

Université de ABBAS Laghrour KHENCHELA

Théorie des mécanismes

Cours & Exercices

6^{ème} Semestre

Licence

LMD

***Constructions
Mécaniques***

Belkacem MEDDOUR

2018

TABLE DE MATIERES

CHAPITRES	PAGES
CHAPITRE 1 <i>Préliminaire et Rappels</i>	<i>1</i>
- <i>Notion du torseur et ses caractéristiques</i>	<i>1</i>
- <i>Définitions et hypothèses</i>	<i>5</i>
- <i>Torseurs associés à une liaison</i>	<i>8</i>
CHAPITRE 2 <i>Modélisation des mécanismes</i>	<i>12</i>
- <i>Graphe associé à un système mécanique</i>	<i>12</i>
- <i>Chaines et schémas cinématique d'un système mécanique</i>	<i>15</i>
CHAPITRE 3 <i>Mobilité et hyperstatisme d'un mécanisme</i>	<i>19</i>
- <i>Définitions</i>	<i>19</i>
- <i>Analyse cinématique et statique des liaisons en parallèle</i>	<i>20</i>
- <i>Analyse cinématique et statique des liaisons en série</i>	<i>25</i>
- <i>Analyse cinématique et statique des chaines fermées</i>	<i>28</i>
- <i>Recherche systématique des solutions isostatiques</i>	<i>35</i>
CHAPITRE 4 <i>Analyse cinématique des mécanismes plans</i>	<i>39</i>
- <i>Définition d'un mécanisme plan</i>	<i>39</i>
- <i>Identification des paramètres d'un mécanisme plan</i>	<i>39</i>
- <i>Lois de Grashoff pour les mécanismes 4 barres articulées</i>	<i>41</i>
- <i>Analyse des déplacements d'un mécanisme plan (Méthode graphique, Méthode analytique, Etude de cas)</i>	<i>43</i>
CHAPITRE 5 <i>Initiation à la CAO et synthèse des mécanismes</i>	<i>51</i>

INTRODUCTION

Ce polycopié est destiné aux étudiants de 6^e semestre Licence LMD spécialité Constructions Mécaniques Filière Génie Mécanique.

Il a été élaboré conformément au programme du canevas de cette licence. Pour rendre la matière acquérable, les chapitres ont été conçus en présentant les définitions, les méthodes et les supports d'une façon aisée et claire, les exemples pour éclaircir la situation n'en manquent pas. Chaque chapitre est suivi d'exercices.

Le 1^{er} chapitre est consacré aux rappels et des notions préliminaires qui apparaissent nécessaires pour l'enseignement de cette matière.

Le 2^e chapitre s'occupe de la modélisation d'un mécanisme (Graphe, chaîne cinématique, schéma cinématique). En théorie des mécanismes la géométrie de la pièce n'est pas à considérer seuls les paramètres géométriques telles que les longueurs ou les angles sont considérés.

Le 3^e chapitre traitera la mobilité et l'hyperstatisme d'un mécanisme qui semblent deux caractéristiques importantes d'un mécanisme. L'introduction de l'analyse cinématique ou statique aide à définir la mobilité ou l'hyperstatisme du mécanisme. Parmi les objectifs de ce chapitre on signale la recherche de la solution isostatique lors de la conception d'un mécanisme.

Le 4^e chapitre est consacré à l'analyse cinématique des mécanismes plans. Les mécanismes plans occupent une partie importante dans le domaine des machines, L'étude des déplacements d'un mécanisme permet la détermination des vitesses et des accélérations malheureusement pas prises en compte dans ce programme.

Le 5^e chapitre est une initiation à l'utilisation de SolidWorks pour concevoir un mécanisme isostatique en permettant la simulation de son mouvement par l'outil SolidWorks Motion et de déterminer les paramètres cinématiques numériquement mais à ce niveau on se contente de déterminer les positions des points. Ce chapitre est considéré comme un TP, un exemple explicite permet la connaissance de la maîtrise de cet outil.

Enfin j'adresse mon invitation à tout lecteur ayant des critiques ou des remarques à me contacter par cet email : samsum66@gmail.com.

MEDDOUR B.

Chapitre 1 Préliminaires et Rappels

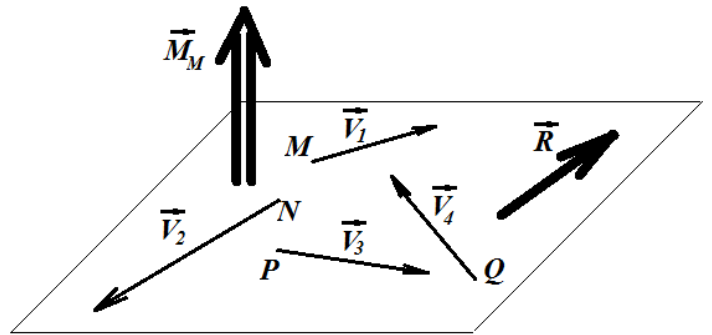
1. Notions sur les torseurs

1.1. Définition d'un torseur

Soit un champ de vecteurs pour lequel \vec{R} est la résultante $\vec{R} = \sum_1^n \vec{V}_i$, $i = 1, n$

En chaque point M on définit un moment résultant $\vec{M}_M = \sum_1^n \vec{r}_i \wedge \vec{V}_i$, $i = 1, n$

Si la propriété $\vec{M}_M = \vec{M}_N + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{R}$ est vérifiée pour tout couple de points (M,N) alors les deux vecteurs résultants \vec{R} et \vec{M}_M forment **un torseur** au point M.



1.2. Notation

$$[T]_M = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_M \end{cases} \text{ Notation vectorielle}$$

$$[T]_M = \begin{cases} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{cases} \text{ Notation analytique}$$

\vec{R} et \vec{M}_M sont appelés éléments de réduction

1.3. Exemples pratiques de torseurs

a) Torseur cinématique

Le disque (figure ci-contre) est un ensemble de points. En tournant chaque point acquiert une vitesse formant un champ de vitesses. Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ est la résultante et le vecteur vitesse linéaire \vec{V} .

Pour deux points A et B la relation du torseur cinématique s'écrit :

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}$$

$$[T_c]_A = \begin{cases} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_A \end{cases} \text{ ou } [T_c]_A = \begin{cases} \omega_x & V_{Ax} \\ \omega_y & V_{Ay} \\ \omega_z & V_{Az} \end{cases}$$

b) Torseur statique

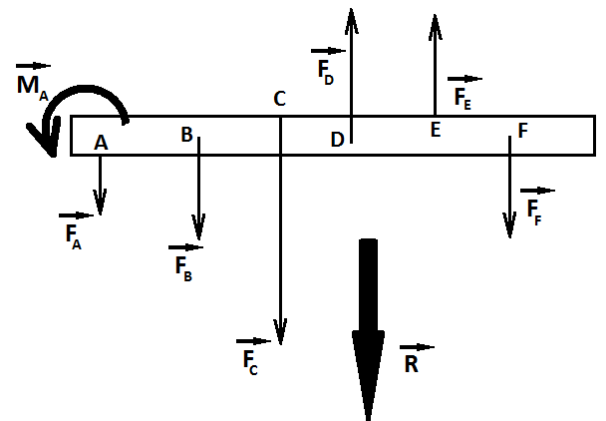
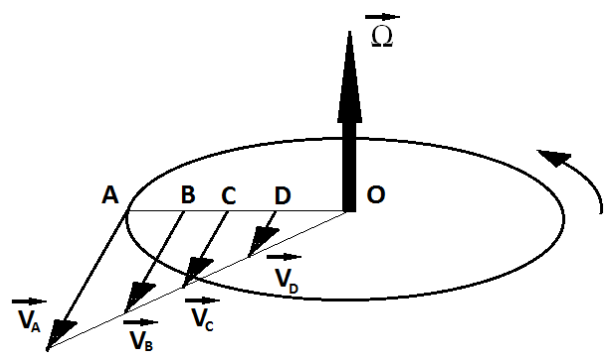
La poutre ci-contre en des points A, B, C, D, E et F sont appliquées des forces $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C, \vec{F}_D, \vec{F}_E$ et \vec{F}_F

Leur résultante est \vec{R} au point A et le moment résultant est \vec{M}_A

Pour deux points A et B la relation du torseur statique s'écrit :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}$$

$$[T_s]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases} \text{ ou } [T_s]_A = \begin{cases} R_x & M_{Ax} \\ R_y & M_{Ay} \\ R_z & M_{Az} \end{cases}$$



1.4. Propriété de transport d'un torseur d'un point à un autre

Soit un champ de vecteur \vec{V}_i ($i=1, n$) et soit un point A en lequel est défini un torseur :

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \\ \vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge \vec{V}_i \end{cases} \quad \text{le vecteur } \vec{r}_i \text{ admet A comme point d'application et } B_i \text{ comme} \\ \text{extrémité soit } \vec{r}_i = \overrightarrow{AB}_i$$

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \\ \vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AB}_i \wedge \vec{V}_i \end{cases}$$

Choisissons un point C où on veut écrire le torseur $[T]_A$:

$$[T]_C = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \\ \vec{M}_C = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{CB}_i \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}_i) \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{CA} \wedge \vec{V}_i + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AB}_i \wedge \vec{V}_i \end{cases}$$

$$[T]_C = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \\ \vec{M}_C = \overrightarrow{CA} \wedge \sum_{i=1}^n \vec{V}_i + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AB}_i \wedge \vec{V}_i = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A \end{cases}$$

Donc : $\vec{M}_C = \vec{M}_A + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R}$

1.5. Propriété d'équiprojectivité

Soient 2 points A et C auxquels sont écrits les torseurs suivants :

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases} \quad \text{et} \quad [T]_C = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_C \end{cases}$$

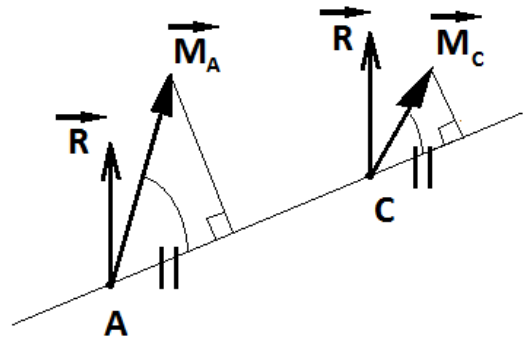
Considérons le produit scalaire :

$$\vec{M}_A \cdot \overrightarrow{CA} = [\vec{M}_C + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}] \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{M}_C \cdot \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}) \cdot \overrightarrow{CA}$$

Les vecteurs $(\overrightarrow{AC} \wedge \vec{R})$ et \overrightarrow{CA} sont perpendiculaires :

$$(\overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}) \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

Donc $\vec{M}_A \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{M}_C \cdot \overrightarrow{CA}$



1.6. Opérations sur les torseurs

a) $[T_1]_A = [T_2]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{1A} = \vec{M}_{2A} \end{cases}$

b) $[T]_A = [T_1]_A + [T_2]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_A = \vec{M}_{1A} + \vec{M}_{2A} \end{cases}$

c) $[T_2]_A = \lambda [T_1]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_2 = \lambda \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{2A} = \lambda \vec{M}_{1A} \end{cases}$

d) $[T]_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{cases}$

1.7. Invariants d'un torseur

On entend par un invariant toute grandeur indépendante du lieu de calcul, pour le torseur on distingue les invariants suivants :

a) Invariant vectoriel : Résultante

La résultante \vec{R} ne dépend d'aucun point donc c'est un invariant

b) Invariant scalaire : Automoment

L'automoment est le produit scalaire des éléments de réduction c.à.d. $\vec{R} \cdot \vec{M}_A$

$$\vec{M}_A \cdot \vec{R} = [\vec{M}_C + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}] \cdot \vec{R} = \vec{M}_C \cdot \vec{R} + (\overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{R}$$

$(\overrightarrow{AC} \wedge \vec{R})$ est perpendiculaire avec \vec{R} donc $(\overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{R} = 0$

Alors $\vec{M}_A \cdot \vec{R} = \vec{M}_C \cdot \vec{R}$ l'automoment ne dépend pas de la position de calcul.

1.8. Axe central d'un torseur

Soit un torseur $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases}$ et soit (Δ) la droite ensemble des points pour lesquels la condition

suivante est satisfaite $\vec{M}_A // \vec{R}$ ou $\vec{M}_A = \alpha \vec{R}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

La droite (Δ) est appelée axe central du torseur $[T]_A$

1.8. Torseurs particuliers

a) Torseur glisseur

Un torseur $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases}$ est glisseur si les éléments de réduction sont perpendiculaires

$$(\vec{R} \cdot \vec{M}_A = 0) \text{ et } \vec{R} \neq \vec{0}$$

b) Torseur couple

Un torseur $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases}$ est un couple si $\vec{R} = \vec{0}$ et $\vec{M}_A \neq \vec{0}$

1.9. Exemples

1) Soit un repère orthonormé (O, x, y, z) on donne les points $A(0, -1, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(-1, -1, -1)$ et $D(0, -2, 1)$

- Calculer les éléments de réduction $[T] = \begin{cases} \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BD} \end{cases}$

- Déterminer l'automoment

Solution :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L'automoment

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (-1) * (-1) + 0 * (-2) + (-2) * 2 = -3$$

2) Dans un repère orthonormé (O, x, y, z) on considère les vecteurs suivants :

$\vec{V}_1 = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{V}_2 = +\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{V}_3 = \vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{V}_4 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ liés respectivement aux points $A(0, 1, 2)$; $O(0, 0, 0)$; $B(1, 0, 1)$ et $C(1, 3, 0)$

- Construire le torseur $[T]_O$ associé aux vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ et \vec{V}_4

- Déduire de $[T]_O$ le torseur $[T]_A$

- Le torseur $[T]_O$ peut s'écrire sous la forme : $[T]_O = [T]_B + [T]$ déterminer le torseur $[T]$

Solution :

$$\bullet [T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^4 \vec{V}_i \\ \vec{M}_A = \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i \wedge \vec{V}_i \end{cases}$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_A = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_3 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_4$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1 * 1 - 1 * 2) - \vec{j}(0 * 1 - (-1) * 2) + \vec{k}(0 * 1 - 1 * 1)$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OO} \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 * (-1) - 0 * 1) - \vec{j}(1 * (-1) - (-1) * 1) + \vec{k}(1 * 0 - (-1) * 0)$$

$$\overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(3 * (-1) - 2 * 0) - \vec{j}(1 * (-1) - 1 * 0) + \vec{k}(1 * 2 - 1 * 3)$$

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On peut écrire le torseur $[T]_O$ sous forme analytique

$$[T]_O = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Pour déduire $[T]_A$ de $[T]_O$ on utilise la propriété de transport de moment :

$$[T]_A = [T]_O + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} = [T]_O - \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} = [T]_O - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$[T]_A = [T]_O - [\vec{i}(1 * (-1) - 0 * 2) - \vec{j}(0 * (-1) - (-1) * 2) + \vec{k}(0 * 0 - (-1) * 1)]$$

$$[T]_A = [T]_O - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 + 1 \\ 0 & 2 + 2 \\ -1 & -2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- $[T]_O = [T]_B + [T]$

$$[T]_B = [T]_O + \overrightarrow{BO} \wedge \vec{R} = [T]_O - \overrightarrow{OB} \wedge \vec{R} = [T]_O - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$[T]_B = [T]_O - [\vec{i}(0 * (-1) - 0 * 1) - \vec{j}(1 * (-1) - (-1) * 1) + \vec{k}(0 * 0 - (-1) * 0)]$$

$$[T]_B = [T]_O - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2+2 & \\ -1 & -2 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$[T] = [T]_O - [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

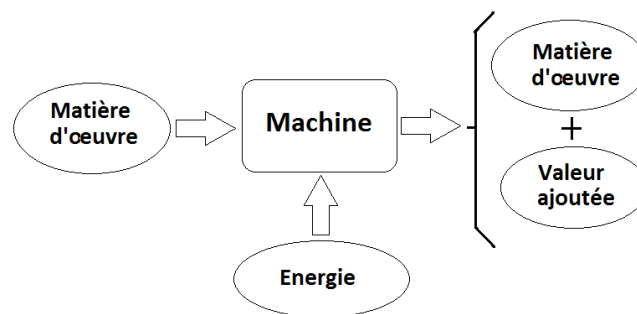
$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est un couple}$$

1.2. Définitions et hypothèses

1.2.1. Machine

Une machine est un assemblage de pièces permettant d'exercer d'un travail sur une matière d'œuvre (outil, matière à façonner, charge à déplacer, ...) en utilisant une source d'énergie.

Exemples : tour parallèle, grue, malaxeur de béton,...



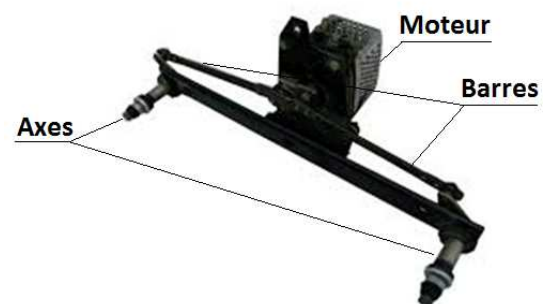
1.2.2. Mécanisme

Un mécanisme est un ensemble de pièces liées entre elles par des liaisons pour former une chaîne cinématique avec un élément fixe appelé bâti.

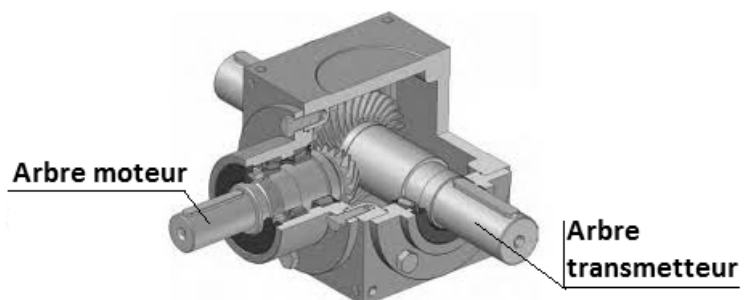
Un mécanisme est destiné à transmettre ou à transformer du mouvement.

Exemples :

1) Mécanisme d'essuie glace : Mécanisme qui transforme le mouvement de rotation continu en mouvement de rotation alternatif.

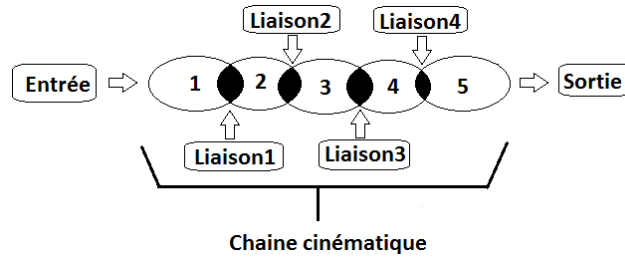


2) Renvoi d'angle : Transmission du mouvement de l'arbre moteur à l'arbre transmetteur



1.2.3. Chaîne cinématique

Une chaîne cinématique est tout simplement l'ensemble des solides liés entre eux par des liaisons de telle façon que le mouvement entrant se transmet d'un solide à un autre jusqu'au dernier élément par lequel sort le mouvement.

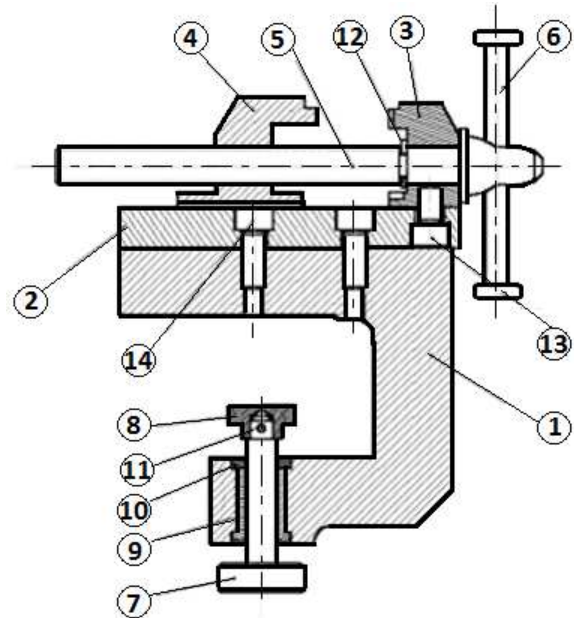


1.2.4. Élément fixe ou bâti

Dans une machine, les pièces fixes constituent un système rigide et immobile qu'on appelle bâti, celui-ci joue le rôle en quelque sorte d'un mur sur lequel sont suspendues les liaisons. En plus de ça le bâti est considéré comme pièce de référence.

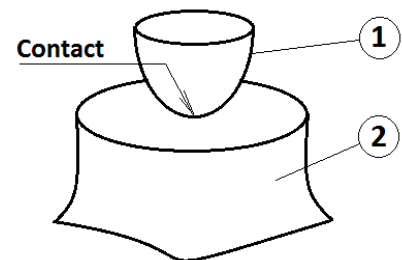
Exemple : Etau

Les pièces 1 ; 2 ; 9 ; 10 ; 14 ; 3 et 13 sont fixes, elles constituent le bâti.



1.2.5. Liaison ou couple cinématique

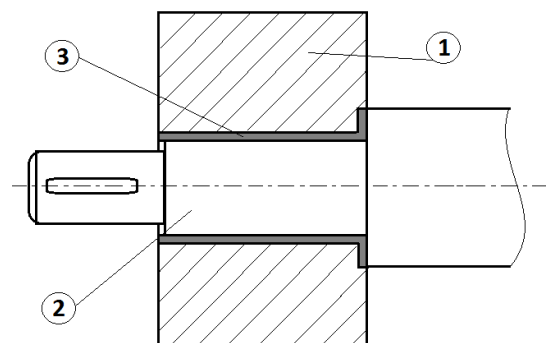
Soient deux pièces 1 et 2, on dit qu'elles sont en liaison ou elles forment un couple cinématique si elles sont en contact permanent.



Exemple : Guidage en rotation

Les pièces 1 et 3 sont en liaison, elles forment un couple cinématique 1/3.

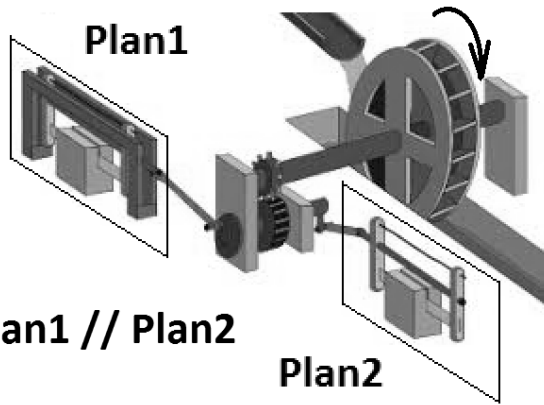
Les pièces 2 et 3 sont en liaison, elles forment un couple cinématique 2/3.



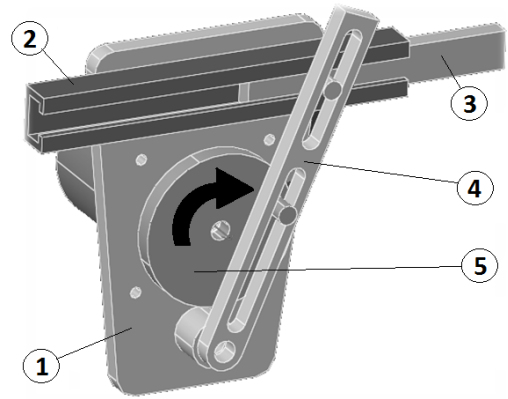
1.2.6. Mécanismes plans

Un mécanisme est dit plan si les trajectoires de tous les points des éléments mobiles se trouvent dans un même plan ou dans des plans parallèles.

Exemples : Double scie hydraulique



Bras oscillant

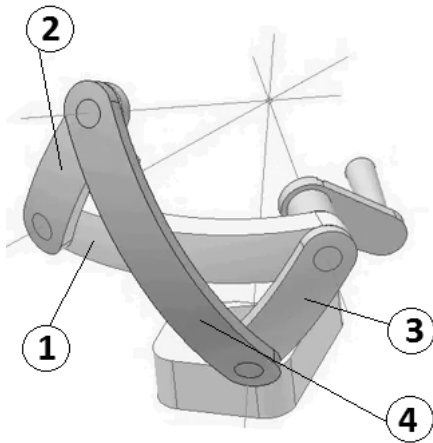


1.2.7. Mécanismes sphériques

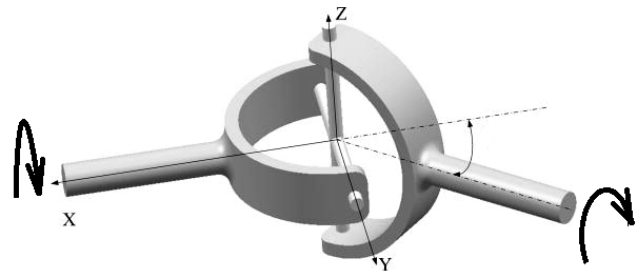
Un mécanisme est dit sphérique lorsque les points des éléments mobiles ont des trajectoires se trouvant sur des sphères concentriques.

Exemples :

Mécanisme sphérique à 4 barres



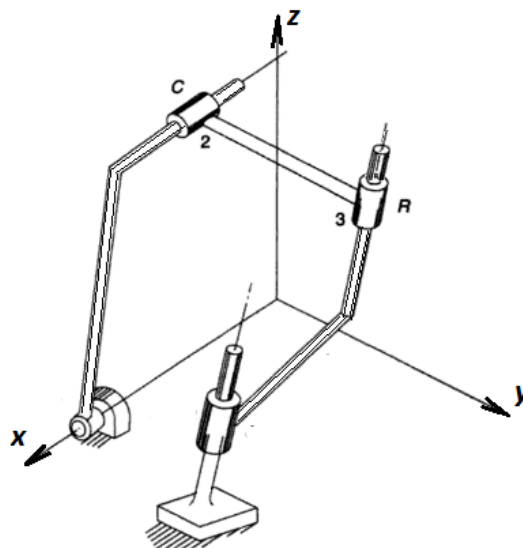
Joint Cardan



1.2.8. Mécanismes spatiaux

Un mécanisme est dit spatial (3D) si au moins un élément a des points qui ont des trajectoires dans l'espace avec la remarque que les axes des articulations ne se coupent pas.

Exemple : Mécanisme spatial à quatre liaisons

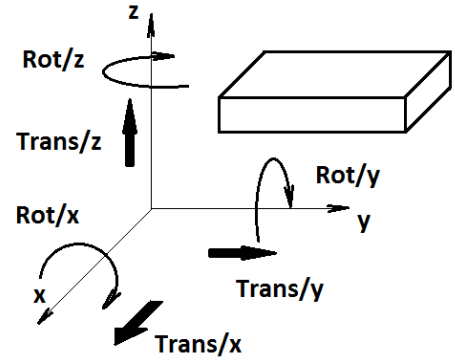


1.3. Liaisons usuelles

1.3.1. Degré de liberté

Dans le cas général le mouvement d'un solide peut être décomposé en des mouvements élémentaires suivant les 3 directions. Sur chaque axe on a une rotation et une translation. Au total on a 3 rotations et 3 translations chacun de ces 6 mouvement est appelé degré de liberté (DDL).

Dans le cas contraire le manque d'un de ces 6 DDL est une liaison.



