Université Laghrour Abbes Khenchela
Faculté : Sciences et Technologie, Dpt : Génie mécanique
3GM Pr, Chahaoui 15/01/ 2026

Module : Mécanique des milieux continus

Examen final

Exercice 1 : (4 points)

a/ Justifier la validité des expressions suivantes : $T_{ijk} + a_i b_j - c_k$, $T_{jki} + a_i b_j c_k$, $T_{jji} + \alpha a_i$, $T_{ii} + a$

b/ Evaluer les expressions suivantes: $\delta_{3p} b_p$, $\varepsilon_{ijk}\delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{3k}$, $\delta_{\alpha 1}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma 1}$, $\delta_{i1}\delta_{ij}\delta_{j1}\delta_{2j}$

Exercice 2 : (8 points)

Au point *M* d'un milieu est donné dans un repère orthonormé (*M*, x_1, x_2, x_3) par le tenseur symétrique de contraintes en (*MPa*).

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & \sigma_{12} & 0 \\ ? & a & ? \\ \sigma_{13} & 0 & a \end{bmatrix}$$

a : Constante et σ_{12} :Orientée dans le sens positif

1- Sachant que les valeurs des invariants $I_1 = 10\ MPa$ et $I_2 = 7\ MPa$. Calculer les valeur de σ_{12}, σ_{13} et ***a***.

2- Calculer les composantes du $\vec{T}(M, \vec{n})$ dans une direction inclinée de 45° dans le plan $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2$.

3- Calculer les contraintes principales et les directions principales correspondantes.

Exercice 3 : (8 points)

Soit dans un repère $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la transformation donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 0.1X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_1 + 0.1X_3 \end{cases}$$

Calculer :
1- le tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit
2- le tenseur des déformations de Green-Lagrange
3- le tenseur des petites déformations.
4- S'agit-il d'une déformation pure ?
5- Quelle sera l'image après déformation d'un triangle ayant pour sommet les points A (0, 0, 0), B (1, 0, 0), C (0, 0, 1) avant la déformation ?
6- Comparer les 2 tenseurs tenseur de Green –Lagrange (L_{ij}) et petite déformation

Corrigé type : Méthode de solution est obligatoire MMC 2026

Solution1 : (4 points)

a/

$T_{ijk}+a_ib_j-c_k$: Fausse (Tenseurs ne sont pas de même ordre c.à.d. d'ordre 3 + d'ordre 2+ d'ordre1) (0.5 pt)

$T_{jki}+a_ib_jc_k$: Correcte, i, j et k indices libres (Tenseurs de même ordre 3) (0.5 pt)

$T_{jji}+\alpha a_i$: Correcte, i indice libre, j indice muet (Tenseurs de même ordre 1) (0.5 pt)

$T_{ii}+a$: Correcte, i indice muet (Tenseurs de même ordre : scalaire +scalaire) (0.5 pt)

b/

$\delta_{3p}b_p=b_3$. (0.5 pt)

$\varepsilon_{ijk}\delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{3k}=\varepsilon_{123}=1$. (0.5 pt)

$\delta_{\alpha 1}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma 1}=\delta_{11}=1$. (0.5 pt)

$\delta_{i1}\delta_{ij}\delta_{j1}\delta_{2j}$: (0.5 pt)

Solution 2 : (8 points)

1- Le tenseur est symétrique, donc les valeurs manquantes sont comme suit. (1pt)

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}2 & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$$ a : Constante , σ_{12} :Orientée dans le sens positif

1- A partir des valeurs des invariants

$$\begin{cases} I_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=\text{trace } \sigma_{ij}\\ I_2=\dfrac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj}-\sigma_{ij}\sigma_{ji})=\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{31}\\ \sigma_{31} & \sigma_{33}\end{vmatrix}\end{cases}$$

- $I_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=\text{trace } \sigma_{ij}=10Mpa \Rightarrow a=4\ Mpa$. (1.25pt)
- $I_2=\begin{vmatrix}2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=7\,MPa \Rightarrow \sigma_{12}=+5\,MPa$. (1.25pt)

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 0\\ 5 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

2- Calculer les composantes du $\vec{T}(M,\vec{n})$ dans une direction inclinée de 45° dans le plan.

a/ D'abord on calcul les valeurs composantes du vecteur des contraintes totale :

calcul des composantes du $\vec{T}(M,\vec{n})/45^\circ \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$ (1pt)

$$T_i=\sigma_{ij}n_j \Rightarrow \begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 0\\ 5 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{Bmatrix}=1/\sqrt{2}\begin{Bmatrix}7\\ 9\\ 0\end{Bmatrix}\quad MPa$$ (1pt)

b/ Calculer la contrainte normale σ_n .

