



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série:

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Intitulé :

Stabilité des systèmes localisés

Réalisé par: Ala eddine Ben kouider

Dirigé par: Saida.Sandel MCD

Belkacem Masses

Présenté le 13/09/2020

Membre de jury:

B .Bahri MAA Président

H .Ramoul MCA Examineur

2019-2020

REMERCIEMENT

Tout d'abord nous tenons à remercier **ELLAH** le clément qui nous a donné la force et le courage d'aller au bout de notre objectif.

Nos remerciements les plus vifs vont à l'attention de notre promoteur *D^r* S.Sandel pour avoir accepté de diriger ce travail, pour ses conseils et orientations.

Nous tenons à remercier les membres du jury d'avoir accepté de juger notre travail.

Nous remercions tous nos enseignants.

Enfin nous remercions toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail :

- * *À* Mes chers parents, qui, par leur dévouement, leur engagement et leur générosité, m'ont permis de suivre ce bon chemin, que **ELLAH** les protégés.
- * *À* Mes frères : Rabie, Samir, Islam, .
- * *À* Mes bon amis :M .Chihab , B.KHALIL, C.IDRIS,
- * *À* Mes oncles et toutes la famille benkouider.
- * *À* Mon binôme **belkacem**, merci pour ton sérieux et compréhension.

Ala eddine Ben kouider

Dédicace

Je dédie ce travail :

- * *A* Mes chers parents, qui, par leur dévouement, leur engagement et leur générosité, m'ont permis de suivre ce bon chemin, que **ELLAH** les protégés.
- * *A* Mes sœurs et frères :Amina,Houda,Chihab,Chouaibe.
- * *A* Mes bon amis : M,Ala, B,Lhmri ,M,youcef, B,Houssam.
- * *A* Mes oncles et toutes la famille Massas.
- * *A* Mon binôme **Ala Eddine**, merci pour ton sérieux et compréhension.

Massas Belkacem

TABLE DES MATIÈRES

Remerciement	1
Notations	6
1 Préliminaire	9
1.1 Lemme de Gronwall	9
1.2 Les matrices	10
1.2.1 Opérations	11
1.3 Valeurs propres et vecteurs propres	14
1.4 Blocs et matrice de Jordan	16
2 Stabilité des systèmes autonomes	18
2.1 point d'équilibre d'un système	18
2.2 stabilité des systèmes autonomes	20
2.2.1 Stabilité des systèmes linéaires	22
2.3 Fonction de Lyapunov	24
2.3.1 Cas des systèmes discrets	24
2.3.2 Cas des systèmes continus	26
2.3.3 Cas des systèmes linéaires continus	28
2.3.4 Cas des systèmes linéaires discrets positifs	29
3 Stabilité des Systèmes non autonomes et application générale	30
3.1 Stabilité des systèmes non autonomes	30
3.1.1 Fonction de Lyapunov	31

TABLE DES MATIÈRES

3.1.2	Cas des systèmes linéaires	34
3.2	Application générale (Problème de trois corps de Lagrange)	36
3.3	Les points de lagrange	39
3.3.1	Stabilité des points de Lagrange	39

- x : L'état du système ;
- \dot{x} : La dérivée de x
- \bar{x} : point d'équilibre
- $\|x\|$: La norme euclidienne d'un vecteur x ;
- x^T : Transposé de x ;
- C^1 : Ensemble des fonctions continues, différentiable et de dérivées partielles continues ;
- t_0 : L'instant initial ;
- $\det(A)$: Déterminant de la matrice A ;
- $\Re(\lambda)$: La partie réelle de λ ;
- $|\lambda|$: Module de λ ;
- $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$: Ensembles des matrices carrés d'ordre n , à coefficients dans (\mathbb{R}) ;
- $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$: Ensembles des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans (\mathbb{R}) ;
- $\text{rang}(A)$: Le nombre des colonnes linéairement indépendants.

Les systèmes réels, devenus de plus en plus complexes, sont constitués d'un grand nombre de composantes inter connectées les unes aux autres suivant une structure déterminée. Afin de pouvoir concevoir et automatiser ces systèmes, il convient évidemment d'en donner une représentation mathématique, c'est à dire un ensemble d'équations pouvant être jointes à des conditions initiales (lorsque le phénomène est d'évolution), et à des conditions aux limites (s'exprimant sur la frontière du domaine spatial où le phénomène est étudié), dont la résolution permet de définir l'état du système qui peut être représenté par un vecteur formé d'un nombre fini de composantes, dans ce cas on parle de systèmes localisés, comme il peut être considéré dans un espace de dimension infini, on parle alors de systèmes distribués.

Un système localisée (lumped systems) est donc un système dans le quelle la variable ne dépend que du temps .

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques, écologiques,... peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires, et l'étude de ces équations passe en partie par une meilleure compréhension des propriétés de leurs solutions.

Il est possible aujourd'hui, d'enrichir le schéma traditionnel,

modélisation \longrightarrow identification \longrightarrow Commande,

Par une étape d'analyse (se faisant au niveau conceptuel), qui consiste à étudier un ensemble de notions et de concepts permettant une meilleure connaissance de ses propriétés. Parmi ces notions, on note celle de la contrôlabilité, observabilité, stabilisabilité, détectabilité, étalabilité.

Un des concepts les plus importants en théorie des systèmes est celui de la stabilité. Un système instable est sans usage et potentiellement dangereux. Qualitativement un système est stable si chaque fois qu'il est perturbé de son point d'équilibre, il reste autour de ce point d'équilibre par la suite. L'analyse de la stabilité d'un système induit deux méthodes : la méthode de linéarisation et la méthode directe de Lyapunov. La méthode de linéarisation permet de tirer des conclusions concernant la stabilité locale d'un système dynamique autour d'un point d'équilibre, à partir des propriétés de stabilité de son approximation linéaire. Quant à la méthode directe, introduite au 19^{ème} siècle par Lyapunov, elle n'est pas restreinte à un caractère local et permet de déterminer les propriétés de stabilité d'un système non linéaire à l'aide d'une fonction énergie. L'objet de ce mémoire est de présenter, pour des systèmes localisés la théorie de stabilité et d'illustrer son application.

- ✓ Dans le premier chapitre on donne quelques rappels sur les théorèmes utilisés dans les démonstrations des chapitres qui suivent tel que le lemme de Gronwall, les matrices, les valeurs propres et les vecteurs propres, la réduction de Jordan ... etc .
- ✓ Dans le deuxième chapitre on commence par des définitions sur le point d'équilibre et la stabilité d'un système localisée dans un cadre générale on donnant des exemples sur des systèmes non linéaires puis on passe à l'étude de la stabilité des systèmes autonomes, en passant par le cas continu, discret et linéaire et on termine par donner des théorèmes reliant l'existence de la fonction de Lyapunov et la stabilité dans les trois cas .
- ✓ Le troisième chapitre est partagé en deux parties : la première est consacrée à l'étude de la stabilité des systèmes non autonomes et dans la deuxième on donne une application générale sur le problème des trois corps de Lagrange .

1.1 Lemme de Gronwall

Définition 1.1.1 Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s) ds$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right) ds.$$

Démonstration :

Posons $F(t) = \int_a^t \psi(s) y(s) ds$. En multipliant les deux membres de l'inégalité donnée en hypothèse par $\psi(t)$, on obtient :

$$F'(t) - \psi(t) \leq \varphi(t) \psi(t)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$G'(t) \leq \varphi(t) \psi(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s) ds\right) \text{ avec } G(t) = F(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s) ds\right)$$

Comme $G(a) = F(a) = 0$, on en déduit, par intégration.

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s) \psi(s) \exp\left(-\int_a^s \psi(u) du\right) ds$$

Ou par hypothèse,

$$y(t) \leq \varphi(t) + G(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s) ds\right)$$

d'où le résultat en utilisant l'inégalité ci-dessus. ■

Corollaire 1.1.1 Soient ψ et $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant

$$\exists c \geq 0 / \forall t \in [a, b], y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right).$$

Démonstration :

Il s'agit du lemme de Gronwall dans le cas particulier où φ est constante égale à c , on a
Donc pour tout $t \in [a, b]$,

$$y(t) \leq c + \int_a^t c \psi(s) \exp\left(\int_a^s \psi(u)du\right) ds = c + c \left[-\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)\right]_a^t = c \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right). \blacksquare$$

Corollaire 1.1.2 Soit $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^1 vérifiant

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta \geq 0, \forall t \in [a, b], \|y'(t)\| \leq \beta + \alpha \|y(t)\|$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \|y(t)\| \leq \|y(a)\| e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha(t-a)} - 1).$$

Démonstration :

Il suffit d'écrire, pour tout $t \in [a, b]$,

$$\|y(t)\| \leq \|y(a)\| + \|y(t) - y(a)\| \leq \|y(a)\| + \int_a^t \|v'(t)\| \leq \|v(a)\| + \beta(t-a) + \alpha \int_a^t \|y(s)\| ds$$

Puis on applique le lemme de Gronwall et on conclut en intégrant par parties. ■

1.2 Les matrices

Dans toute la suite, K désignera le corps des scalaires qui vaudra soit \mathbb{R} pour les réels, soit \mathbb{C} pour les complexes.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice de type (m, n) sur \mathbb{K} est un tableau de scalaires (réels ou complexes) à m lignes et n colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notons $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices (m, n) sur \mathbb{K} .