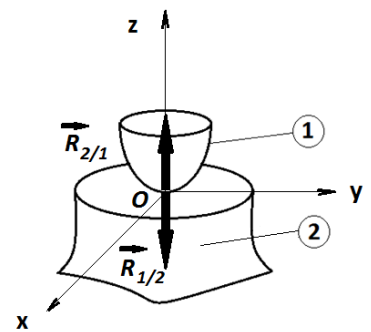
$$\text{Liaison} = \overline{\text{DDL}}$$

On peut exprimer la relation entre les liaisons et les DDL :

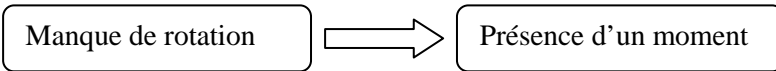
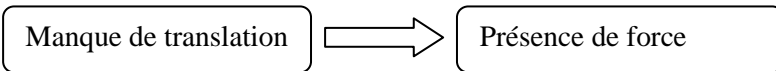
$N = 6 - L$ N : nombre de DDL et L : nombre de liaisons

1.3.2. Etude de la liaison ponctuelle

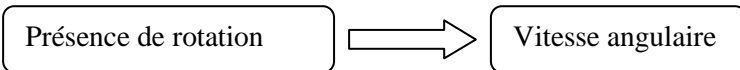
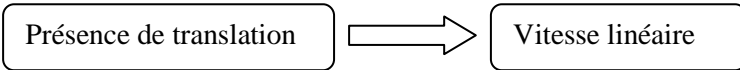
Considérons la liaison ponctuelle 1/2 (figure ci-contre). Suivant les trois axes on a 3 rotations et suivant les axes Ox et Oy on a 2 translations, la translation suivant Oz est absente à cause de la réaction $\vec{R}_{2/1}$.



Du point de vue statique :



Du point de vue cinématique :



1.3.3. Torseur associé à une liaison

Considérons toujours la liaison ponctuelle :

a) Torseur cinématique :

Soit le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ et le vecteur vitesse linéaire $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

Le bilan de DDL de la liaison ponctuelle étudiée sera exprimé par les vitesses :

3 rotations : $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ et 2 translations : V_x, V_y avec $V_z = 0$

Le torseur cinématique associé à cette liaison :

$$\vartheta_O = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V} \end{matrix} \right\} \text{ ou } \vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}$$

b) Torseur statique

Au point de contact s'appliquent des forces et des moments de réaction. Soit la force de réaction

$$\vec{R}_{2/1} = \vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{M}_{2/1} = \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

3 rotations se traduisent par l'absence de M_x, M_y, M_z

2 translations se traduisent par l'absence de R_x, R_y

1 liaison suivant Oz se traduit la présence de R_z

Le torseur statique s'écrit :

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} \text{ ou } \tau_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_z & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.4. Liaisons usuelles

Liaison	Schéma	Torseur statique	Torseur cinématique
Ponctuelle		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{pmatrix}$
Linéaire		$\tau_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{pmatrix}$
Linéaire annulaire		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_y & V_z \end{pmatrix}$
Liaison plan		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ 0 & M_y \\ 0 & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & V_y \\ 0 & V_z \end{pmatrix}$
Rotule		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}$
Sphérique à doigt		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & M_x \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}$

Pivot Glissant		$\tau_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Pivot		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Glissière		$\tau_O = \begin{pmatrix} 0 & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Hélicoidale		$\tau_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Encastrement		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercices

1) Soient deux torseurs et $[T_1]_A$ et $[T_2]_A$ définis au même point A par leurs éléments de réduction dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$[T_1]_A = \begin{cases} \vec{R}_1 = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{M}_{1A} = 4\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k} \end{cases} \quad [T_2]_A = \begin{cases} \vec{R}_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{M}_{2A} = 4\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} \end{cases}$$

1.1) Déterminer l'automoment du torseur $[T_1]_A$, montrer qu'il est indépendant du point A

1.2) Construire le torseur $[T]_A = a[T_1]_A + b[T_2]_A$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

1.3) Quelle relation doivent vérifier a et b pour que le torseur $[T]_A$ soit un couple

1.4) Montrer que le torseur couple est indépendant du point où on le mesure

2) Le mécanisme ci-dessus représente un système de blocage servant à fixer la barre à découper.

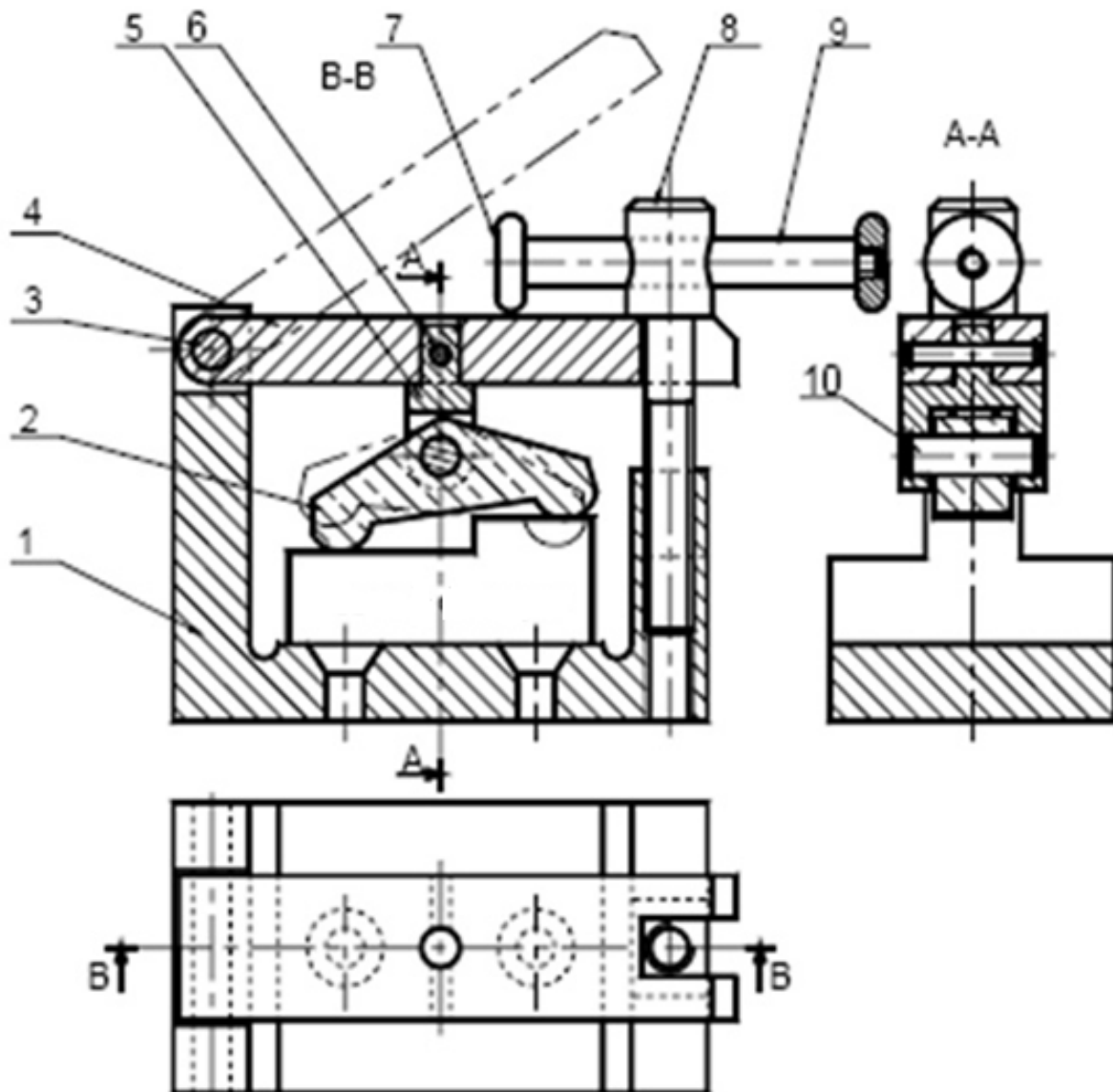
Travail demandé :

2.1) Déterminer toutes les liaisons existantes en précisant le type et les torseurs associés

2.2) Déterminer les classes d'équivalence

2.3) Construire le graphe de liaisons

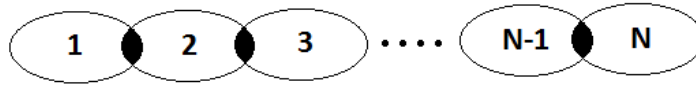
2.4) De quelle type de chaîne s'agit-il ?



Chapitre 2 Modélisation des mécanismes

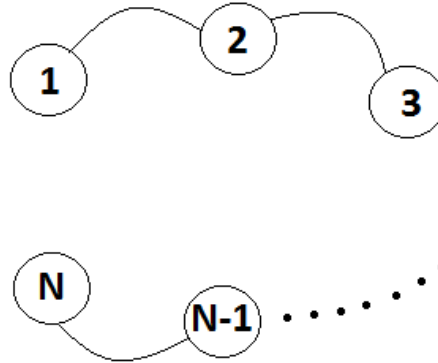
2.1. Graphe associé à un système mécanique

Soit un système mécanique composé de N pièces et de L liaisons :



Ce système peut être représenté par un graphe tel que :

- Le sommet représente la pièce 'i' ($i=1, N$)
- L'arc représente la liaison 'k' ($k=1, L$)



2.1. 1. Classe d'équivalence

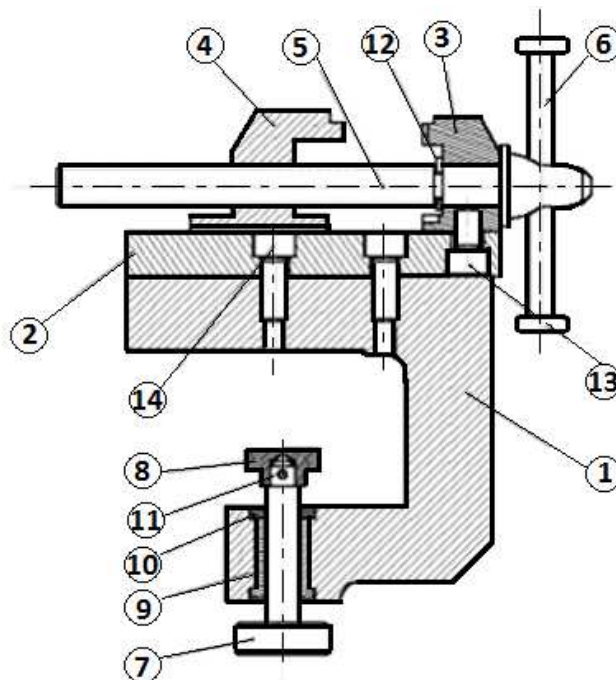
Une classe d'équivalence est l'ensemble des pièces d'un même système mécanique qui sont en liaison d'encastrement d'une façon permanente.

Cette classe d'équivalence peut être représentée par l'une des pièces de la classe et le comportement de cette classe est le même que celui de cette pièce.

Exemple : L'étai

L'ensemble de pièces du système ci-contre (l'étai) est une classe d'équivalence :

$$C = \{1; 2; 9; 10; 14; 3; 13\}$$

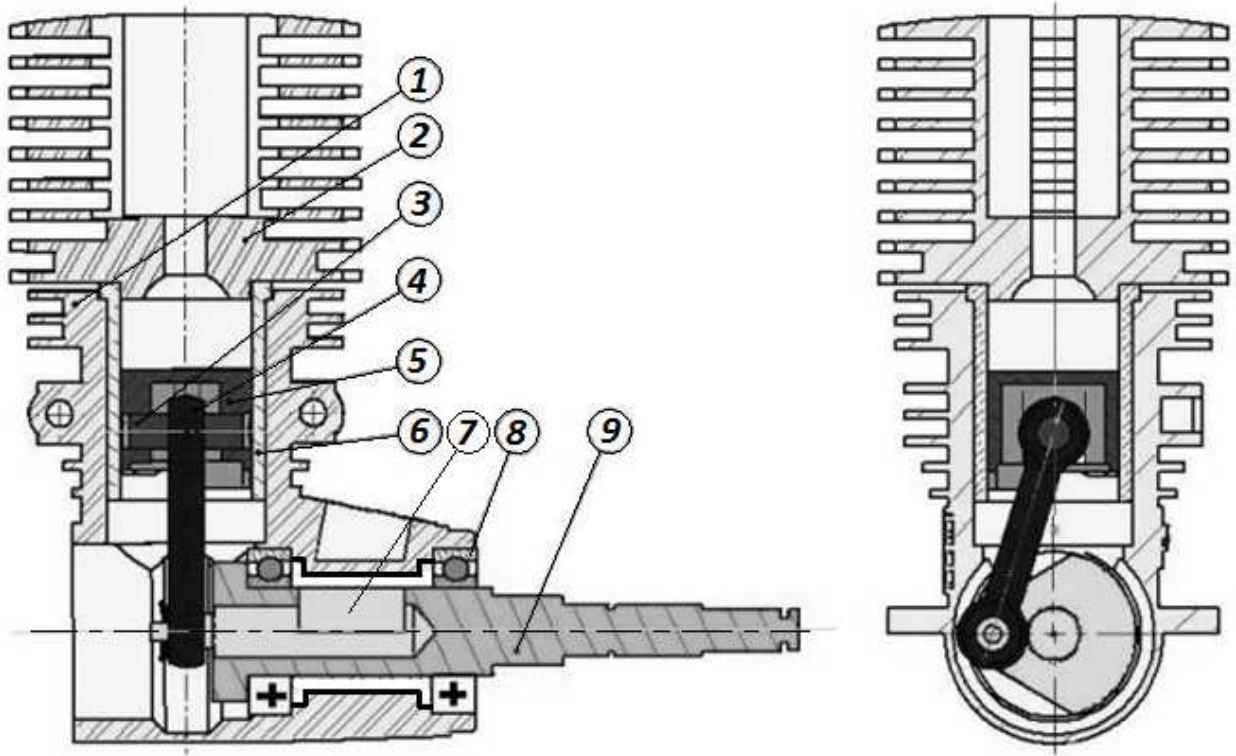


2.1.2. Construction du graphe d'un mécanisme

Pour construire le graphe d'un mécanisme il faut suivre ces pas :

- Création des classes d'équivalence et représenter chaque classe par un élément qui lui appartient.
- Construction du graphe de telle façon que les éléments mobiles et les éléments représentant les classes d'équivalence sont les sommets et les liaisons entre ces éléments sont les arcs.

Exemple : On considère le dessin d'ensemble ci-dessous d'un moteur thermique et qu'on de mande de construire le graphe de liaisons.



1) Classes d'équivalence

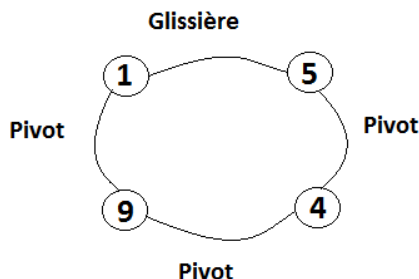
$$(1) = \{1, 2, 6, 8\}$$

$$(5) = \{5, 3\}$$

$$(4) = \{4\}$$

$$(9) = \{7, 9\}$$

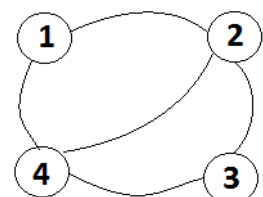
2) Graphe du mécanisme



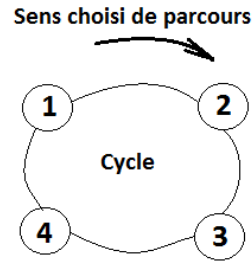
2.1.3. Cycles, cycles indépendants et arbres

Considérons le graphe d'un mécanisme suivant :

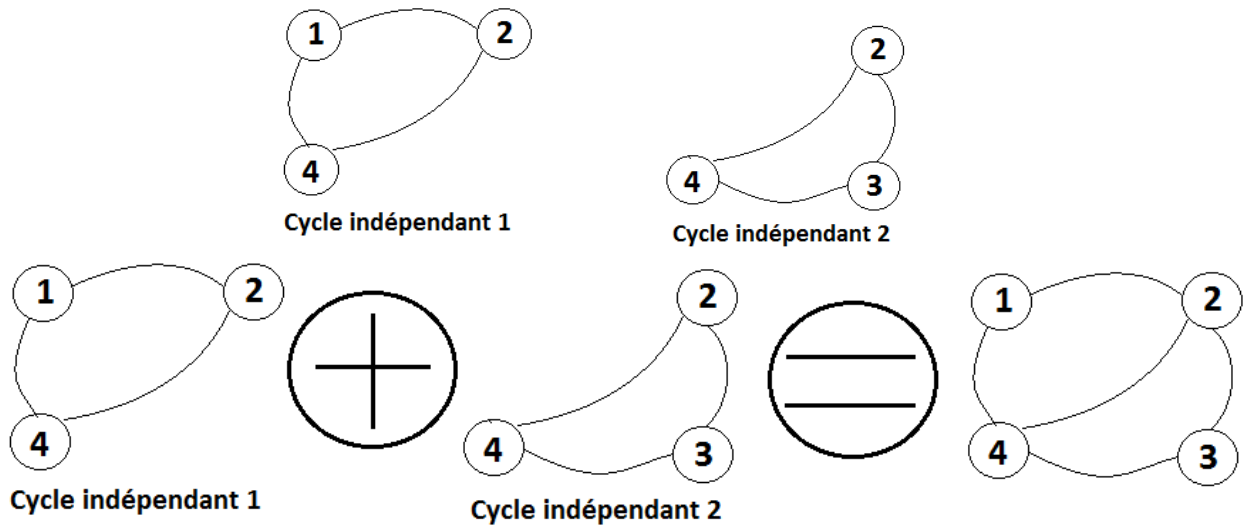
- Un cycle est un extrait du graphe, c'est chemin fermé parcouru une seule fois.



L'extrait suivant représente un cycle :

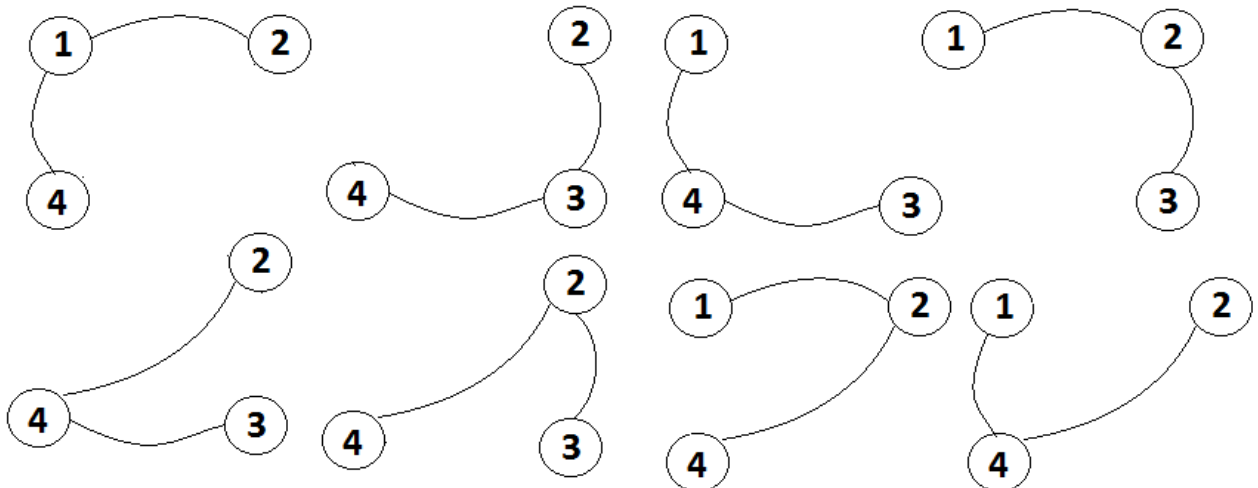


- Un cycle indépendant est le cycle élémentaire extrait du graphe, ces cycles indépendants une fois assemblés doivent donner le graphe duquel ils dérivent.



- Un arbre est un extrait du graphe, c'est un chemin parcouru une seule fois et il est non fermé.

Ci-dessous quelques arbres extraits du graphe :



2.1.4. Nombre cyclomatique d'un graphe

Le nombre cyclomatique noté γ caractérise le nombre de cycles indépendants :

$$\gamma = L - N + 1$$

L : Nombre de liaisons

N : Nombre de pièces

Exemple : Application au graphe précédent :

N=4 et L=5, $\gamma = 5 - 4 + 1 = 2$

le nombre de cycles indépendants est 2

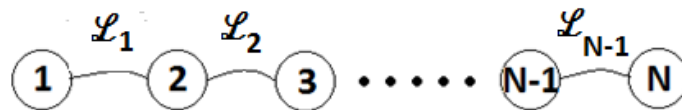
2.2. Chaines et schémas cinématiques d'un système mécanique

2.2.1. Types de chaines cinématiques

Par le moyen du graphe de liaisons on peut distinguer plusieurs types de chaines cinématiques.

2.2.1.1. Chaîne ouverte

Ce type est très utilisé en robotique son inconvénient est qu'elle admet plus qu'un élément menant. Si on considère une chaîne de N pièces et $L=N-1$ liaisons, c.à.d. chaque pièce est en 2 liaisons avec 2 autres pièces sauf la première et la dernière.



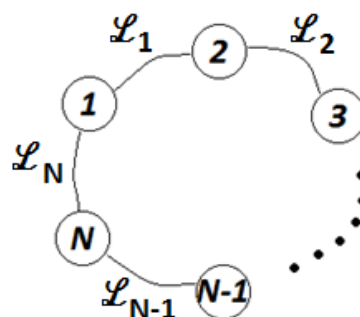
Exemple : Bras d'un robot



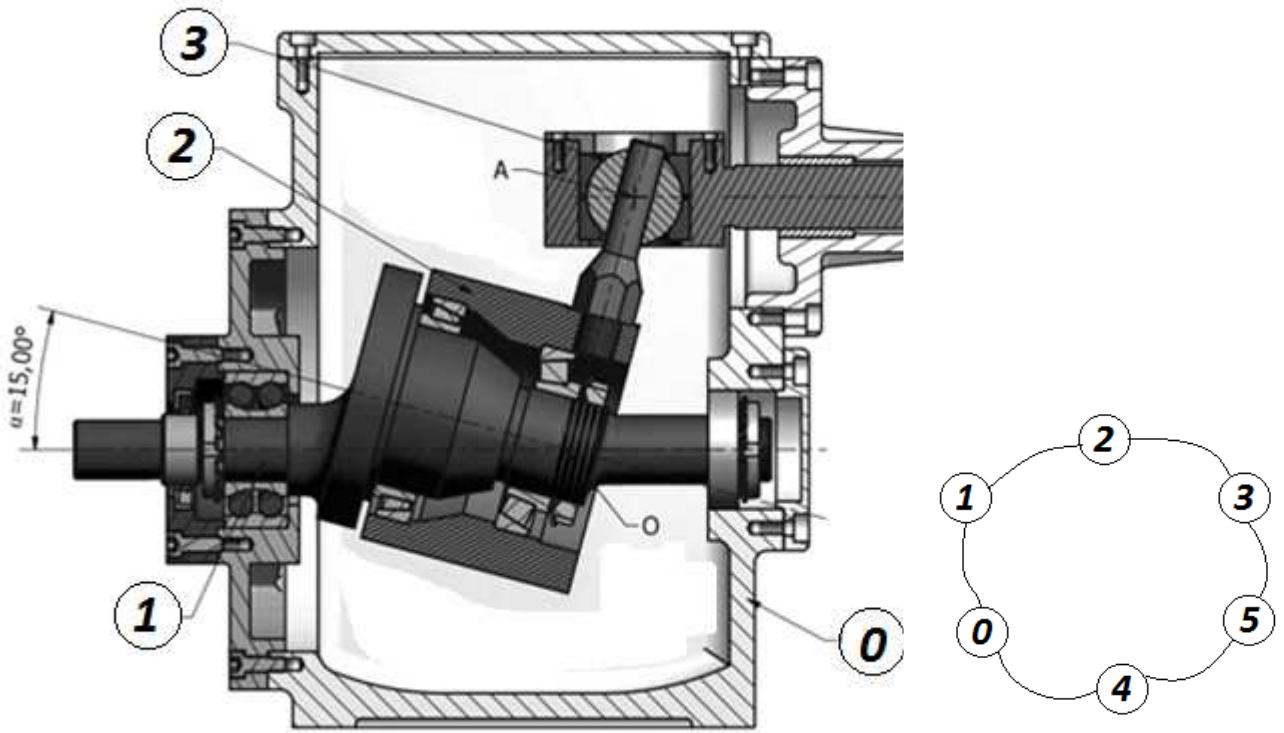
2.2.1.2. Chaîne fermée

Ce type de chaîne a l'avantage qu'on puisse utiliser un seul élément menant et a la caractéristique d'avoir chaque composant en 2 liaisons avec 2 autres.

Considérons une chaîne fermée composée de N pièces et L liaisons, il est clair que $L=N$.



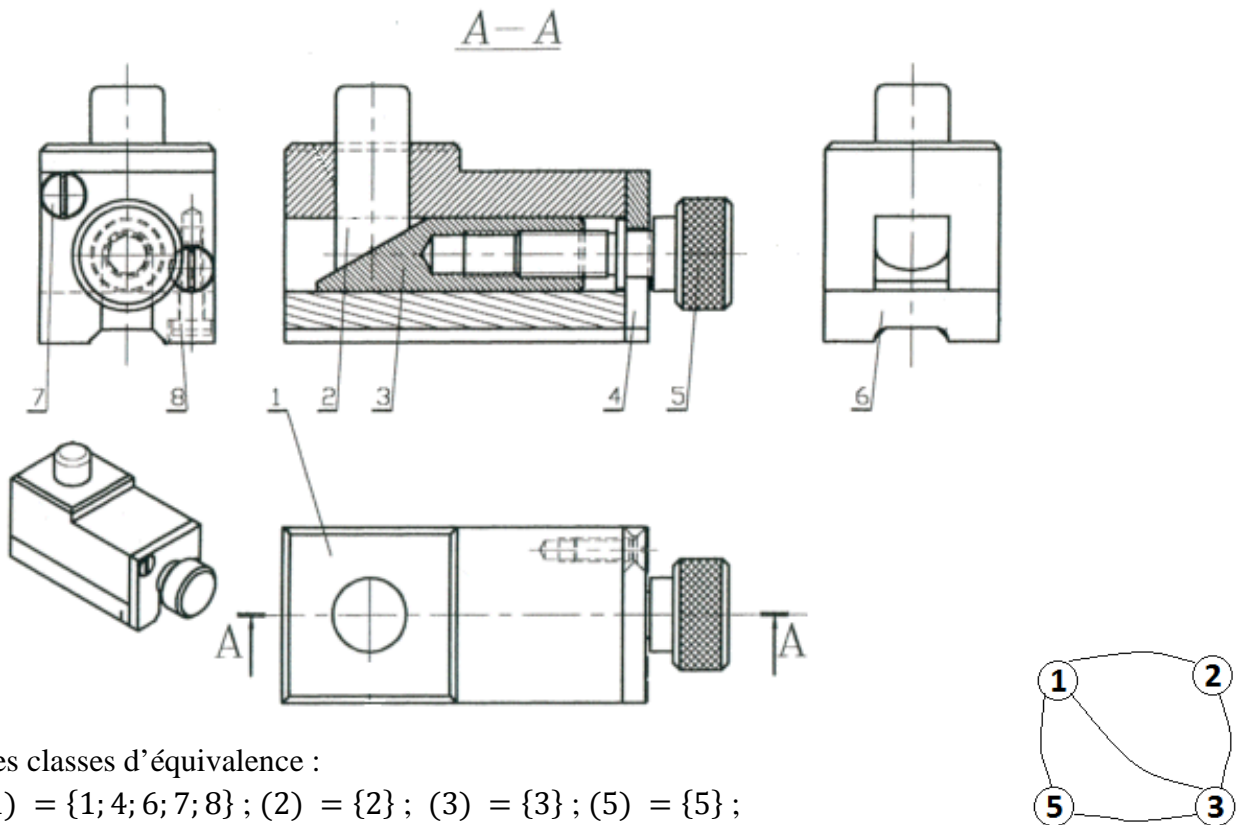
Exemple : Tête boucheuse



2.2.1.3. Chaîne fermée complexe

Une chaîne cinématique fermée complexe est formée de plus d'un cycle indépendant ou autrement son nombre cyclomatique est plus d'une unité. Chaque élément de cette chaîne est en liaison avec au moins deux autres.

