République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère De l'Enseignement Supérieur

Et De la Recherche Scientifique

Université Abbés Laghrour Khenchela

Faculté des Sciences & Technologies

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire Présenté Pour L'obtention du Diplôme de MASTER(L.M.D)

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques appliquées

Thème

Théorème de point fixe commun avec conditions contractives généralisées et leurs applications

Présenté par : ACHOUR Ahlem et TADJINE Meryem

Soutenu le : **24/06/2018**

Jury de soutenance

Promoteur :

Pr. ABDELKRIM Abdelhalim Université Abbès Laghrour Khenchela-

Président : Dr.RAMOUL Hichem Université Abbès Laghrour- Khenchela-

Examinateur :M.HAKKER Naima Université Abbès Laghrour- Khenchela-

Promotion 2017-2018

DEDICACES

Je dédie ce travail à…

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, qui n'a pas cessé de m'encourager de prier pour moi ;

***maman** que j'adore.*

*A **mon père**, mon exemple éternel, mon soutien moral et matériel, tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.*

*A mes sœurs : « **Nasira, Salima, Soumia** ».*

*A mes frères : « **Rafik, Bilal, Yahia, Azzou** ».*

Je vous dédie ce travail avec tous vœux de bonheur, de santé et de réussite.

*A toute la famille : « **Achour** ».*

A toute mes amis et collègues de promotion.

*A mon amie, et mon binôme : « **Meryem**».*

*A tous ceux ou celles qui me sont chers et qui j'ai omis involontairement de citer. A tous qui aime **Ahlem** et tous que **Ahlem** aime.*

Ahlem

DEDICACES

Je dédie ce travail à…

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, qui n'a pas cessé de m'encourager de prier pour moi ;

***maman** que j'adore.*

*A **mon père**, mon exemple éternel, mon soutien moral et matériel, tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.*

*A mon mari : « **Mourad**».*

*A ma chérie fille : « **Joulia**»*

*A mes sœurs : « **Sara, Khaoula**».*

*A mes frères : « **Hatem, Ayoub**».*

Je vous dédie ce travail avec tous vœux de bonheur, de santé et de réussite.

*A toute la famille : « **Tadjine**».*

A toute mes amis et collègues de promotion.

*A mon amie, et mon binôme : « **Ahlem** ».*

*A tous ceux ou celles qui me sont chers et qui j'ai omis involontairement de citer .A tous qui aime **Meryem** et tous que **Meryem** aime.*

Meryem

Table des matières

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Allah le tout puissant et philanthrope, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce e travail .

Nous tenons à remercier notre encadreur **Mr. ABDELKRIM Abdelhalim**, pour ses précieux conseils et ses directives. Son aide était essentielle afin de réaliser ce travail.

Nous envoyons nos vifs remerciements aux : gérants de la bibliothèque d'université **Houari -Boumédiène** d'Alger pour nous avoir acceptées et accueillies dans leur bibliothéque.

Nous tenons également à exprimer nos sincères remerciements aux membres de jury, **Dr. RAMOUL Hichem** et **Mme. HAKKAR Naima** pour l'intérêt qu'ils ont proté à ce travail en acceptant de le rapporter.

Enfin, on remercie tous ceux qui, de prés ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Résumé

Ce mémoire est basé sur une généralisation de la commutativité, la compatibilité et de propriétés (E,A) et (CLR) de cas univoque aux paires hybrides des applications, pour lesquelles on considère une nouvelle F-contraction généralisée, qu'on l'utilise pour prouver un théorème de point fixe commun d'une paire hybride des applications occasionnellement coïncidentes idempotentes qui satisfait la condition (F, φ)-contraction généralisée sous la propriété (CLR) dans des espaces métriques complets, et un théorème concernant une paire hybride des applications satisfaisant une condition (F, φ)-contractive de type Hardy Rogers Rationnelle. Les résultats obtenus généralisent et améliorent beaucoup de résultats de la littérature existante. Comme application directe de nos résultats, on présente un exemple explicatif récapitulatif, et on prouve deux théorèmes d'existence des solutions de certain système dans la programmation dynamique, aussi l'incluions intégrale Volterra.