Si $m = n$, notons juste $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées (n, n) sur \mathbb{K} .

De plus, quand aucune autre notation ne sera précisée, nous noterons A_{ij} le coefficient de la matrice A à l'intersection de la ligne i et de la colonne j .

1.2.1 Opérations

Somme

Nous pouvons ajouter deux matrices de mêmes dimensions (m, n) , et nous avons naturellement

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \text{ pour tout } i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, n.$$

Multiplication par un scalaire

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et A une matrice (m, n) , le produit (αA) est une matrice (m, n) et

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij} \text{ pour tous } i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, n.$$

Produit de deux matrices

Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, nous pouvons faire le produit AB , il s'agit d'une matrice de $\mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$, et

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \text{ pour tous } i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, p.$$

Puissance d'une matrice

Dans l'ensemble $M_n(K)$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{K} , la multiplication des matrices est une opération interne. Si $A, B \in M_n(K)$ alors $AB \in M_n(K)$. En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même, on note

$$A^2 = A \times A, A^3 = A \times A \times A.$$

On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de A par

$$A^0 = I_n \text{ et } A^{p+1} = A^p \times A \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Transposée

Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, la transposée de A notée A^T , est la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, définie par

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \text{ pour tous } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, m$$

Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, nous avons les résultats suivants :

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathbb{R}$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Matrice adjointe

Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, la matrice adjointe de A , notée A^* , est la matrice de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ définie par :

$$(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}} \text{ pour tous } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, m$$

Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, nous avons les résultats suivants :

1. $(A^*)^* = A$
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$
3. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*, \lambda \in \mathbb{C}$
4. $(AB)^* = B^* A^*$
5. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Matrice définie positive

Définition 1.2.1 .

- Une matrice symétrique A dont les éléments sont des nombres réels, est définie positive si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ non nul on a : $x^T A x > 0$.
- Une matrice symétrique A est définie positive (noté $A > 0$). Si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Matrices particulières

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $(a_{ij}) \in \mathbb{K}$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$. est :

1. diagonale : si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$. On note en général $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$
2. une matrice diagonale de taille n particulière est la matrice identité I_n dont tous les coefficients valent 1, autrement dit $I_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$,
3. triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$
4. triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$,
5. symétrique si A est réelle et si $A = A^T$,
6. hermitienne si A est complexe et si $A = A^*$
7. orthogonale si A est réelle et si $AA^T = A^T A = I_n$
8. unitaire si A est complexe et si $AA^* = A^* A = I_n$
9. normale si $AA^* = A^* A$.

Trace et déterminant

Trace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de coefficients $(a_{ij}) \in \mathbb{K}$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$, sa trace est la somme de ses termes diagonaux

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

On a les propriétés suivantes :

1. $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$,
2. $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Déterminant

Le déterminant d'une matrice carrée (n, n) est noté $\det(A)$ ou encore

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Il est défini par la formule suivante :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Où \mathcal{S}_n est le groupe des permutations, c'est à dire des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même, et pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n, \varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ Les déterminants possèdent les propriétés suivantes :

1. $\det I_n = 1$
2. $\det A^T = \det A$
3. $\det A^* = \overline{\det A}$
4. $\det(AB) = \det A \det B$
5. pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}, \det(\alpha A) = \alpha^n \det A$
6. le déterminant d'une matrice triangulaire (a fortiori diagonale) est égal au produit de ses termes diagonaux.

Inverse

On dit que la matrice carrée A de taille n est inversible s'il existe une matrice B de taille n telle que $AB = BA = I_n$.

La matrice B est appelée inverse de A et notée A^{-1} .

Inverse et opérations

Nous avons les résultats suivants sur les inverses :

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
3. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

1.3 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 1.3.1 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

- λ est dite valeur propre de la matrice A s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$AX = \lambda X$$

- Le vecteur X est alors appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Comment trouver les valeurs propres

Si on connaît une valeur propre λ de A . On trouve les vecteurs propres de A en résolvant

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Mais comment trouve-t-on les valeurs propres de A ?

- \mathbf{x} doit être non-nul
- $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ doit avoir des solutions non-triviales
- $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible
- $\det(A - \lambda I) = 0$ (l'équation caractéristique)
- Il faut résoudre $\det(A - \lambda I) = 0$ pour trouver les valeurs propres.

Polynôme caractéristique

Définition 1.3.2 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le Polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$$

La proposition précédente devient alors :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \chi_A(\lambda) = 0.$$

Remarque 1.3.1 . [14]

- La matrice $A - XI_n$ est à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$, donc son déterminant $\chi_A(X)$ appartient à $\mathbb{K}[X]$.
- On notera aussi souvent $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ comme un polynôme en λ , plutôt que $\chi_A(X)$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda I_n - A) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$ La matrice A étant de taille $n \times n$, alors le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n . Cela conduit aux propriétés suivantes.

Corollaire 1.3.1 . [14]

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A admet au plus n valeurs propres.
- Si le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre. En effet, nous savons qu'un polynôme de degré n a au plus n racines. Et sur \mathbb{C} un polynôme non constant admet toujours au moins une racine .

Proposition 1.3.1 [14]

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Autrement dit, si $B = P^{-1}AP$ alors $\chi_A(X) = \chi_B(X)$.

Proposition 1.3.2 [14]

Si une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres alors :

La somme des valeurs propres vaut $\text{tr}A$

Le produit des valeurs propres vaut $\det A$.

remarque : Cette proposition est évidente pour une matrice diagonale. Elle se démontre aussi facilement si la matrice est diagonalisable. Nous allons ici déduire cette proposition d'un résultat plus général sur les coefficients du polynôme caractéristique.

Proposition 1.3.3 [14]

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $\chi_A(X)$ son polynôme caractéristique. C'est un polynôme de degré n qui vérifie :

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\text{tr } A)X^{n-1} + \dots + \det A.$$

Proposition 1.3.4 [14]

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice. Supposons que A admette n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Soient X_1, \dots, X_n des vecteurs propres associés. Alors :

- La matrice A est diagonalisable.
- Si on note P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les (X_1, \dots, X_n) , alors $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale formée des valeurs propres de A .

espace propre

Définition 1.3.3 L'ensemble des solutions de $(A - \lambda I)x = 0$ est appelé espace propre de A associé à la valeur propre λ .

Théorème 1.3.1 [14]

Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ d'une matrice A de taille $n \times n$, alors $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ sont linéairement indépendants.

Méthode pour diagonaliser

Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée $n \times n$. Pour essayer de la diagonaliser :

1. On calcule d'abord son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$.
2. On cherche les racines de $\chi_A(X)$: ce sont les valeurs propres de A . On suppose ici que l'on a trouvé n valeurs propres distinctes : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
3. Pour chaque valeur propre λ_i de A , on cherche un vecteur propre X_i .
4. Soit P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les (X_1, \dots, X_n) .
Alors $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

1.4 Blocs et matrice de Jordan

Définition 1.4.1 *Un bloc de Jordan est une matrice de la forme*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K})$$

Avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $p \geq 1$.

C'est donc une matrice triangulaire supérieure, avec des coefficients λ sur la diagonale, des 1 juste au-dessus de la diagonale, puis des 0 encore au-dessus.

Définition 1.4.2 *Une matrice de Jordan est une matrice diagonale par blocs de la forme*

$$\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & O & O & O \\ O & J_2(\lambda_2) & O & O \\ O & O & \ddots & O \\ O & O & O & J_r(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

Où les $J_i(\lambda_i)$ sont des blocs de Jordan.

Les blocs de Jordan peuvent être de tailles différentes, et les valeurs $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sont quelconques (certaines d'entre elles peuvent être égales). La notation O désigne une matrice nulle (elles peuvent être de tailles différentes).

Polynôme scindé

Définition 1.4.3 *Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit scindé sur \mathbb{K} s'il se factorise sous la forme*

$$P(X) = C(X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

Où tous les a_i sont des éléments de \mathbb{K} . Autrement dit, P est scindé s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans \mathbb{K} .

Théorème 1.4.1 [13].