Exemple : Appui réglable



Les classes d'équivalence :

(1) = {1; 4; 6; 7; 8} ; (2) = {2} ; (3) = {3} ; (5) = {5} ;

En tout 4 pièces (1) ; (2) ; (3) ; (5)

2.2.2. Schéma cinématique d'un système mécanique

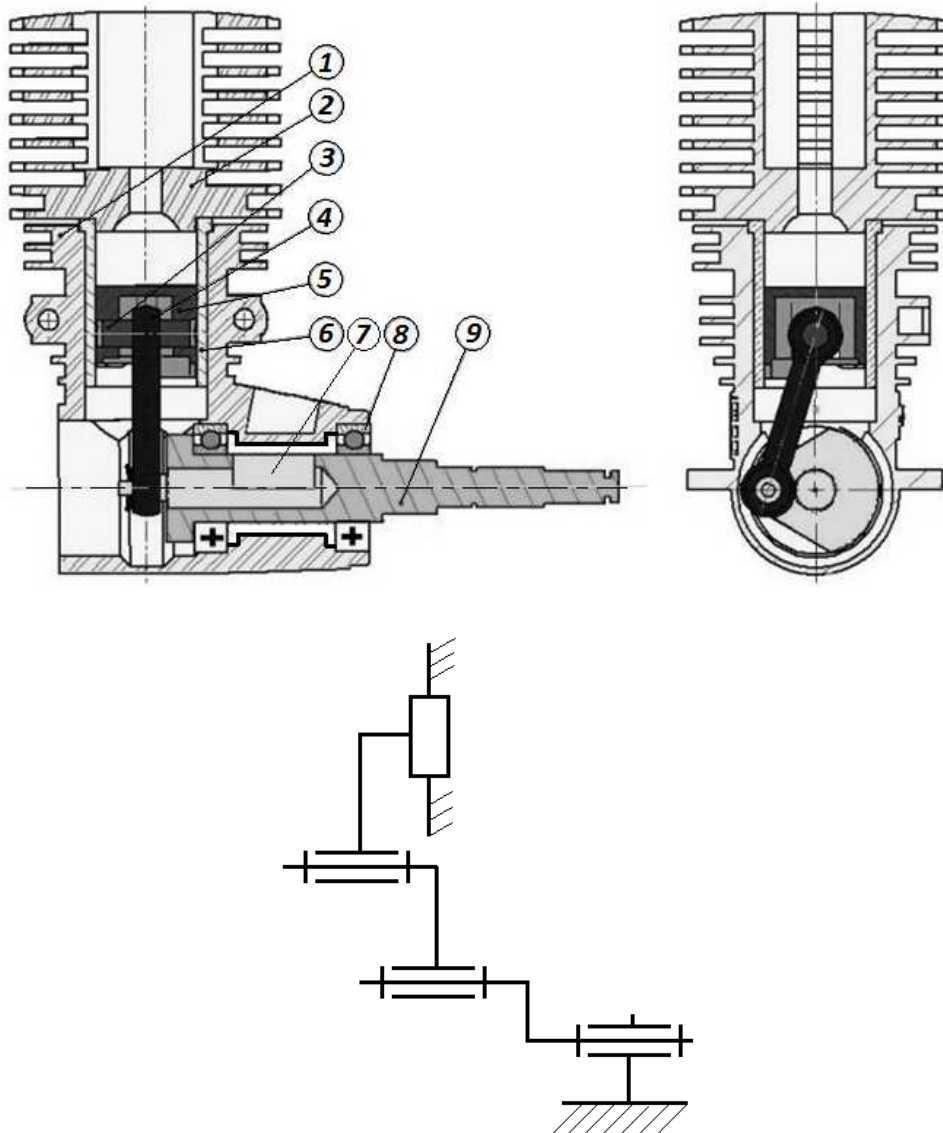
Dans une chaîne cinématique il y a entrée et sortie de mouvement, entre l'entrée et la sortie le mouvement se confère d'un ou des éléments à un ou des autres éléments d'une façon unique et logique.

Les éléments d'entrée sont auxquels le mouvement est donné à l'aide d'actionneurs (moteurs, vérins,...)

Les éléments de sortie sont par lesquels se produisent les mouvements désirés. Les nombres de pièces et de liaisons d'un mécanisme ne sont suffisants en effet la connaissance des dimensions des pièces influant sur le mouvement et les natures des différentes liaisons est nécessaire pour étudier ce mécanisme. Un outil qui remplirait ces conditions ne serait que le schéma cinématique.

Lorsque le schéma cinématique ne comporte que des données justes nécessaires à l'étude on dit que c'est un schéma cinématique minimal.

Exemple : Reprenons le moteur thermique et construisons le schéma cinématique.

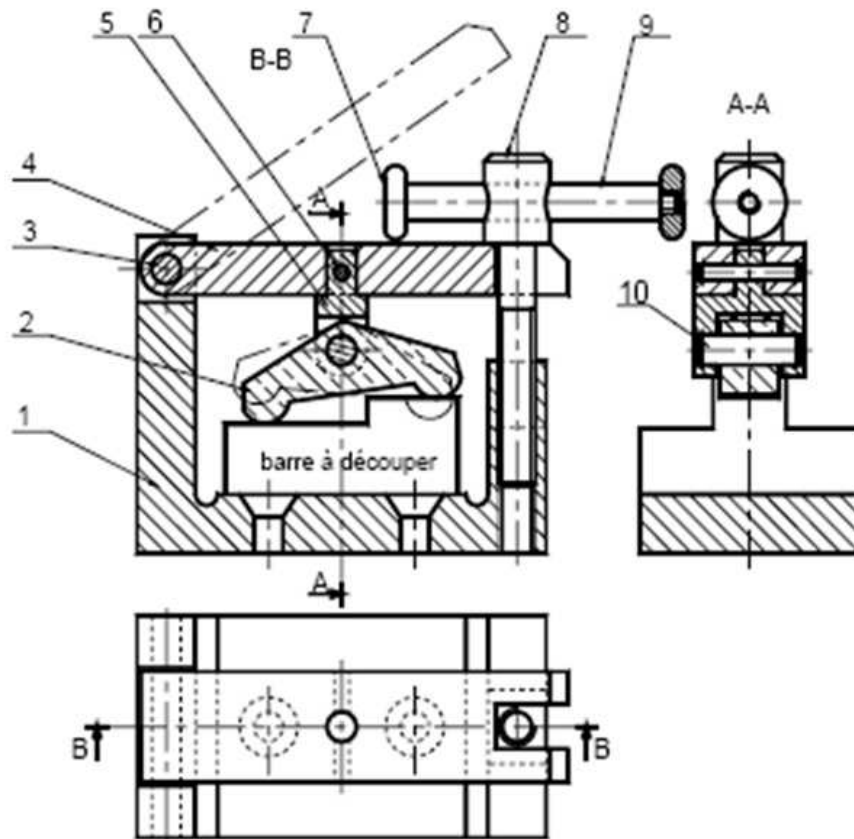


Exercices

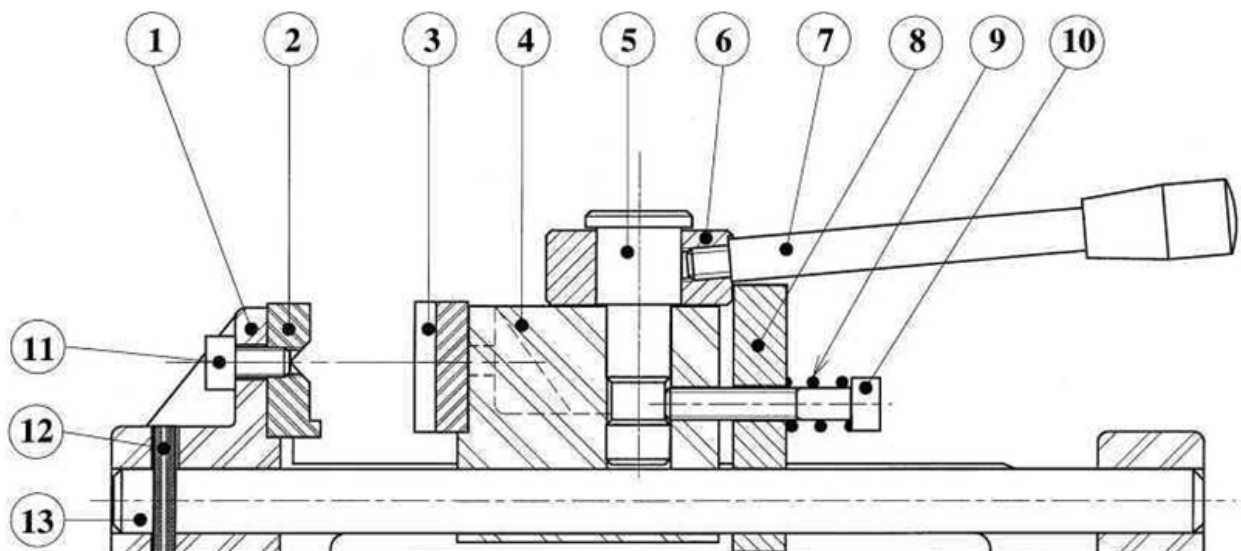
1) On se propose le dispositif ci-dessous utilisé pour blocage des barres à découper. Le travail demandé est le suivant :

- 1- Déterminer toutes les liaisons existantes en précisant le type et les torseurs associés
- 2- Déterminer les classes d'équivalence

- 3- Construire le graphe de liaisons
- 4- De quel type de chaîne s'agit-il ?



2) Le dessin d'ensemble ci-dessous représente un étau à serrage rapide, soit le travail demandé :



- 1) Construire le graphe du mécanisme
- 2) De quel type de chaîne s'agit-il ?
- 3) Construire le schéma cinématique du mécanisme
- 4) Calculer le nombre cyclomatique

Chapitre 3 Mobilité et hyperstatisme d'un mécanisme

3.1. Définitions

3.1.1. Mobilité d'un mécanisme

Soit un mécanisme composé de N pièces et L liaisons, on appelle mobilité notée m le nombre de mouvements indépendants possibles.

Exemples :

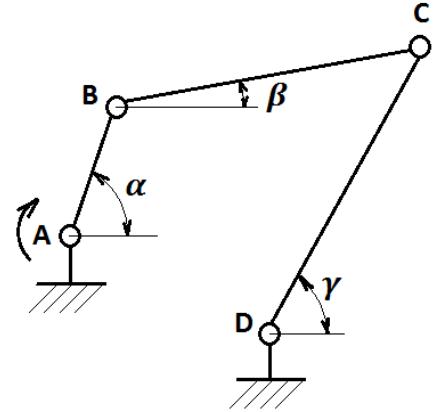
1) Soit le mécanisme à 4 barres suivant :

La barre AB est l'élément menant paramétré par α les autres barres par β et γ .

Les variations de β et γ sont contrôlées par α c.à.d.

$\beta = f(\alpha)$ et $\gamma = f(\alpha)$

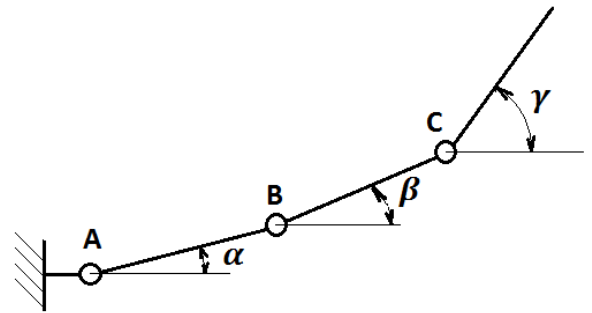
Donc les mouvements des barres BC et CD dépendent chacun du mouvement de la barre AB. Le seul mouvement



indépendant est ce lui de la barre AB. Donc $m=1$

2) Soit le bras d'un robot suivant :

Dans ce mécanisme les 3 éléments sont indépendants l'un de l'autre, le deuxième peut effectuer un mouvement indépendamment du premier et du troisième, on a 3 mouvements indépendants alors $m=3$



3.1.2. Degré d'hyperstatisme

L'équilibre statique au niveau d'une liaison soumise à des forces extérieures peut être exprimé par un torseur statique nul :

$$\tau_A = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{cases} \text{ ou } \tau_A = \begin{pmatrix} R_x & M_{Ax} \\ R_y & M_{Ay} \\ R_z & M_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

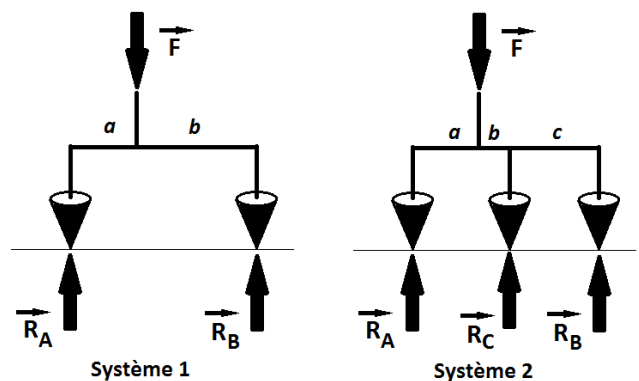
Le nombre d'équations = Nombre d'inconnues c'est le cas isostatique

Si le nombre d'inconnues est supérieur aux nombre d'équation c'est le cas hyperstatique. On introduit le degré d'hyperstatisme noté h.

Exemple : La figure ci-contre montre 2 systèmes différents :

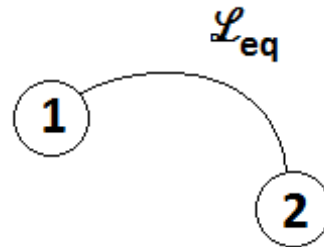
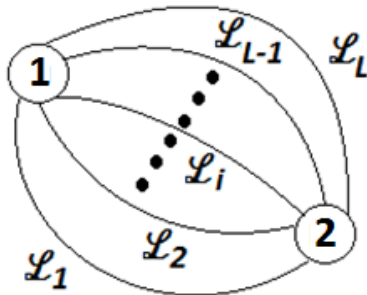
- Le premier est isostatique car les réactions peuvent être déterminées avec les équations de la statique $h=0$
- Le deuxième est hyperstatique car les équations de la statique ne suffisent pas pour déterminer la réaction \vec{R}_C

Une seule inconnue $h=1$

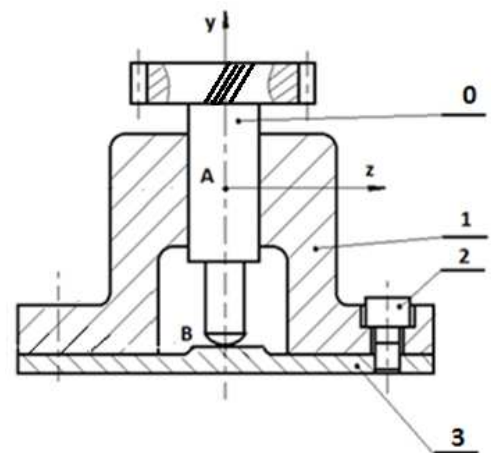
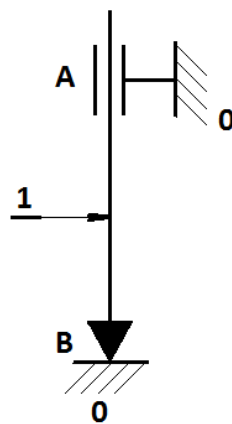
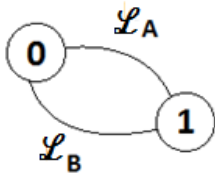


3.2. Analyse des liaisons en parallèle

Cette architecture est très utilisée dans les constructions mécaniques. Considérons un système mécanique composé de deux pièces en L liaisons parallèles entre elles. L'analyse des liaisons en parallèle se fait de deux visions : cinématique et statique.



Exemple :



3.2.1. Analyse cinématique

Cette analyse a pour but de déterminer la nature de liaison équivalente et de calculer la mobilité du système mécanique considéré, pour cela on associe à chaque liaison \mathcal{L}_i un torseur cinématique ϑ_i

($i=1,L$) tel que $\vartheta_i = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_i \\ \vec{V}_i \end{Bmatrix}$ et on associe également à la liaison équivalente le torseur :

$$\vartheta_{eq} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{eq} \\ \vec{V}_{eq} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V} \end{Bmatrix}$$

Pour qu'un seul mouvement soit possible entre les deux pièces 1 et 2 il faut que toutes les liaisons le permettent d'où :

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \dots = \vartheta_L = \vartheta_{eq}$$

C'est la propriété cinématique de l'architecture parallèle. On obtient $6L$ équations :

$$\begin{cases} \vartheta_1 = \vartheta_{eq} \\ \vartheta_2 = \vartheta_{eq} \\ \vdots \\ \vartheta_L = \vartheta_{eq} \end{cases}$$

et en utilisant les composantes :

$$\vartheta_{eq} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix} \text{ et } \vartheta_i = \begin{Bmatrix} \omega_{ix} & V_{ix} \\ \omega_{iy} & V_{iy} \\ \omega_{iz} & V_{iz} \end{Bmatrix} \quad (i=1,L)$$

On obtient le système à 6L équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \omega_{1x} \\ \omega_y = \omega_{1y} \\ \omega_z = \omega_{1z} \\ V_x = V_{1x} \\ V_y = V_{1y} \\ V_z = V_{1z} \\ \omega_x = \omega_{2x} \\ \omega_y = \omega_{2y} \\ \omega_z = \omega_{2z} \\ V_x = V_{2x} \\ V_y = V_{2y} \\ V_z = V_{2z} \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_x = \omega_{Lx} \\ \omega_y = \omega_{Ly} \\ \omega_z = \omega_{Lz} \\ V_x = V_{Lx} \\ V_y = V_{Ly} \\ V_z = V_{Lz} \end{array} \right. \quad (2); \quad \text{Le vecteur des inconnues est } X = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{array} \right.$$

Pour déterminer la mobilité m on adopte l'une des méthodes conjuguées :

- a) m = Nombre des composants de X non nuls avec $m \leq 6$
- b) On sélectionne les équations à terme droit nul du système (2), on obtient le système suivant :

$$A.X = 0$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

Si le nombre des équations à terme droit nul est p alors la matrice A est d'ordre 6*p . Soit r_c le rang de la matrice A, alors la mobilité $m=6 - r_c$ avec $r_c \leq 6$

Remarques :

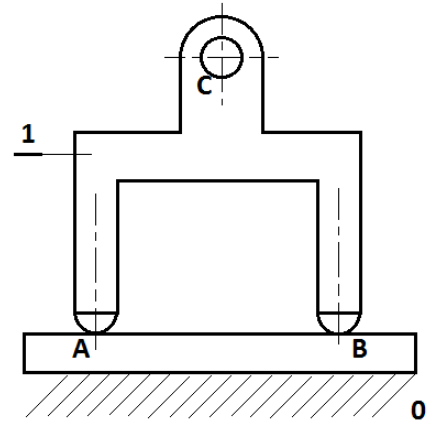
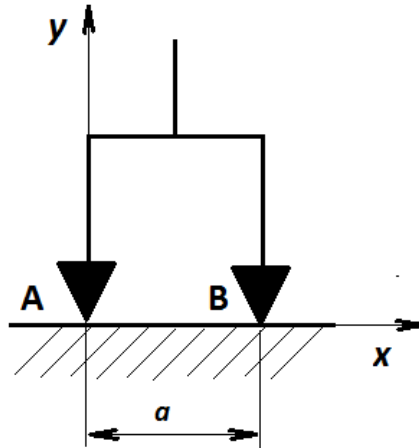
$$1) \text{ Si } r_c = 6 \Rightarrow m = 0 \text{ et } X = 0 \text{ ou } \begin{cases} \omega_x = 0 \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = 0 \\ V_x = 0 \\ V_y = 0 \\ V_z = 0 \end{cases} \text{ aucun mouvement}$$

2) Si $r_c \neq 6 \Rightarrow m \geq 1$ au moins il y a au moins un mouvement

La nature de la liaison équivalente dépend de son torseur $\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}$ lequel sera comparé à l'un des torseurs cinématiques des liaisons usuelles.

Exemple : Palonnier

- 1) Déterminer m
- 2) Déterminer la liaison équivalente.



Solution :

- 1) Les deux liaisons en A et B sont ponctuelles, leurs torseurs cinématiques s'écrivent :

$$\vartheta_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_A \\ \vec{V}_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{Ax} & V_{Ax} \\ \omega_{Ay} & 0 \\ \omega_{Az} & V_{Az} \end{Bmatrix} \text{ et } \vartheta_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_B \\ \vec{V}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{Bx} & V_{Bx} \\ \omega_{By} & 0 \\ \omega_{Bz} & V_{Bz} \end{Bmatrix}$$

Ces deux liaisons sont parallèles alors :

$$\vartheta_A = \vartheta_B = \vartheta_{eq} \quad (1)$$

Pour pouvoir comparer les 2 torseurs on écrit ϑ_B au point A :

$$\vartheta_B^A = \vartheta_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}_B = \begin{Bmatrix} \omega_{Bx} & V_{Bx} \\ \omega_{By} & 0 \\ \omega_{Bz} & V_{Bz} \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ \omega_{Bx} & \omega_{By} & \omega_{Bz} \end{vmatrix}$$

$$\vartheta_B^A = \begin{Bmatrix} \omega_{Bx} & V_{Bx} \\ \omega_{By} & 0 \\ \omega_{Bz} & V_{Bz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\omega_{Bz} \\ a\omega_{By} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{Bx} & V_{Bx} \\ \omega_{By} & -a\omega_{Bz} \\ \omega_{Bz} & (V_{Bz} + a\omega_{By}) \end{Bmatrix}$$

$$(1) \text{ permet d'écrire : } \begin{Bmatrix} \omega_{Ax} & V_{Ax} \\ \omega_{Ay} & 0 \\ \omega_{Az} & V_{Az} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{Bx} & V_{Bx} \\ \omega_{By} & -a\omega_{Bz} \\ \omega_{Bz} & (V_{Bz} + a\omega_{By}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}$$

Avec la remarque que $A \in (1)$ et $B \in (1)$ donne $\vec{\Omega}_A = \vec{\Omega}_B$

On obtient le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \omega_{Ax} \\ \omega_y = \omega_{Ay} \\ \omega_z = \omega_{Az} \\ V_x = V_{Ax} \\ V_y = 0 \\ V_z = V_{Az} \\ \omega_x = \omega_{Bx} \\ \omega_y = \omega_{By} \\ \omega_z = \omega_{Bz} \\ V_x = V_{Bx} \\ V_y = -a\omega_{Bz} \\ V_z = V_{Bz} + a\omega_{By} \end{array} \right. \quad V_y = -a\omega_{Bz} = 0 \Rightarrow \omega_{Bz} = 0 ; \text{ le système devient } \left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \omega_{Ax} \\ \omega_y = \omega_{Ay} \\ \omega_z = \omega_{Az} \\ V_x = V_{Ax} \\ V_y = 0 \\ V_z = V_{Az} \\ \omega_x = \omega_{Bx} \\ \omega_y = \omega_{By} \\ \omega_z = 0 \\ V_x = V_{Bx} \\ V_y = -a\omega_{Bz} \\ V_z = V_{Bz} + a\omega_{By} \end{array} \right.$$

Le torseur ϑ_{eq} s'écrira : $\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}$ donc m= 4

Et si on utilise la 2^e méthode le système $A.X=0$ s'écrira :

$$\begin{cases} V_y = 0 \\ \omega_z = 0 \end{cases}$$

Qui s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

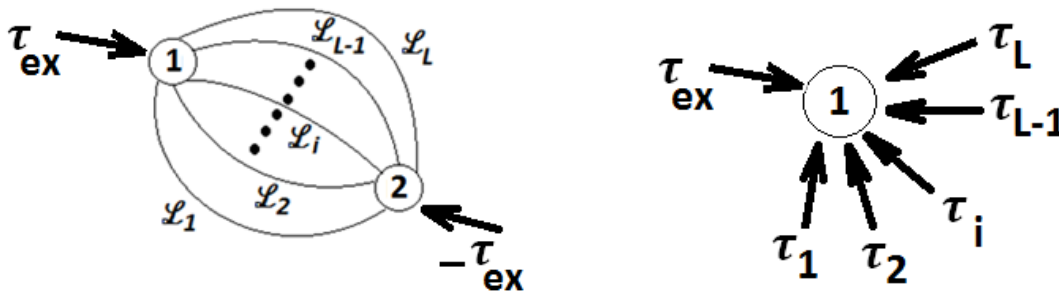
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ a 2 lignes indépendantes donc } r_c = \text{rang}(A) = 2$$

Alors la mobilité $m = 6 - r_c = 6 - 2 = 4$

2) $\vartheta_{eq} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}$ est le torseur d'une liaison linéaire qui manque d'une translation suivant l'axe Ay et d'une rotation autour de l'axe Az

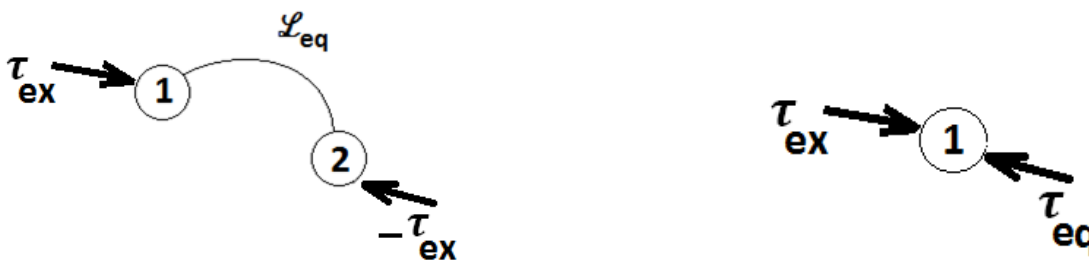
3.2.2. Analyse statique

Le but de l'analyse statique est de trouver la nature de la liaison équivalente et le degré d'hyperstatisme h, pour cela considérons les configurations suivantes et isolons l'une des deux pièces dans chaque cas :



Le principe de la statique donne :

$$\sum_{i=1}^L \tau_i + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (1)$$



$$\tau_{eq} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (2)$$

Des équations (1) et (2) on tire :

$$\tau_{eq} = \sum_{i=1}^L \tau_i$$

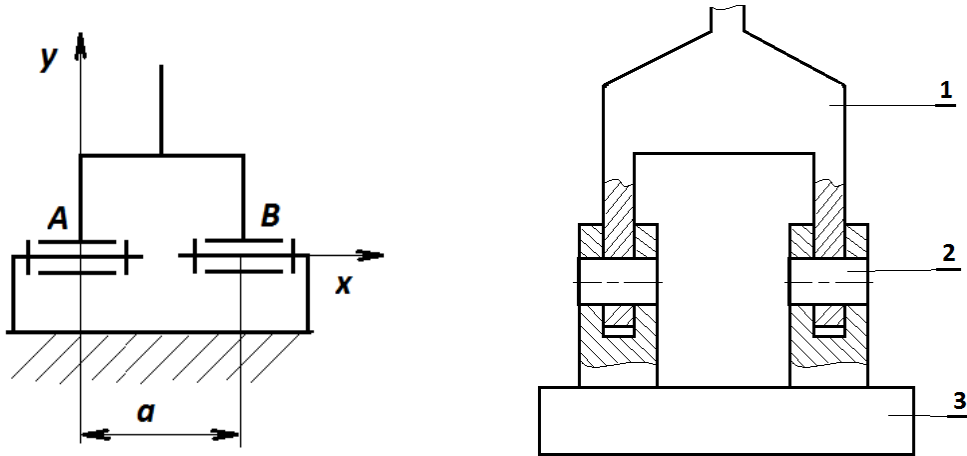
On obtient un système d'équations $A.X=\tau_{eq}$; X : vecteur des inconnues qui sont les réactions aux liaisons

Le degré d'hyperstatisme $h = r_s - n_s$

r_s : Rang de la matrice A

n_s : Nombre d'équations

Exemple : Déterminer le degré d'hyperstatisme et le type de la liaison équivalente.