Abstract

This memoir is based on a generalization of the commutativity, compatibility and (E,A), (CLR) properties, from the single-valued case to hybrid pairs of mappings, for wihch we consider a new generalized F-contraction, and utilize to prove a common fixed point theorem for a hybrid pair of occasionally coincidentally idempotent mappings satisfying generalized (F, φ)-contraction condition under comon limit range (CLR) property in complete metric spaces, and a theorem involving a hybrid pair of mappings satisfying a Rational Hardy-Rogers (F, φ)-contractive condition. The obtained result generalize and improve several results of the existing literature. As a direct mapping we present an illustrative recapitulative example, and we prove two therorems for the existence of solutions of certain system of functional equation in dynamic programming, and Volterra integral inclusion.

ملخص

هذه المذكّرة مبنيّة علَى تعميم لخوَاص التّبديلية، اَلتّوَافقية و خَاصيتي (E,A) ، (CLR) ، من الحَالة الأحَادية الَى الأزوَاج الهجينة من التّطبيقَات، التي نَأخذ من أَجلهَا تقلّصَا معمّمَا جَديدًا $(F-contraction)$ ، نستعمله لبرهنة نظريّة النّقطة الثَّابتة المشتركة لزوج هجين من التّطبيقَات التّصَادفية الجَامدة المتزَامنة، التي تحقّق شرط التّقلّص المعمّم (F,φ) ، تحت خَاصّيّة (CLR) في الفضَاءَات المتريّة التَّامّة، و نظريّة تخص زوج هجين من التّطبيقَات التي تحقّق شرط التّقلّص (F,φ) من نوع هَاردي روجرز النَاطق. اَلنّتَائِج المحصّل عليهَا تعمّ و تحسّن العديد من النّتَائِج المتدَاولة حَاليًّا، كتطبيق مبَاشر لهته النّتَائِج نستعرض مثَال تفسيري و ملخّص، و نبرهن نظريّتين لوجود حلول لبعض الأنظمة في البرمجة الدّينَاميكيّة، و أَيضَا الإِحتوَاء التّكَاملي ڤولتيرَا $(volterra)$.

Introduction

La théorie du point fixe est une branche trés importante en mathématiques, il s'agit d'une combinaison de l'analyse, de la topologie et de la géométrie. Au cours des cinq derniéres décinnés, la théorie de point fixe a été révélé comme un outil trés puissant et trés important dans l'étude des phénomènes non linéaires. Le théorème de point fixe le plus élémentaire et certainement le plus utilisé est le Principe de Contraction de Bannach, appelé aussi Théorème de point fixe de Bannach, qui est un théorème simple à prouver et qui s'applique aux espaces complets et possède de nombreuses applications, incluent les théorèmes d'existences pour les équations différentielles, équations intégrales et convergence de certaines méthodes numériques comme celle de Newton pour la résolution d'équation.

Dans notre travaille on traite particulièrement le théorème de point fixe concernant les paires hybrides des applications univoques et multivoques, qui est un nouveau développement dans l'analyse non linéaire. Rappelons que le Principe de Contraction de Bannach a été généralisé aux fonctions multivoques par Nadler en 1969, aussi les concepts les plus discutés de la commutativité et la commutativité faible ont été prolongé aux paires hybrides des applications dans des espaces métriques par Kaneko. En 1989, Singh a prolongé la notion des applications compatibles et obtenu quelques théorèmes de coïncidence et de point fixe commun pour des contraction hybrides non linéaires. Ensuite, Pathak a généralisé le concept de la compatibilité en définissant la compatibilité faibles des paires hybrides des applications, et procédé de la même manière pour prouver les théorèmes de point fixe commun. En 2002, Aamri et El-Moutawakil ont introduit la propriété (E,A) pour des applications univoques. Après, Kamran a prolongé la notion de la propriété (E,A) aux paires hybrides des applications. En 2011, Sintunavarat et Kuman, ont introduit la notion de la propriété (CLR) des applications univoques, et montré sa supériorité par rapport à la propriété(E,A). Motivé par ce fait, Imdad a établit la propriété (CLR) pour des paires hybrides des applications et prouvé quelques résultat de point fixes dans des espaces symétrique(semi-métrique).