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ a son polynôme caractéristique scindé sur \mathbb{K} , alors A est semblable (sur \mathbb{K}) à une matrice de Jordan, appelée réduite de Jordan de A . Il existe donc $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & O & O \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline O & O & J_r \end{array} \right)$$

où les J_i sont des blocs de Jordan, Ce qui se reformule aussi.

Théorème 1.4.2 [13].

Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ est scindé sur \mathbb{K} . Il existe une base \mathcal{B} de E où la matrice de f est de Jordan, c'est-à-dire :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & O & O \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline O & O & J_r \end{array} \right)$$

Voici des remarques importantes :

- Les λ qui apparaissent dans les blocs de Jordan sont les valeurs propres de A (ou de f) et donc les racines du polynôme caractéristique.
- Une même valeur λ peut apparaître dans plusieurs blocs différents.
- En particulier, ce théorème s'applique à toutes les matrices complexes.
- **Unicité**, Cette décomposition est unique dans le sens où le nombre et la taille des blocs de Jordan ne dépendent que de A (ou de f), Par contre, on s'autorise à permuter les blocs de Jordan entre eux.

Voici d'autres remarques qui découlent du théorème :

- Le nombre de blocs associés à la valeur propre λ est égal à la dimension du sous-espace propre E_λ .
- La somme des tailles des blocs de Jordan associés à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.
- La taille du plus grand bloc de Jordan associé à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal.

CHAPITRE 2

STABILITÉ DES SYSTÈMES AUTONOMES

Un système est dit autonome ou système invariant si la fonction source ne dépend pas explicitement du temps.

2.1 point d'équilibre d'un système

S'il est possible que la trajectoire d'un système corresponde, à partir d'un certain moment, uniquement à un point, un tel point est appelé point d'équilibre. Nous allons voir que les problèmes de stabilité sont naturellement formulés par rapport aux points d'équilibres. Considérons le système dynamique continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.1)$$

Respectivement le système discret

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), k) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.2)$$

Où f fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est telle que (2.1) (respectivement (2.2)) admet au moins une solution.

Définition 2.1.1 Le vecteur $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est dit point d'équilibre du système (2.1) (respectivement (2.2)) si $f(\bar{x}, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ (respectivement $\bar{x} = f(\bar{x}; k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).

Exemple 2.1.1 Considérons le système régi par l'équation

$$\dot{x}(t) = a \left[1 - \frac{x(t)}{c} \right] x(t) \text{ ou } a > 0; c > 0$$

Les points d'équilibre de ce système sont solutions de l'équation algébrique.

$$a \left[1 - \frac{\bar{x}}{c} \right] \bar{x} = 0 \Rightarrow \left[1 - \frac{\bar{x}}{c} \right] = 0 \text{ ou } \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ ou } \bar{x} = c$$

Ce qui donne deux points d'équilibre $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = c$.

Exemple 2.1.2 *Considérons le système discret suivant*

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + (x_2(k))^2 \\ x_2(k+1) = x_1(k) + \beta x_2(k) \end{cases} \quad (2.3)$$

Un point d'équilibre de (2.3) est un vecteur $\bar{x} = (\bar{x}_1; \bar{x}_2)$ solution du système

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha \bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 - \alpha \bar{x}_1 - \bar{x}_2^2 = 0 \\ \bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \alpha) \bar{x}_1 - \bar{x}_2^2 = 0 \\ (1 - \beta) \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 0 \end{cases}$$

On multiplie la deuxième ligne de l'équation précédent par $(1 - \alpha)$:

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \alpha) \bar{x}_1 - \bar{x}_2^2 = 0 \\ (1 - \beta)(1 - \alpha) \bar{x}_2 - (1 - \alpha) \bar{x}_1 = 0 \end{cases}$$

On fait l'addition entre la première ligne et la deuxième ligne on obtiens :

$$\begin{aligned} (1 - \beta)(1 - \alpha) \bar{x}_2 - \bar{x}_2^2 &= 0 \\ \Rightarrow \bar{x}_2 &= (1 - \beta)(1 - \alpha) \end{aligned}$$

E Remplaçant \bar{x}_2 dans (2,4) on obtiens

$$\bar{x}_1 = (1 - \beta)^2 (1 - \alpha)$$

Ce qui donne deux points d'équilibre

$$\bar{x} = (0, 0) \text{ et } \bar{x} = \left((1 - \beta)^2 (1 - \alpha), (1 - \beta)(1 - \alpha) \right).$$

2.2 stabilité des systèmes autonomes

Lors de l'analyse d'un système, l'étude de la stabilité revêt une importance primordiale, et bien que cette notion soit assez usuelle, elle peut avoir plusieurs interprétations selon l'application envisagée, ce qui conduit à des définitions appropriées mais en général liées au système considéré. Les systèmes considérés dans cette section sont régis par l'équation.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour le système continu autonome et par

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour le système discret autonome.

Soit \bar{x} un point d'équilibre du système (2.5) (respectivement (2.6)).

Définition 2.2.1 .

1. \bar{x} est dit stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \eta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon \text{ pour tout } t > 0 \quad (2.7)$$

(Respectivement $\|x(k) - \bar{x}\| \leq \epsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).

Dans le cas contraire il est dit instable.

2. \bar{x} est dit asymptotiquement stable (a.s) s'il est stable et si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0 \quad (2.8)$$

(Respectivement $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - \bar{x}\| = 0$)

3. \bar{x} est dit marginalement stable (m.s) s'il est stable mais non (a.s).

4. \bar{x} est dit exponentiellement stable (e.s) s'il existe deux constantes positives α et β telles que

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|x_0 - \bar{x}\| \quad (2.9)$$

Exemple 2.2.1 L'équation de croissance d'une population,

$$\dot{x}(t) = a \left[1 - \frac{x(t)}{c} \right] x(t) \quad (2.10)$$

Où $a > 0$ et $c > 0$ a deux points d'équilibre $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = c$. Le point $\bar{x} = 0$ est instable et $\bar{x} = c$ est stable.

On a : $\dot{x}(t) = a \left[1 - \frac{x(t)}{c} \right] x(t)$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \int_0^s \dot{x}(t)dt = \int_0^s a \left(1 - \frac{x(t)}{c}\right) x(t)dt \\
 &\Rightarrow x(s) - x(0) = \int_0^s a \left(1 - \frac{x(t)}{c}\right) x(t)dt \\
 &\Rightarrow x(s) = x(0) + \int_0^s a \left(1 - \frac{x(t)}{c}\right) x(t)dt \\
 &\Rightarrow (x(s) - c) = (x_0 - c) + \int_0^s a \left(1 - \frac{x(t)}{c}\right) x(t)dt \\
 &\Rightarrow \|x(s) - c\| \leq \| (x_0 - c) + \int_0^s a \left(1 - \frac{x(t)}{c}\right) x(t)dt \| \\
 &\Rightarrow \|x(s) - c\| \leq \| (x_0 - c) \| + \left\| \int_0^s a \left(1 - \frac{x(t)}{c}\right) x(t)dt \right\| \\
 &\Rightarrow \|x(s) - c\| \leq \| (x_0 - c) \| + \left\| \int_0^s ac(c - x(t)) x(t)dt \right\| \\
 &\Rightarrow \|x(s) - c\| \leq \| (x_0 - c) \| + \int_0^s \| ac(c - x(t)) x(t) \| dt \\
 &\Rightarrow \|x(s) - c\| \leq \| x_0 - c \| + \int_0^s \| ac x(t) \| \| c - x(t) \| dt
 \end{aligned}$$

On pose : $y(s) = \|x(s) - c\|$, $constant = \|x_0 - c\|$, $y(t) = \|c - x(t)\|$, $\psi(t) = \|ac x(t)\|$
 On applique le lemme de Gronwall (corollaire 1.1.1) on obtient :

$$\forall s : y(s) \leq \|x_0 - c\| \exp \int_0^s \psi(t)dt$$

On pose : $A = \exp \int_0^s \psi(t)dt \Rightarrow \forall s : \|x(s) - c\| \leq A \|x_0 - c\|$.

Maintenant pour tout $\epsilon > 0$ on a si :

$$A \|x_0 - c\| \leq \epsilon \Rightarrow \|x(s) - c\| \leq \epsilon \iff \|x_0 - c\| \leq \frac{\epsilon}{A} \Rightarrow \|x(s) - c\| \leq \epsilon$$

On pose $\eta_0 = \frac{\epsilon}{A}$ Alors pour tout $\epsilon > 0$, $\exists \eta_0 = \frac{\epsilon}{A}$

Tel que si $\|x_0 - c\| \leq \eta_0 \implies \|x(s) - c\| \leq \epsilon \quad \forall s$ et donc le point d'équilibre c est stable. ■

Définition 2.2.2 .