Méthode1 : $\sigma_n = \vec{T}.\vec{n} = T_i n_i = T_1 n_1 + T_2 n_2 + T_3 n_3 = (8)\ MPa$

Méthode2 : $\sigma_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2\sigma_{12}\ n_1 n_2 + 2\sigma_{23}\ n_2 n_3 + 2\sigma_{13} n_1 n_3 = (8)\ MPa$ (0.5pt)

c/ Calculer les composantes du vecteur cisaillement $\vec{\tau}$ puis le module $\vec{\tau}$ du cisaillement.

$$\vec{T} = \sigma_n.\vec{n} + \tau \Rightarrow \tau = \vec{T} - \sigma_n.\vec{n}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 7/\sqrt{2} \\ 9/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} - 8 \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = 1/\sqrt{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad MPa$$ (0.5pt)

Le module de la contrainte tangentielle $\tau = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1\ Mpa$

3- Les contraintes principales et les directions principales correspondantes.

Parce qu'il s'agit d'un tenseur pseudo plan la contrainte $\sigma_3 = 4\ MPa$ (0.25pt) est une contrainte principale

$$\sigma_3 = 4\ MPa \Rightarrow \hat{n}_1^2 + \hat{n}_2^2 + \hat{n}_3^2 = 1 \Rightarrow 0 + 0 + \hat{n}_3^2 = 1 \Rightarrow \hat{n}_3 = \pm 1 \Rightarrow \vec{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les contraintes principales sont : $\boxed{\sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}}$

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \left(\frac{2+4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2-4}{2}\right)^2 + 5^2}}$$

D'où : $\sigma_1 = 8.1\quad MPa \qquad \sigma_2 = -2.1\quad MPa$ (0.25+0.25pt)

* Les directions principales : On a donc pour $\sigma_3 = 4\ MPa \Rightarrow \hat{n}_1^2 + \hat{n}_2^2 + \hat{n}_3^2 = 1 \Rightarrow 0 + 0 + + \hat{n}_3^2 = 1 \Rightarrow \hat{n}_3 = \pm 1$, donc $\vec{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (0.25pts)

*Pour $\sigma_1 = 4MPa \Rightarrow \left(\sigma_{ij} - \sigma_K \delta_{ij}\right) \hat{n}_j = 0 \Rightarrow \begin{cases} -6.1\,\hat{n}_1 + 5\,\hat{n}_2 = 0 \\ 5\,\hat{n}_1 - 4.1\,\hat{n}_2 = 0 \\ -4.1\,\hat{n}_3 = 0 \\ \hat{n}_1^2 + \hat{n}_2^2 + \hat{n}_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{X} \begin{pmatrix} 0.6339 \\ 0.7733 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0.25pt)

$$\vec{Y} \Rightarrow \vec{Z} \wedge \vec{X} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6339 & 0.7733 & 0 \end{vmatrix} = \vec{Y} \begin{pmatrix} -0.7733 \\ 0.6339 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (0.25pt)

Solution3 : (8 pts)

1- Le tenseur des dilatations de Cauchy-Green

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T \overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} 2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 1.01 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$ (2pt)

2- Le tenseur des déformations de Green-Lagrange(1pt)

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(C_{ij} - I\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 1.01 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.01 & 0 \\ 0.1 & 0 & -0.99 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.005 & 0 \\ 0.05 & 0 & -0.495 \end{bmatrix}$$

3- le tenseur des petites déformations.

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 0.1X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_1 + 0.1X_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 0.1X_2 \\ U_2 = 0 \\ U_3 = X_1 - 0.9X_3 \end{cases} \quad (1pt)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0.5 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.9 \end{bmatrix} (1pt)$$

4- S'agit-il d'une déformation pure ?

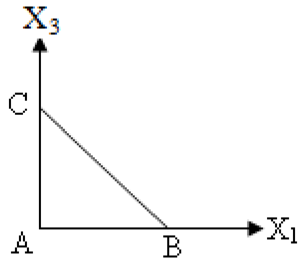
Non, il ne s'agit pas d'une déformation pure car le tenseur de rotation est n'est pas nul.

$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & -0.5 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} (1pt)$$

5- Quelle sera l'image après déformation d'un triangle ayant pour sommet les points A (0, 0, 0), B (1, 0, 0), C (0, 0, 1) avant la déformation ?

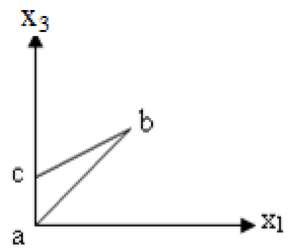
Dans la base des coordonnées initiales (*X_1, X2, X3*) :

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad (0.5pt)$$



Et dans la base des coordonnés finales :

$$a\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad b\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad c\begin{pmatrix}0\\0\\0.1\end{pmatrix} (0.5pt)$$



6- Comparer les 2 tenseurs tenseur de Green –Lagrange (L_{ij}) et petite déformation

Comparaison : (1pt)

$\dfrac{L_{11} - \varepsilon_{11}}{L_{11}} = 1$, l'erreur calculée sur ε_{11} est de 100%.

$$\frac{L_{13} - \varepsilon_{13}}{L_{13}} = \frac{0.5 - 0.05}{0.5} = 90\%$$

Donc l'hypothèse de petite déformation n'est pas valable dans ce cas, les déformations sont trop exagérées.