La nouveauté apportée par notre mémoire aux théorèmes de point fixe, est la considération d'une nouvelle contraction généralisée concernant une paire hybride des applications appelée la condition (F, φ)-contraction généralisée, donc le but souligné de ce travaille et de prouver des théorèmes de point fixe commun pour des paires hybrides de certain type d'application qui est les applications occasionnellement coïncidentes idempotentes, qui satisfont la condition (F, φ)-contraction généralisée, une fois sous la propriété (CLR) dans des espaces métriques, et dans la deuxième pour les paires hybrides satisfont la condition (F, φ)-contractive de type Hardy-Rogers.

Pour bien développer le thème proposé, ce mémoire s'articule autour de trois chapitres :

Dans un premier chapitre on présente les outils fondamentaux pour mener à bien ce travaille, en faisant rappel du Principe de Contraction de Bannach et de la compatibilité, en introduisant le cas multivoque et les paires hybrides des applications, et aussi les propriétés principales (E,A) et (CLR), en présentant quelques exemples.

Le chapitre 2 est dévissé par deux parties, chacune contient le théorème principal du point fixe commun pour des paires hybrides des applications précises sous des conditions bien précises, avec leurs preuve, et aussi les principaux résultats tirés des théorèmes, avec la fourniture d'un exemple illustratif récapitulatif.

Dans le chapitre 3, on trouve l'application des résultat obtenus précédemment pour prouver l'existence des solutions de certains système d'équations fonctionnelles surgissant dans la programmation dynamique, aussi bien qu'incluions intégrale Volterra.

Nos résultat généralisent et améliorent plusieurs résultat connus de la littérature existante.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rassemblons toutes les notations et les notions de base indispensables pour la suite. On fait un rappel du principe de compatibilité, et on introduit le cas multivoque et les paires hybrides des applications. A la fin on annonce les propriétés (E, A) et (CLR), en présentant quelques exemples.

1.1 Applications contractantes

Espace métrique

Définition 1.1.1 *Une distance (métrique) sur un ensemble $X \neq \emptyset$ est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in X$

2. $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$

3. $d(x, y, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X$

Définition 1.1.2 *Un espace métrique est un couple (X, d) où E est un ensemble et d est une distance.*

Définition 1.1.3 *Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est dite :*

1. *Lipschitzienne (ou k-Lipschitzienne) si et seulement s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que pour tout $x, y \in X$ on a*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y),$$

2. contraction ou une application contractante, si $k < 1$,

3. non expansive si et seulement si $k = 1$.

4. contractive si et seulement si pour tout $x, y \in X$, on a :

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

Notons que : contraction⇒contractive ⇒non expansive ⇒Lipschitzienne, et que toutes ces fonctions sont continues.

1.2 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.2.1 (Picard.Banach 1922) *Soit (X, d) un espace métrique complet (ou bien un espace de Banach si X possède une norme), $f : X \to X$ une contraction. Alors f admet un point fixe unique dans X,(i,e) $\exists! u \in X$ tel que $fu = u$. En outre ce point peut-être obtenue comme limite de toute suite engendrée par l'itération*

$$x_{n+1} = fx_n, n \in \mathbb{N} \text{ avec } x_0 \text{ élèment arbitraire de } X$$

Preuve Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$la suite engendrée par l'itération ci-dessus. Alors la condition de contraction de f donne :

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(fx_0, fx_1) \leq kd(x_0, x_1) \\ d(x_2, x_3) &= d(fx_1, fx_2) \leq k^2 d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Ainsi, pour un n quelconque on aura

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$$

De plus, des applications répétées de l'inégalité triangulaire donnent pour des entiers arbitraires $n, p \in \mathbb{N}^*$.

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

Avec l'ensemble des inégalités précédentes, celle-ci nous donne

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n(1-k^p)}{1-k} d(x_0, x_1) < \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \to 0, \text{si } n \to \infty$$

Evidemment l'inégalité stricte et la convergence vers 0 découlent du fait que $k \in]0,1[$. Pour conséquent $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$est une suite de Cauchy, et comme X est complet, elle converge vers une limite $u \in X$, Clairement, u est un point fixe de f puisque continue. Pour prouver l'unicité, supposons que l'on a deux points fixes u, v différents tels que,

$$0 < d(u,v) = d(fu, fv) \leq kd(u,v)$$

ce qui implique :

$$(1-k)d(u,v) \leq 0$$

avec $k \in [0,1[$, or ceci est absurde .