1. \bar{x} est dit globalement asymptotiquement stable (g.a.s) s'il est (a.s) et pour tout x_0 ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0 \text{ (Respectivement } \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x(k) - \bar{x}\| = 0 \text{)}.$$

2. \bar{x} est dit globalement exponentiellement stable (g.e.s) s'il existe deux constantes positives α et β telles que ,pour tout x_0 , on a

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|x_0 - \bar{x}\|.$$

Remarque 2.2.1 [1] Pour les systèmes linéaires autonomes, la stabilité asymptotique est toujours globale et exponentielle.

2.2.1 Stabilité des systèmes linéaires

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'étude de la stabilité des systèmes linéaires continus régis par l'équation.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.11)$$

Respectivement des systèmes linéaires discrets.

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.12)$$

Où A est une matrice carrée de dimension $n \times n$.

Définition 2.2.3 *Le système continu (2.11) ou discret (2.12) est dit stable si l'origine est stable et il est dit asymptotiquement stable si l'origine est asymptotiquement stable. Dans ce cas, la matrice du système A est dite stable ou asymptotiquement stable. La stabilité des systèmes linéaires continus est caractérisée par le résultat suivant.*

Proposition 2.2.1 *Le système (2.11) est stable si et seulement si :*

1. $Re(\lambda) \leq 0$ pour toute valeur propre λ de A .
2. S'il existe une valeur propre λ de multiplicité k telle que $\Re(\lambda) = 0$ alors $\dim E_\lambda = k$, ou E_λ est le sous espace propre associé à λ .

Le système (2.12) est stable si et seulement si pour toute valeur propre λ de A on a : $|\lambda| \leq 1$.

Démonstration

pour le cas continu

Si A est diagonalisable alors d'après le théorème (1.3.1) les vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes de A sont linéairement indépendants alors on peut écrire $x_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$ avec x_1, x_2, \dots, x_p sont des vecteurs propres associés aux valeurs distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ est donc la solution du système (2.11) s'écrit :

$$\begin{aligned} x_t &= \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i e^{\lambda_i t} \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i e^{Re \lambda_i} (\cos(Im \lambda_i t) + i \sin(Im \lambda_i t)) \end{aligned}$$

- Si $Re(\lambda_i) > 0$: Alors $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ (le système est instable).

- Si $Re(\lambda_i) < 0$ Alors $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ (le système est stable).
- Si $Re(\lambda_i) = 0$ La démonstration se base sur la décomposition de Jordan de la matrice A (voir [1]).

Si la matrice A n'est pas diagonalisable alors cela implique que $Re(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1, \dots, p$ et $Re(\lambda_i) < 0$ pour toute valeur propre non simple.

pour le cas discret

Il est clair que la solution s'écrit $x(k) = A^k x_0$ est donc le système est stable si et seulement si $|\lambda| \leq 1$ pour toute valeur propre de A . ■

Proposition 2.2.2 *Le système (2.11) est (a.s) si et seulement si pour toute valeur propre λ de A on a $\Re(\lambda) < 0$. Le système (2.12) est (a.s) si et seulement si pour toute valeur propre λ de A on a $|\lambda| < 1$.*

Démonstration

Même raisonnement que celle de la proposition (2.2.1). ■

La stabilité d'un système linéaire est liée à la nature des valeurs propres de la matrice A et qui sont solutions de l'équation

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \tag{2.13}$$

Soit la matrice de Routh-Hurwitz donnée par :

$$RH = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Alors on a le résultat suivant.

Théorème 2.2.1 [1] *Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les racines de (2.13) aient la partie réelle strictement négative est que tous les mineurs diagonaux $\Delta_k, k = 1, \dots, n$ de la matrice (2.14) soient positifs. cette condition est la conditions de routh - Hurwitz . rappelons que*

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \cdot \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Pour $k = 1, \dots, n$, les coefficients à indices supérieurs à n ou inférieurs à 0 sont Remplacés par 0 avec la convention $a_0 = 1$.

Remarque 2.2.2 [1] $\Delta_k > 0$ pour tout $k = 1, \dots, n \implies a_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Proposition 2.2.3 [1] Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les racines de l'équation (2.13) soient de module strictement inférieur à 1 est les conditions suivantes soient vérifiées :

1. $\chi(1) > 0, (-1)^n \chi(-1) > 0$.
2. $|a_n| < 1, |b_n| > |b_1|, |c_n| > |c_2| \dots, |x_n| > |a_{n-2}|$ Ou

$$b_{h-k} = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{\bar{k}} \\ 1 & a_{m-k} \end{bmatrix}, k = 0, \dots, n-1, a_0 = 1.$$

$$C_{n-k} = \det \begin{bmatrix} b_n & b_{k+1} \\ b_1 & b_{n-k} \end{bmatrix}, k = 0, \dots, n-2.$$

$\vdots \quad \quad \quad \vdots$

$$s_{n-k} = \det \begin{bmatrix} r_n & r_{B-3+k} \\ r_{n-3} & r_{n-2} \end{bmatrix}, k = 0, 1, 2.$$

2.3 Fonction de Lyapunov

Dans ce paragraphe, on étudie la stabilité d'un système à l'aide d'une fonction convenablement choisie, appelée fonction de Lyapunov. Cette méthode, dite directe, est utile pour les systèmes non linéaires et elle a l'avantage d'être applicable dans des situations non standards. Plus précisément, l'idée de base de cette méthode est de chercher une fonction définie positive, dépendant de l'état du système, et qui est décroissante le long des trajectoires du système, quand le système évolue. L'exemple classique dans un système mécanique libre avec frottement est celui de l'énergie qui décroît à moins que le système ne soit au repos et ce fait peut être utilisé pour établir la stabilité du système.

2.3.1 Cas des systèmes discrets

Considérons le système (2.16), rappelé ci-dessous,

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), k) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.16)$$

Et soit \bar{x} un point d'équilibre de ce système, alors on a la définition suivante.

Définition 2.3.1 Une fonction V définie sur Ω , une région de l'espace d'état du système discret (2.16) et contenant \bar{x} est de Lyapunov si elle vérifie les conditions :

1. V est continue sur Ω

2. V admet un minimum unique au point, \bar{x} sur Ω
3. La fonction $\Delta v(x) = v(f(x)) - V(x) \leq 0$ sur Ω .

Remarque 2.3.1 . [1]

1. La condition (3) de la définition est équivalente à dire que le long de la trajectoire du système contenue dans Ω , La fonction V est décroissante. En effet Si à l'instant k , l'état du système est x .
Alors à l'instant $k + 1$, l'état du système est $f(x)$.
Les valeurs de la fonction de Lyapunov en ces points sont $V(x)$ et $V(f(x))$ et donc la variation est $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$.
Si V est une fonction de Lyapunov sur Ω , $\Delta V(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$.
2. L'interprétation géométrique permet de conclure que si la fonction de Lyapunov existe, le point d'équilibre doit être stable.
3. La condition (2) de la définition peut être remplacée par $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ sur Ω .
En effet, il suffit de considérer la fonction W défini par $W(x) = V(x) - V(\bar{x})$.



Théorème 2.3.1 *S'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ associée au système (2.16) dans une boule $B(\bar{x}; R_0)$ alors le point d'équilibre \bar{x} est stable. Si de plus , $V(x) < 0$ en tout point (excepté \bar{x}), alors \bar{x} est (a.s).*

Démonstration

1. Soit $V(x)$ une fonction de Lyapunov supposée existe dans $B(\bar{x}; R_0)$
. Soit R tel que $0 < R < R_0$.

Soit $R_1 < R$ tel que si $x \in B(\bar{x}; R_1)$ alors $f(x) \in B(\bar{x}; R_0)$
 R_1 existe par ce que la fonction f est continue

$$\text{pour. } [R_0, \exists R_1, \forall x \in B(\bar{x}; R_1), f(x) \in B(\bar{x}; R_0)]$$

Maintenant considérant la région définie par : $R_1 \leq \| x - \bar{x} \| \leq R_0$.

Comme cette région est bornée et $V(x)$ est continue alors $V(x)$ admet un minimum sur cette région noté m .

On a : $m > V(\bar{x})$ car V admet un minimum unique au point \bar{x} sur $\Omega = B(\bar{x}, R_0)$.

Maintenant puisque V est continue, il est possible de sélectionner $0 < r < R_1$ tel que si $x \in B(\bar{x}, r)$ alors $V(x) < m$, en effet comme V est continue et comme $V(\bar{x}) < m$ si on prend $\xi = | V(\bar{x}) - m |$ alors :

$$\begin{aligned} &\exists r_1 > 0 \text{ tel que si } x \in B(\bar{x}, r_1) . \\ &\Rightarrow V(x) \in B(V(\bar{x}), \xi) \\ &\Rightarrow | V(\bar{x}) - V(x) | < \xi = | V(\bar{x}) - m | . \end{aligned}$$

On a alors :

$$|V(\bar{x}) - V(x)| < |V(\bar{x}) - m|$$

Et

$$\begin{cases} V(\bar{x}) < m & (*) \\ V(\bar{x}) < V(x) & (**) \end{cases}$$

Cela implique que $V(x) < m$ parce que si on pose l'inverse (i.e) $V(x) \geq m$.

