightarrow T$$

Définition 2.2 *Soit $u(x, t)$ une solution de l'équation (2.4), tels que $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$.*

On dit que $u(x, t)$, explose en temps fini T , si

$$\lim_{t \rightarrow T} u(x, t) = +\infty$$

Dans ce cas

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x, t)| \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad t \rightarrow T$$

Prenons maintenant le cas $f(u) = |u|^\alpha u, \alpha > 0$, dans le problème de Cauchy considéré dans l'exemple (2.2), on a :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^\alpha u, x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) et ses variantes se retrouvent en physique lorsque l'on décrit la compétition d'un phénomène de diffusion (pris en compte par le terme $\partial_t u = \Delta u$) et d'un phénomène non linéaire (le terme $|u|^\alpha u$).

Pour des données initiales u_0 convenable, avec $t \in [0, 2]$, le problème (2.5) possède une solution unique $u \in C([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$, où on a les 2 cas suivant :

Soit

$$T = +\infty$$

Soit

$$T < +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = +\infty$$

Les résultats classiques montrés par **Weissler** au début des années quatre-vingts sont :

Si on considère $u_0 > 0$, alors le problème (2.5) n'admet pas de solution positive globale pour $n\alpha = 2$, et toute solution locale dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ explose en temps fini.

De plus si $n\alpha > 2$, on a l'existence globale de la solution pour :

$$p = \frac{\alpha n}{2}$$

avec une hypothèse de petitesse sur la condition initiale u_0 dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

2.1.4 Analyse de Fujita et ses développements :

Pour de nombreuses équations d'évolution, on ne peut garantir l'existence de solutions globales régulières que sous des hypothèses de données initiales petites. La question cruciale est alors de trouver les conditions de petitesse optimales. Quand on ne parvient pas à démontrer que les solutions existent pour tout temps, on s'attend à trouver un temps d'existence maximal $T^* < \infty$ et certains espaces de Banach E tels que la norme $\|u(t, \cdot)\|_E$ est finie pour $t \in [0, T^*]$.

Considérons le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^{\alpha+1}, & x \in \mathbb{R}^n ; t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x); \\ u(x, t) \geq 0 . \end{cases} \quad (2.6)$$

Les premiers travaux dans ce cas particulier sont dus à **Hiroshi Fujita** en 1966. **Fujita** a montré que si la donnée initiale u_0 est une fonction positive de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ ayant ses dérivées d'ordre 0, 1 et 2 bornées sur \mathbb{R}^n alors on a la condition nécessaire suivante pour que u soit unique dans $C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$:

$$\exists M > 0, \exists 0 < \beta < 2; \forall x \in \mathbb{R}^n : |u_0(x)| \leq M e^{|x|^\beta}$$

C'est-à-dire que u_0 ne doit pas croître trop vite. Ainsi, en ce qui concerne la question de l'existence de solutions globales régulières sous des hypothèses de données initiales petites, **Fujita** a conclu qu'il existe deux types de situations :

Si $\alpha < \frac{2}{n}$, alors aucune solution positive non-triviale de ce problème ne peut être globale (cas d'explosion),

Tandis que pour $\alpha > \frac{2}{n}$, il existe des solutions positives non-triviales globales sous des hypothèses de données initiales petites.

Pendant les années *soixante – dix* et *quatre – vingts*, les travaux de **K. Hayakawa** et **F. Weissler** ont complété l'étude de **Fujita** en démontrant que l'exposant critique $\alpha = \frac{2}{n}$ appartient au cas d'explosion.

Au début des années *quatre – vingt dix*, **C. Bandle** et **H. Levine** étudient les solutions classiques du problème (2.6) avec une condition de **Dirichlet** homogène au bord de Ω , un domaine extérieur de \mathbb{R}^n et qui vérifient la condition suivante sur l'ordre de croissance :

$$\forall k > 0, |u(x, t)| e^{-k|x|} \rightarrow 0 \text{ et } |\nabla u(x, t)| e^{-k|x|} \rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow 0$$

Remarque 2.1 Remarquons qu'un domaine extérieur de \mathbb{R}^n , pour $n > 2$, est un ouvert connexe Ω de \mathbb{R}^n tel que Ω^c soit un domaine borné non vide, et lorsque $n = 1$, Ω est le complémentaire d'un intervalle compact.

De manière équivalente au problème précédent, **Bandle** et **Levine** ont montré des résultats similaires à ceux de **Fujita** avec le même exposant critique $\alpha > \frac{2}{n}$ pour le problème (1.6) avec condition de **Dirichlet** homogène au bord de Ω .

Il ne fallut pas longtemps avant que le cas critique ne soit résolu par **Ryuichi Suzuki**. Il a prouvé que l'exposant critique appartient au cas d'explosion lorsque $n > 3$.

Les résultats de **Fujita** et de **Bandle-Levine** sur les solutions du problème de Cauchy et le problème avec condition de **Dirichlet** homogène au bord, ont été généralisés par **K. Mochizuki** et **R. Suzuki** en 1997. Ils ont travaillé avec un concept de solutions faibles qui correspond à des fonctions continues bornées vérifiant les deux problèmes au sens des distributions, avec l'espace test $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Ils démontrent ensuite que le phénomène de **Fujita** s'étend à ces solutions faibles avec le même exposant critique $\alpha = \frac{2}{n}$, qui appartient au cas d'explosion lorsque $n \geq 3$.

Il est naturel pour ce genre de problèmes de se demander si les résultats relatifs au problème (2.6) avec condition de **Dirichlet** au bord restent valables avec des conditions au bord de **Neumann**.

Ils considèrent une condition initiale u_0 dans $\mathcal{C}^2(\Omega)$ et des solutions faibles au sens des distributions avec l'espace test $\mathcal{C}^2(\Omega)$ et qui ne sont soumises à aucune restriction sur l'ordre de croissance. Ils ont montré que le phénomène de **Fujita** s'applique aux solutions du problème (2.6)

avec des conditions de **Neumann**, et que l'exposant critique $\alpha = \frac{2}{n}$ appartient au cas d'explosion lorsque $n \geq 3$.

2.1.5 L'exposant critique

Ainsi, l'étude du phénomène d'explosion d'une solution d'un problème de diffusion a conduit à l'apparition d'un exposant appelé : l'exposant critique :

Définition 2.3 *Considérons le problème de Fujita ou une de ses variantes.*

On dit que p_c est l'exposant critique de ce problème si :

Pour $p \leq p_c$, alors aucune solution positive non-triviale de ce problème ne peut être globale.

Pour $p > p_c$, le problème admet des solutions positives non-triviales globales sous des hypothèses de données initiales petites.