Les deux liaisons en A et B sont pivots et elles sont en parallèle.

Les torseurs statiques des deux liaisons :

$$\tau_A = \begin{pmatrix} R_{Ax} & 0 \\ R_{Ay} & M_{Ay} \\ R_{Az} & M_{Az} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_B = \begin{pmatrix} R_{Bx} & 0 \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & M_{Bz} \end{pmatrix} \quad \text{le torseur équivalent :} \quad \tau_{eq} = \begin{pmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$$

L'écriture des torseurs se fait au point A :

$$\tau_B^A = \tau_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B = \begin{pmatrix} R_{Bx} & 0 \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & M_{Bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{Bx} & 0 \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & M_{Bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -aR_{Bz} \\ aR_{By} \end{pmatrix}$$

$$\tau_B^A = \begin{pmatrix} R_{Bx} & 0 \\ R_{By} & M_{By} - aR_{Bz} \\ R_{Bz} & M_{Bz} + aR_{By} \end{pmatrix}$$

L'analyse statique de l'architecture parallèle permet d'écrire :

$$\tau_{eq} = \sum_{i=1}^L \tau_i \Rightarrow \tau_{eq} = \tau_A + \tau_B^A$$

$$\begin{pmatrix} R_{Ax} & 0 \\ R_{Ay} & M_{Ay} \\ R_{Az} & M_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Bx} & 0 \\ R_{By} & M_{By} - aR_{Bz} \\ R_{Bz} & M_{Bz} + aR_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$$

Puisque $\tau_{eq} = -\tau_{ex}$ alors τ_{eq} est connu et les inconnues sont les réactions aux liaisons :

On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} = R_x \\ R_{Ay} + R_{By} = R_y \\ R_{Az} + R_{Bz} = R_z \\ M_x = 0 \\ M_{Ay} + M_{By} - aR_{Bz} = M_y \\ M_{Az} + M_{Bz} + aR_{By} = M_z \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Bx} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \\ R_{Az} \\ R_{Bz} \\ M_{Ay} \\ M_{By} \\ M_{Az} \\ M_{Bz} \end{pmatrix}$$

Sans chercher la matrice A, il est clair que le nombre d'inconnues est 10 et le nombre d'équations est 5.

Si on veut travailler avec la matrice A : Ce système peut s'écrire sous la forme : $A.X = \tau_{eq}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Bx} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \\ R_{Az} \\ R_{Bz} \\ M_{Ay} \\ M_{By} \\ M_{Az} \\ M_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} = R_x \\ R_{Ay} + R_{By} = R_y \\ R_{Az} + R_{Bz} = R_z \\ M_x = 0 \\ M_{Ay} + M_{By} - aR_{Bz} = M_y \\ M_{Az} + M_{Bz} + aR_{By} = M_z \end{cases}$$

Le nombre d'inconnues $r_s = \text{Rang}(A) = 10$ (10 colonnes indépendantes) et le nombre d'équations $n_s = 5$

Le degré d'hyperstatisme $h = 10 - 5 = 5$

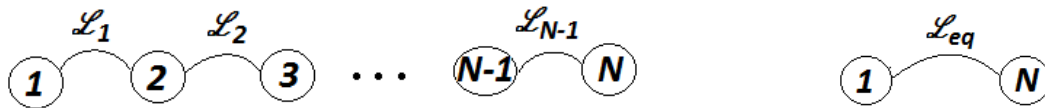
La liaison équivalente a pour torseur :
$$\begin{pmatrix} R_{Ax} + R_{Bx} & 0 \\ R_{Ay} + R_{By} & M_{Ay} + M_{By} - aR_{Bz} \\ R_{Az} + R_{Bz} & M_{Az} + M_{Bz} + aR_{By} \end{pmatrix}$$

Qui est un torseur d'un pivot : rotation autour de Ax

3.3. Analyse cinématique et statique des liaisons en série

3.3.1. Etude cinématique

Soit une chaîne ouverte constituée de N éléments liés entre eux par L=N-1 liaisons.



Soit le torseur cinématique de la i^{ème} liaison $\vartheta_i = \begin{pmatrix} \omega_{ix} & V_{ix} \\ \omega_{iy} & V_{iy} \\ \omega_{iz} & V_{iz} \end{pmatrix}$

La relativité des mouvements permet d'écrire :

$$\vartheta_{n/1} = \vartheta_{n/n-1} + \vartheta_{n-1/n-2} + \dots + \vartheta_{2/1}$$

En considérant la liaison équivalente : $\vartheta_{n/1} = \vartheta_{eq}$

Donc :

$$\vartheta_{eq} = \vartheta_{n/n-1} + \vartheta_{n-1/n-2} + \dots + \vartheta_{2/1}$$

Pour trouver la mobilité m : m = Nombre de composants non nuls de ϑ_{eq}

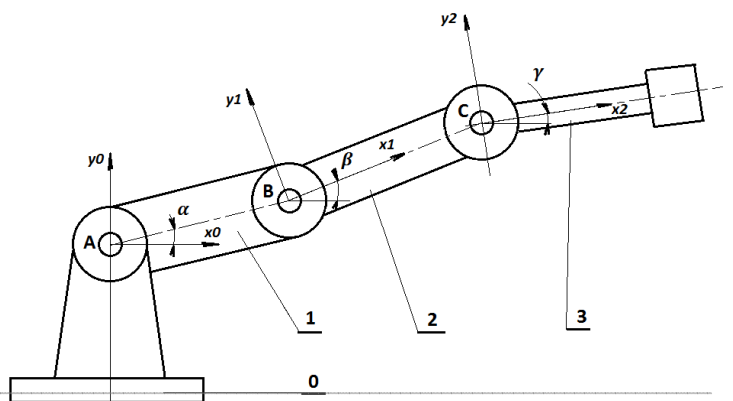
Exemple : Bras d'un robot

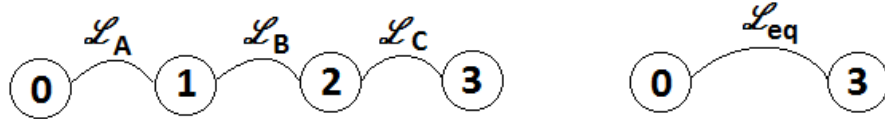
Les longueurs des bras 1, 2 sont

respectivement a et b

On demande de déterminer la mobilité m et la liaison équivalente.

Solution :





Les liaisons en A, B et C sont des pivots et leurs torseurs cinématiques associés s'écrivent :

$$\vartheta_{eq} = \vartheta_{3/2} + \vartheta_{2/1} + \vartheta_{1/0} \quad (1)$$

$$\vartheta_{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix}; \vartheta_{2/1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vartheta_{1/0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrivons ces torseurs au point A :

$$\vartheta_{3/2}^A = \vartheta_{3/2} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{\Omega}_{3/2} = \vartheta_{3/2} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \wedge \vec{\Omega}_{3/2} = \vartheta_{3/2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos \alpha + b \cos \beta \\ a \sin \alpha + b \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{Cz} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (a \sin \alpha + b \sin \beta) \omega_{Cz} \\ -(a \cos \alpha + b \cos \beta) \omega_{Cz} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (a \sin \alpha + b \sin \beta) \omega_{Cz} \\ 0 & -(a \cos \alpha + b \cos \beta) \omega_{Cz} \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_{2/1}^A = \vartheta_{2/1} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \omega_{Bz} \sin \alpha \\ -a \omega_{Bz} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a \omega_{Bz} \sin \alpha \\ 0 & -a \omega_{Bz} \cos \alpha \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix}$$

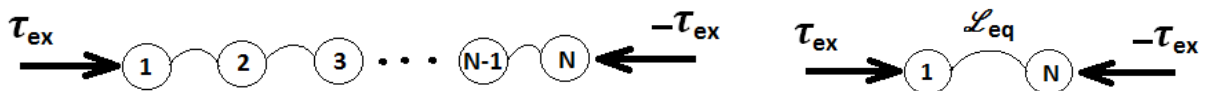
En appliquant la relation (1) :

$$\vartheta_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & (a \sin \alpha + b \sin \beta) \omega_{Cz} \\ 0 & -(a \cos \alpha + b \cos \beta) \omega_{Cz} \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \omega_{Bz} \sin \alpha \\ 0 & -a \omega_{Bz} \cos \alpha \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{pmatrix}$$

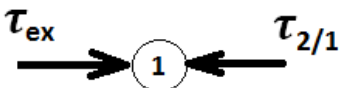
$$\vartheta_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & (a \sin \alpha + b \sin \beta) \omega_{Cz} + a \omega_{Bz} \sin \alpha \\ 0 & -(a \cos \alpha + b \cos \beta) \omega_{Cz} - a \omega_{Bz} \cos \alpha \\ (\omega_{Az} + \omega_{Bz} + \omega_{Cz}) & 0 \end{pmatrix}$$

De ce torseur on tire $m=3$ et la liaison équivalente a une rotation autour de Az et 2 translations suivant Ax et Ay

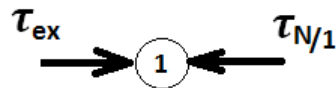
3.3.2. Etude statique



Si on isole la pièce 1 dans les deux cas (schémas en haut) :



$$\tau_{2/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (1)$$



$$\tau_{N/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (2)$$

Avec $\tau_{N/1} = \tau_{eq}$, alors on aura : $\tau_{eq} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\}$

$$\tau_{1/2} = \tau_{ex}$$

Si on isole la pièce 2 : $\tau_{1/2} + \tau_{3/2} = \{\vec{0}\}$ (3)

De (1) l'équation (3) s'écrira : $\tau_{2/3} = \tau_{ex}$ ($\tau_{2/3} = -\tau_{3/2}$)

Faisons de même jusqu'à la pièce N

$$\tau_{N-1/N} = \tau_{ex}$$

En écrivant la relation statique de l'architecture en série :

$$\tau_{1/2} = \tau_{2/3} = \dots = \tau_{N-1/N} = \tau_{ex} = -\tau_{eq}$$

Ou :

$$\tau_{2/1} = \tau_{3/2} = \dots = \tau_{N/N-1} = \tau_{eq}$$

De cette relation il découle : Nombre d'équations = Nombre d'inconnues c.à.d. $h = 0$ alors le système mécanique est isostatique.

Exemple : Reprenons le mécanisme précédent et étudions le statiquement :

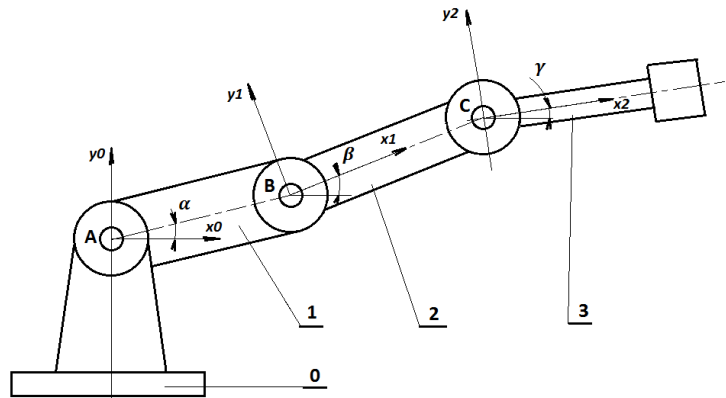
Les liaisons en A, B et C ont pour

torseurs statiques :

$$\tau_{1/0} = \begin{pmatrix} R_{Ax} & M_{Ax} \\ R_{Ay} & M_{Ay} \\ R_{Az} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{2/1} = \begin{pmatrix} R_{Bx} & M_{Bx} \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{3/2} = \begin{pmatrix} R_{Cx} & M_{Cx} \\ R_{Cy} & M_{Cy} \\ R_{Cz} & 0 \end{pmatrix}$$



Le torseur équivalent : $\tau_{eq} = \begin{pmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$

Ecrivons les torseurs $\tau_{2/1}$ et $\tau_{3/2}$ au point A :

$$\tau_{2/1}^A = \tau_{2/1} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B = \begin{pmatrix} R_{Bx} & M_{Bx} \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{Bx} & M_{Bx} \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a R_{Bz} \sin \alpha \\ -a R_{Bz} \cos \alpha \\ a R_{By} \cos \alpha - a R_{Bx} \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{Bx} & M_{Bx} + a R_{Bz} \sin \alpha \\ R_{By} & M_{By} - a R_{Bz} \cos \alpha \\ R_{Bz} & a R_{By} \cos \alpha - a R_{Bx} \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\tau_{3/2}^A = \tau_{3/2} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}_C = \tau_{3/2} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \wedge \vec{R}_C$$

$$= \begin{pmatrix} R_{Cx} & M_{Cx} \\ R_{Cy} & M_{Cy} \\ R_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos \alpha + b \cos \beta \\ a \sin \alpha + b \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Cx} \\ R_{Cy} \\ R_{Cz} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{Cx} & M_{Cx} \\ R_{Cy} & M_{Cy} \\ R_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Cz} (a \sin \alpha + b \sin \beta) \\ -R_{Cz} (a \cos \alpha + b \cos \beta) \\ R_{Cy} (a \cos \alpha + b \cos \beta) - R_{Cx} (a \sin \alpha + b \sin \beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} R_{Cx} & M_{Cx} + R_{Cz}(asina + bsin\beta) \\ R_{Cy} & M_{Cy} - R_{Cz}(acos\alpha + bcos\beta) \\ R_{Cz} & R_{Cy}(acos\alpha + bcos\beta) - R_{Cx}(asina + bsin\beta) \end{cases}$$

$$\tau_{1/0} = \tau_{2/1} = \tau_{3/2} = \tau_{eq}$$

$$\begin{pmatrix} R_{Ax} & M_{Ax} \\ R_{Ay} & M_{Ay} \\ R_{Az} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{Bx} & M_{Bx} + aR_{Bz}sina \\ R_{By} & M_{By} - aR_{Bz}cos\alpha \\ R_{Bz} & aR_{By}cos\alpha - aR_{Bx}sina \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} R_{Cx} & M_{Cx} + R_{Cz}(asina + bsin\beta) \\ R_{Cy} & M_{Cy} - R_{Cz}(acos\alpha + bcos\beta) \\ R_{Cz} & R_{Cy}(acos\alpha + bcos\beta) - R_{Cx}(asina + bsin\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$$

On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} R_{Ax} = R_x \\ R_{Bx} = R_x \\ R_{Cx} = R_x \\ R_{Ay} = R_y \\ R_{By} = R_y \\ R_{Cy} = R_y \\ R_{Az} = R_z \\ R_{Bz} = R_z \\ R_{Cz} = R_z \end{cases} \begin{cases} M_{Ax} = M_x \\ M_{Bx} + aR_{Bz}sina = M_x \\ M_{Cx} + R_{Cz}(asina + bsin\beta) = M_x \\ M_{Ay} = M_y \\ M_{By} - aR_{Bz}cos\alpha = M_y \\ M_{Cy} - R_{Cz}(acos\alpha + bcos\beta) = M_y \\ 0 = M_z \\ aR_{By}cos\alpha - aR_{Bx}sina = M_z \\ R_{Cy}(acos\alpha + bcos\beta) - R_{Cx}(asina + bsin\beta) = M_z \end{cases} X = \begin{cases} R_{Ax} \\ R_{Bx} \\ R_{Cx} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \\ R_{Cy} \\ R_{Az} \\ R_{Bz} \\ R_{Cz} \\ M_{Ax} \\ M_{Bx} \\ M_{Cx} \\ M_{Ay} \\ M_{By} \\ M_{Cy} \end{cases}$$

Si on omet les 3 dernières équations on aura 15 inconnues (les réactions aux niveaux des liaisons A, B et C) et 15 équations donc $h = 0$ et le système est isostatique

$$M_z = 0 \text{ entraîne } aR_{By}cos\alpha - aR_{Bx}sina = 0 \text{ et } R_{By} = R_{Bx} = 0$$

$$R_{Cy}(acos\alpha + bcos\beta) - R_{Cx}(asina + bsin\beta) = 0 \text{ et } R_{Cy} = R_{Cx} = 0$$

Et tout cela donne :

$$\begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} = +R_{Bx} = R_x = 0 \\ R_{Ay} + R_{By} = R_{Cy} = R_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

Donc le torseur de la liaison équivalente s'écrit :

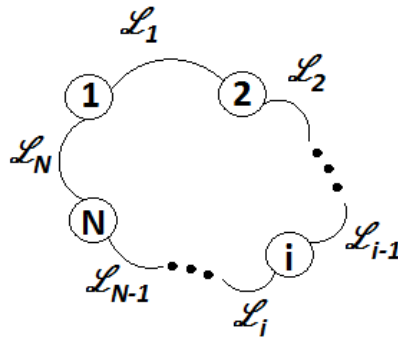
$$\begin{pmatrix} 0 & M_x \\ 0 & M_y \\ R_z & 0 \end{pmatrix} \text{ qui informe qu'il y a 2 translations suivant } Ax \text{ et } Ay \text{ et une rotation autour de } Az,$$

même résultat obtenu avec l'analyse cinématique.

3.3. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.3.1. Analyse cinématique

Considérons une chaîne fermée de N pièces et L liaisons auxquelles on associe les torseurs cinématiques : $\vartheta_{2/1}$; $\vartheta_{3/2}$; $\vartheta_{N/N-1}$; $\vartheta_{1/N}$



On a : $\vartheta_{N/N} = 0$

Et la relativité des mouvements permet d'écrire :

$$\vartheta_{N/N} = \vartheta_{N/N-1} + \vartheta_{N-1/N-2} + \dots + \vartheta_{1/N} = \{0\}$$

$$\vartheta_{N/N-1} + \vartheta_{N-1/N-2} + \dots + \vartheta_{1/N} = \{0\}$$

Cette relation permettra d'avoir un système d'équations entre les quelles on sélectionne celles de la forme $A \cdot X = \{0\}$

X : Vecteur d'inconnues $n_c \cdot 1$

A : Matrice $n_c \cdot p$

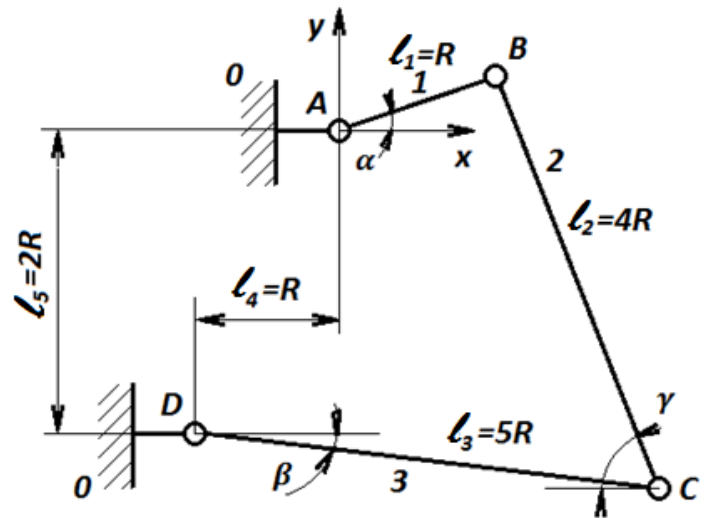
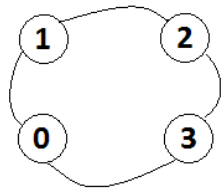
La mobilité $m = n_c - r_c$ avec $r_c = \text{rang}(A)$

Exemple : Mécanisme à 4 barres

Déterminer la mobilité de ce mécanisme.

Solution :

Le graphe de liaisons



$$\vartheta_{0/0} = \vartheta_{0/1} + \vartheta_{1/2} + \vartheta_{2/3} + \vartheta_{3/0} = 0$$

$$\vartheta_{0/1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{pmatrix} ; \vartheta_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix} ; \vartheta_{2/3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\vartheta_{3/0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Dz} & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrivons cette relation au point A :

$$\vartheta_{1/2}^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AB} \Lambda \overrightarrow{\Omega_B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \cos \alpha \\ R \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{Bz} \cdot R \sin \alpha \\ 0 & -\omega_{Bz} R \cos \alpha \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_{2/3}^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AC} \Lambda \overrightarrow{\Omega_C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \cos \alpha + 4R \cos \gamma \\ R \sin \alpha - 4R \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{Cz} \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_{2/3}^A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{Cz} \cdot (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) \\ 0 & \omega_{Cz} \cdot (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_{3/0}^A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Dz} & 0 \end{Bmatrix} + \overrightarrow{AD} \Lambda \overrightarrow{\Omega_D} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Dz} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} -R \\ -2R \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{Dz} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & -2R\omega_{Dz} \\ 0 & R\omega_{Dz} \\ \omega_{Dz} & 0 \end{Bmatrix}$$

$\vartheta_{0/1} + \vartheta_{1/2} + \vartheta_{2/3} + \vartheta_{3/0} = 0$ donne :

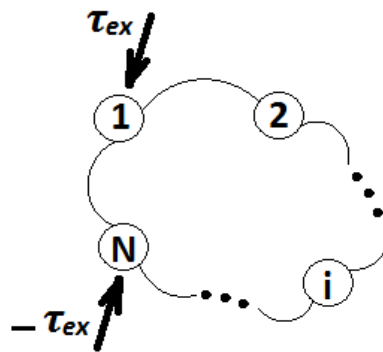
$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & \omega_{Bz} \cdot R \sin \alpha \\ 0 & -\omega_{Bz} R \cos \alpha \\ \omega_{Bz} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & \omega_{Cz} \cdot (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) \\ 0 & \omega_{Cz} \cdot (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) \\ \omega_{Cz} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & -2R\omega_{Dz} \\ 0 & R\omega_{Dz} \\ \omega_{Dz} & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \omega_{Az} + \omega_{Bz} + \omega_{Cz} + \omega_{Dz} = 0 \\ \omega_{Bz} \cdot R \sin \alpha + \omega_{Cz} \cdot (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) - 2R\omega_{Dz} = 0 \\ -\omega_{Bz} R \cos \alpha + \omega_{Cz} \cdot (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) + R\omega_{Dz} = 0 \end{cases}$$

$n_c = 4$ Nombre inconnues et $r_c = 3$ Nombre d'équations

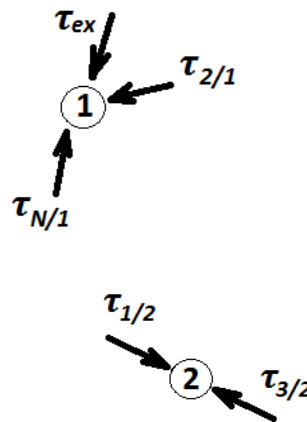
$$m = n_c - r_c = 4 - 3 = 1$$

3.3.2. Analyse statique



Isolons chaque pièce :

Pièce (1) : $\tau_{2/1} + \tau_{N/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\}$



Pièce (2) : $\tau_{1/2} + \tau_{3/2} = \{\vec{0}\}$

Pièce (i) : $\tau_{i-1/i} + \tau_{i+1/i} = \{\vec{0}\}$ (i=2,N-1)

On obtient un système d'équations :

$$A.X=B$$

X : Vecteur $n_s * 1$

A : Matrice $p * n_s$

$r_s = \text{rang}(A)$

Le degré d'hyperstatisme

$$h = n_s - r_s$$

Exemple : Reprenons le mécanisme précédent et déterminons le degré d'hyperstatisme.

La chaîne est fermée.

$$\tau_{0/1} = \begin{Bmatrix} R_{0/1x} & M_{0/1x} \\ R_{0/1y} & M_{0/1y} \\ R_{0/1z} & 0 \end{Bmatrix}; \tau_{2/1} = \begin{Bmatrix} R_{2/1x} & M_{2/1x} \\ R_{2/1y} & M_{2/1y} \\ R_{2/1z} & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{3/2} = \begin{Bmatrix} R_{3/2x} & M_{3/2x} \\ R_{3/2y} & M_{3/2y} \\ R_{3/2z} & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{ext} = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}$$

Isolons la barre (1)

$$\tau_{2/1} + \tau_{0/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\}$$

Au point A :

$$\begin{Bmatrix} R_{0/1x} & M_{0/1x} \\ R_{0/1y} & M_{0/1y} \\ R_{0/1z} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{2/1x} & M_{2/1x} \\ R_{2/1y} & M_{2/1y} \\ R_{2/1z} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} R\cos\alpha \\ R\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} R_{2/1x} \\ R_{2/1y} \\ R_{2/1z} \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{0/1x} & M_{0/1x} \\ R_{0/1y} & M_{0/1y} \\ R_{0/1z} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{2/1x} & M_{2/1x} + R\sin\alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1y} & M_{2/1y} - R\cos\alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1z} & R\cos\alpha R_{2/1y} - R\sin\alpha R_{2/1x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\} \quad (1)$$

Isolons la barre (2) : $\tau_{1/2} + \tau_{3/2} = \{\vec{0}\}$

Au point A :

$$\begin{aligned} & - \begin{Bmatrix} R_{2/1x} & M_{2/1x} + R\sin\alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1y} & M_{2/1y} - R\cos\alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1z} & R\cos\alpha R_{2/1y} - R\sin\alpha R_{2/1x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{3/2x} & M_{3/2x} \\ R_{3/2y} & M_{3/2y} \\ R_{3/2z} & 0 \end{Bmatrix} + \\ & \quad \begin{pmatrix} R\cos\alpha + 4R\cos\gamma \\ R\sin\alpha - 4R\sin\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} R_{3/2x} \\ R_{3/2y} \\ R_{3/2z} \end{pmatrix} = \{\vec{0}\} \\ & - \begin{Bmatrix} R_{2/1x} & M_{2/1x} + R\sin\alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1y} & M_{2/1y} - R\cos\alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1z} & R\cos\alpha R_{2/1y} - R\sin\alpha R_{2/1x} \end{Bmatrix} + \\ & \quad \begin{Bmatrix} R_{3/2x} & M_{3/2x} + (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2z} \\ R_{3/2y} & M_{3/2y} - (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2z} \\ R_{3/2z} & (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2y} - (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2x} \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\} \quad (2) \end{aligned}$$

La barre (3) : $\tau_{2/3} + \tau_{0/3} = \{\vec{0}\}$

$$\tau_{0/3} = \begin{Bmatrix} R_{0/3x} & M_{0/3x} \\ R_{0/3y} & M_{0/3y} \\ R_{0/3z} & 0 \end{Bmatrix}$$

Au point A :

$$\begin{aligned} & - \begin{Bmatrix} R_{3/2x} & M_{3/2x} + (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2z} \\ R_{3/2y} & M_{3/2y} - (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2z} \\ R_{3/2z} & (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2y} - (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{0/3x} & M_{0/3x} \\ R_{0/3y} & M_{0/3y} \\ R_{0/3z} & 0 \end{Bmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} -R \\ -2R \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} R_{0/3x} \\ R_{0/3y} \\ R_{0/3z} \end{pmatrix} = \{\vec{0}\} \end{aligned}$$

$$- \left\{ \begin{array}{cc} R_{3/2x} & M_{3/2x} + (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2z} \\ R_{3/2y} & M_{3/2y} - (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2z} \\ R_{3/2z} & (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2y} - (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2x} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{cc} R_{0/3x} & M_{0/3x} - 2RR_{0/3z} \\ R_{0/3y} & M_{0/3y} - RR_{0/3z} \\ R_{0/3z} & -RR_{0/3y} - 2RR_{0/3x} \end{array} \right\} = \{\vec{0}\} \quad (3)$$

On obtient finalement le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{0/1x} + R_{2/1x} + R_x = 0 \\ R_{0/1y} + R_{2/1y} + R_y = 0 \\ R_{0/1z} + R_{2/1z} + R_z = 0 \\ M_{0/1x} + M_{2/1x} + R\sin\alpha R_{2/1z} + M_x = 0 \\ M_{0/1y} + M_{2/1y} - R\cos\alpha R_{2/1z} + M_y = 0 \\ R\cos\alpha R_{2/1y} - R\sin\alpha R_{2/1x} + M_z = 0 \\ -R_{2/1x} + R_{3/2x} = 0 \\ -R_{2/1y} + R_{3/2y} = 0 \\ -R_{2/1z} + R_{3/2z} = 0 \\ -M_{2/1x} - R\sin\alpha R_{2/1z} + M_{3/2x} + (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2z} = 0 \\ -M_{2/1y} + R\cos\alpha R_{2/1z} + M_{3/2y} - (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2z} = 0 \\ -R\cos\alpha R_{2/1y} + R\sin\alpha R_{2/1x} + (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2y} - (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2x} = 0 \\ R_{0/3x} - R_{3/2x} = 0 \\ R_{0/3y} - R_{3/2y} = 0 \\ R_{0/3z} - R_{3/2z} = 0 \\ M_{0/3x} - 2RR_{0/3z} - M_{3/2x} - (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2z} = 0 \\ M_{0/3y} - RR_{0/3z} - M_{3/2y} + (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2z} = 0 \\ -RR_{0/3y} - 2RR_{0/3x} - (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2y} + (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2x} = 0 \end{array} \right.$$

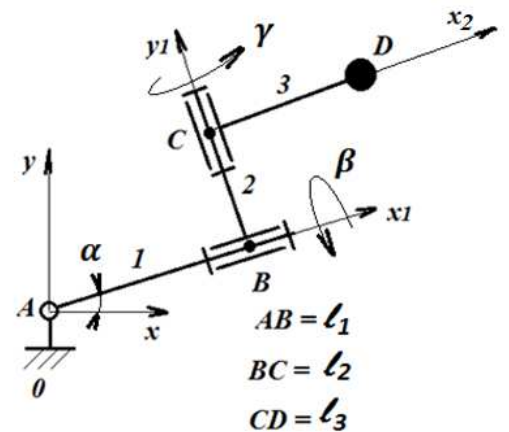
Nombre d'équations $r_s = 18$ et Nombre d'inconnues $n_s = 20$
 $h = n_s - r_s = 2$

Exercices

1) Le dessin ci-contre représente la chaîne cinématique d'un bras manipulateur.