Alors $V(x) - V(\bar{x}) \geq m - V(\bar{x}) > 0$ d'après ((*) et (**))

et donc $|V(x) - V(\bar{x})| \geq |m - V(\bar{x})| = \xi$ contradiction.

Maintenant il suffit de choisir $r < \min(r_1, R_1)$ alors

$$\forall x \in B(\bar{x}, r) \subset B(\bar{x}, r_1) \text{ on a : } V(x) < m.$$

On suppose que $x(0) \in B(\bar{x}, r)$ alors, $V(x(0)) < m$ et comme $\Delta V(x) \leq 0$ (V est un fonction de Lyapunov).

Alors la valeur de V ne peut croître avec le temps i.e , $\forall x. V(x) \leq V(x_0) < m$

Cela implique que x ne peut être à l'extérieur de $B(\bar{x}, R_1)$.

(si non $V(x)$ sera supérieur à m) tel que $m = \min_{R_1 < \|\bar{x}-x\| < R_0} V(x)$.

Et par conséquent on peut écrire :

$$\forall 0 < R < R_0, \exists r > 0 \text{ tel que Si : } \|\bar{x} - x_0\| < r, \|\bar{x} - x(k)\| < R_1 < R$$

(\bar{x} est stable). ■

2.3.2 Cas des systèmes continus

Considérons à nouveau le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.17)$$

Et soit \bar{x} un point d'équilibre de ce système, alors on a la définition suivante.

Définition 2.3.2 Une fonction V définie sur une région Ω , qui contient \bar{x} est une fonction de Lyapunov pour le système (2.17) et le point d'équilibre \bar{x} si :

1. V est continue et ses dérivées partielles sont continues.

2. V admet un minimum unique en \bar{x} sur Ω .

3. La fonction $\dot{v}(x) = \nabla V(x)f(x)$ satisfait $\dot{v}(x) \leq 0$ sur Ω .

Si $x(t)$ est la trajectoire de (2.17) alors $V(x(t))$ représente la valeur de V le long de la trajectoire. Afin que V soit décroissante le long de la trajectoire, on doit avoir $\dot{v}(x(t)) \leq 0$.

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n(t)$$

Utilisant (2.17), on obtient :

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x(t)) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x(t)) = \Delta V(x(t)) \cdot f(x(t))$$

$$\text{Avec } f = (f_1, \dots, f_n), x = (x_1, \dots, x_n)^T \text{ et } f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Théorème 2.3.2 *S'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ associée au système (2.17) dans une boule $B(\bar{x}; R_0)$, alors le point d'équilibre \bar{x} est stable. Si, de plus, la fonction $\dot{v}(x) < 0$ en tout point sauf au point \bar{x} , alors \bar{x} est asymptotiquement stable.*

Démonstration :

On suppose que $x_0 \in B(\bar{x}, R_0)$ d'après la troisième condition de la définition de la fonction V , on a V est décroissante le long de la trajectoire $x(t)$ donc $V(x(t)) \leq V(x_0)$ pour tout $t \geq 0$ avec $x(t) \in B(\bar{x}; R_0)$.

(parce que V est défini seulement sur $B(\bar{x}, R_0)$)

1. la preuve de la stabilité est identique au cas discret.
2. Maintenant Si $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in B(\bar{x}; R_0)$ sauf \bar{x} .
Alors $V(x(t))$ est positive et décroissante donc converge . Soit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x(t)) = l, \text{ Alors } \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x(t)) = 0$$

Si non il existe une constante $a > 0$ telle que $0 < a \leq -\dot{V}(x(t))$ (Densité de \mathbb{R} dans lui même).

On a :

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \leq \int_0^t -ads \leq -ta$$

Et par conséquent

$$V(\bar{x}) \leq V(x(t)) \leq V(x(0)) - ta$$

En passant a la limite quand $t \rightarrow +\infty$ on obtient,

$$V(\bar{x}) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(0)) - ta = -\infty \quad (\text{contradiction})$$

$$\text{Alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{V}(x(t)) = 0.$$

Finalement on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{V}(x(t)) = 0$

Et $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \in B(\bar{x}, R_0)$ sauf \bar{x} alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)) = V(\bar{x}) = \min_{x \in B(\bar{x}; R_0)} V(x)$$

Et comme V est continue on conclue que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$. Alors \bar{x} est asymptotiquement stable .

Proposition 2.3.1 *Si la matrice $F = A + A^T$ est définie négative sur Ω un voisinage de 0 , alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.*

Démonstration voir [1].■

Remarque 2.3.2 ([1]) *Une situation importante est celle où une fonction de Lyapunov peut être trouvée et reste constante le long de la trajectoire, ce qui correspond à $\Delta V(x) = 0$ dans le cas discret ou à $\dot{V}(x) = 0$ dans le cas continu.*

Dans ce cas on conclut que toute trajectoire du système se trouve dans le contour de la fonction V .

Les théorèmes énoncés ci-dessus concernent la stabilité locale du point d'équilibre. Pour avoir la stabilité asymptotique globale d'un système, il serait logique d'étendre le voisinage (ou la boule) Ω à tout l'espace.

Théorème 2.3.3 (Stabilité globale) *Supposons qu'il existe une fonction V de Lyapunov définie sur \mathbb{R}^n , associée au système (2.17) de point d' équilibre \bar{x} , telle que $\dot{V} < 0$ sauf en \bar{x} et $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$.*

Alors le point d'équilibre x est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration :

La preuve est identique au cas local, en considérant le fait que la fonction V est non bornée et que $\dot{V} < 0$ sauf en \bar{x} .

On conclut que pour une condition initiale donnée x_0 la trajectoire reste dans une région bornée définie par $V(x) \leq V(x_0)$.

Remarquons que le résultat de la stabilité globale implique aussi que le point \bar{x} est le seul point d'équilibre du système.■

2.3.3 Cas des systèmes linéaires continus

En général, il n'y a pas une méthode donnée pour trouver une fonction de Lyapunov pour un système non linéaire stable. Cependant il existe des formes générales de fonctions de Lyapunov pour les systèmes linéaires continus.

Soit le système linéaire continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.18)$$

Où A est une matrice de dimension $n \times n$ à coefficients réels.

Proposition 2.3.2 *Si A est une matrice asymptotiquement stable ($\Re(\lambda) < 0$ pour tout λ valeur propre de A) alors pour toute matrice Q définie positive, il existe une matrice P définie positive unique solution de l'équation Algébrique*

$$A^T P + PA + Q = 0. \quad (2.19)$$

Démonstration voir [1]. ■

La réciproque de ce résultat est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.3.3 *S'il existe une matrice Q définie positive telle que (2.19) admet une solution alors le système linéaire associé (2.18) est asymptotiquement stable.*

Démonstration voir [1] ■

Corollaire 2.3.1 *Le système (2.18) est asymptotiquement stable si et seulement si, pour une matrice définie positive Q , l'unique solution P de l'équation de Lyapunov (2.19) est définie positive.*

Remarque 2.3.3 *Le corollaire ci-dessus montre que le choix d'une matrice définie positive Q est arbitraire, par conséquent, un choix simple de Q sera la matrice Identité.*

2.3.4 Cas des systèmes linéaires discrets positifs

On considère un système autonome discret positif

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (2.20)$$

Que l'on suppose (a.s). Soit λ_0 la plus grande valeur propre de A et w un vecteur propre positif gauche associé à λ_0 ($w^T A = \lambda_0 w^T$). Soit $|x|$ le vecteur dont les composantes sont égales aux valeurs absolues des composantes du vecteur x .

Proposition 2.3.4 [1] *La fonction $V(x) = w^T |x|$ est une fonction de Lyapunov associée au système (2.20).*

CHAPITRE 3

STABILITÉ DES SYSTÈMES NON AUTONOMES ET APPLICATION GÉNÉRALE

3.1 Stabilité des systèmes non autonomes

Les systèmes non autonomes sont des systèmes dynamique qui dépendent du temps et de l'état.

La principale difficulté dans l'étude de tels systèmes est que les solutions dépendent de l'instant initial t_0 .

Considérons le système dynamique non autonome continu suivant

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (3.1)$$

Respectivement discret

$$x(k+1) = f(x(k), k) \quad (3.2)$$

Soit \bar{x} un point d'équilibre du système (3.1) (respectivement du système (3.2)).