2.2 Le Laplacien Fractionnaire :

Il est généralement connu que les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires, ce qui simplifie considérablement leur utilisation pour résoudre divers problèmes relevant de divers domaines scientifiques. Cependant, en cas d'intégration et de différentiation d'ordre fractionnel, qui représentent un domaine en pleine croissance, à la fois en théorie et dans les applications aux problèmes du monde réel, il n'en est rien. Depuis l'apparition de l'idée de différentiation et d'intégration d'un ordre arbitraire (pas nécessairement un nombre entier) aucune interprétation géométrique et physique acceptable de ces opérations depuis plus de 300 ans. L'absence de ces interprétations a été reconnue lors de la première conférence internationale sur le calcul fractionnaire à New Haven (USA) en 1974 en l'incluant dans la liste des problèmes en suspens.

La question est restée sans réponse et a donc été répétée lors de conférences ultérieures à l'Université de Strathclyde (Royaume – Uni) en 1984 et à l'Université de Nihon (Tokyo, Japon) en 1989. La table ronde lors de la conférence sur les méthodes de transformation et les fonctions spéciales de Varna (1996) ont montré que le problème n'était toujours pas résolu et que, depuis lors, la situation n'avait toujours pas changé.

Les opérateurs de diffusion fractionnaire sont bien connus des probabilistes, et leur étude par des outils d'EDP s'est intensifiée depuis quelques années.

Plusieurs modèles faisant intervenir de tels opérateurs ont été proposés en dynamique des populations et en détonation des gaz. Le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ dans \mathbb{R}^n est le prototype de tels opérateurs.

D'un point de vue purement mathématique, cet opérateur partage certaines propriétés cruciales du Laplacien : en particulier, il vérifie le principe du maximum.

Opérateur multiplicateur

la Transformée de Fourier

Définition 2.4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} une fonction de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes. On appelle transformée de Fourier (ou spectre) de f , si elle existe, la fonction $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\mathcal{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{(-2\pi i \xi x)} dx$$

L'intégrale et donc la transformée de Fourier n'existe pas toujours,

Exemple 2.3 par exemple la fonction $x \rightarrow x^2$ n'admet pas de transformée de Fourier car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 (-2\pi i \xi x) dx$ n'existe pour aucune valeur de ξ . On a la condition suffisante suivante :

Théorème 2.1 Toute fonction intégrable (au sens de Lebesgue) possède une transformée de Fourier qui est une fonction continue, bornée et tendant vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini

la Transformée de Fourier inverse

Définition 2.5 Soit f une fonction intégrable admettant une transformée de Fourier \mathcal{F} elle-même intégrable.

Alors, en tout point x où f est continue,

on a :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\xi) (2\pi i \xi x) d\xi$$

Cette transformation est appelée transformée de Fourier inverse.

On écrira symboliquement

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(\xi)]$$

Si f est continue par morceaux, on peut donc obtenir $f(x)$ à partir de $\mathcal{F}(\xi)$ presque par tout.

Définition 2.6 Un opérateur multiplicateur est un type d'opérateur linéaire ou de transformation de fonctions. Ces opérateurs agissent sur une fonction en modifiant sa transformée de Fourier. Plus précisément, ils multiplient la transformée de Fourier d'une fonction par une fonction spécifiée appelée le multiplicateur ou le symbole.

Cette classe d'opérateurs s'avère être large et de nombreux opérateurs familiers, tels que la différentiation sont des opérateurs multiplicateurs.

Exemple 2.4 *Considérons une fonction périodique $f(t)$. Calculons la transformée de Fourier de sa dérivée f' :*

$$\mathcal{F}(f\Delta)(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (in) f(t) e^{-int} dt = in \cdot \mathcal{F}(f)(n)$$

Donc, formellement, il s'ensuit que la transformée de Fourier pour la dérivée est tout simplement la transformée de Fourier pour f multiplié par un facteur in . C'est la même chose que de dire que la différenciation est un opérateur multiplicateur avec multiplicateur in .

L'espace de Schwartz

Définition 2.7 *L'espace de Schwartz est l'espace S des fonctions déclinantes, c'est-à-dire des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, ainsi que leurs dérivées de tous ordres i.e*

$$S = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{\alpha,\beta} < \infty; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}$$

où : α, β sont des multi-indices, et

$$\|u\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)|$$

Exemple 2.5 *i – Supposons que α est un multi-indice et a un nombre réel positif alors :*

$$x^\alpha e^{-a\|x\|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$$

ii – L'espace S est un sous-espace vectoriel des différents espaces L_p pour $1 \leq p \leq +\infty$. i.e

$$S(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n)$$

Définition 2.8 *Soit $f \in S(\mathbb{R}^n)$ et $0 < s < 1$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, l'opérateur $(-\Delta)^s$ est défini par sa transformée de Fourier*

$$\mathcal{F}((-\Delta)^s f(\xi)) = c |\xi|^{2s} \mathcal{F}f(\xi) \tag{2.7}$$

De la relation (1.7) nous obtenons que

$$(-\Delta)^s f(\xi) = \mathcal{F}(c |\xi|^{2s} \mathcal{F}f(\xi))$$

Chapitre 3

Non existence de la solution global d'un système d'équations d'évolutions avec des dérivés fractionnaires spatio-temporels

3.1 Exposants critiques de type Fujita pour certaines équations d'évolution avec des dérivés fractionnaires spatio-temporels

Dans cette partie, on étudie la non existence de la solution global du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} D_{0,t}^{\beta} u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} (u) = h(x, t) |u|^{1+\tilde{p}} & \text{pour } (x, t) \in Q = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (3.1)$$

Où : $D_{0,t}^{\beta}$ désigne la dérivée temporelle d'ordre arbitraire $\alpha \in (0, 1)$ au sens de Caputo et l'exposant \tilde{p} est strictement positif.

La fonction $h(x, t)$ satisfait la condition :

$$h(x, t) \geq C_h |x|^{\sigma} t^{\rho} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N, t > 0, C_h > 0 \quad (H)$$

Les hypothèses sur σ et ρ seront déterminées selon la convergences des intégrales

L'étude du problème (3.1) est motivé par l'étude du problème suivante :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{1+p}, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, t) = a(x) \geq 0; & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (3.2)$$

Où p est un nombre positive, on note par $p_c = \frac{2}{N}$ (exposant critique de Fujita) . **Fujita** a prouvé que

i–Si $0 < p < p_c$ et $a(x_0)$ pour certains x_0 alors la solution de (3.2) explose en un temps fini,

ii–Si $p > p_c$ alors pour chaque $t > 0$ le problème (3.2) admet une solution positive. Pour être précis, pour tout $k > 0$ on peut choisir $\delta > 0$ tels que (3.2) admet une solution globale quand

$$0 \leq a(x) \leq \delta e^{-k|x|^2}$$

Le nombre p_c est appelé l'exposant critique. Dans le cas critique, ce problème est résolu par Hayakawa, pour $N = 1, 2$, et par **Kobayachipour** chaque N . Il est démontré que si $p = p_c$ il n'existe pas de solution globale non négative pour n'importe quelle données initiales non-triviales. Leur démonstration a été simplifiée par **Weissler**.