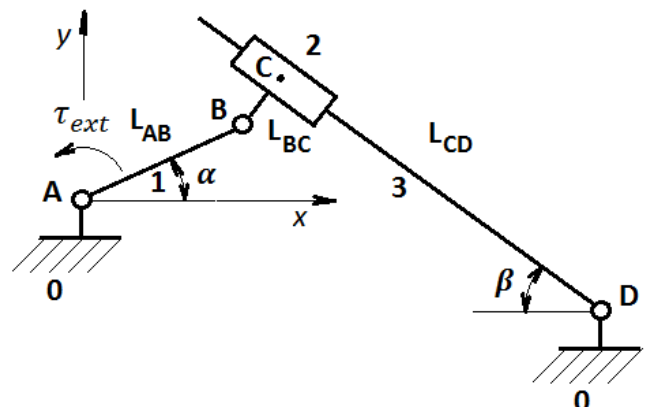
1-1) Déterminer la mobilité du mécanisme.

1-2) Déterminer la liaison équivalente.



2) Soit le mécanisme ci-contre où l'élément 1 est menant sur lequel on applique un torseur τ_{ext} . La rotation de 1 entraîne le glissement de 2 sur 3 et enfin la rotation de 3 autour de D.

2-1) Construire le graphe de liaison du mécanisme

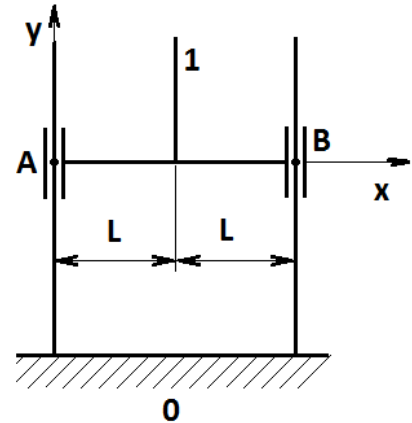


- 2-2) De quel type de chaîne s'agit-il ?
- 2-3) Déterminer le degré d'hyperstatisme du mécanisme
- 2-4) Déterminer la mobilité du système.

3) On donne une chaîne cinématique d'une presse hydraulique

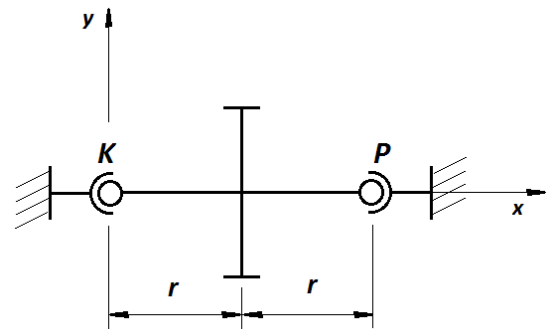
Par analyse statique déterminer :

- 3-1) Le type de liaison équivalente.
- 3-2) Déterminer le degré d'hyperstatisme.
- 3-3) Pour rendre le mécanisme isostatique on se propose de remplacer la liaison en B par une autre qu'on demande de déterminer par : Son torseur statique et son type.



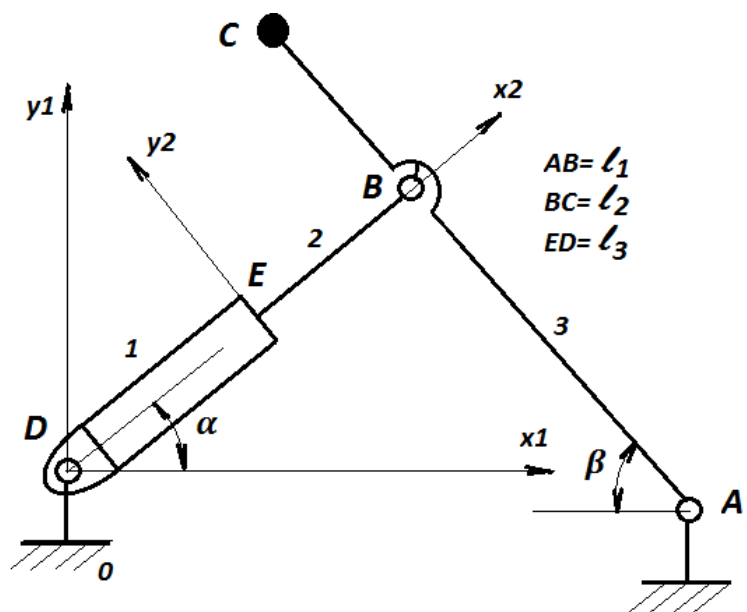
4) Le schéma cinématique ci-contre représente un sous-mécanisme.

- 4-1) Déterminer statiquement la liaison équivalente
- 4-2) Déterminer le degré d'hyperstatisme

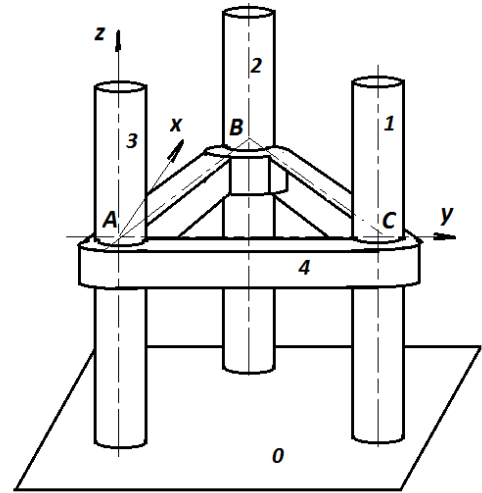
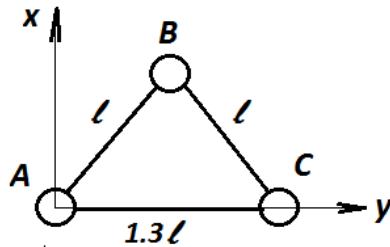


5) Le schéma cinématique ci-contre représente un système de levage, l'actionneur ici est un vérin hydraulique.

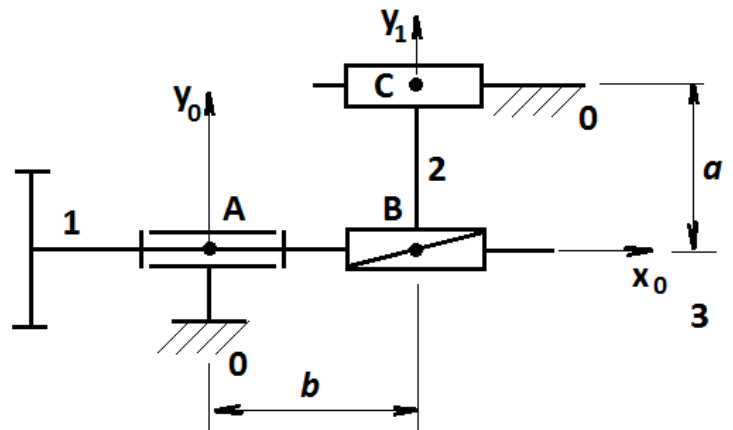
Déterminer la mobilité du mécanisme.



- 6) Le schéma ci-dessous montre une plate-forme 4 guidée en translation par 3 colonnes 1, 2 et 3
 6-1) Déterminer la mobilité du système
 6-2) Calculer le degré d'hyperstatisme



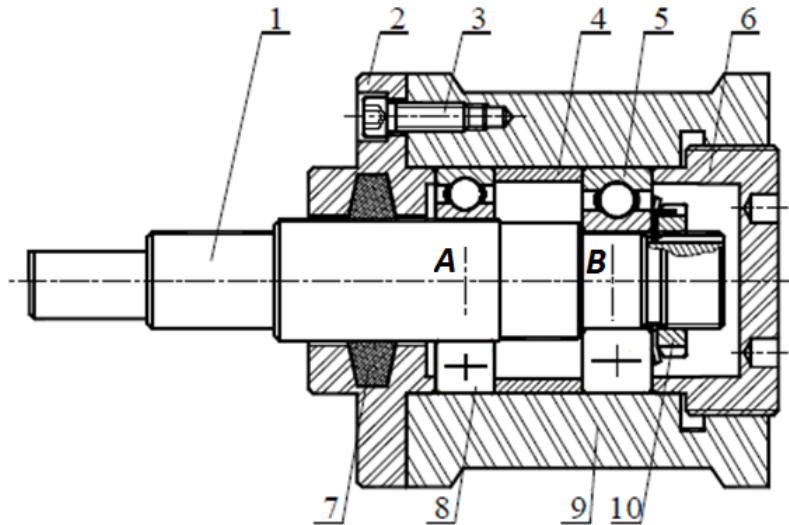
- 7) Le schéma ci-contre illustre un mécanisme de transformation de mouvement
 7-1) De quel type de chaîne s'agit-il ?
 7-2) Déterminer la mobilité
 7-3) Déterminer le degré d'hyperstatisme



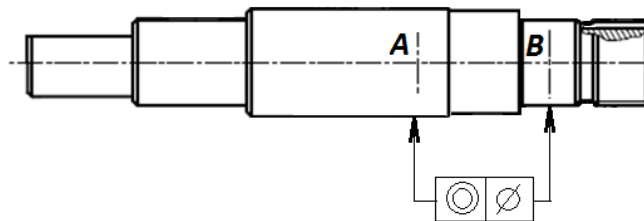
3.4. Recherche systématique des solutions isostatiques

3.4.1. Introduction

Pour comprendre cette nécessité considérons l'exemple suivant : Galet tendeur



L'ajout de la liaison \mathcal{L}_A assure la rigidité du galet 9 par rapport à l'arbre fixe 1 d'une part et d'autre part crée une hyperstaticité. Cet ajout s'accompagne avec de nouvelles contraintes de nature géométrique (concentricité, cylindricité, rugosité, ...) et de traduira par une élévation du coût.



Chaque fois que le degré d'hyperstatisme h augmente une contrainte est imposée et le coût augmente à son tour. On a le choix de ramener l'état hyperstatique à un état isostatique (diminuer le prix de revient) ou assurer la rigidité en ne touchant pas à l'hyperstatisme donné (augmenter le prix de revient).

3.4.2. Analyse d'un mécanisme et recherche des solutions isostatiques

Le but de cette analyse est de rendre le système isostatique en jouant sur se basant sur deux méthodes :

- La première est la suppression des efforts hyperstatiques tout en conservant le nombre des pièces et le nombre des liaisons.
- La deuxième est l'ajout de nouveaux degrés de liberté en ajoutant pour cela de nouvelles pièces s'il est nécessaire.

A) Suppression des efforts hyperstatiques

Considérons un mécanisme hyperstatique avec h degré d'hyperstatisme et L' nombre de liaisons à modifier il faut bien sûr avoir $L' \leq h$.

La liaison modifiée doit faire partie de la liste des liaisons standard ISO 3952. Il faut faire exception aux deux liaisons suivantes : la liaison ponctuelle et la liaison hélicoïdale

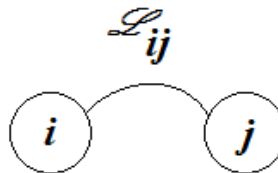
Le tableau suivant illustre les liaisons standards à modifier et les nouvelles liaisons obtenues :

Liaison initiale	Nombre d'inconnues à éliminer		Nouvelle liaison
	Ri	Mi	
Linéaire rectiligne	1		Ponctuelle
Linéaire annulaire	1		Ponctuelle
Sphérique	1		Linéaire annulaire
	2		Ponctuelle
Pivot glissant	1	2	Ponctuelle
		2	Linéaire annulaire
	1	1	Linéaire rectiligne
Pivot	2	1	Linéaire rectiligne
	1	2	Linéaire annulaire
		2	Sphérique
	2		Appui plan
		1	Sphérique à doigt
	1		Pivot glissant
	2	2	Ponctuelle
Glissière	1	2	Linéaire rectiligne
		3	Linéaire annulaire
	1	1	Appui plan
		1	Pivot glissant
Sphérique à doigt	2	1	Ponctuelle
	1	1	Linéaire annulaire
		2	Linéaire rectiligne
		1	Sphérique

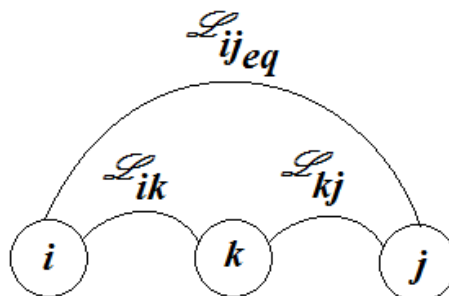
B) Ajout de nouveaux ddl

Soit un mécanisme de degré d'hyperstatisme $h=1$. Considérons la liaison \mathcal{L}_{ij} à modifier en ajoutant un degré de liberté :

Avant modification la mobilité du mécanisme = m_1

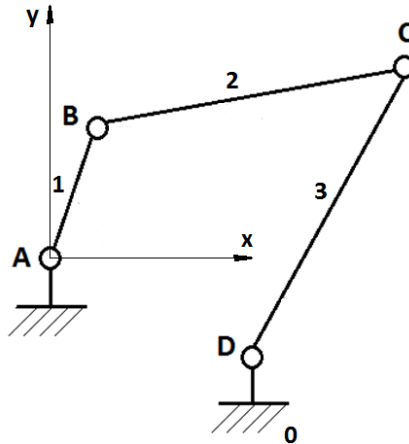


Après modification la mobilité du mécanisme = m_2

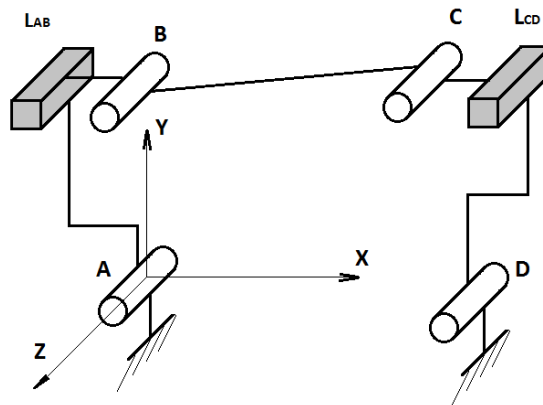


La mobilité ne doit pas changer : $m_1 = m_2$

Exemple : Soit le mécanisme à 4 barres suivant :

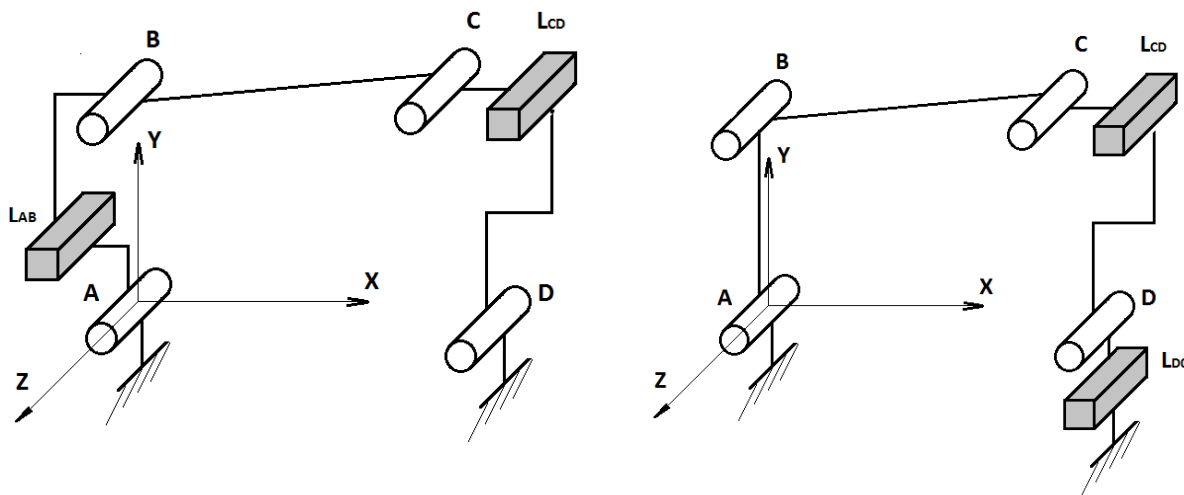


Sachant que le degré d'hyperstatisme $h=2$ (voir sous chapitre 3.3)



L'ajout des liaisons \mathcal{L}_{AB} et \mathcal{L}_{CD} qui sont des glissières (Degré de liberté T_z) entrainera la neutralisation des composantes R_{zB} et R_{zC} d'où $h=0$ et le mécanisme est isostatique. La mobilité avant et après modification est $m=1$

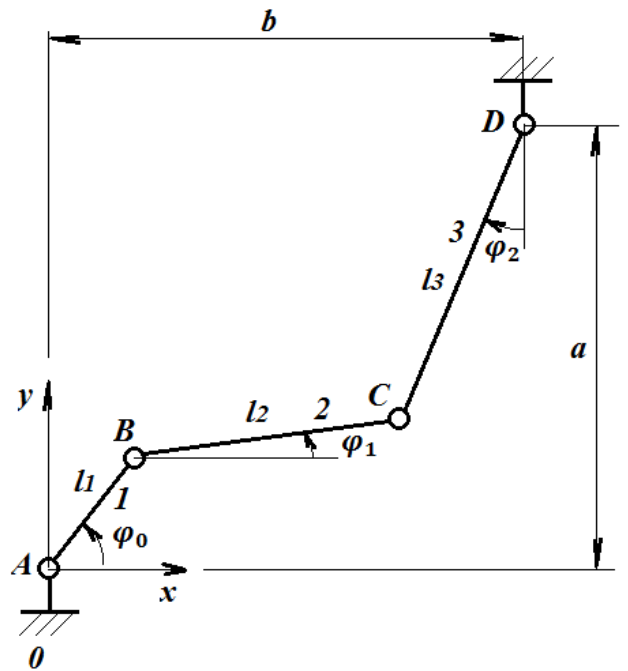
Il y a multitude de combinaisons d'ajout de DDL pour le cas de ce mécanisme, on peut proposer :



Exercices

1) On donne un mécanisme à 4 barres où la barre 1 est l'élément menant sur lequel on applique un torseur τ_{ext}

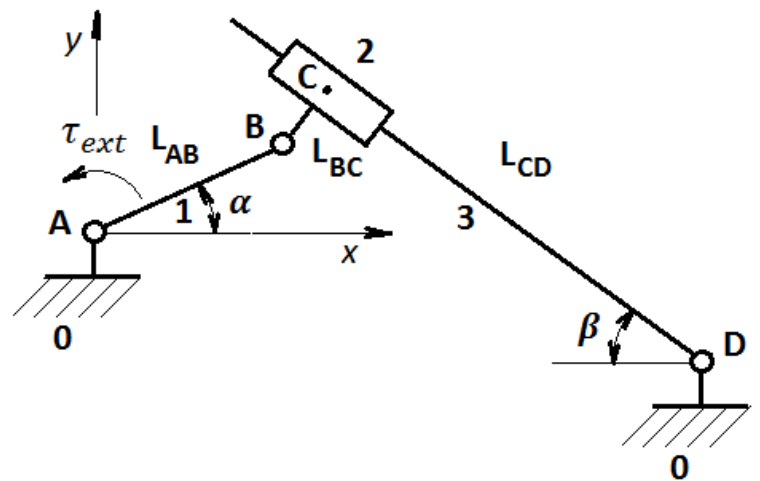
- a) Déterminer le degré d'hyperstatisme
- b) Donnez une solution isostatique au mécanisme proposé



2) On donne une chaîne cinématique d'une presse hydraulique

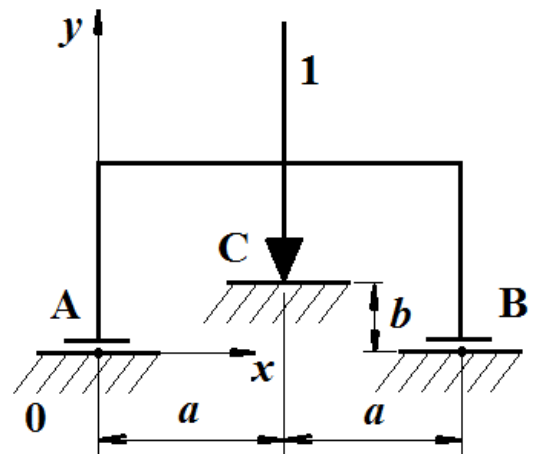
Par analyse statique déterminer :

- a) Le type de liaison équivalente
- b) Déterminer le degré d'hyperstatisme
- c) Pour rendre le mécanisme isostatique on se propose de remplacer la liaison en B par une autre qu'on demande de déterminer par : son torseur statique et son type.



3) Le schéma cinématique proposé ci contre est un système 1 s'appuyant en A, B et C sur 0.

- a) Déterminer le degré d'hyperstatisme
- b) Rendre le système isostatique



Chapitre 4. Analyse cinématique des mécanismes plans

4.1. Définition d'un mécanisme plan

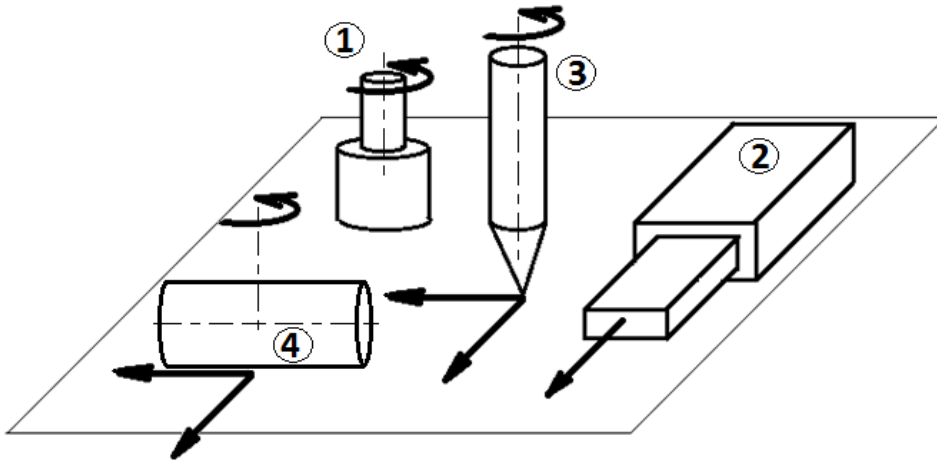
Un mécanisme est dit plan si tous les points de ce mécanisme se trouvent dans le même plan ou dans des plans parallèles à n'importe quel instant t

4.2. Identification des paramètres d'un mécanisme

4.2.1. Liaisons dans le plan

Les liaisons pouvant exister dans un plan sont :

- Pivot d'axe perpendiculaire au plan (1ddl=Rotation)
- Glissière d'axe parallèle au plan (1ddl=Translation)
- Ponctuelle d'axe perpendiculaire au plan (3ddl=2Translations+Rotation)
- Linéaire rectiligne à axe parallèle au plan (3ddl=2Translations+Rotation)



4.2.2. Paramètres d'un mécanisme

La connaissance de ces paramètres est nécessaire pour l'analyse du mécanisme, on distingue des paramètres constants et variables.

Le mécanisme ci-contre admet les

paramètres suivants :

a) Fixes :

$$l_1 = AB$$

$$l_2 = BC$$

$$l_3 = CD$$

$$l_4 = AD$$

b) Variables :

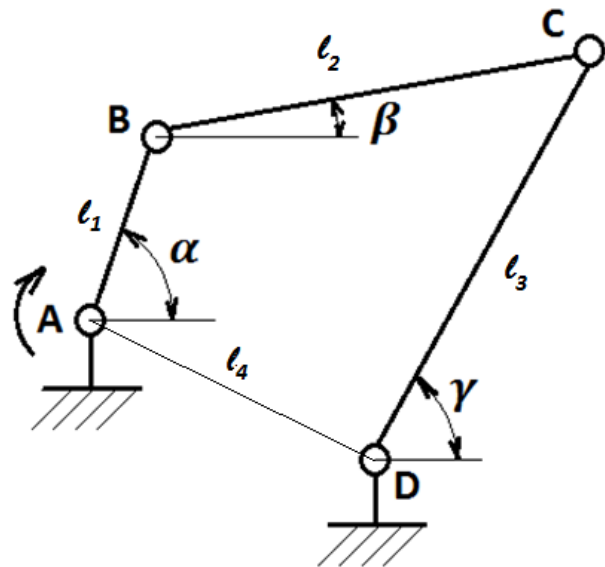
$$\alpha = \alpha(t)$$

$$\beta = \beta(t)$$

$$\gamma = \gamma(t)$$

Ces variables sont dépendantes :

$$\beta = \beta(\alpha) \text{ et } \gamma = \gamma(\alpha)$$

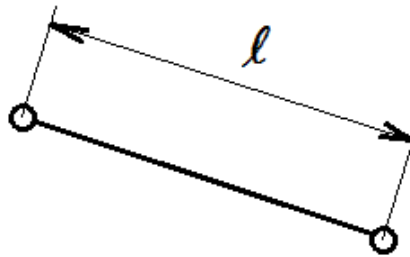


4.2.3. Caractéristiques géométriques d'un élément de mécanisme

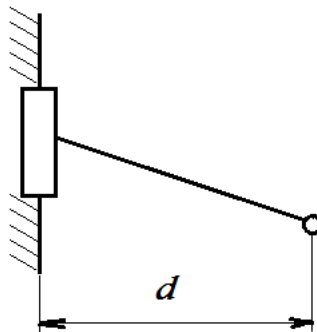
A l'exception de la chaîne ouverte ou on peut tomber sur un élément à une liaison avec un autre, la plupart des éléments des mécanismes sont au moins à deux liaisons on dit qu'ils sont binaires.

Pour les éléments binaires, on distingue 3 cas selon la nature des liaisons:

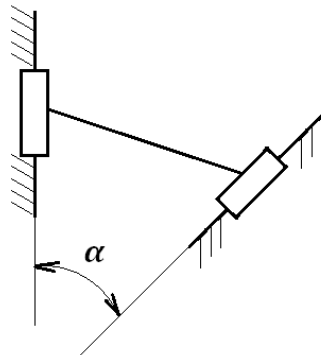
- Un élément avec deux liaisons pivots est caractérisé par la distance perpendiculaire entre les deux axes de ses liaisons



- Un élément avec une liaison pivot et une liaison glissière est caractérisé par la distance du centre de la liaison pivot à l'axe de la glissière.