Définition 3.1.1 *Un point d'équilibre \bar{x} du système (3.1) (respectivement du système (3.2)) est dit stable à t_0 si pour tout $R > 0$ il existe $r = r(R, t_0) > 0$ tel que :*

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(t) - \bar{x}\| < R, \quad \text{pour tout } t \geq t_0 \quad (3.3)$$

(Respectivement il existe $r(R, k_0) > 0$ tel que :

$$\|x(k_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(k) - \bar{x}\| < R, \quad \text{pour tout } k \geq k_0) \quad (3.4)$$

Dans le cas contraire le point d'équilibre \bar{x} est dit instable.

Définition 3.1.2 *Un point d'équilibre \bar{x} est dit uniformément stable (u.s) si pour tout $R > 0$ il existe $r = r(R) > 0$ indépendant de t_0 (respectivement de k_0) tel que, pour tout t_0 (respectivement pour tout k_0)*

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(t) - \bar{x}\| < R, \quad \text{pour tout } t \geq t_0 \quad (3.5)$$

$$(\text{Respectivement } \|x(k_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(k) - \bar{x}\| < R, \quad \text{pour tout } k \geq k_0). \quad (3.6)$$

Définition 3.1.3 .

1. Le point d'équilibre \bar{x} est asymptotiquement stable (a.s) pour le système (3.1) à t_0 (respectivement (3.2) à k_0) s'il est stable et s'il existe $r(t_0) > 0$ tel que Si $\|x(t_0) - \bar{x}\| < r(t_0)$ alors $\|x(t) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ (respectivement $r(k_0) > 0$) tel que si $\|x(k_0) - \bar{x}\| < r(k_0)$ alors $\|x(k) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.
2. Le point d'équilibre \bar{x} est globalement asymptotiquement stable (g.a.s) si, pour tout t_0 et $x(t_0)$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ (respectivement pour tout k_0 et $x(k_0)$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \bar{x}$).
3. Le point d'équilibre est exponentiellement stable (e.s), s'il existe α, β positifs tels que pour $x(t_0)$ proche de \bar{x} on a :

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \alpha \|x(t_0) - \bar{x}\| e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \text{pour tout } t \geq t_0. \quad (3.7)$$

4. Le point d'équilibre est globalement exponentiellement stable (g.e.s), s'il existe α, β positifs tels que pour tout t_0 et $x(t_0)$

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \alpha \|x(t_0) - \bar{x}\| e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \text{pour tout } t \geq t_0. \quad (3.8)$$

Définition 3.1.4 Le point d'équilibre \bar{x} est localement uniformément asymptotiquement stable (u.a.s) Si :

1. Il est uniformément stable.
2. Il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout R_1, R_2 avec $0 < R_2 < R_1 \leq R_0$, il existe $T(R_1, R_2) > 0$ tel que pour tout $t_0 \geq 0$, on a

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < R_1 \implies \|x(t) - \bar{x}\| < R_2 \quad \text{pour tout } t \geq t_0 + T.$$

Remarque 3.1.1 [1] La stabilité asymptotique uniforme implique la stabilité asymptotique mais la réciproque n'est pas vraie.

3.1.1 Fonction de Lyapunov

Définition 3.1.5 Une fonction continue $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite de classe K si elle satisfait :

1. $\alpha(0) = 0$.
2. $\alpha(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
3. α est croissante.

Théorème 3.1.1 *Supposons qu'il existe une fonction scalaire $V(x, t)$ dans un voisinage de \bar{x} , continue, de dérivées partielles premières continues et une fonction α de classe K telles que :*

1. *Pour tout $x \neq \bar{x}; W(x, t) = V(x, t) - V(\bar{x}, t) \geq \alpha(\|x - \bar{x}\|) > 0$.*
2. *$\dot{W}(x, t) \leq 0$ le long de la trajectoire.*

Alors le point d'équilibre est stable.

3. *Si de plus, il existe β dans K telle que $W(x, t) \leq \beta(\|x - \bar{x}\|)$ alors \bar{x} est (u . s).*
4. *Si la condition 2 est remplacée par $\dot{W}(x, t) \leq -\gamma(\|x - \bar{x}\|)$ ou γ est de classe K , alors \bar{x} est (u.a.s).*

Démonstration :

1. Stabilité. Soit $R > 0$, d'après (1) on a :

$$\alpha(\|x(t) - \bar{x}\|) \leq W(x(t), t) \quad \forall t \geq t_0.$$

Et d'après (2) on a : $\dot{W}(x, t) \leq 0$ le long de la trajectoire donc W est décroissante
Alors on a :

$$W(x(t), t) \leq W(x(t_0), t_0), \quad \forall t \geq t_0 .$$

De (1) et (2) on a :

$$\alpha(\|x(t) - \bar{x}\|) \leq W(x(t), t) \leq W(x(t_0), t_0), \quad \text{pour tout } t \geq t_0 \quad (*)$$

Or

$$W(x, t) = V(x, t) - V(\bar{x}, t)$$

est continue par rapport à x (puisque V est continue) de plus on a :

$$W(\bar{x}, t_0) = V(\bar{x}, t_0) - V(\bar{x}, t_0) = 0$$

Donc pour : $R' = \alpha(R), \exists \gamma > 0$ tel que si :

$$\begin{aligned} \|x(t_0) - \bar{x}\| < \gamma &\Rightarrow \|W(x(t_0), t_0) - W(\bar{x}, t_0)\| \leq \alpha(R) \\ &\Rightarrow \|W(x(t_0), t_0)\| \leq \alpha(R) \\ &\Rightarrow W(x(t_0), t_0) \leq \alpha(R) \quad (W > 0) \end{aligned}$$

Et de (*) on déduit que : $\alpha(\|x(t) - \bar{x}\|) < \alpha(R)$,

Par conséquent $\|x(t) - \bar{x}\| < R$ pour tout $t \geq t_0$ (α est croissante)

d'ou le point d'équilibre est stable

2. Stabilité uniforme

D'après (1) et (3) on a :

$$\alpha(\|x(t) - \bar{x}\|) \leq W(x, t) \leq \beta(\|x(t) - \bar{x}\|).$$

Soit $R > 0$ comme α et β sont dans k il est possible de sélectionner $r(R)$ tel que $\beta(r) < \alpha(R)$.

si on choisit la condition initial d'une façon telle que : $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \gamma$ on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha(R) > \beta(r) &\geq \beta(\|x(t_0) - \bar{x}\|) \\ &\geq W(x(t_0), t_0) \\ &\geq W(x(t), t) \\ &\geq \alpha(\|x(t) - \bar{x}\|), \quad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

d'ou $\alpha(R) \geq \alpha(\|x(t) - \bar{x}\|), \quad \forall t \geq t_0$

$$\Rightarrow R \geq \|x(t) - \bar{x}\|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Or le choix de r est indépendant de t_0 et donc \bar{x} est (u,s).

3. Stabilité asymptotique uniforme

Supposons que $x(t)$ ne converge plus vers \bar{x} quand $t \rightarrow +\infty$.

Donc $\dot{W}(x, t) < 0$ il existe $a > 0$ telle que : $-\dot{W}(x(t), t) \geq a \Rightarrow \dot{W}(x(t), t) \leq -a$

D'ou

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \dot{W}(x(s), s) ds &\leq - \int_{t_0}^t a ds \\ \Rightarrow W(x(t), t) - W(x(t_0), t_0) &\leq -a(t - t_0) \\ \Rightarrow W(x(t), t) &\leq W(x(t_0), t_0) - a(t - t_0) \end{aligned}$$

Quand on fait tendre $t \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} W(x(t), t) \leq -\infty \quad (\text{contradiction})$$

D'ou \bar{x} est asymptotiquement stable .

Maintenant on montre que \bar{x} est (a , u , s) pour cela on choisit une condition initiale $x(t_0)$ telle que $\|x(t_0) - \bar{x}\| < r$, r étant choisit dans la stabilité uniforme .

Soit $\mu > 0$ tel que : $0 < \mu < \|x(t) - \bar{x}\|$ de même façon que dans la stabilité uniforme on peut sélectionner $\delta(\mu) > 0$ telle que : $\beta(\delta) < \alpha(\mu)$.

Soit $\epsilon = \gamma(\delta)$ et $T = T(\mu, r) = \frac{\beta(r)}{\epsilon}$.

Supposons que $\|x(t) - \bar{x}\| \geq \delta$ pour tout $t_0 \leq t \leq t_1 = t_0 + T$.