Puis, **Fujita** étendait ses résultats antérieurs et considérait (3.2) avec un terme de réaction plus général $f(u)$ convexe.

Les résultats obtenus pour le problème (3.2) ont été généralisés par **Bandle** et **Levine** pour le cas d'un problème à valeur initiale au bord dans un cône, avec le terme $|x|^{\sigma} u^{p+1}$ au lieu de u^{p+1} . Il a été prouvé que, dans ce cas, l'exposant critique est égale à :

$$\frac{2 + \sigma}{N}.$$

Un autre travail [] a étudié un problème de la forme :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u) = h(x, t) |u|^{1+p} & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (3.3)$$

où la fonction u_0 est définie et continue sur \mathbb{R}^N et p est un réel positif, la fonction $h \geq 0$ est continue et satisfait la condition suivante :

Pour tout $\gamma > 0$ et tout ensemble compact $\Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$, il existe un nombre réel $\ell(\gamma)$ (dépendant de γ) tel que :

$$h\left(tR^{\frac{1}{\gamma}}, xR^{\frac{1}{\beta\gamma}}\right) = O\left(R^{\ell(\gamma)}\right), \quad R > 0 \text{ grand}, \quad (t, x) \in \Omega \quad (3.4)$$

et a obtenu des résultats sur l'exposant critique :

Théorème 3.1 Soit $\gamma > 0$. Supposons que la condition (3.4) est satisfaite lorsque :

$$\frac{pN}{\beta} - 1 \leq \gamma\ell(\gamma)$$

Alors le problème (3.3) admet la solution triviale $u \equiv 0$ comme unique solution globale.

Pour le problème (3.1), la non existence de la solution global du problème est démontré par l'absurd et ceci en supposant que le problème (2.1) admet une solution globale faible et on arrive a une contradiction

Définition 3.1 Supposons que $p = 1 + \tilde{p}$, $u \in L^1_{loc}(Q_T)$ avec $(Q_T := \mathbb{R}^N \times (0, T))$

On dit que $u(x, t)$ est une solution faible du problème (3.1) définie sur Q_T , Si $uh^{\frac{1}{p}} \in L^p_{loc}(Q_T, dxdt)$ et vérifiée :

$$\int_{Q_T} D_{0,t}^\alpha u \varphi dxdt + \int_{Q_T} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u) \varphi dxdt = \int_{Q_T} h |u|^{1+p} \varphi dxdt \quad (3.5)$$

Remarque 3.1 i- L'équation (3.1) donne :

$$\int_{Q_T} u_0(x) D_{t,T}^\alpha \varphi dxdt + \int_{Q_T} h |u|^p \varphi dxdt = \int_{Q_T} u (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi dxdt + \int_{Q_T} u D_{t,T}^\alpha \varphi dxdt \quad (3.6)$$

Théorème 3.2 :on suppose que $N \geq 1$, et $p > 1$. Si

$$1 < p \leq p_c = 1 + \frac{\alpha(\beta + \sigma) + \beta\rho}{\alpha N + \beta(1 - \alpha)}$$

alors le problème (3.1) n'admet pas une solution globale non triviale.

Preuve. On suppose que la solution du problème (3.1) est positive non trivial globale c-à-d : $u(x, t)$ existe pour tout $T^* > 0$,

Considérons une fonction $\Phi \in C_0^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \leq 1 \\ 0, & \text{si } z \geq 2 \end{cases} \\ 0 \leq \Phi \leq 1 \\ \Phi \text{ est décroissante} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Choisissons comme fonction test, la fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x, t) = \Phi\left(\frac{|x|^2 + t^\theta}{R^2}\right); \text{ où } R \text{ et } \theta \text{ sont des nombre positifs}$$

telle que

$$\int_{Q_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u) \varphi \right|^q h \varphi^{\frac{-q}{p}} + \int_{Q_T} |D_{tT}^\alpha \varphi|^q (h \varphi)^{\frac{-q}{p}} dxdt < \infty$$

et ceci en tenant en compte des conditions convenables sur σ et ρ .

Soient T et R deux nombres réels positifs tel que

$$0 < TR^{\frac{2}{\theta}} < T^*, \text{ où } \theta \in \mathbb{R}_+$$

On a :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi(x, t) dxdt = \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u (h \varphi)^{\frac{1}{p}} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi(x, t) (h \varphi)^{\frac{-1}{p}} dxdt$$

Et faisant appel à l'inégalité de ϵ -Young, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u (h \varphi)^{\frac{1}{p}} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi (h \varphi)^{\frac{-1}{p}} dxdt &\leq \epsilon \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p |h \varphi| dxdt \\ &+ C_\epsilon \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |h \varphi|^{\frac{-q}{p}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \right|^q dxdt \end{aligned} \quad (3.8)$$

de même pour :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u D_{tTR^{\frac{2}{\theta}}}^\alpha \varphi dxdt = \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u (h \varphi)^{\frac{1}{p}} D_{tTR^{\frac{2}{\theta}}}^\alpha \varphi (h \varphi)^{\frac{-1}{p}} dxdt$$

on trouve :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u D_{tTR^{\frac{2}{\theta}}}^\alpha \varphi dxdt \leq \epsilon \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p |h \varphi| dxdt + C_\epsilon \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \left| D_{tTR^{\frac{2}{\theta}}}^\alpha \varphi \right|^q |h \varphi|^{\frac{-q}{p}} dxdt \quad (3.9)$$

d'après (3.6), (3.8) et (3.9); on a

$$\begin{aligned} & \int_Q h |u|^p \varphi dxdt + \int_{TR^{\frac{2}{\theta}}} u_0(x) D_{tTR^{\frac{2}{\theta}}}^\alpha \varphi(x) dx \\ & \leq 3\epsilon \int_Q |u|^p |h\varphi| dxdt \\ & \quad + C_\epsilon \int_Q \left[\left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \right|^q |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} + \left| D_{tTR^{\frac{2}{\theta}}}^\alpha \varphi \right|^q |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} \right] dxdt \end{aligned}$$

Pour ϵ suffisamment petit, on a

$$\int_Q u_0 D_{tT}^\alpha \varphi dxdt + \int_Q h |u|^p \varphi dxdt \leq C_\epsilon \int_Q \left(\left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \right|^q + \left| D_{tTR^{\frac{2}{\theta}}}^\alpha \varphi \right|^q \right) |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} dxdt \quad (3.10)$$