Corollaire 1.2.1 *Si $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet X, et $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$; une application contractante sur S, alors f possède un unique point fixe sur S.*

Notons que le caractère complet est indispensable ici. En effet, l'itération

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1+x_n}, n \geq 1$$

est une contraction sur $\mathbb{Q}^+$ mais ne converge pas puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^+$.

Exemple Considérons $fx = \frac{1}{7}(x^3 + x^2 + 1)$pour $x \in [0,1]$. On voit que $1 \leq (x^3 + x^2 + 1) \leq 3$, par conséquent, $f[0,1] \subset \left[\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right] \subset [0,1]$.

$$\begin{aligned} |fx - fy| &= \frac{1}{7}|x^3 - y^3 + x^2 - y^2| \\ &= \frac{1}{7}|x-y||x^2 + y^2 + xy + x + y| \\ &\leq \frac{5}{7}|x-y|, \text{pour tout } x, y \in [0,1] \end{aligned}$$

Cela montre que f est une application contractante sur $[0,1]$, qui est complet, alors il existe une solution unique pour

$$x = \frac{1}{7}\left(x^3 + x^2 + 1\right)$$
$$x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$$

Sur $[0,1]$, on peut obtenir cette solution numériquement par processus itératif en commençant par n'importe quel point initial de $[0,1]$. Par exemple, pour $x_0 = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) = 0,4286, x_2 = f(x_1) = 0,1803, x_3 = f(x_2) = 0,1483 \\ x_4 &= f(x_3) = 0,1465, x_5 = f(x_4) = 0,1464, x_6 = f(x_5) = 0,1464 \end{aligned}$$

Théorème 1.2.2 *Si (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application telle que T^n contractante pour un certain positif n, alors T admet un point fixe unique.*

Preuve Soit $u \in X$ l'unique point fixe commun de T^n. Alors,

$$Tu = T(T^n u) = T^{n+1}u = T^n(Tu)$$

ceci implique que Tu est un point fixe pour T^n. Par unicité on a $Tu = u$, c-à-d que u est un point fixe pour tout T. Pour démontrer l'unicité du point fixe de T, supposons que v en est un autre, alors ;

$$v = Tv = T(Tv) = ... = T^n v$$

Donc, v est aussi un point fixe pour T^n. Ainsi $u = v$.

Théorème 1.2.3 *Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \to X$ une application contractive. Soit $x_0 \in X$ tel que la suite $\{T^n x_0\}$ admet une sous suite convergente vers un point $u \in X$. Alors u est un point fixe pour T.*

En particulier, on a le corollaire suivant

Corollaire 1.2.2 *Soit (X, d) un espace métrique et $T : X \to S$ une application contractive, où S est un compact de X. Alors T admet un unique point fixe $u \in S$, et $u = \lim_{n\to\infty} T^n x_0$, où x_0 est un point arbitraire de X.*

1.3 Applications compatibles

Définition 1.3.1 *Soient S, T deux applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même. S et T sont dites commutatives si $STx = TSx$, pour tout $x \in X$.*
On dit que S et T sont faiblement commutatives si et seulement si $d(STx, TSx) \leq d(Tx, Sx)$ pour tout $x \in X$.

Définition 1.3.2 *S et T sont dites compatibles si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} d(STx_n, TSx_n) = 0$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t$$

pour un certain $t \in X$.

Remarque 1.3.1 *Si S et T sont commutatives, alors elles sont faiblement commutatives, donc compatibles, mais la réciproque est fausse en général.*

Exemple Soient $X = \mathbb{R}$ et d la métrique euclidienne. Définissons :

$$Sx = \frac{x+1}{2} \text{ et } Tx = 2x - 1$$

Soit la suite $\{x_n\}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = 1$$

De plus

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} STx_n &= \lim_{n\to\infty} S(1 + \frac{2}{n}) = 1 \\ \lim_{n\to\infty} TSx_n &= \lim_{n\to\infty} T(1 + \frac{1}{2n}) = 1 \end{aligned}$$

Donc (S, T) est compatible .