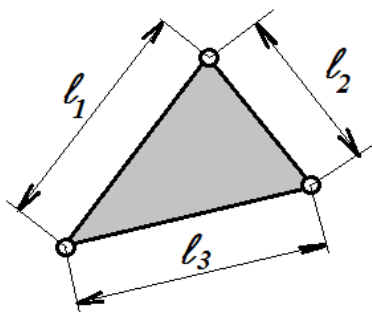


- Un élément avec deux liaisons glissières est caractérisé par l'angle entre les deux axes de ses liaisons.

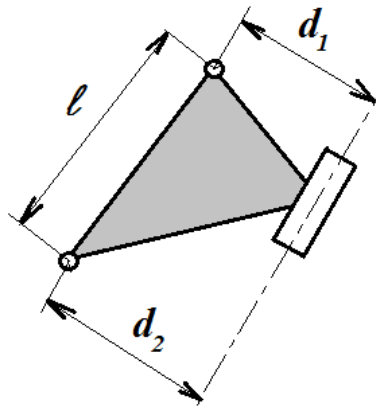


De pour les éléments ternaires (à 3 liaisons), on peut distinguer 3 cas :

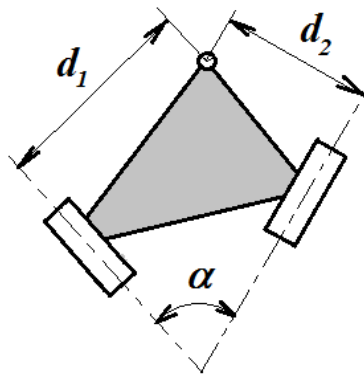
- Un élément avec trois liaisons pivots est caractérisé par trois distances perpendiculaires des entre les axes deux à deux



- Un élément avec deux liaisons pivots et une glissière est caractérisé par une distance perpendiculaire des entre les axes des pivots et deux distances entre les centres des pivot et l'axe de la glissière.

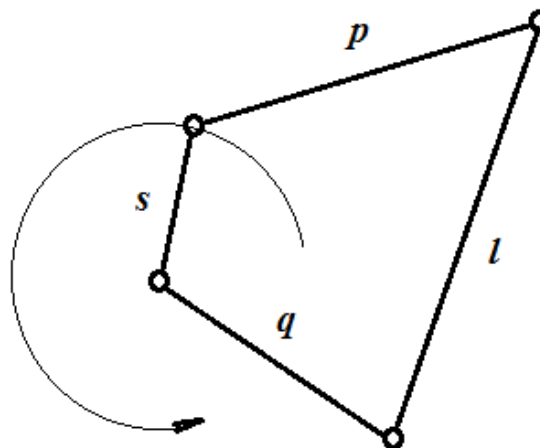


- Un élément avec deux liaisons glissières et un pivot est caractérisé par deux distances entre le centre du pivot et les axes des glissières et un angle entre les axes des deux glissières.



4.3. Loi de Grashoff pour les mécanismes à 4 barres

Considérons un mécanisme à 4 barres dont la plus courte est de longueur s , la plus longue est de longueur l et les deux autres de longueurs respectives p et q



La loi de Grashoff pour un mécanisme à quatre barres stipule si la somme des longueurs des barres la plus longue et la plus courte est inférieure ou égale à la somme des longueurs des autres barres alors la plus courte peut effectuer un tour complet par rapport à la barre voisine.

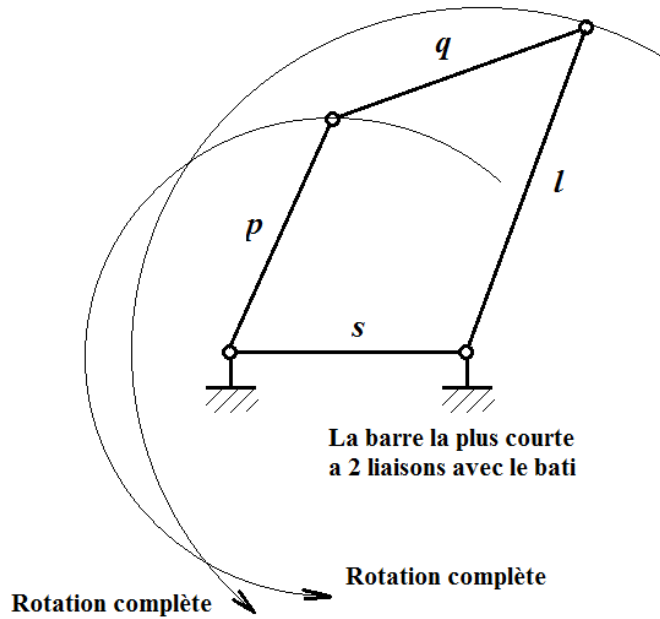
$$l + s \leq p + q$$

Selon le mode d'articulation de la barre courte s avec le bâti (une, deux articulations ou pas d'articulation) on distingue les cas suivants de la loi de Grashoff :

4.3.1. La barre courte est fixe (deux liaisons avec le bâti)

Les deux barres p et l peuvent faire un tour complet si :

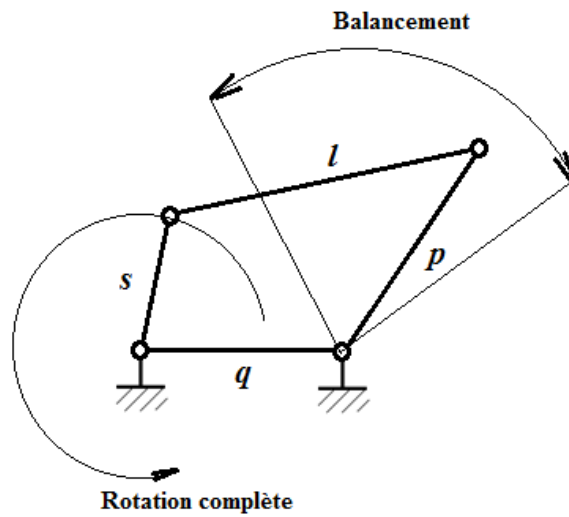
$$l + s > p + q$$



4.3.2. La barre courte a une seule liaison avec le bâti

La barre courte s fera un tour complet si la condition suivante est satisfaite :

$$l + s < p + q$$

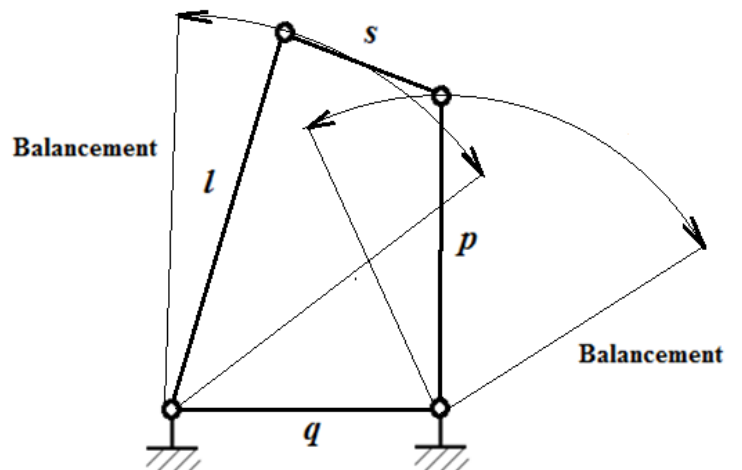


4.3.3. La barre courte n'a aucune liaison avec le bâti

Si la condition suivante est satisfaite :

$$l + s > p + q$$

Les deux barres p et l n'effectuent pas une rotation complète.

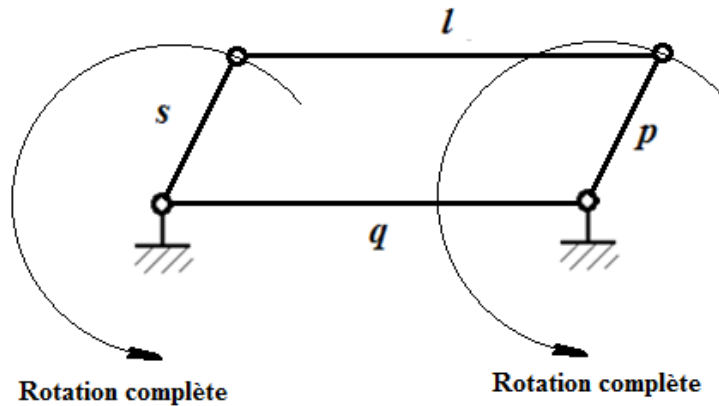


4.3.4. La barre courte a liaison avec le bâti et formant un parallélogramme avec les autres barres

Dans ce cas nous avons $s = p$ et $l = q$ (un parallélogramme)

Ce qui entrainera l'écriture de la loi de Grashoff :

$$s + l = p + q$$



Exemple : Soit le système à 4 barres suivant :

En admettant que la barre AB est la plus petite barre et BC la plus grande barre. On donne :

$$AB = 50\text{mm}$$

$$BC = 150\text{mm}$$

$$CD = 120\text{mm}$$

On souhaite que la barre AB fasse un tour complet, pour cela déterminer la valeur minimale de la cote a

Solution :

La loi de Grashoff pour un mécanisme à 4 barres s'écrit :

$$AB + BC \leq AD + CD$$

$$AD^2 = a^2 + 20^2$$

$$AD = \sqrt{a^2 + 20^2}$$

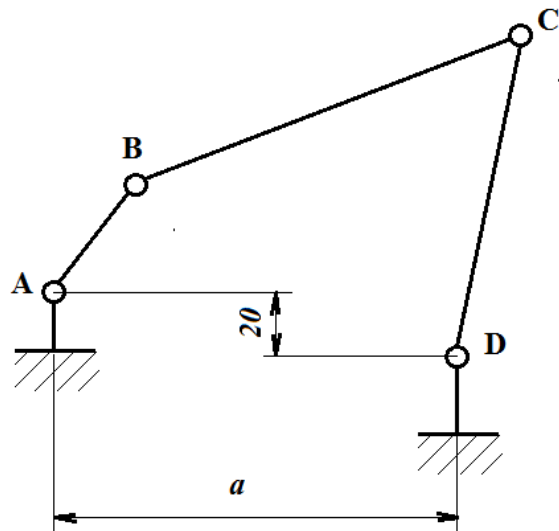
$$AD \geq AB + BC - CD$$

$$AD \geq 50 + 150 - 120$$

$$AD \geq 80\text{mm}$$

$$AD \geq 80\text{mm}$$

$$a \geq 77.46\text{mm}$$



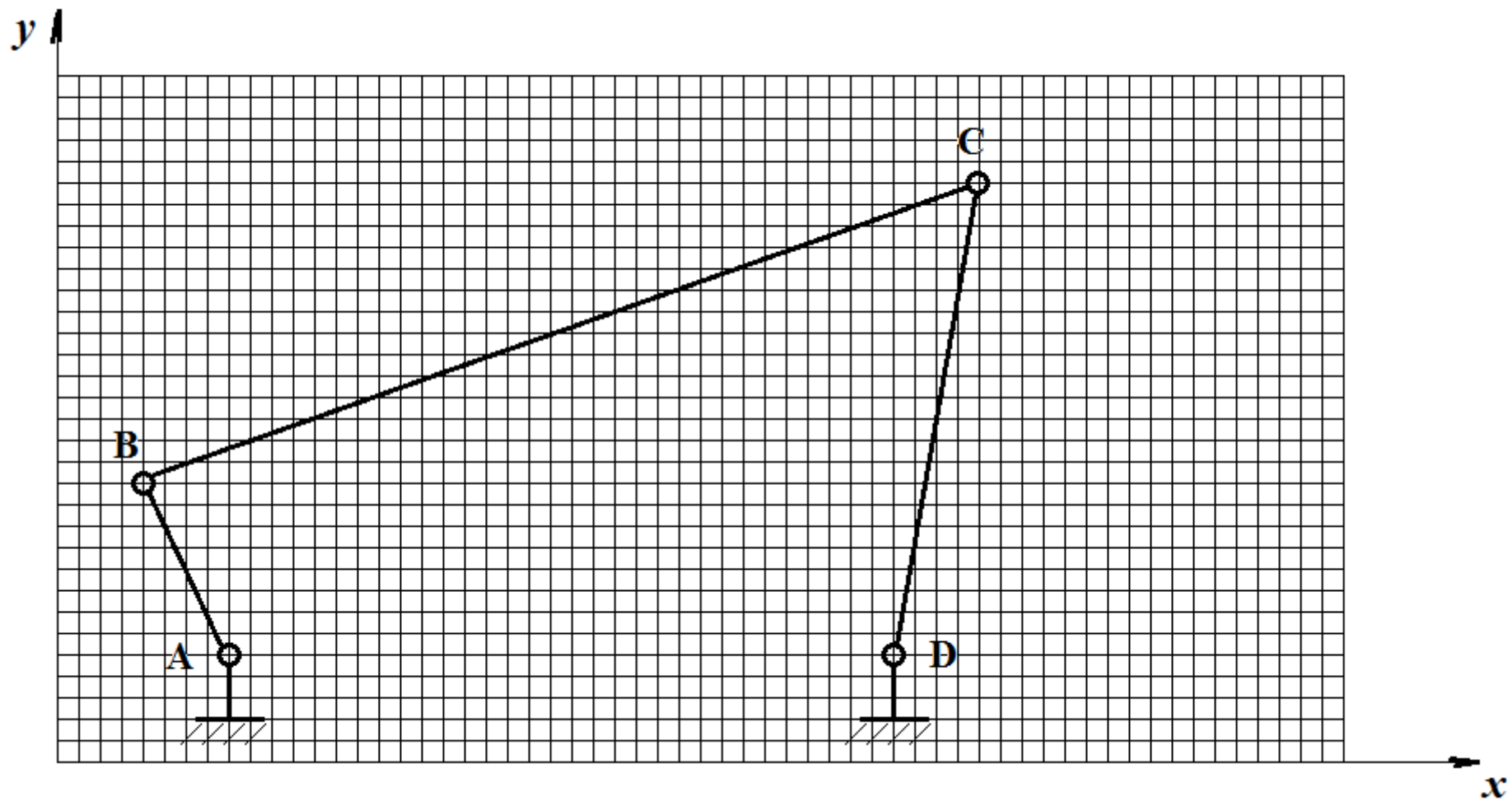
4.4. Analyse des déplacements d'un mécanisme plan

La connaissance des paramètres d'un mécanisme est nécessaire pour déterminer le déplacement d'un mécanisme plan. Pour cela on utilise deux méthodes : graphique et analytique.

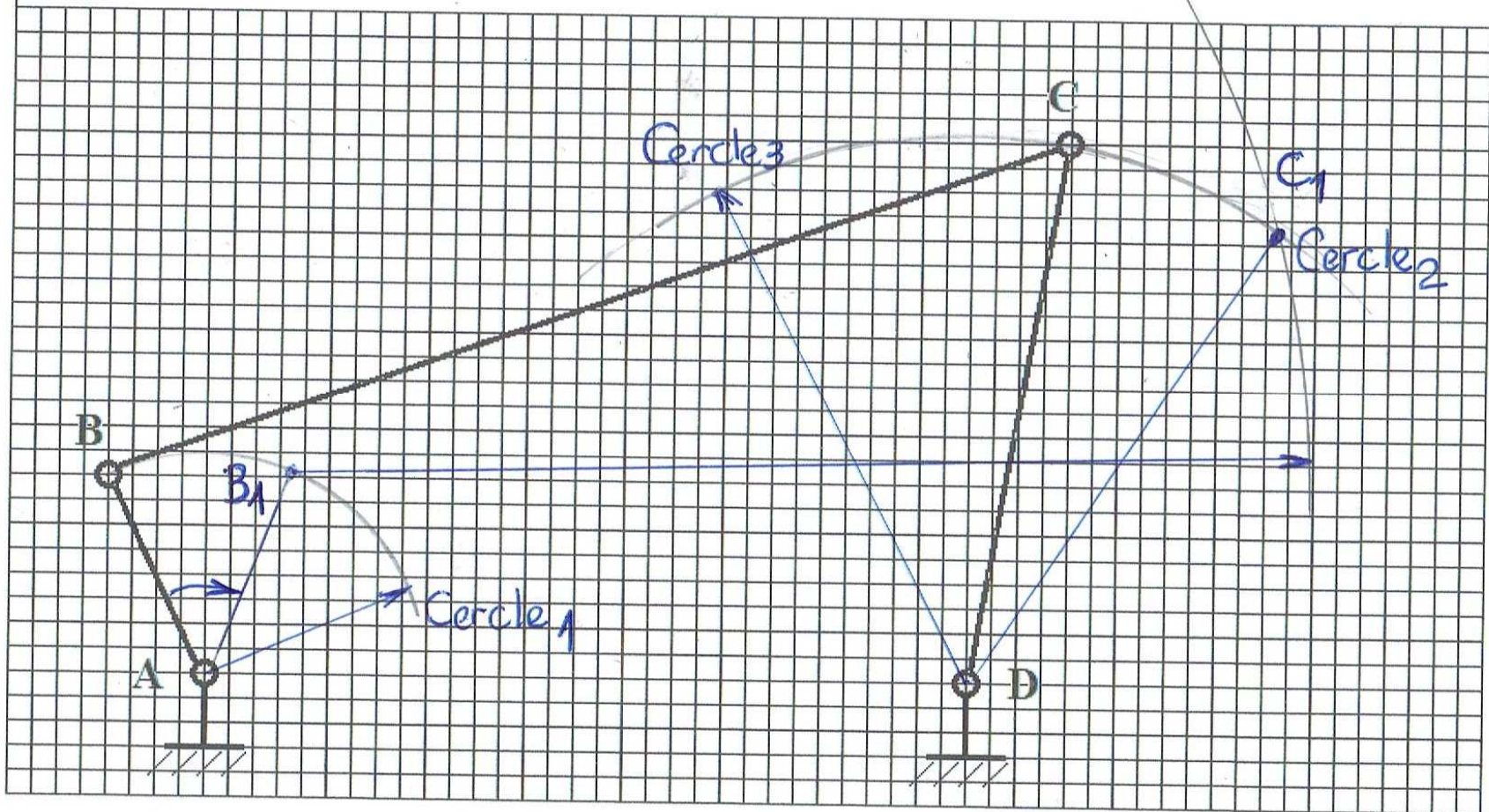
4.4.1. Méthode graphique

Une échelle de représentation s'impose pour représenter les paramètres réels du mécanisme sur un papier quadrillé.

$$\text{Echelle} = \frac{\text{Dimension sur dessin}}{\text{Dimension réelle}}$$



y



x

En analysant le mécanisme on trouve que la barre AB tourne autour de A (Cercle1), la barre BC tourne par rapport à la barre AB autour de B et la barre DC tourne autour de D (Cercle3). La barre AB effectue une rotation telle que B soit en B1. La barre BC décrira un cercle (Cercle2) de centre B1.

La position du point C2 est l'intersection des deux cercles (Cercle2) et (Cercle3).

4.4.2. Méthode analytique

La méthode analytique est plus précise que celle graphique cependant on s'affronte à la difficulté de résolution analytique des équations voire l'impossibilité, pour cela on fait recours aux méthodes numériques.

4.4.2.1. Mobilité d'un mécanisme plan

La dépendance entre les paramètres variables d'un mécanisme est donnée par la mobilité m qui peut être déterminée par la formule :

$$m = 3N - 2L_5 - L_4$$

Telle que :

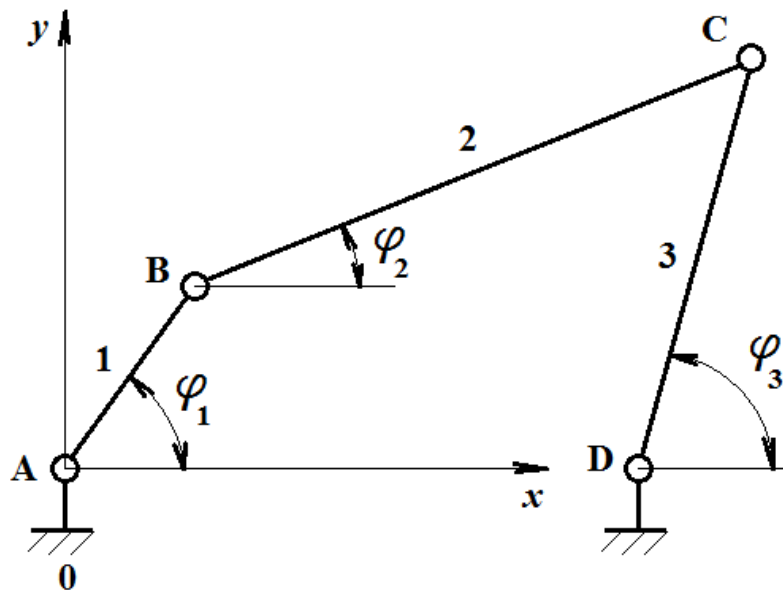
N : Nombre d'éléments mobiles

L_5 : Nombre de liaisons à un degré de liberté (5 liaisons)

L_4 : Nombre de liaisons à 2 degrés de liberté (4 liaisons)

4.4.2.2. Exemples

1) Considérons le mécanisme précédent :



a) Mobilité : Dépendance des paramètres variables

$$m = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$$

φ_2 et φ_3 dépendent de φ_1

b) Type de chaîne : fermée

Le nombre de cycles indépendants :

$$\gamma = 4 - 4 + 1 = 1$$

Un cycle indépendant correspond à une équation vectorielle

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0} \quad (1)$$

Notons les longueurs des barres :

$$l_1 = AB ; l_2 = BC ; l_3 = CD \text{ et } l_4 = AD$$

L'équation vectorielle (1) une fois projetée sur les axes Ax et Ay donne :

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 - l_3 \cos \varphi_3 - l_4 = 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Pour résoudre numériquement le système (2) on fait varier φ_1 sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ en divisant celui-ci en parties égales de valeur $2\pi/n$

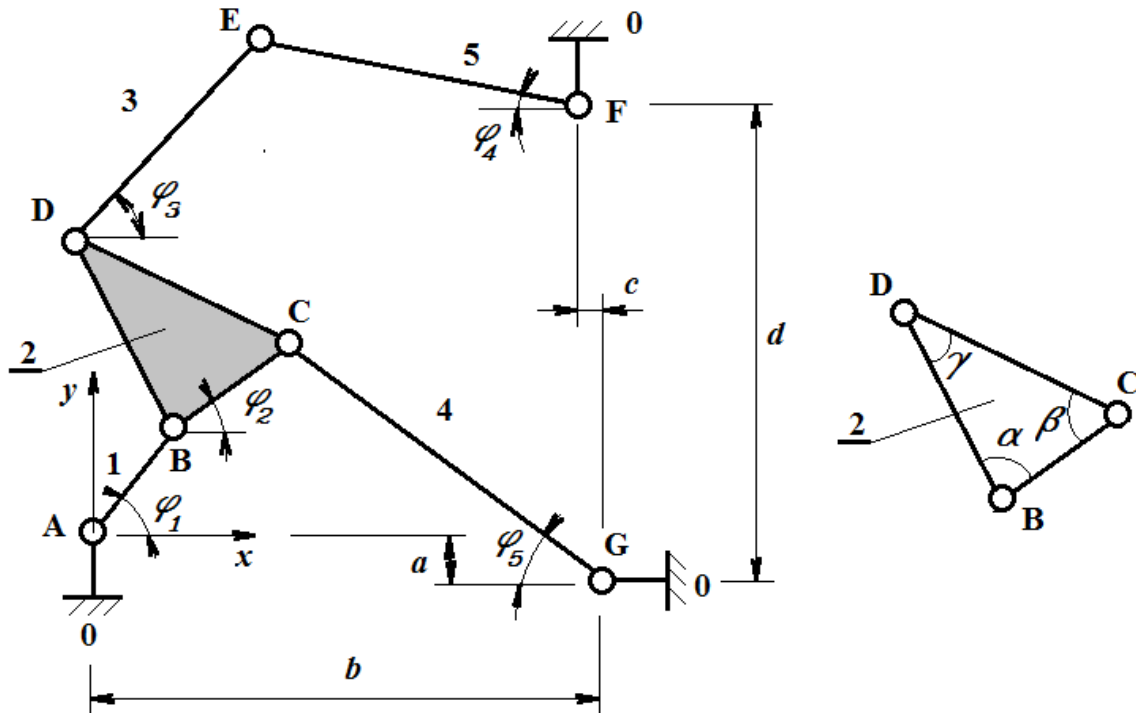
Prenons $n=10$ donc le pas $= 6.28/10 = 0.628$

$$\varphi_1^{i+1} = \varphi_1^i + 0.628 \quad (i=0, n)$$

A chaque valeur de φ_1^i correspondent les valeurs φ_2^i et φ_3^i , c.à.d. à chaque valeur de i ($i=0, n$) on résout le système suivant :

$$\begin{cases} l_2 \cos \varphi_2^i - l_3 \cos \varphi_3^i = l_4 - l_1 \cos \varphi_1^i \\ l_2 \sin \varphi_2^i - l_3 \sin \varphi_3^i = -l_1 \sin \varphi_1^i \end{cases}$$

2) Soit le mécanisme suivant :



a) Mobilité :

$$m = 3*5 - 2*7 - 0 = 1$$

Les paramètres $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ et φ_5 sont fonctions de φ_1

b) Type de chaîne :

La chaîne est fermée et complexe

$$\gamma = 7 - 6 + 1 = 2$$

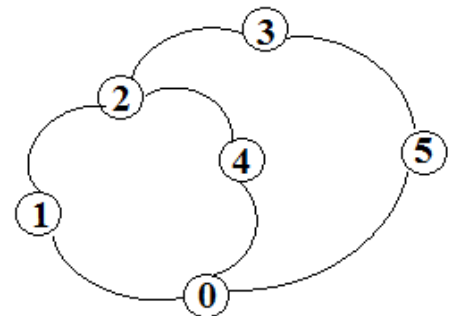
Nous avons deux cycles indépendants donc deux équations vectorielles :

$$\begin{cases} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG} + \overline{GA} = \vec{0} \\ \overline{GC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FG} = \vec{0} \end{cases}$$

La projection des deux équations vectorielles sur les axes

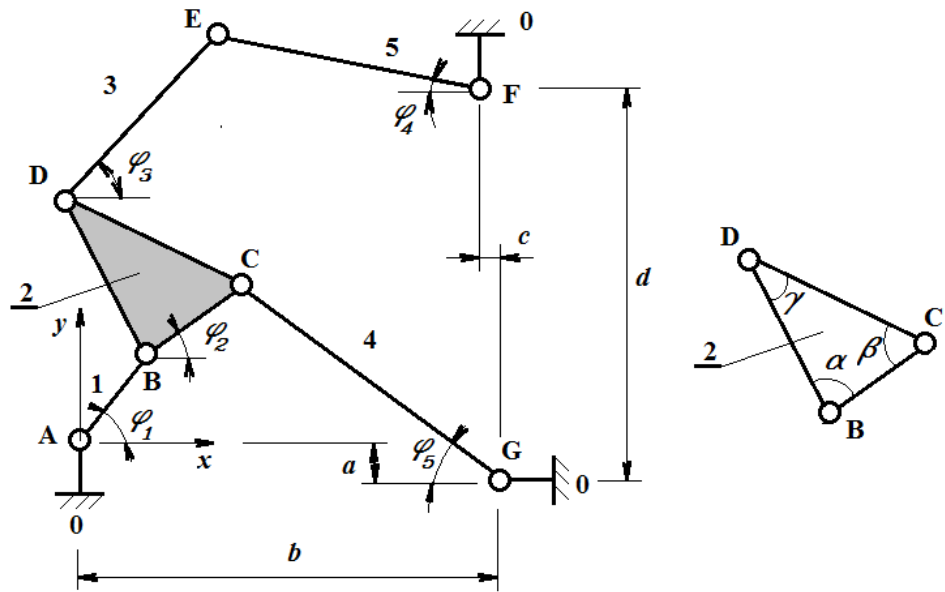
Ax et Ay donne quatre équations :

$$\begin{cases} AB \cdot \cos \varphi_1 + BC \cdot \cos \varphi_2 + CG \cdot \cos \varphi_5 - b = 0 \\ AB \cdot \sin \varphi_1 + BC \cdot \sin \varphi_2 - CG \cdot \cos \varphi_5 + a = 0 \\ GC \cdot \cos \varphi_5 - CD \cdot \cos(\beta - \varphi_2) + DE \cdot \cos \varphi_3 + EF \cdot \cos \varphi_4 + c = 0 \\ GC \cdot \sin \varphi_5 + CD \cdot \cos(\beta - \varphi_2) + DE \cdot \cos \varphi_3 - EF \cdot \cos \varphi_4 - d = 0 \end{cases}$$