Alors

$$\int_Q h |u|^p \varphi dxdt \leq C_\epsilon \int_Q \left(\left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \right|^q + \left| D_{tTR^{\frac{2}{\theta}}}^\alpha \varphi \right|^q \right) |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} dxdt \quad (3.11)$$

Faisons le changement de variables suivant :

$$\tau = \frac{t}{R^{\frac{2}{\theta}}}, \quad y = \frac{x}{R}$$

et posons

$$\Omega = \{ (y, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ : \mu(y, \tau) < 2 \}$$

où $\mu : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ donné par

$$\mu(y, \tau) = |y|^2 + \tau^\theta$$

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \varphi\left(Ry, R^{\frac{2}{\theta}}\tau\right) \\ &= \Phi\left(\frac{|Ry|^2 + \left(R^{\frac{2}{\theta}}\tau\right)^\theta}{R^2}\right) \\ &= \Phi(|y|^2 + \tau^\theta) \\ &= (\Phi \circ \mu)(y, \tau) \end{aligned}$$

De (3.7); on a

$$\Phi(z) = 0; \text{ pour } z \geq 2$$

donc pour $(y, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ tel que $\mu(y, \tau) \geq 2$; (c-à-d $(y, \tau) \notin \Omega$); on a

$$(\Phi \circ \mu)(y, \tau) = 0$$

On a aussi

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi(x, t) = R^{-\beta} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} (\Phi \circ \mu)(y, \tau) \\ D_{tTR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \varphi(x, t) = R^{-\frac{2}{\theta}\alpha} D_{\tau T}^{\alpha} (\Phi \circ \mu)(y, \tau) \\ dt = R^{\frac{2}{\theta}} \tau \text{ et } dx = R^N dy \end{cases}$$

Et pour la fonction h , d'après la condition (H), on a :

$$(h(x, t))^{-\frac{q}{p}} \leq (C_h |x|^{\sigma} t^{\rho})^{-\frac{q}{p}}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \right|^q |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} dxdt &\leq R^{\frac{2}{\theta} + N - \beta q - \frac{q}{p}(\frac{2\rho}{\theta} + \sigma)} \\ &\times \int_{\Omega} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} (\Phi \circ \mu) \right|^q (C_h |y|^{\sigma} \tau^{\rho} (\Phi \circ \mu))^{\frac{-q}{p}} dyd\tau \end{aligned} \quad (3.12)$$

d'autre parte on a :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |D_{0t}^{\alpha} \varphi|^q |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} dxdt &\leq R^{-\frac{2}{\theta}\alpha p' + N + \frac{2}{\theta} - \frac{q}{p}(\frac{2\rho}{\theta} + \sigma)\frac{q}{p}} \\ &\times \int_{\Omega} |D_{\tau T}^{\alpha} (\Phi \circ \mu)|^q (C_h |y|^{\sigma} \tau^{\rho} (\Phi \circ \mu))^{\frac{-q}{p}} dyd\tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour que les membres de droites des inégalités (3.11) et (3.12), ont le même ordre de puissance pour R ; il faut que

$$\theta = \frac{2\alpha}{\beta}$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{\beta}{\alpha}}}} h(x, t) |u|^p \varphi(x, t) dxdt \leq CR^{\gamma} \quad (3.14)$$

où :

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha} + N - \beta q - \left(\frac{\beta\rho}{\alpha} + \sigma \right) \frac{q}{p}$$

et :

$$C = C_{\epsilon} \int_{\Omega} \left(\left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} (\Phi \circ \mu) \right|^q + |D_{\tau T}^{\alpha} (\Phi \circ \mu)|^q \right) (C_h |y|^{\sigma} \tau^{\rho} (\Phi \circ \mu))^{\frac{-q}{p}} dyd\tau$$

On distingue deux cas :

Si : $\gamma < 0, c - \dot{a} - d :$

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta}{\alpha} + N - \beta q - \frac{q}{p} \left(\frac{\beta \rho}{\alpha} + \sigma \right) < 0 &\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} + N - \beta \frac{p}{p-1} - \left(\frac{\beta \rho}{\alpha} + \sigma \right) \frac{1}{p} \left(\frac{p}{p-1} \right) < 0 \\
 &\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} + N - \frac{\beta p}{p-1} - \frac{\beta \rho}{\alpha(p-1)} + \frac{\sigma}{p-1} < 0 \\
 &\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} + N - \frac{\beta p}{p-1} - \frac{\beta \rho}{\alpha(p-1)} + \frac{\sigma}{p-1} < 0 \\
 &\Rightarrow \frac{-\beta p}{p-1} - \frac{\beta \rho}{\alpha(p-1)} - \frac{\sigma}{p-1} < -\frac{\beta}{\alpha} - N \\
 &\Rightarrow \frac{-\alpha \beta p - \beta \rho - \alpha \sigma}{\alpha(p-1)} < -\frac{\beta - N\alpha}{\alpha} \\
 &\Rightarrow \frac{-\alpha \beta p - \beta \rho - \alpha \sigma}{p-1} < -\beta - N\alpha \\
 &\Rightarrow -\alpha \beta p - \beta \rho - \alpha \sigma < (p-1)(-\beta - N\alpha) \\
 &\Rightarrow (-\alpha \beta + \beta + N\alpha)p < \beta + N\alpha + \beta \rho + \alpha \sigma \\
 &\Rightarrow p < \frac{\alpha(\sigma + N) + (1 + \beta)\rho}{\alpha N + \beta(1 - \alpha)}
 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha(\sigma + N) + \beta \rho}{\alpha N + \beta(1 - \alpha)} &= \frac{\alpha N + (1 + \beta)\rho + \alpha \sigma}{\alpha N + \beta(1 - \alpha)} \\
 &= \frac{\alpha N + \beta(1 - \alpha) + \alpha \beta + \beta \rho + \alpha \sigma}{\alpha N + \beta(1 - \alpha)} \\
 &= 1 + \frac{\alpha(\beta + \sigma) + \beta \rho}{\alpha N + \beta(1 - \alpha)}
 \end{aligned}$$

donc

$$p < 1 + \frac{\alpha(\beta + \sigma) + \beta \rho}{\alpha N + \beta(1 - \alpha)} = p_c$$

et en passant à la limite quand $R \rightarrow \infty$; on trouve :

$$\int_{Q_T} h |u|^p \varphi \leq 0$$

Ceci implique que :

$$u = 0.p.p; \quad \text{contradiction}$$

Si $\gamma = 0$

Pour $p = p_c$; soit :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} h |u|^p \varphi dxdt \leq C_\epsilon \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \left(\left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \right|^q + \left| D_{tTR^{\frac{2}{\theta}}}^\alpha \varphi \right|^q \right) |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} dxdt \quad (3.15)$$

on prend :

$$\Omega = \{(y, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ : |y|^2 + \tau^\theta < 2\}$$

alors

$$\begin{aligned} |y|^2 + \tau^\theta &< 2 \\ \Rightarrow \frac{|x|^2}{R^2} + \frac{t^\theta}{R^2} &< 2 \\ \Rightarrow R^{-2} (|x|^2 + t^\theta) & \\ \Rightarrow |x|^2 + t^\theta &< 2R^2 \end{aligned}$$