On a alors :

$$\begin{aligned} 0 < \alpha(\delta) &\leq \alpha(\|x(t) - \bar{x}\|) \leq W(x(t), t) \\ &\leq W(x(t_1), t_1) \quad (\text{w est décroissant}) \\ &\leq W(x(t_0), t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\|x(s) - \bar{x}\|) ds \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

(Puisque $\dot{W}(x(s), s) \leq -\gamma(\|x(s) - \bar{x}\|)$)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \dot{w}(x(s), s) \leq - \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\|x(s) - \bar{x}\|) ds \\ \Rightarrow W(x(t_1), t_1) - W(x(t_0), t_0) &\leq - \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\|x(s) - \bar{x}\|) ds \end{aligned}$$

Alors (I) donne :

$$\begin{aligned} 0 < \alpha(\delta) &\leq W(x(t_0), t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\|x(s) - \bar{x}\|) ds \\ &\leq W(x(t_0), t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\delta) ds \quad (\delta \leq \|x(s) - \bar{x}\|) \\ &\leq W(x(t_0), t_0) - (t_1 - t_0)\gamma(\delta) \\ &\leq W(x(t_0), t_0) - (t_1 - t_0)\epsilon \\ &\leq \beta(\|x(t_0) - \bar{x}\|) - (t_1 - t_0)\epsilon \\ &\leq \beta(r) - (t_1 - t_0)\epsilon = 0 \\ \Rightarrow 0 < \alpha(\delta) &\leq 0 \quad (\text{contradiction}) \end{aligned}$$

Alors $\exists t_2 \in [t_0, t_1]$ tq : $\|x(t_2) - \bar{x}\| \leq \delta$ par conséquent pour $t \geq t_2$ on a : $\|x(t) - \bar{x}\| \leq W(x(t), t)$

$$\begin{aligned} &\leq W(x(t_2), t_2) \quad (\text{W est décroissant}) \\ &\leq \beta(\|x(t_2) - \bar{x}\|) \\ &\leq \beta(\delta) \\ &\leq \alpha(\mu) \end{aligned}$$

Ce qui conduit a $\|x(t) - \bar{x}\| \leq \mu, \forall t_2 \leq t \leq t_0 + T$

$$\text{d'ou le résultat avec } \begin{cases} R_1 = r \\ R_2 = \mu \\ T = \frac{\beta(r)}{\epsilon} \end{cases} \quad \blacksquare$$

3.1.2 Cas des systèmes linéaires

Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire autonome soit (a.s) est que toutes les valeurs propres de la matrice (décrivant la dynamique) du système aient leur partie réelle strictement négative. Cependant ce résultat n'est pas vrai pour les systèmes linéaires non autonomes d'équation

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{3.9}$$

En effet, considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + e^{2t}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) \end{cases} \tag{3.10}$$

(-1) est une valeur propre double de la matrice du système, pour tout $t \geq 0$. La solution de ce système est

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t}x_1(0) + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})x_2(0) \\ x_2(t) = e^{-t}x_2(0) \end{cases}$$

On a $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \infty$, pour $x_2(0) \neq 0$, d'où le système est instable. Cependant, il existe des théorèmes qui assurent la stabilité asymptotique des systèmes linéaires non autonomes. Le premier résultat est le suivant.

Théorème 3.1.2 *Supposons qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ et pour toute valeur propre λ de $A(t) + A(t)^T$, on a $\lambda \leq -\alpha$, alors le système (3.9) est asymptotiquement stable.*

Démonstration voir [1]. ■

Théorème 3.1.3 *Supposons que pour $t \geq 0$, les valeurs propres λ de $A(t)$, sont à parties réelles négatives et vérifiant : il existe $\alpha > 0$, $\operatorname{Re}(\lambda) \leq -\alpha$ pour toute valeur propre λ de $A(t)$. Si de plus la matrice $A(t)$ est bornée et vérifie*

$$\int_0^\infty A^T(t)A(t)dt < \infty$$

Alors le système est globalement exponentiellement stable (g.e.s).

Démonstration voir [1]. ■

3.2 Application générale (Problème de trois corps de Lagrange)

Définition du problème restreint des trois corps

Dans le problème des trois corps, on cherche à caractériser le mouvement d'un corps P de masse m dans le champ gravitationnel de deux masses m_1 et m_2 , avec m négligeable devant m_1 et m_2 . Les masses m_1 et m_2 sont appelées les "primaires" et on suppose qu'elles ont des orbites circulaires de même période autour de leur centre de masse commun (m_1 et m_2 peuvent, par exemple, représenter respectivement le Soleil et la Terre, tandis que le troisième corps P peut être un satellite, une sonde ou une comète). Enfin, dans ce problème, on néglige l'influence de tout autre corps, telle que les forces gravitationnelles exercées par les autres planètes.

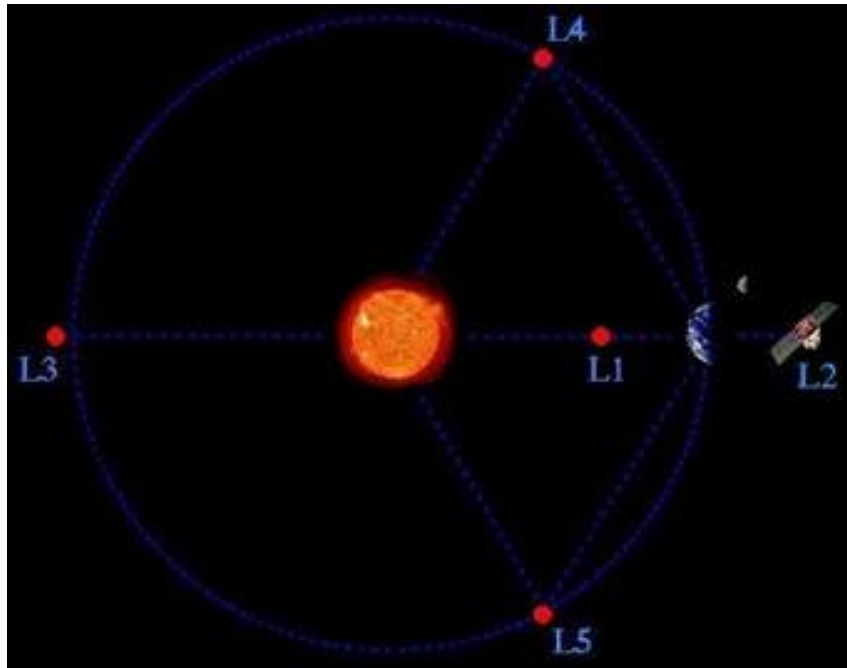


FIGURE 3.1 –

Systèmes de coordonnées

Dans un repère inertiel, les positions des primaires et les équations du mouvement de P dépendent du temps. Il est donc standard de dériver les équations du mouvement de P dans un repère tournant à la vitesse de rotation des primaires autour de leur centre de masse, et dont l'origine est située dans le plan orbital des deux primaires. On distingue, à cet égard, deux principaux systèmes de coordonnées : le système de coordonnées de Cross et celui de Richardson.

Système de coordonnées de Cross

Dans le premier, qu'on nomme système de Cross, on prend le centre de masse des primaires pour origine. L'axe des x est l'axe joignant m_1 et m_2 . L'axe des y est choisi perpendiculaire à l'axe des x dans le plan orbital des primaires. Et l'axe des z est choisi perpendiculaire à ce plan. Quant au système d'unité, il est pris sans dimension :

- La distance entre m_1 et m_2 vaut 1 .
- La somme des masses de m_1 et m_2 vaut 1 .
- La vitesse angulaire des primaires vaut 1 .

Système de coordonnées de Richardson

Le second système de coordonnées est le système de coordonnées de Richardson. C'est un système de coordonnées qui permet de se concentrer davantage sur le mouvement autour d'un des points de Lagrange L_1 et L_2 , deux des points d'équilibre du problème des trois corps (voir la section 3.2). De ce fait, on indexe la notation du système de coordonnées de Richardson par le point de Lagrange autour duquel il se place. Dans le système de Richardson (L_i), l'origine est le point de Lagrange L_i . Les axes x, y et z sont définis de la même façon que pour le système de Cross. Quant au système d'unité, seule l'unité de longueur change. C'est la distance entre le point L_i et la primaire m_2 qu'on normalise à 1 .

Équations du mouvement

Soit :
$$\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2} .$$

la masse réduite (masse de m_2 dans un des systèmes de coordonnées normalisées). Il s'agit généralement du paramètre utilisé pour caractériser le système à trois corps considéré. Dans le système de Cross.