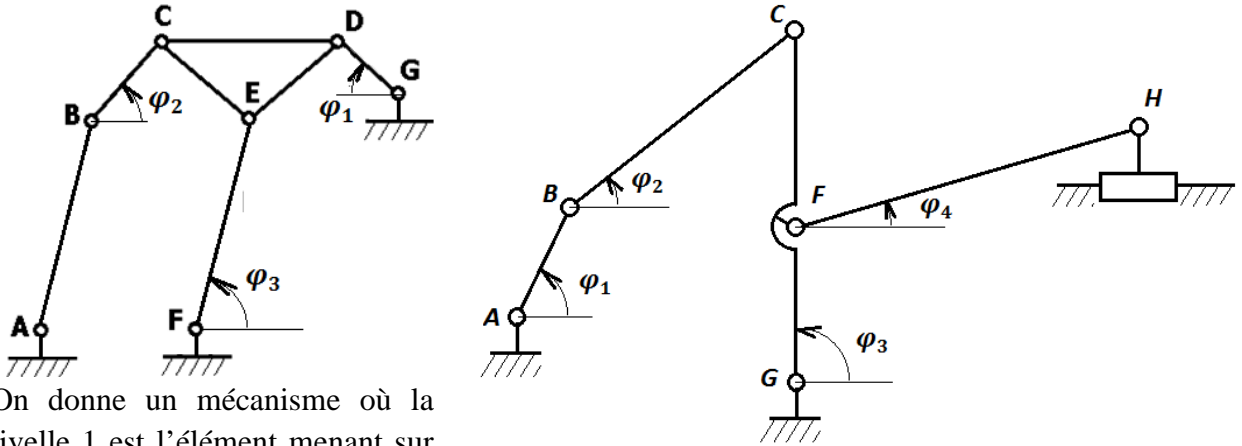


Exercices

1) Soit le mécanisme ci-contre :
Déterminer les paramètres fixes et variables du système mécanique

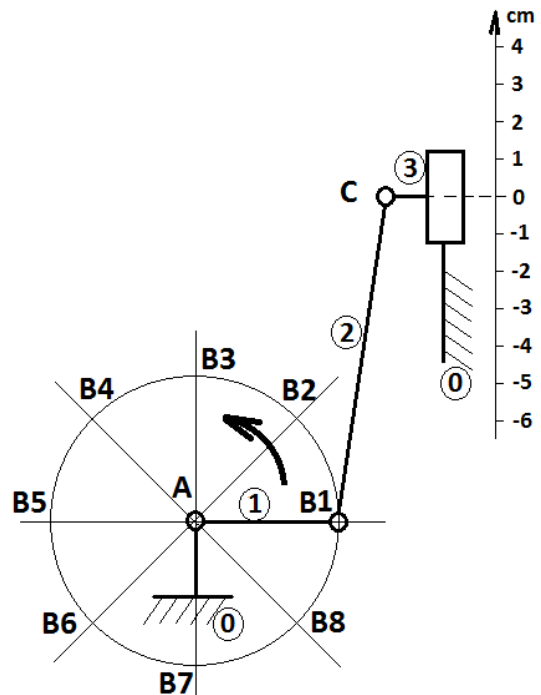


2) Déterminer graphiquement les angles φ_i ($i \neq 1$) en fonction des valeurs de φ_1 pour chacun des mécanismes suivants :

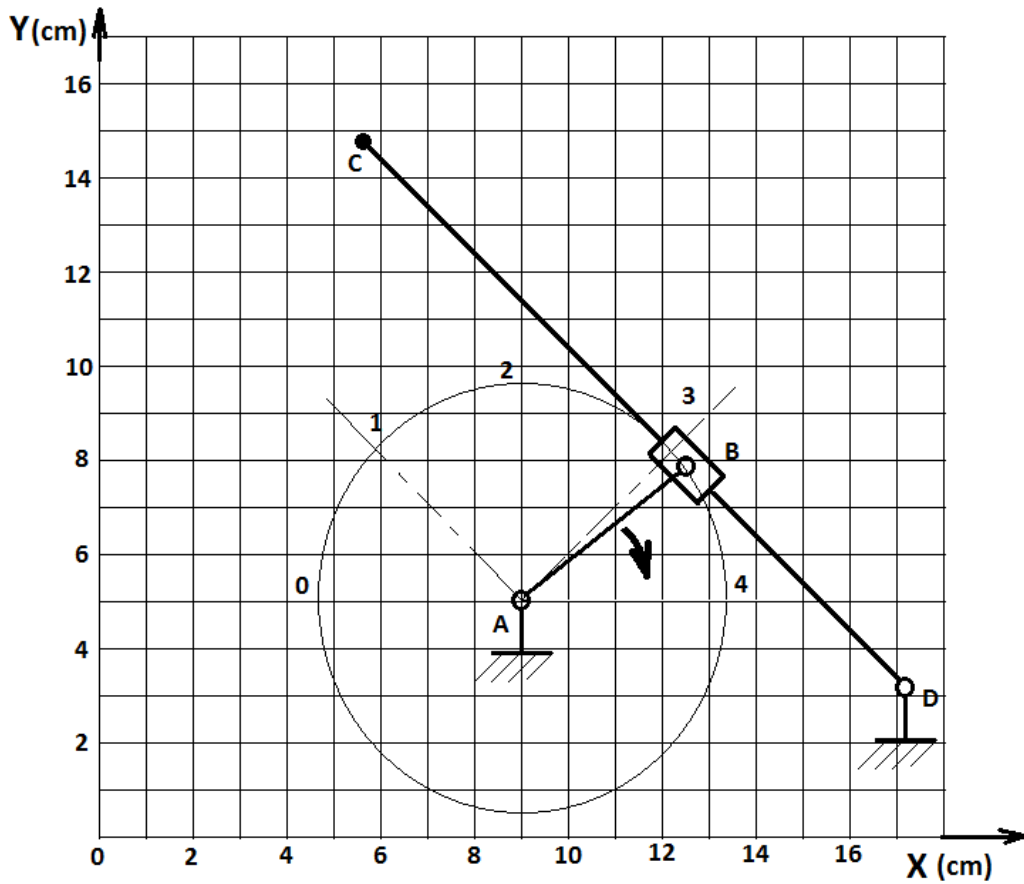


3) On donne un mécanisme où la manivelle 1 est l'élément menant sur lequel on applique un couple qui permet après la transmission du mouvement par la bielle 2 au coulisseau 3 de glisser verticalement. Considérant la position du point B en B1 comme état initial et pour chaque position B1, B2, ..., B8 déterminer graphiquement en centimètres la position du point C et mettre les résultats dans un tableau comme ci-dessous

Position de B	Position de C (cm)
B1	
B2	
B3	
B4	
B5	
B6	
B7	
B8	

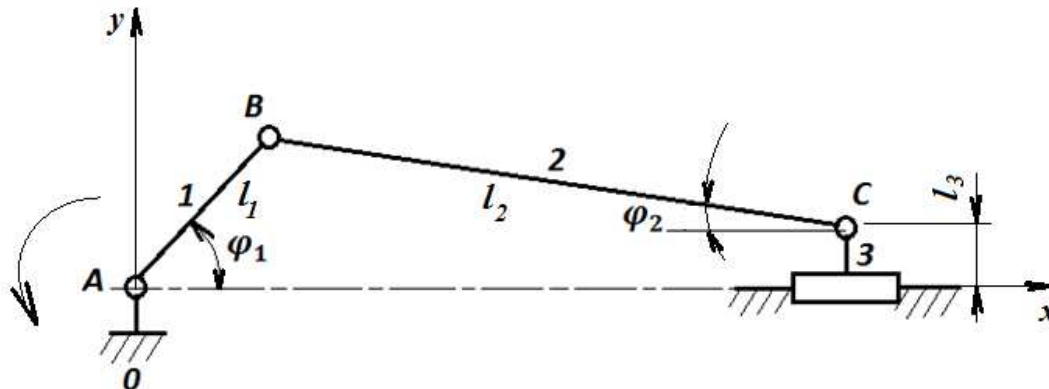


4) Ci-contre un schéma cinématique d'un mécanisme où le bras CD oscillant entre deux limites. En utilisant la méthode graphique compléter le tableau ci-dessous :



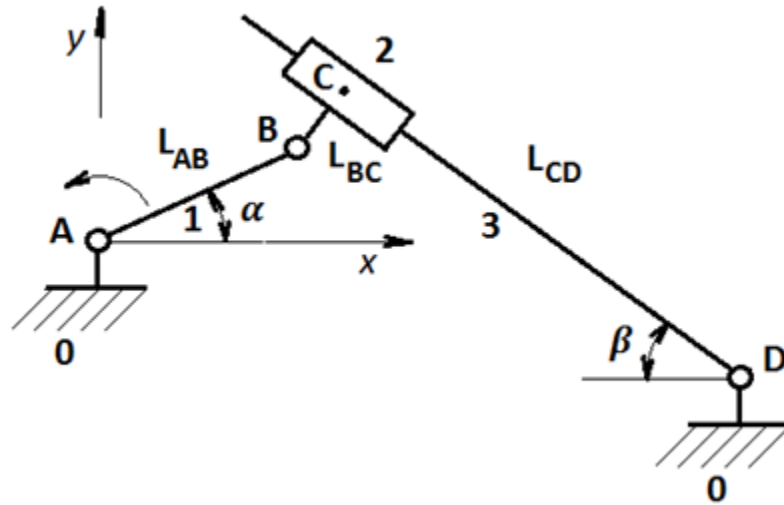
Position de la manivelle AB	Angle	Coordonnées du point C	
		Xc	Yc
0	0°		
1	45°		
2	90°		
3	135°		
5	180°		

5) Ecrire les équations reliant les paramètres de position entre eux du mécanisme suivant :

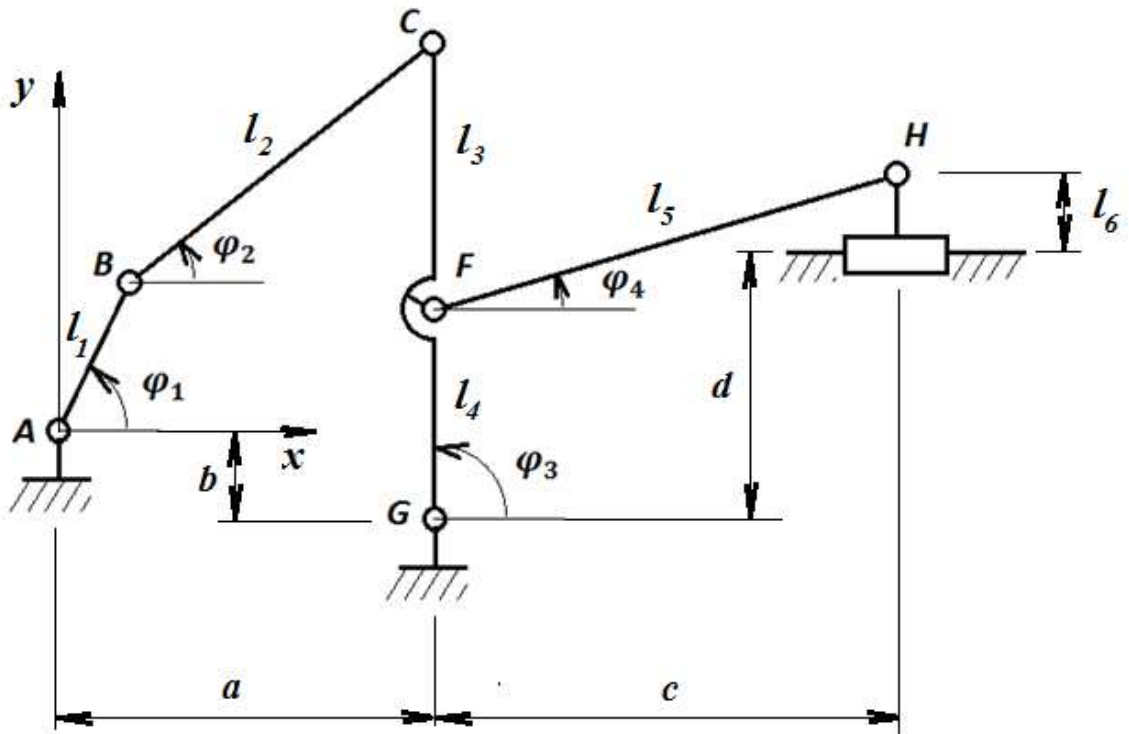


6) Soit le mécanisme ci-contre où l'élément 1 est menant sur lequel. La rotation de 1 entraîne le glissement de 2 sur 3 et enfin la rotation de 3 autour de D.

Ecrire les équations définissant les positions instantanées des points.



7) Même travail que l'exercice précédent pour le mécanisme suivant :



Chapitre 5 : Initiation à la CAO et synthèse des mécanismes

5.1. Introduction

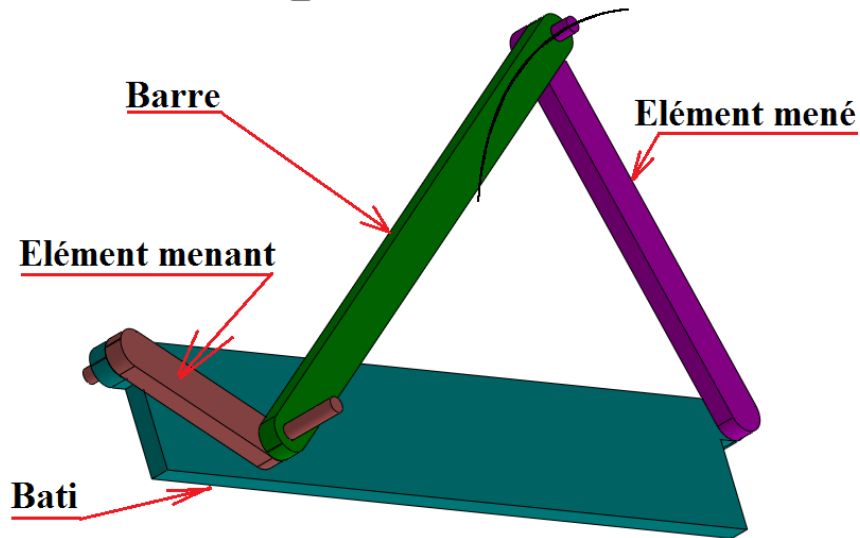
SolidWorks est un logiciel de CAO, la modélisation est de type volumique 3D. On crée d'abord les pièces puis on les assemble pour former un assemblage (mécanisme par exemple). De même on peut réaliser des mises en plan 2D pour l'assemblage ou bien pour chaque pièce.

L'étudiant est supposé avoir un minimum de connaissances concernant la pratique de SolidWorks et la maîtrise des fonctions volumique de base (Extrusion, révolution, balayage,...) avec ajout/enlèvement de matière.

Dans ce chapitre on conçoit un mécanisme à 4 barres simple et isostatique.

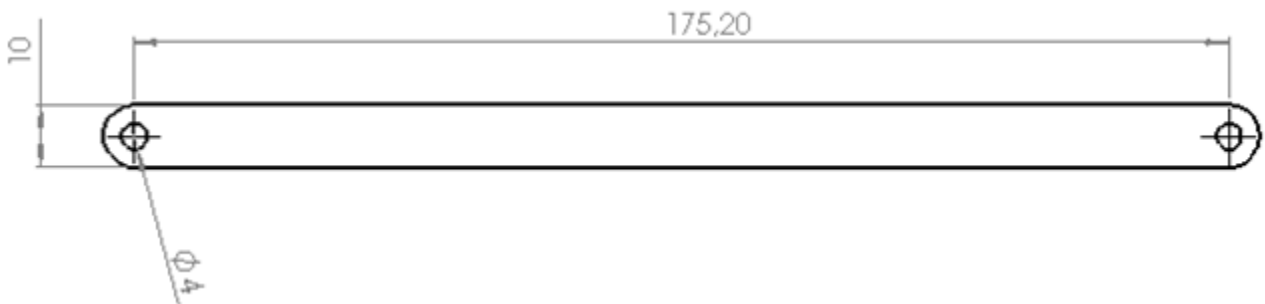
5.2. Conception d'un mécanisme isostatique en utilisant SolidWorks

Considérons un mécanisme à 4 barres suivant :

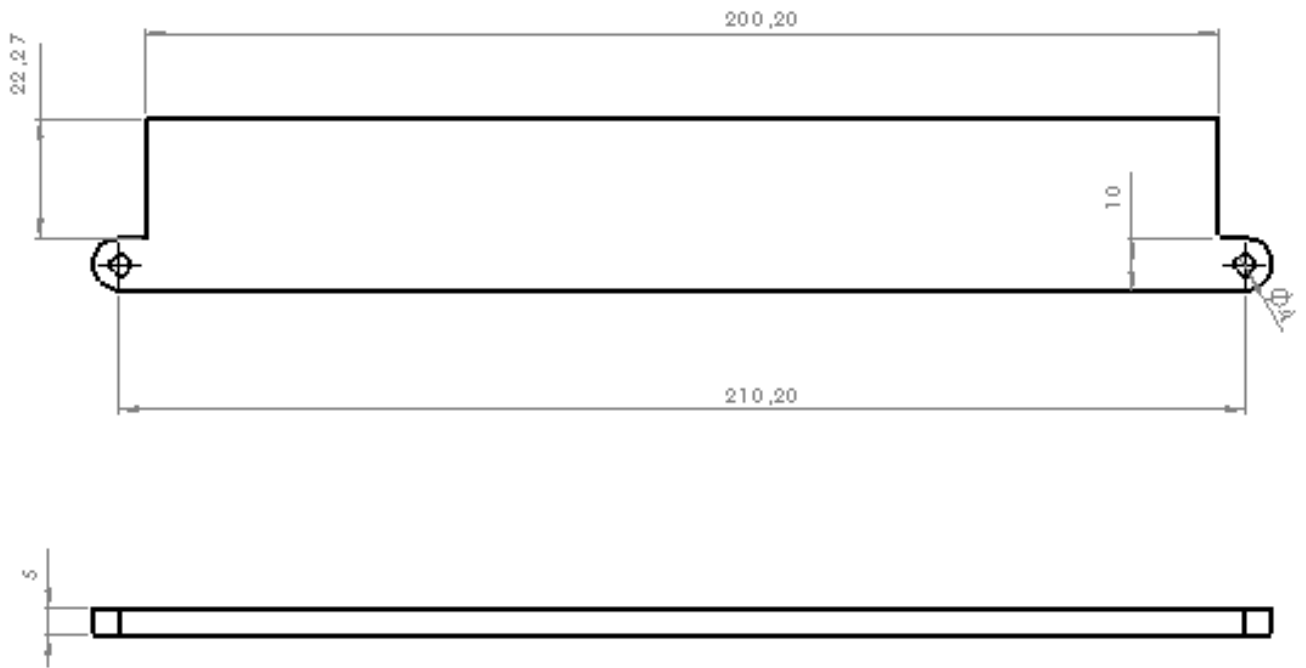


Les constituants sont définis par les dessins suivants :

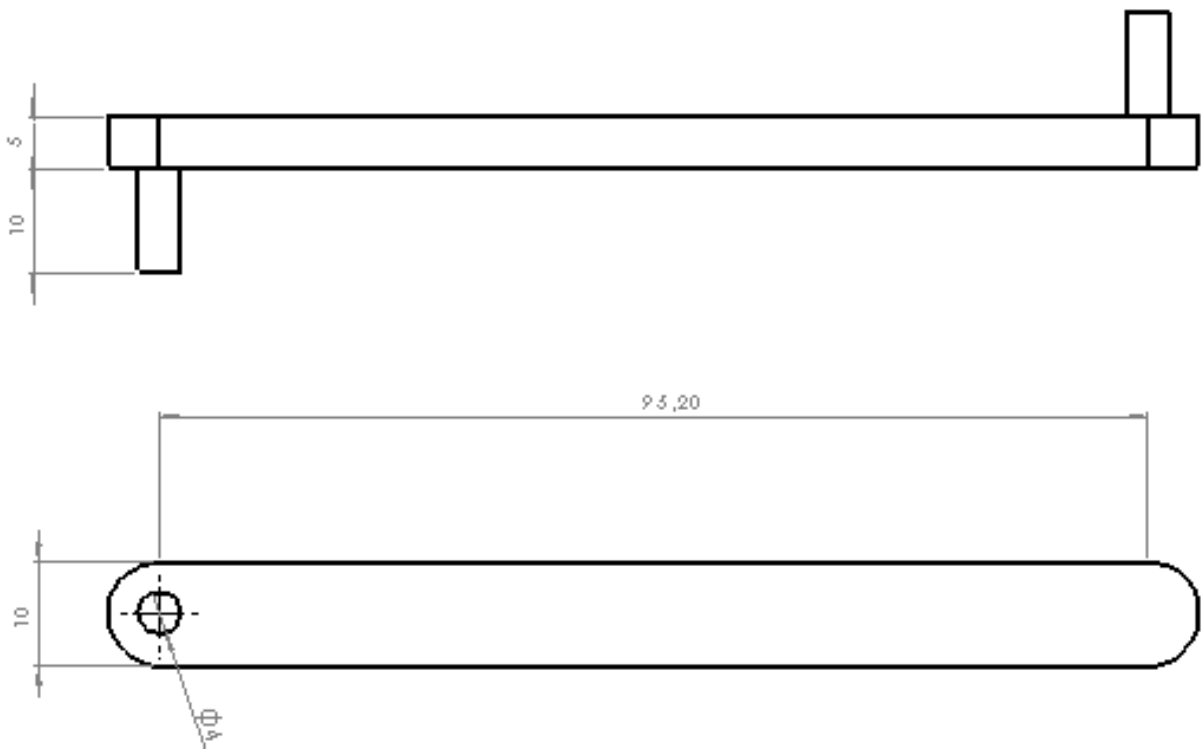
1) La barre



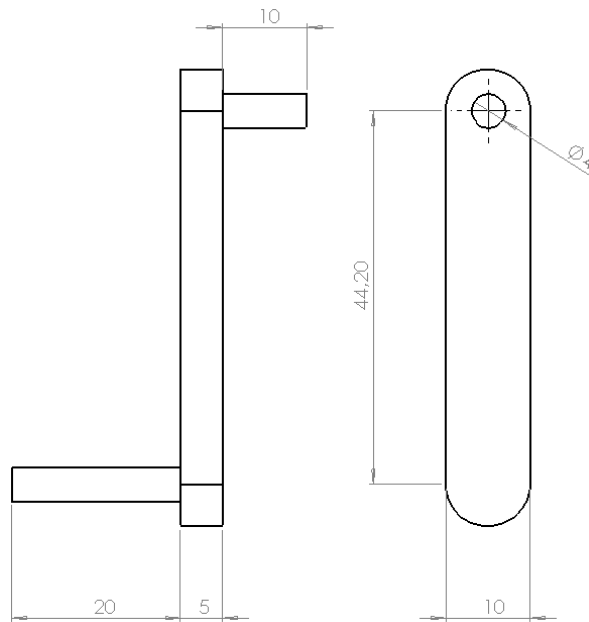
2) Le bâti



3) L'élément mené



4) L'élément menant



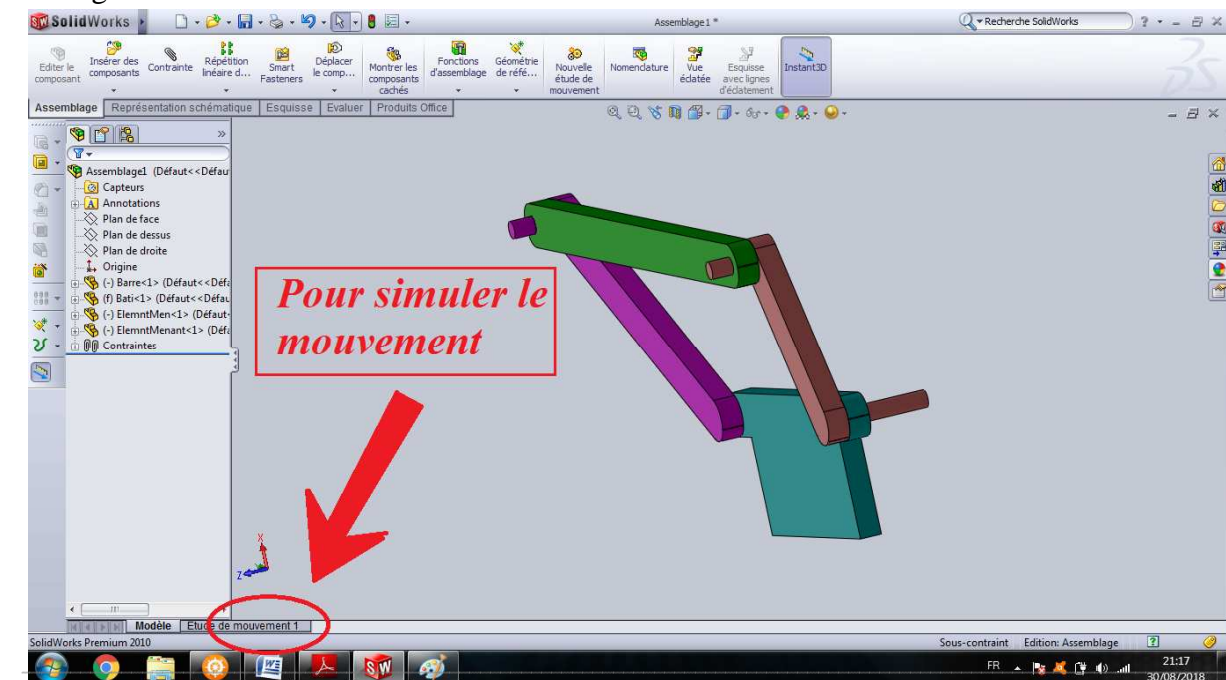
On rappelle l'ordre de conception 3D :

- Construction des figures 2D (Rectangles, cercles, polygones ou formes complexes)
- Extrusion de la figure 2D, révolution de la figure 2D autour d'un axe, balayage de la figure suivant une trajectoire (hélice), lissage,....
- Enlèvement éventuel de la matière par esquisse de formes 2D (cercle, polygone,...) par extrusion, révolution ou balayage.
- La sauvegarde de la pièce réalisée
- Réalisation des autres composants du mécanisme
- Assemblage de ces pièces par : Prépositionnement (déplacement des composants l'un par rapport à l'autre) et positionnement final par les contraintes.