Observons que si on pose :

$$C_R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ : R^2 \leq |x|^2 + t^\theta \leq 2R^2\}$$

et en raison de la convergence de l'intégrale dans (3.14) ; alors :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} |u|^p h \varphi dx dt = 0.$$

Si au lieu d'utiliser l'inégalité de ε -Young, nous utilisons plutôt l'inégalité d'**Hôlder**, alors au lieu de l'estimation (3.13), nous trouvons

$$\int_{Q_{TR^{\frac{\beta}{\alpha}}}} h |u|^p \varphi dx dt \leq L \left(\int_{C_R} |u|^p h \varphi dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.16)$$

avec

$$\begin{aligned} L &= \left(\int_{\Omega_1} |D_{\tau T}^\alpha (\Phi \circ \mu)|^q (C_h |y|^\sigma \tau^\rho (\Phi \circ \mu))^{\frac{-q}{p}} dy d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \left(\int_{\Omega_1} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} (\Phi \circ \mu) \right|^q (C_h |y|^\sigma \tau^\rho (\Phi \circ \mu))^{\frac{-q}{p}} dy d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

et :

$$\Omega_1 = \{(y, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ : 1 \leq |y|^2 + t^\theta \leq 2\}$$

en tenant compte de (3.15), après être passé à la limite quand $R \rightarrow \infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+} h |u|^p \varphi dx dt = 0$$

Ceci implique que :

$$u = 0.p.p; \quad \text{contradiction}$$

■

3.2 Systèmes d'équations différentielles fractionnaires :

Cette partie est consacré à l'étude du système de réaction-diffusion de type (FDS) suivant

$$\begin{cases} D_{0t}^\alpha (u - u_0) + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} (u) = |v|^p & \text{dans } Q \\ D_{0t}^\delta (v - v_0) + (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} (v) = |u|^q & \text{dans } Q \end{cases} \quad (3.17)$$

Le système (FDS) est complété par les conditions initiales suivantes :

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0; v(x, 0) = v_0(x) \geq 0; x \in \mathbb{R}^N$$

où $N \geq 1$ et p, q sont deux nombres réels positifs. Pour $\alpha \in (0, 1)$ (resp $\delta \in (0, 1)$), " D_{0t}^α " (resp " D_{0t}^δ ") désigne la dérivée fractionnaire en temps d'ordre α (resp δ) au sens de Caputo, Par contre, pour $\beta \in [1; 2]$ (resp $\gamma \in [1; 2]$). " $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ " (resp " $(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}$ ") est réservé pour le laplacien fractionnaire, par rapport à x , d'ordre $\frac{\beta}{2}$ (resp $\frac{\gamma}{2}$).

Théorème 3.3 Soient $p > 1$ et $q > 1$, et supposons que

$$N \leq \max \left\{ \frac{\frac{\delta}{q} + \alpha - \left(1 - \frac{1}{pq}\right)}{\frac{\delta}{\gamma q p'} + \frac{\alpha}{\beta q'}}, \frac{\frac{\alpha}{p} + \delta - \left(1 - \frac{1}{pq}\right)}{\frac{\alpha}{\beta p q'} + \frac{\delta}{\gamma p'}} \right\} \quad (3.18)$$

alors, le système (FDS) (avec les données initiales) n'admet pas de solution faible positive globale non-triviale.

Preuve. La preuve procède par contradiction, On suppose que le problème (3.16) admet une solution positive globale non trivial c-à-d : $(u(x, t), v(x, t))$ existe pour tout $T^* > 0$, Soient T et R deux nombres réels positifs tel que

$$0 < TR < T^*,$$

Choisissons comme fonctions test les fonctions ξ_1 et $\xi_2 \in \mathcal{C}_{x,t}^{2,1}(Q_T)$, définies par

$$\xi_j(x, t) = \Phi \left(\frac{t^2 + |x|^{2\theta_j}}{R^2} \right), j = 1, 2; \text{ où } \theta_1 = \frac{\beta}{\alpha} \text{ et } \theta_2 = \frac{\gamma}{\delta} \quad (3.19)$$

La formulation faible de la solution du système (3.16) donne :

$$\begin{cases} \int_{Q_T} D_{0t}^\alpha (u - u_0) \xi_1 dxdt + \int_{Q_T} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u \xi_1 dxdt = \int_{Q_T} |v|^p \xi_1 dxdt \\ \int_{Q_T} D_{0t}^\delta (v - v_0) \xi_2 dxdt + \int_{Q_T} (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v \xi_2 dxdt = \int_{Q_T} |u|^q \xi_2 dxdt \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 dxdt + \int_{Q_{TR}} u_0 D_{tT}^\alpha \xi_1 dxdt = \int_{Q_{TR}} u D_{tT}^\alpha \xi_1 dxdt + \int_{Q_{TR}} u (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi_1 dxdt \\ \int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 dxdt + \int_{Q_{TR}} v_0 D_{tT}^\delta \xi_2 dxdt = \int_{Q_{TR}} v D_{tT}^\delta \xi_2 dxdt + \int_{Q_{TR}} u (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \xi_2 dxdt \end{cases}$$

On a

$$\int_{Q_{TR}} u (D_{tT}^\alpha \xi_1) dxdt = \int_{Q_{TR}} u (\xi_2)^{\frac{1}{q}} (D_{tT}^\alpha \xi_2) (\xi_2)^{-\frac{1}{q}} dxdt$$

D'après l'inégalité de Holder ; on a :

$$\int_{Q_{TR}} u |D_{tT}^\alpha \xi_1| dxdt \leq \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{TR}} |D_{tT}^\alpha \xi_1| (\xi_2)^{-\frac{q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} dxdt \quad (3.20)$$

et

$$\int_{Q_{TR}} u \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi_1 \right| dxdt \leq \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi_1 \right| (\xi_2)^{-\frac{q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} dxdt \quad (3.21)$$

d'après (3.19), (3.20) on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 dxdt &\leq \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{TR}} |D_{tT}^\alpha \xi_1| (\xi_2)^{-\frac{q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} dxdt \\ &\quad + \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi_1 \right| (\xi_2)^{-\frac{q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} dxdt \end{aligned} \quad (3.22)$$