- Les abscisses de m_1 et m_2 sont respectivement

$$x_1^0 = -\mu \text{ et } x_2^0 = 1 - \mu$$

- Les masses de m_1 et m_2 sont respectivement

$$\mu_1 = 1 - \mu \text{ et } \mu_2 = \mu$$

Le corps P est soumis aux forces d'attraction gravitationnelle exercées par les deux primaires, à la force de Coriolis et à la force centrifuge. Ainsi, en notant

$$X = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

le vecteur des positions et des vitesses de P dans le repère tournant, les équations du mouvement de P s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = 2x_5 + x_1 - (1 - \mu) \frac{x_1 - x_1^0}{r_1^3} - \mu \frac{x_1 - x_2^0}{r_2^3} \\ \dot{x}_5 = -2x_4 + x_2 - (1 - \mu) \frac{x_2}{r_1^3} - \mu \frac{x_2}{r_2^3} \\ \dot{x}_6 = -(1 - \mu) \frac{x_3}{r_1^3} - \mu \frac{x_3}{r_2^3} \end{cases}$$

Où

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

et

$$r_2 = \sqrt{(x_1 - x_2^0)^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Sont respectivement les distances entre P et les masses m_1 et m_2 . Le système peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 = f_1(X) \\ \dot{x}_2 = x_5 = f_2(X) \\ \dot{x}_3 = x_6 = f_3(X) \\ \dot{x}_4 = 2x_5 + x_1 - (1 - \mu) \frac{x_1 - x_1^0}{r_1^3} - \mu \frac{x_1 - x_2^0}{r_2^3} = f_4(X) \\ \dot{x}_5 = -2x_4 + x_2 - (1 - \mu) \frac{x_2}{r_1^3} - \mu \frac{x_2}{r_2^3} = f_5(X) \\ \dot{x}_6 = -(1 - \mu) \frac{x_3}{r_1^3} - \mu \frac{x_3}{r_2^3} = f_6(X) \end{cases}$$

On suppose

$$U(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) \quad (3.11)$$

Alors on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 = f_1(X) \\ \dot{x}_2 = x_5 = f_2(X) \\ \dot{x}_3 = x_6 = f_3(X) \\ \dot{x}_4 = 2x_5 - \frac{\partial U}{\partial x_1} = f_4(X) \\ \dot{x}_5 = -2x_4 - \frac{\partial U}{\partial x_2} = f_5(X) \\ \dot{x}_6 = -\frac{\partial U}{\partial x_3} = f_6(X) \end{cases} \quad (3.12)$$

Où $f = (f_1; f_2; f_3; f_4; f_5; f_6)$ est le champ de vecteurs du système.

3.3 Les points de lagrange

Définition 3.3.1 *Un point de Lagrange (noté $L_i, i = 1, \dots, 5$), est une position de l'espace où les champs de gravité de deux corps en orbite l'un autour de l'autre, et de masses substantielles, se combinent de manière à fournir un point d'équilibre à un troisième corps de masse négligeable, tel que les positions relatives des trois corps soient fixes.*

Ou bien : Les points de Lagrange sont les points d'équilibre du problème des trois corps, c'est-à-dire les zéros de f .

Lagrange dans son Essai sur le problème des trois corps, a montré qu'il existait exactement cinq points d'équilibre :

- Trois points colinéaires situés sur l'axe reliant les centres des deux primaires. On note généralement L_1 le point de Lagrange situé entre m_1 et m_2 , L_2 celui situé derrière la plus petite des deux masses, m_2 , et L_3 celui situé derrière la plus grosse.
- Deux points situés, dans le plan orbital des primaires formant avec les centres des primaires deux triangles équilatéraux, et sont notés L_4 et L_5 .

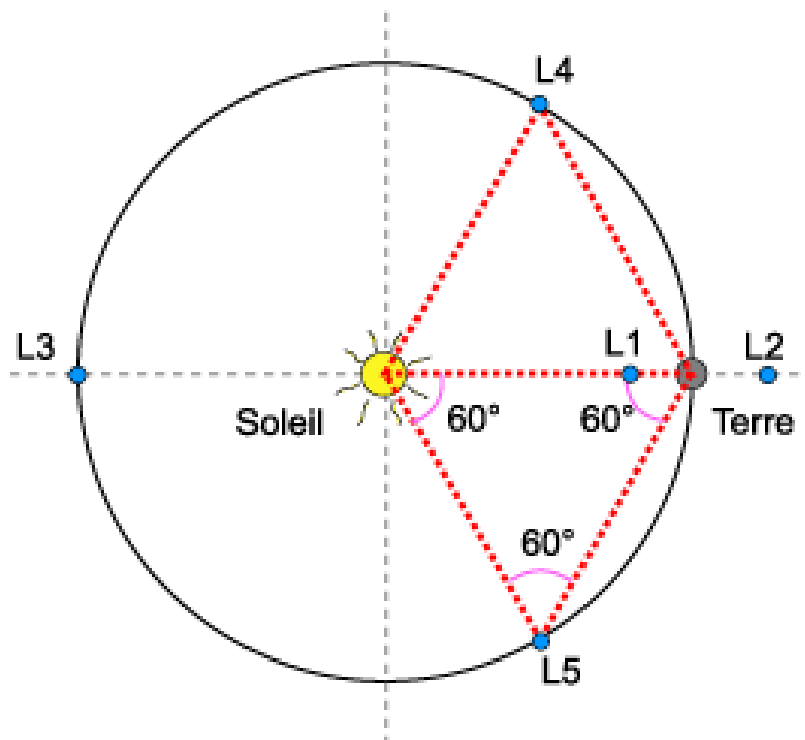


FIGURE 3.2 – Les cinq points de lagrange

3.3.1 Stabilité des points de Lagrange

Pour étudier la stabilité des points de Lagrange, on linéarise les équations du mouvement autour de chacun d'eux. (voir [7]).

Dans le cas planaire

Dans le cas planaire, les équations du mouvement linéarisées autour du point de Lagrange L_i s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\ddot{x} \\ \delta\ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\delta^2 U}{\delta x^2}(X_i) & \frac{\delta^2 U}{\delta x \delta y}(X_i) & 0 & 2 \\ \frac{\delta^2 U}{\delta x \delta y}(X_i) & \frac{\delta^2 U}{\delta y^2}(X_i) & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Quand on évalue la matrice linéarisée aux points de Lagrange colinéaires L_1, L_2 et L_3 , on trouve qu'elle a deux valeurs propres réelles dont une est positive, et une paire de valeurs propres imaginaires pures. Par conséquent, cela prouve l'instabilité des points de Lagrange colinéaires.

Quand on évalue la matrice linéarisée aux points équilatéraux L_4 et L_5 , on trouve qu'elle possède des valeurs propres imaginaires pures si $\mu < 0,03851$,

Si $\mu = 0,03851$ la matrice linéarisée a des valeurs propres multiples $\pm i\sqrt{2}/2$ avec des blocs de Jordan non triviaux.

Pour $\mu > 0,03851$ les valeurs propres sont $\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$ où λ n'est pas imaginaire pur. Dans ce dernier cas, les points de Lagrange sont clairement instables. En utilisant des résultats sur la théorie des systèmes dynamiques (on utilise les résultats de stabilité de système linéaire), on peut prouver que les points L_4 et L_5 sont stables quand $\mu < 0,03851$.

Remarque 3.3.1 *Pour une étude détaillée du cas planaire voir (Bonnard B., Faubourg L. and Trélat E., Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux. Mathématiques et Applications. Springer, 2005. chapitre 3)*

- [1] **A. EL JAI et E. ZERRIK** Stabilité des systèmes dynamiques, 247 pages, 24 juin 2013.
- [2] **A. El Jai, E. Zerrik et K. Ztot,** Systèmes dynamiques. Analyse et contrôle des systèmes localisés, ISBN : 978-2-35412-025-2, 252 pages, Décembre 2007.
- [3] **Ch. Bennani** Stabilisation et estimation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires et applications, Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammri, Tizi-ouzou, 2011.
- [4] **Ch. HARKAT** Contrôlabilité et Stabilité d'un Système de Deux Réservoirs d'eaux, Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master, Université Larbi Ben M'hidi – OUM EL BOUAGHI –, Soutenu le : 04-06-2016.
- [5] **E. Moulay** Stabilité des équations différentielles ordinaires, cel -00136497, DEA. 2007.
- [6] **F CARO et A POPIER** Stabilité des équilibres, Exemples.
- [7] **G. Archambeau** Etude de la dynamique autour des points de Lagrange, Thèse pour obtenir le grade de Docteur en sciences spécialité mathématiques, Université Paris XI, Faculté des sciences d'Orsay, 26 Septembre 2008.
- [8] **L.Mekrani** Stabilité du système dynamique céleste au voisinage des points de Lagrange, MÉMOIRE Pour l'obtention du diplôme de MASTER en Mathématiques, Université - Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi, Soutenu le 08/06/2015.
- [9] **Marc R. Roussel** Stability Analysis for ODEs, September 13, 2005.

BIBLIOGRAPHIE

[10] <http://bibmath.net/dico/index.php?action=affichequoi=./s/scinde.html>.

[11] <http://math.univ-lyon1.fr/gelineau/devagreg/LemmeGronwall.pdf>

[12] <http://math.univ-lyon1.fr/pujo/analyse-num-cours.pdf>

[13] exo7.emath.fr/cours/ch_jordan.pdf.

[14] exo7.emath.fr/cours/ch_vp.pdf.