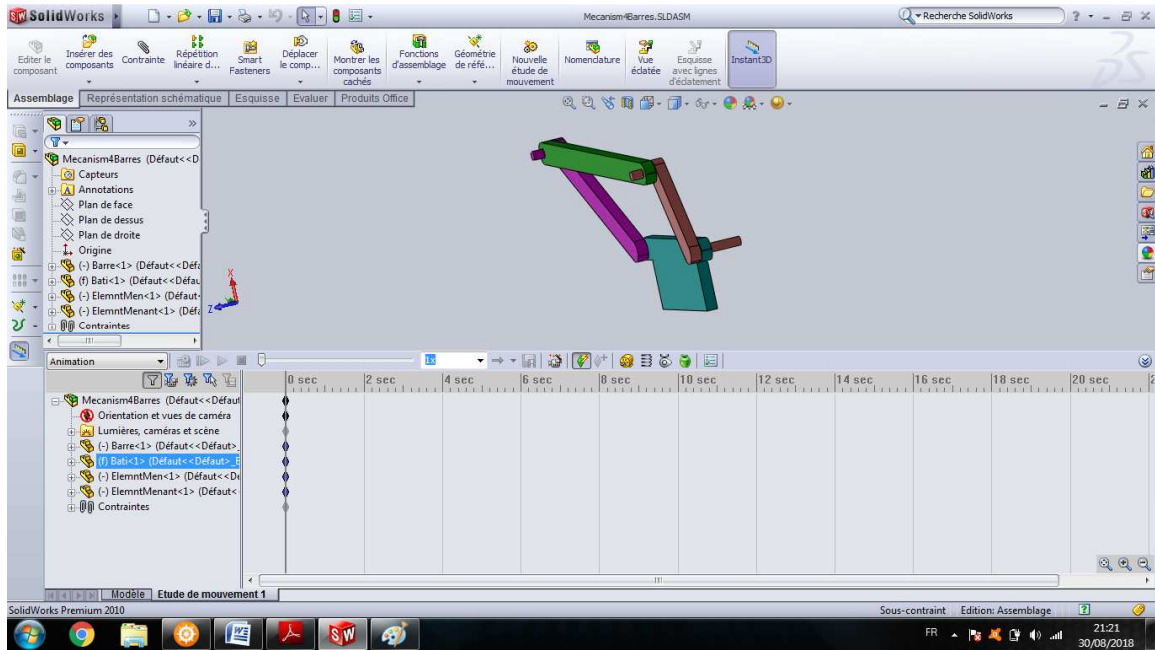
Une fois le mécanisme est assemblé on passe à la simulation du mouvement pour juger l'étude cinématique (possibilité d'interférence des pièces, mouvement incomplets,...).

5.3. Etapes de la simulation du mouvement

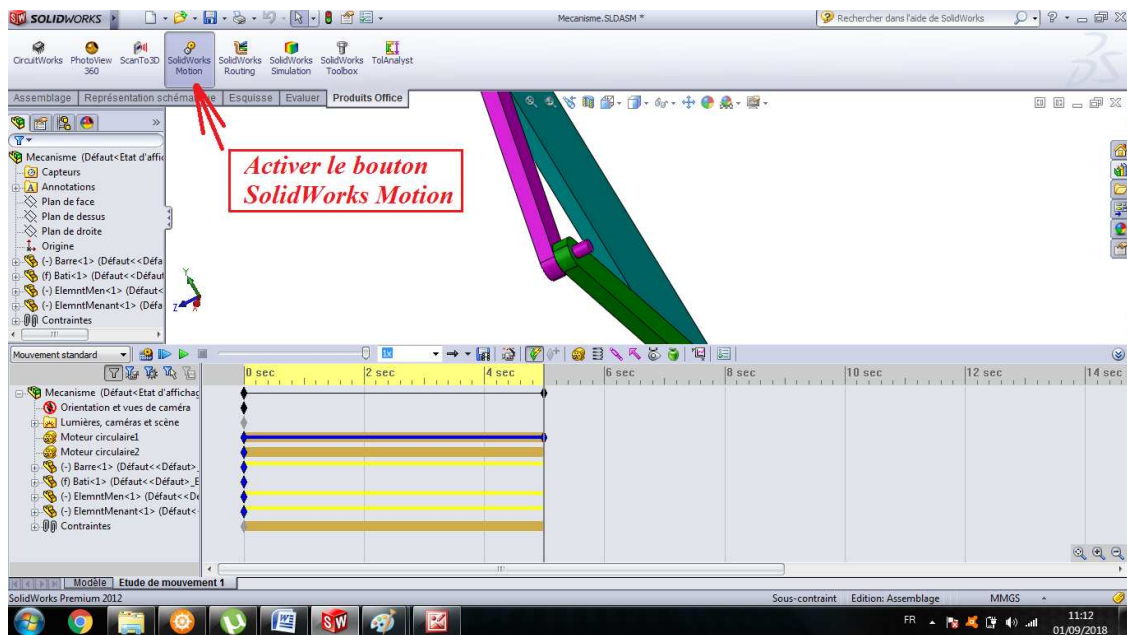
1- Manager Etude de mouvement :



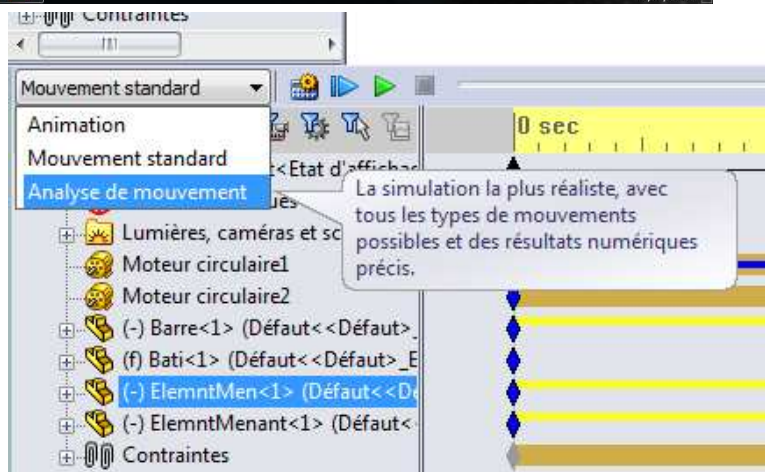
2) Le manager aura l'aspect suivant :



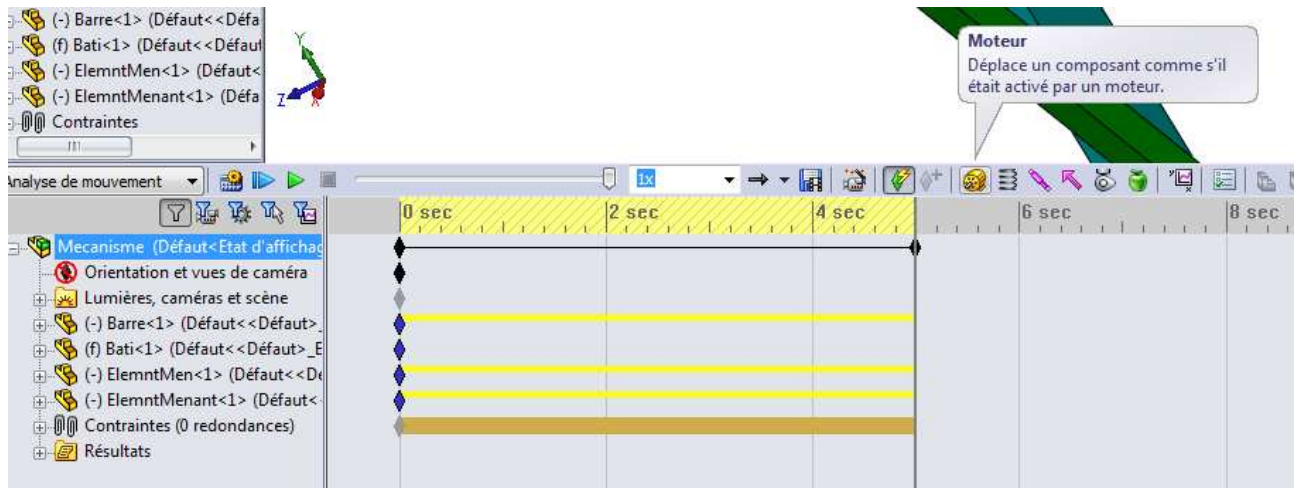
3) Activer SolidWorks Motion



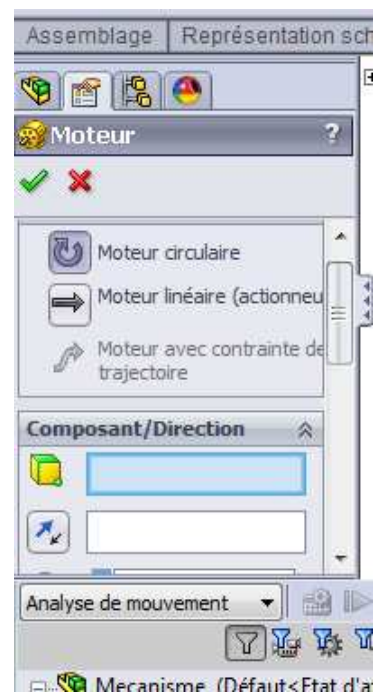
4) Choisir le type de simulation : Animation (uniquement mouvement), Mouvement standard (plus réaliste, contraintes, moteurs, gravité,...) et Analyse de mouvement (la plus complète tous les mouvements et résultats numériques des paramètres cinématiques).



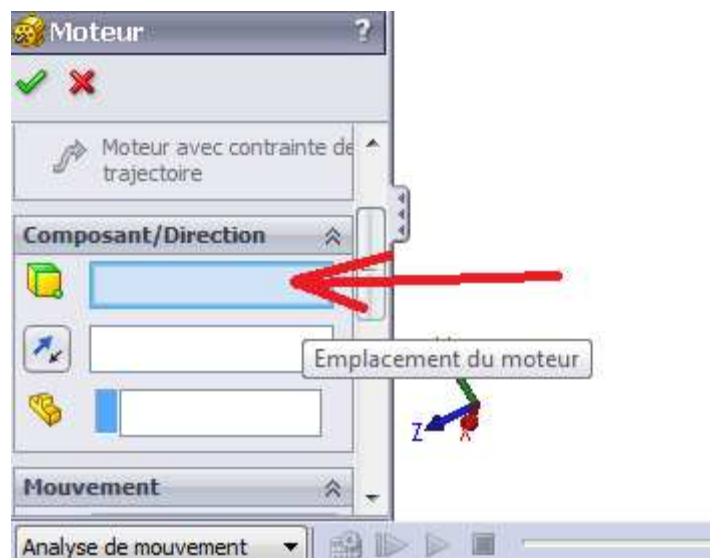
5) Activation du moteur



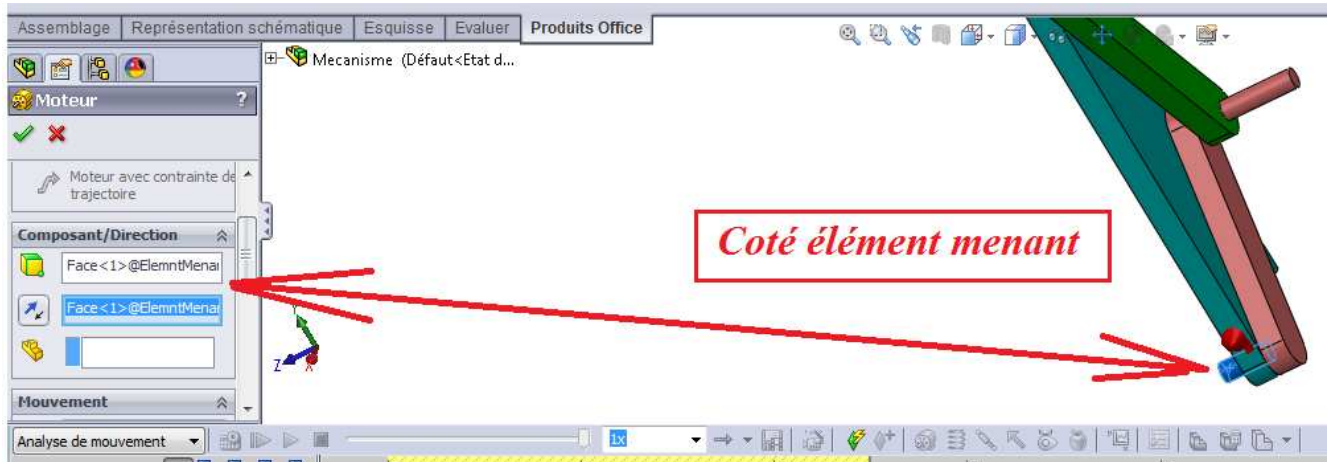
6) Choix du type du moteur (circulaire/linéaire)



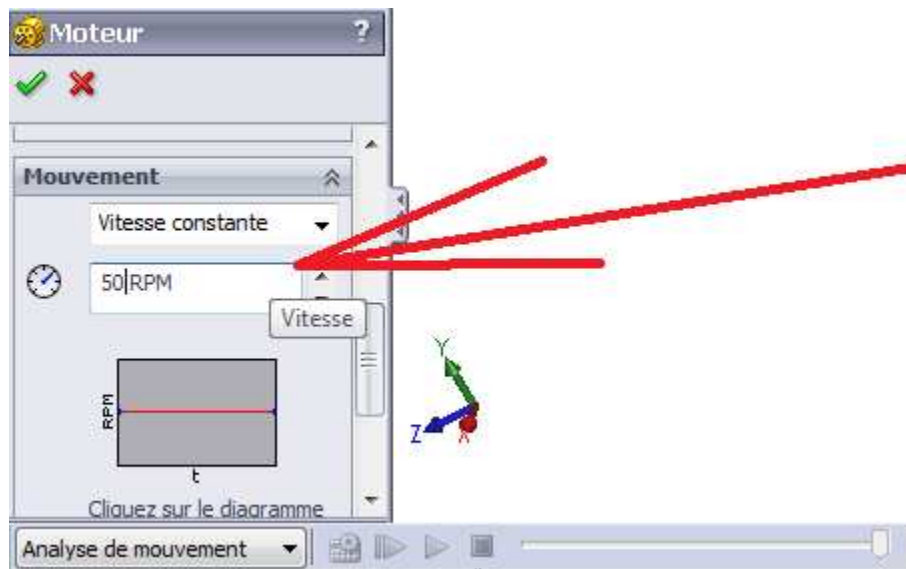
7) Emplacement du moteur



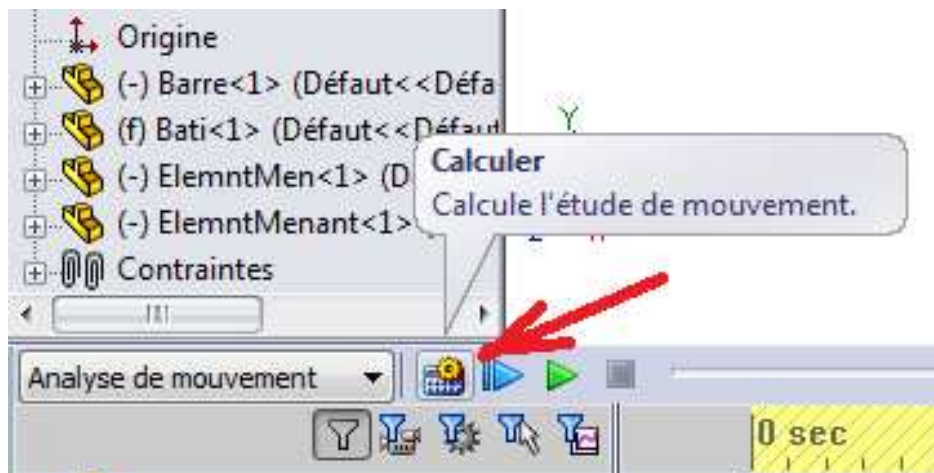
8) Pièce correspondant à l'emplacement du moteur



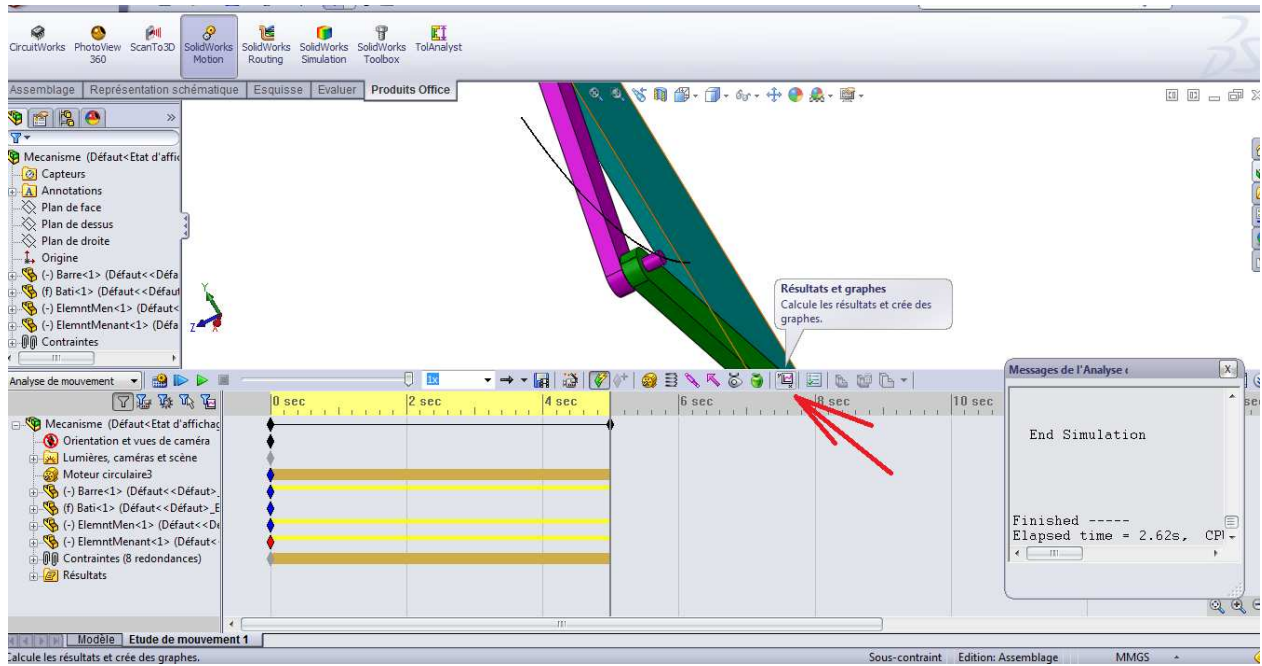
9) Choix de vitesse de rotation + Ok



10) Calcul du mouvement



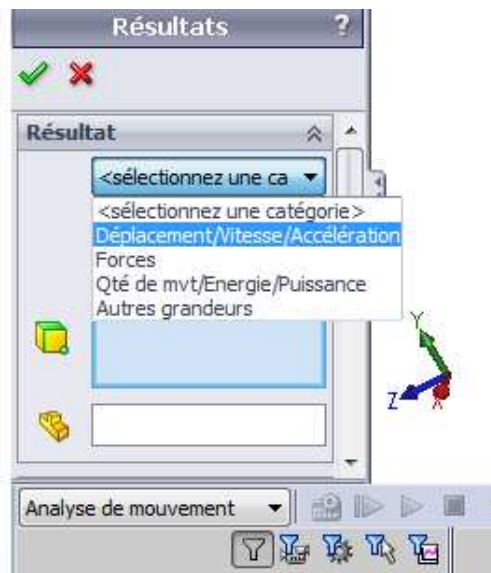
11) Affichage des résultats cinématiques



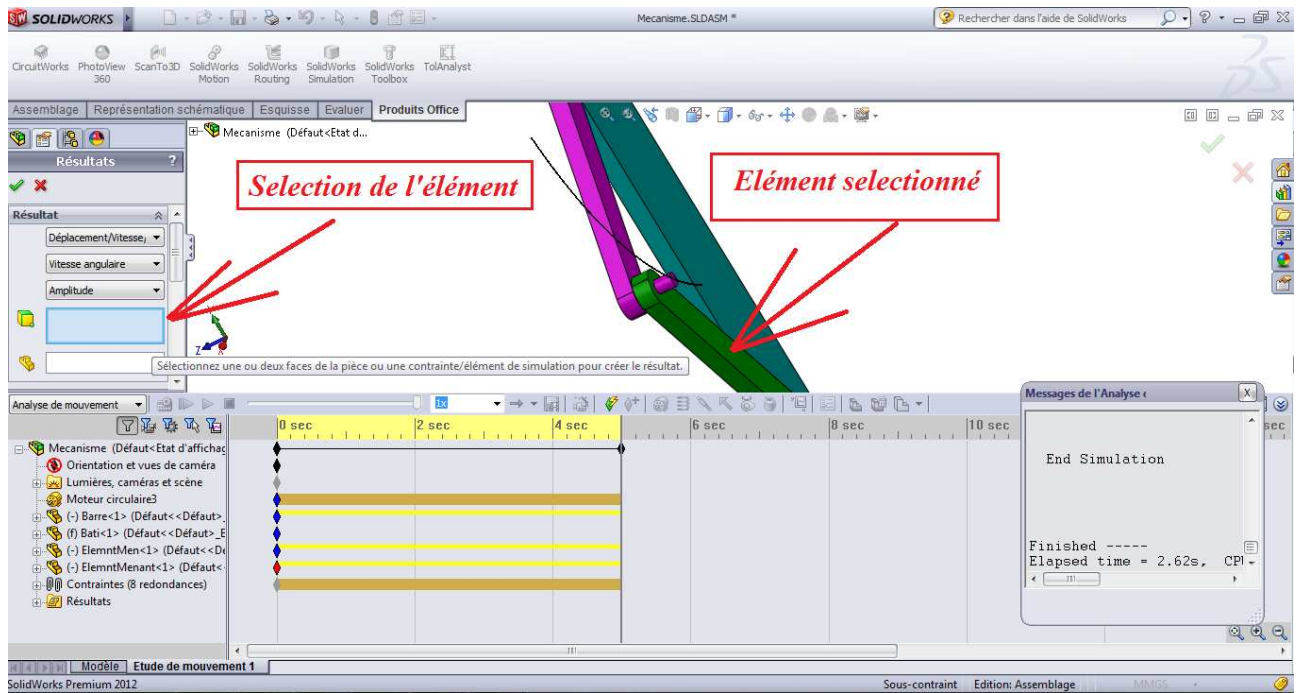
12) Choix des paramètres à afficher



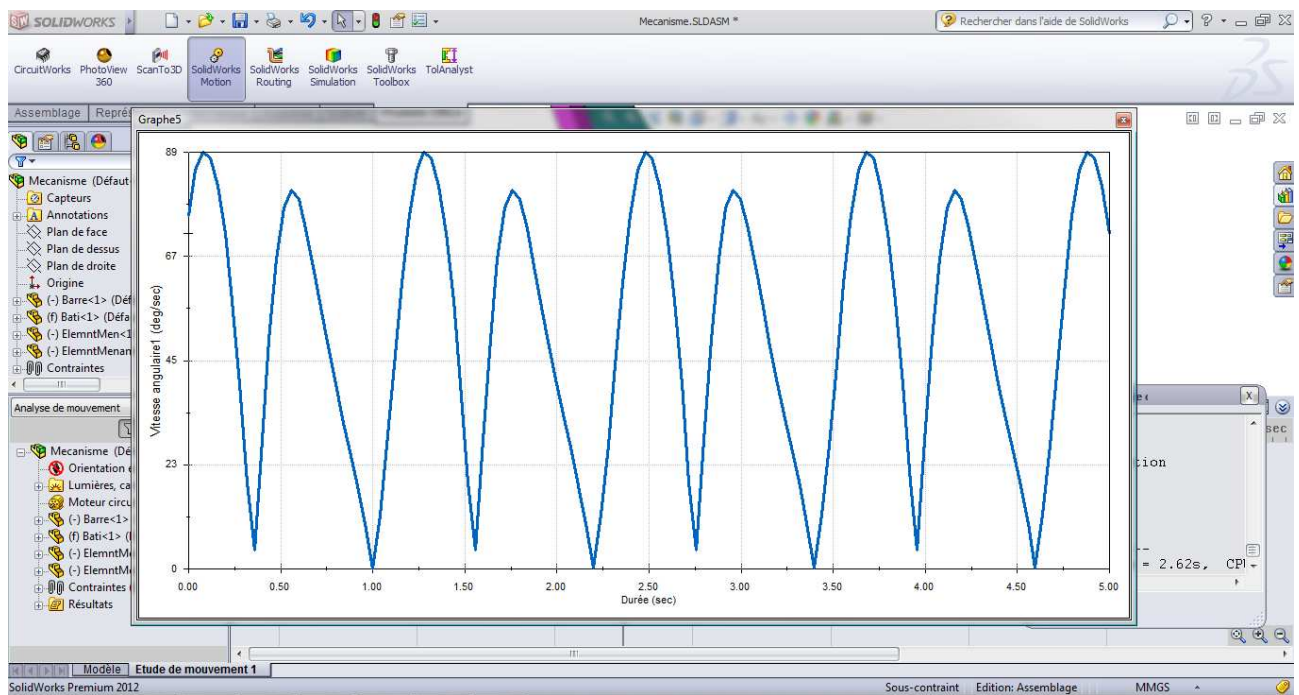
13) Choix de la solution



14) Sélection de l'élément (Exemple la vitesse angulaire)



15) Affichage de la solution (graphe)



5.4. Travail demandé dans ce chapitre

Refaire le travail en modifiant la cote de la barre, prendre la longueur 180 mm au lieu de 200.20 mm.

- Quelle conclusion pouvez-vous tirer ?
- Prendre une autre valeur de la longueur de la barre 250 mm, la loi de Grashoff est-elle vérifiée ?
- Refaire le 1^e travail en affichant le graphe de l'angle de la barre

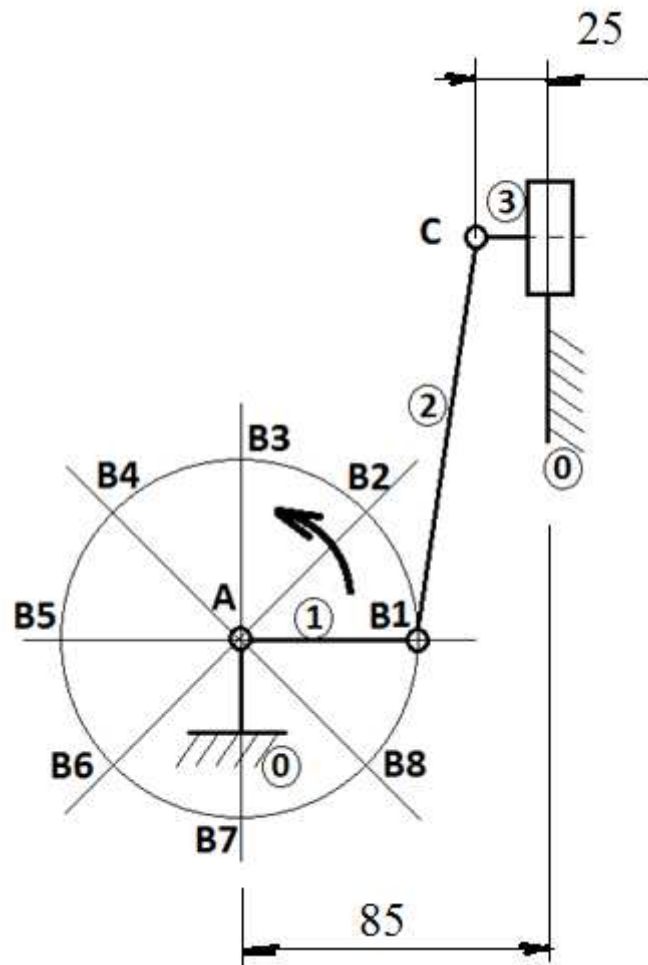
Exercices

1) On donne pour le mécanisme suivant :

AB= 50mm

BC=180mm

- Concevoir le mécanisme avec SolidWorks (2012)
- Simuler le mouvement
- Déterminer numériquement la position de C pour chaque position : B1-B2-B3-B4-B5-B6-B7-B8



2)

Soit le mécanisme ci-contre, on donne :

AB= 50mm

BC=72mm

DE=125mm

EF=135mm

CG=185mm.

- Concevoir le mécanisme avec SolidWorks (2012)
- Simuler le mouvement
- L'élément 1 fait-il une révolution complète ? si non modifier la longueur d'une des barres (3, 4 ou 5).