On pose :

$$A = \left(\int_{Q_{TR}} |D_{tT}^\alpha \xi_1| (\xi_2)^{-\frac{q'}{q}} dxdt \right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi_1 \right| (\xi_2)^{-\frac{q'}{q}} dxdt \right)^{\frac{1}{q'}}$$

Alors, l'inégalité (3.21) s'écrit

$$\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 dxdt \leq \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{\frac{1}{q}} .A \quad (3.23)$$

De même on obtient l'estimation :

$$\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 dxdt \leq \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{\frac{1}{p}} .B \quad (3.24)$$

avec

$$B = \left(\int_{Q_{TR}} |D_{tT}^\delta \xi_2| (\xi_1)^{-\frac{p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \xi_2 \right| (\xi_1)^{-\frac{p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

Des inégalités (3.22), (3.23), on peut écrire :

alors

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right) \leq \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{\frac{1}{pq}} .(B)^{\frac{1}{q}} .A$$

et

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right) \leq \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{\frac{1}{qp}} \cdot (A)^{\frac{1}{p}} \cdot B$$

donc :

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq (B)^{\frac{1}{q}} \cdot A \quad (3.25)$$

et

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{1-\frac{1}{qp}} \leq (A)^{\frac{1}{p}} \cdot B \quad (3.26)$$

Maintenant, faisons un changement de variables

dans l'expression de A ; introduisons les variables (τ, y) définies par :

$$t = R\tau, \text{ et } x = R^{\frac{\alpha}{\beta}} y,$$

Cependant, dans l'expression de B ; introduisons les variables (τ, y) sont définies par :

$$t = R\tau, \text{ et } x = R^{\frac{\delta}{\gamma}} y$$

Par suite ; l'estimation (3.24) donne :

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{1-\frac{1}{pq}} &\leq \left(R^{-\delta+\frac{1}{p'}(N^{\frac{\delta}{\gamma}}-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(R^{-\alpha+\frac{1}{q'}(N^{\frac{\alpha}{\beta}}-1)} \right) \\ &\times \left\{ \left(\int_{\Omega} |D_{tT}^{\delta} \xi_2| (\xi_1)^{\frac{-p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{\Omega} |(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \xi_2| (\xi_1)^{\frac{-p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\times \left\{ \left(\int_{\Omega} |D_{tT}^{\alpha} \xi_1| (\xi_2)^{\frac{-q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{\Omega} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi_1| (\xi_2)^{\frac{-q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C \left\{ R^{-\delta+\frac{1}{p'}(N^{\frac{\delta}{\gamma}}-1)} \right\}^{\frac{1}{q}} \times \left\{ R^{-\alpha+\frac{1}{q'}(N^{\frac{\alpha}{\beta}}-1)} \right\} \quad (3.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \left(\int_{\Omega} |D_{tT}^{\delta} \xi_2| (\xi_1)^{\frac{-p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{\Omega} |(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \xi_2| (\xi_1)^{\frac{-p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\times \left\{ \left(\int_{\Omega} |D_{tT}^{\alpha} \xi_1| (\xi_2)^{\frac{-q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{\Omega} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi_1| (\xi_2)^{\frac{-q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

donc :

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{1-\frac{1}{pq}} &\leq C \{R^{-l_1}\}^{\frac{1}{q}} \times \{R^{-l_2}\} \\ &\leq C \{R^{-\frac{1}{q}l_1}\} \times \{R^{-l_2}\} \\ &\leq CR^{-(\frac{l_1}{q}+l_2)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

où :

$$\begin{cases} l_2 = \alpha - \frac{1}{q'} \left(N \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) \\ l_1 = \delta - \frac{1}{p'} \left(N \frac{\delta}{\gamma} + 1 \right) \end{cases} \quad (3.30)$$

Ensuite, nous discutons de la même manière, comme dans le cas d'une seule équation, les deux cas :

- Si $\frac{l_1}{q} + l_2 > 0$.
- et si $\frac{l_1}{q} + l_2 = 0$.

Notez que l'exigence

$$\frac{l_1}{q} + l_2 \geq 0$$

est équivalente à :

$$\frac{1}{q} \left\{ \delta - \frac{1}{p'} \left(N \frac{\delta}{\gamma} + 1 \right) \right\} + \left\{ \alpha - \frac{1}{q'} \left(N \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) \right\} \geq 0$$

ceci implique :

$$\frac{\delta}{q} - N \frac{\delta}{\gamma q p'} - \frac{1}{q p'} + \alpha - N \frac{\alpha}{\beta q'} - \frac{1}{q'} \geq 0$$

alors

$$\frac{\delta}{q} + \alpha - N \left(\frac{\delta}{\gamma q p'} + \frac{\alpha}{\beta q'} \right) - \left(1 - \frac{1}{pq} \right) \geq 0$$

donc

$$N \left(\frac{\delta}{\gamma q p'} + \frac{\alpha}{\beta q'} \right) \leq \frac{\delta}{q} + \alpha - \left(1 - \frac{1}{pq} \right)$$

Par conséquence

$$\Rightarrow N \leq \frac{\frac{\delta}{q} + \alpha - \left(1 - \frac{1}{pq} \right)}{\frac{\delta}{\gamma q p'} + \frac{\alpha}{\beta q'}}$$

De même, on a :

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{1-\frac{1}{qp}} \leq (A)^{\frac{1}{p}} \cdot B$$

d'après (3.25), on a :

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{1-\frac{1}{pq}} &\leq \left(R^{-\delta+\frac{1}{p'}(N\frac{\delta}{\gamma}-1)} \right) \times \left(R^{-\alpha+\frac{1}{q'}(N\frac{\alpha}{\beta}-1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\times \left\{ \left(\int_{Q_{TR}} |D_{tT}^{\delta} \xi_2| (\xi_1)^{\frac{-p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{Q_{TR}} |(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \xi_2| (\xi_1)^{\frac{-p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} \\ &\times \left\{ \left(\int_{Q_{TR}} |D_{tT}^{\alpha} \xi_1| (\xi_2)^{\frac{-q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{Q_{TR}} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi_1| (\xi_2)^{\frac{-q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C \left\{ R^{-\delta+\frac{1}{p'}(N\frac{\delta}{\gamma}-1)} \right\} \times \left\{ R^{-\alpha+\frac{1}{q'}(N\frac{\alpha}{\beta}-1)} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

donc :

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{1-\frac{1}{pq}} &\leq C \{ R^{-l_1} \} \times \{ R^{-l_2} \}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \{ R^{-l_1} \} \times \{ R^{-\frac{l_2}{p}} \} \\ &\leq C R^{-(l_1+\frac{l_2}{p})} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ensuite, nous discutons de la même manière :

- Si $l_1 + \frac{l_2}{p} > 0$.
- et si $l_1 + \frac{l_2}{p} = 0$.

Notez que l'exigence

$$l_1 + \frac{l_2}{p} \geq 0$$

est équivalente à :

$$\left\{ \delta - \frac{1}{p'} \left(N \frac{\delta}{\gamma} + 1 \right) \right\} + \frac{1}{p} \left\{ \alpha - \frac{1}{q'} \left(N \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) \right\} \geq 0$$

Par conséquence

$$N \leq \frac{\frac{\alpha}{p} + \delta - \left(1 - \frac{1}{pq} \right)}{\frac{\alpha}{\beta pq'} + \frac{\delta}{\gamma p'}}$$

Il est clair que les deux relations (3.28) et (3.31) sont nécessaires pour obtenir une contradiction, il suffit donc de supposer :

$$1 \leq N \leq \max \left\{ \frac{\frac{\delta}{q} + \alpha - \left(1 - \frac{1}{pq} \right)}{\frac{\delta}{\gamma qp'} + \frac{\alpha}{\beta q'}}, \frac{\frac{\alpha}{p} + \delta - \left(1 - \frac{1}{pq} \right)}{\frac{\alpha}{\beta pq'} + \frac{\delta}{\gamma p'}} \right\}$$

3.2.1 les conditions nécessaires pour l'existence global et locale :

Dans cette partie on va étudier les conditions nécessaire pour l'existence global et locale des problèmes (3,1) et(3,16) .

les résultats du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + h(x) |u|^p, \text{ dans } Q \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \text{ dans } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (3.32)$$

sont réalisés par *Kalashnikov* ,*Baras* et *Kersner* montrons que la solution locale faible positive n'existe pas si la condition initiale u_0 satisfie

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0^{p-1}(x) h(x) = +\infty$$

Théorème 3.4 Soit u est une solution locale de problème (3,1) avec $T < \infty$.

Alors

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \left[u_0(x) (h(x))^{\frac{p'}{p}} \right] \leq CT^{\alpha(1-p')}, \quad (3.33)$$

pour une constante positive C .

Preuve. Considérons la fonction test suivante :

$$\varphi(x, t) = \Phi\left(\frac{x}{R}\right) \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^l, & 0 < t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

où $\Phi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ est une fonction positive, avec

$$\text{supp } \Phi \subset \{1 < |x| < 2\}$$

et elle satisfie

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \Phi \leq k\Phi; \text{ pour une constante } k > 0$$

et "p" est un nombre réel positif choisi comme suit

i) Si $p < 1/(1 - \alpha)$ alors l est choisit

$$D_{tT}^{\alpha} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^l = \Lambda T^{-\alpha} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{l-\alpha}, \text{ avec } \Lambda = \Gamma(1+l) / \Gamma(1+l-\alpha)$$

on utilise la formule () telle que

$$\int_{Q_T} u_0 D_{tT}^{\alpha} \varphi dx dt \leq C \int_{Q_T} \left(\left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \right|^{p'} + |D_{tT}^{\alpha} \varphi|^{p'} \right) |h\varphi|^{1-p'} dx dt \quad (3.34)$$

on a

$$D_{tT}^\alpha \varphi(x, t) = D_{tT}^\alpha \Phi\left(\frac{x}{R}\right) = \Lambda T^{-\alpha} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{l-\alpha}$$

nous introduisons les variables scalaires suivant :

$$t = T\tau \text{ et } x = Ry$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} u_0(x) D_{tT}^\alpha \varphi dx dt &= \int_{Q_T} u_0(Ry) \Lambda \Phi(y) T^{-\alpha} (1 - \tau)^{l-\alpha} dRy dT\tau \\ &= \int_0^T R^N \Lambda T^{1-\alpha} (1 - \tau)^{l-\alpha} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry) \Phi(y) \end{aligned} \quad (3.35)$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} u_0(x) D_{tT}^\alpha \varphi dx dt &= \int_0^1 R^N \Lambda T^{1-\alpha} (1 - \tau)^{l-\alpha} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry) \Phi(y) \\ &= \frac{1}{l - \alpha + 1} R^N \Lambda T^{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry) \Phi(y) \end{aligned} \quad (3.36)$$

et on a

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |D_{tT}^\alpha \varphi|^{p'} |h\varphi|^{1-p'} &= \int_{Q_T} \left(\Lambda \Phi(y) T^{-\alpha} (1 - \tau)^{l-\alpha}\right)^{p'} \left|h\Phi(y) (1 - \tau)^l\right|^{1-p'} d\tau dy \\ &= \Lambda^{p'} R^N T^{(1-\alpha p')} \int_0^1 (1 - \tau)^{(l-\alpha p')} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{1-p'}(Ry) \\ &= \Lambda^{p'} R^N T^{(1-\alpha p')} \frac{1}{(l - \alpha p' + 1)} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{1-p'}(Ry) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Alors

$$\int_{Q_T} |D_{tT}^\alpha \varphi|^{p'} |h\varphi|^{1-p'} = C \frac{1}{(l - \alpha p' + 1)} R^N T^{(1-\alpha p')} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{1-p'}(Ry) \quad (3.38)$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left(\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta}{2}} \varphi\right)^{p'} |h\varphi|^{1-p'} &= \int_{Q_T} \left(\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta}{2}} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) (1 - \tau)^l\right)^{p'} \left|h\Phi\left(\frac{x}{R}\right) (1 - \tau)^l\right|^{1-p'} \\ &= R^{-\beta p'} R^N T \int_0^1 (1 - \tau)^l \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{1-p'}(Ry) \\ &= R^N T \frac{1}{(l + 1)} R^{-\beta p'} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{1-p'}(Ry) \end{aligned}$$

donc

$$\int_{Q_T} \left(\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta}{2}} \varphi\right)^{p'} |h\varphi|^{1-p'} = C R^N R^{-\beta p'} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{1-p'}(Ry) \quad (3.39)$$

d'après (3.35), (3.37) et (3.38); on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{l - \alpha p' + 1} R^N \Lambda T^{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry) \Phi(y) \leq & C \frac{1}{(l - \alpha p' + 1)} R^N T^{(1-\alpha p')} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{1-p'}(Ry) \\ & + C R^N R^{-\beta p'} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{1-p'}(Ry) \end{aligned} \quad (3.40)$$

on trouve :

$$T^{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry) \Phi(y) \leq C T^{(1-\alpha p')} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{1-p'}(Ry) + C R^{-\beta p'} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{1-p'}(Ry) \quad (3.41)$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry) \Phi(y) &= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry) \Phi(y) h(Ry)^{p'-1} h(Ry)^{1-p'} \\ &\leq \inf_{|y|>1} \left(u_0(Ry) h(Ry)^{p'-1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h(Ry)^{1-p'} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \inf_{|y|>1} u_0(Ry) h(Ry)^{p'-1} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h(Ry)^{1-p'} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry) \Phi(y) h(Ry)^{p'-1} h(Ry)^{1-p'} \\ &\leq T^{(\alpha-1)} C T^{(1-\alpha p')} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{(1-p')}(Ry) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$+ T^{(\alpha-1)} C R^{-\beta p'} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{(1-p')}(Ry) \quad (3.43)$$

On dérive sur le terme

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{(1-p')}(Ry)$$

donc

$$\begin{aligned} \inf_{|y|>1} u_0(Ry) h(Ry)^{p'-1} &\leq T^{(\alpha-1)} C T^{(1-\alpha p')} + T^{(\alpha-1)} T C R^{-\beta p'} \\ &\leq C \left(T^{-\alpha(p'-1)} + T^\alpha R^{-\beta p'} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

passant a la limite pour $R \rightarrow +\infty$ on trouve :

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \left(u_0(x) h(x)^{p'-1} \right) \leq C T^{-\alpha(p'-1)} \quad (3.45)$$

■

Corollaire 3.1 *Assumons que le problème (3, 1) admet une solution faible globale positive non triviale. Alors :*

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \left(u_0(x) h(x)^{p'-1} \right) = 0$$

Preuve. Soit u une solution faible globale positive non triviale ,d'après le théoreme (2) , on a :

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \left(u_0(x) h(x)^{p'-1} \right) \leq CT^{-\alpha(p'-1)}$$

et comme u est une solution globale, alors cette relation est satisfaite pour tout $T > 0$, donc en passant à la limite quand $T \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \left(u_0(x) h(x)^{p'-1} \right) = 0$$

■

Théorème 3.5 *Supposon que le problème (3, 1) admet une solution faible global non triviale positive. Alors, il existe une constante positive K telle que*

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \left(u_0(x) |x|^{\alpha(p'-1)} h(x)^{1-p'} \right) \leq K \quad (3.46)$$

Preuve. Considérons la relation :

$$T^{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry) \Phi(y) \leq C \left(T^{(1-\alpha p')} + TR^{-\beta p'} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{(1-p')} (Ry)$$

obtenue dans la preuve du théorème (1) ; et divison sur $T^{(1-\alpha)}$; on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry) \Phi(y) \leq C \left(T^{-\alpha(p'-1)} + T^\alpha R^{-\beta p'} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{(1-p')} (Ry) \quad (3.47)$$

Multiplions par l'expression :

$$h^{(p'-1)} |Ry|^{\alpha(p'-1)} h^{(1-p')} |Ry|^{\alpha(1-p')}$$

à l'intérieur de l'intégrale du côté gauche de l'estimation (3.46) , et par l'expression :

$$|Ry|^{\alpha(1-p')} |Ry|^{\alpha(p'-1)}$$

à l'intérieur de l'intégrale du côté droit de l'estimation . En tenant en compte que :

$$\text{supp } \Phi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : R < |x| < 2R\}$$

on trouve:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry) \Phi(y) h(Ry)^{(1-p')} |Ry|^{\alpha(1-p')} \times h(Ry)^{(p'-1)} |Ry|^{\alpha(p'-1)} \\ & \leq C \left(T^{-\alpha(p'-1)} + T^\alpha R^{-\beta p'} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h(Ry)^{(1-p')} |Ry|^{\alpha(1-p')} |Ry|^{\alpha(p'-1)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 & \inf_{|y|>1} u_0(Ry) |Ry|^{\alpha(p'-1)} h(Ry)^{p'-1} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) |Ry|^{\alpha(1-p')} h(Ry)^{1-p'} \\
 & \leq C \left(T^{-\alpha(p'-1)} + T^\alpha R^{-\beta p'} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h(Ry)^{(1-p')} |Ry|^{\alpha(1-p')} |Ry|^{\alpha(p'-1)} \\
 & \leq C \left(T^{-\alpha(p'-1)} + T^\alpha R^{-\beta p'} \right) (2R)^{\alpha(p'-1)} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h(Ry)^{(1-p')} |Ry|^{\alpha(1-p')}
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 & \inf_{|x|>1} u_0(x) |x|^{\alpha(p'-1)} h^{p'-1} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) |Ry|^{\alpha(1-p')} h^{1-p'} \\
 & \leq C \left(T^{-\alpha(p'-1)} + T^\alpha R^{-\beta p'} \right) (2R)^{\alpha(p'-1)} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h(Ry)^{(1-p')} |Ry|^{\alpha(1-p')}
 \end{aligned}$$

Divisons par

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) h^{(1-p')} |Ry|^{\alpha(1-p')}$$

et prenant $T = R$, on trouve par conséquence :

$$\begin{aligned}
 \inf_{|x|>1} u_0(x) |x|^{\alpha(p'-1)} h^{(p'-1)} & \leq C \left(R^{-\alpha(p'-1)} + R^\alpha R^{-\beta p'} \right) (2R)^{\alpha(p'-1)} \\
 & \leq 2^{\alpha(p'-1)} C \left(1 + R^{(\alpha-\beta)p'} \right) \\
 & \leq K \left(1 + R^{(\alpha-\beta)p'} \right)
 \end{aligned}$$

En passant à la limite quand R tend vers l'infini et en remarquant que $\alpha < \beta$, on obtient

$$\inf_{|x|>1} u_0(x) |x|^{\alpha(p'-1)} h^{(p'-1)} \leq K$$

■

Bibliographie

- [1]
- [2] .B.Assia, "Quelques propriétés et applications de l'opérateur fractionnaire de Caputo", 23 mai 2017.
- [3] .M Kirane, Y Laskri, N Tatar - Journal of Mathematical Analysis and . . . , 2005 - Elsevier.
- [4] .H.Kamel, "Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires", sep 2007.
- [5] .J.Oscar, "Modélisation de l'opérateur Laplacien Fractionnaire à travers d'un problème d'extension au demi-espace", 7 oct 2014.
- [6] .M.Fernando Cortez, "Explosion en temps fini de solutions d'équations dispersives ou dissipatives non-linéaires", 12 juin 2018.
- [7] .D.Medjahid, "Etude des problèmes des volution fractionnaires par la méthode d'explosion", 7 oct 2013.
- [8] .K. Hayakawa, On non existence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations, Proc.Japan Acad. 49(1973)503-505.
- [9] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ.Tokyo Sect. I 13(1966)109-124.
- [10] .M. Kirane, M. Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction–diffusion systems, J. Math. Anal. Appl. 268 (2002) 217–243.
- [11] .Y.-W. Qi, The critical exponents of parabolic equations and blow-up in \mathbb{R}^n , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 128 (1998) 123–136.