Dans tout ce qui suit, on utilise la notation :

- $CL(X) = \{A : A$ est un sous-ensemble fermé non-vide de X$\}$
- $CB(X) = \{A : A$ est un sous-ensemble fermé et borné non-vide de X$\}$
- $d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$

Définition 1.3.3 *Soit X un espace métrique. Pour les sous-ensembles fermés et bornés non-vides A et B de X, on pose*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max \{\sup \{d(a, B) : a \in A\}, \sup \{d(b, A) : b \in B\}\}.$$

*tels que $CB(X)$ est un espace métrique avec $\mathcal{H}$ est une métrique appelée **la métrique de Hausdorff**.*

Définition 1.3.4 *Une fonction multivoque $F : X \to Y$ est une application qui à chaque $x \in X$ associe $F(x)$ un ensemble non-vide de Y. Mais l'univoque c'est une application qui à chaque $x \in X$ associe $F(x)$ un élément de Y.*

Applications faiblement compatibles

Définition 1.3.5 *S et T sont dites faiblement compatibles si elles commutent aux points de coïncidence ;i.e., pour tout $u \in X$ satisfaisant $Su = Tu$, alors $STu = TSu$.*

Exemple Soit $X =[0, 2]$ munit de la métrique euclidienne, définissons S et T par :

$$Sx = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Le point 1 satisfaisant $S(1) = T(1) = 1$ et $ST(1) = TS(1) = 1$, alors (S, T) est faiblement compatible.

Compatibilité occasionnellement faible

Définition 1.3.6 *S et T sont dites occasionnellement faible compatibles si et seulement s'il existe un certain point $u \in X$ satisfaisant $Su = Tu$ et $STu = TSu$.*
De cette dernière on a faiblement compatible implique occasionnellement faiblement compatible.

1.4 La propriété (E, A)

Définition 1.4.1 *Soient $S, T : X \to X$, (S, T) satisfait la propriété (E, A) s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant :*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t,$$

pour $t \in X$.

Remarquons que si (S, T) est compatible, alors elle satisfait la propriété (E, A), mais il existe des applications qui ne sont pas compatibles et satisfaisant cette propriété.

Exemple Soient $X = [0,1]$ et $d(x,y) = \mid x - y \mid$, définissons S et T par :

$$Sx = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x+1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \quad Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x+1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Soit la suite $\{x_n\}$ définie par :

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \frac{1}{2},$$

alors S et T satisfont la propriété $(E.A)$. D'autre part, on a :

$$\lim_{n\to\infty} TSx_n = \lim_{n\to\infty} T(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}) = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = \frac{1}{2},$$

donc S et T ne sont pas compatibles.

Définition 1.4.2 *Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même. On dit qu'elles satisfont la propriété $(E.A)$ commune s'il existe deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ dans X vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} By_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = t,$$

pour un certain t dans X.

Si $A = B$ et $S = T$ on obtient la définition précédente .

Exemple Dans l'espace métrique $(\mathbb{R}_+, |\ .\ |)$, définissons les applications A, B, S et T définies par :

$$Ax = \frac{3x+1}{4}, \quad Bx = \frac{x+1}{3}, \quad Sx = \frac{2x+1}{3}, \quad Tx = \frac{1}{2}x,$$

Soient les deux suites de $\mathbb{R}_+$ définies par :

$$x_n = 1 + \frac{1}{n+1}, \quad y_n = 2 + \frac{1}{n+1}.$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} By_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = 1,$$

donc A, B, S et T satisfont la propriété $(E.A)$ commune.

Kamran a généralisé la propriété $(E.A)$ pour les applications multivoques comme suit :

Définition 1.4.3 *Soient $A : X \to X$ une application univoque et $S : X \to CB(X)$ une application multivoque. On dit que (A, S) satisfait la propriété $(E.A)$ s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = M \in CB(X) \text{ et } \lim_{n\to\infty} Ax_n = t \in M,$$

pour un certain $x \in X$.

1.5 La propriété (CLR)

Définition 1.5.1 *Soient A et T deux applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même. On dit que la paire (A, S) satisfait la propriétié (CLR) qui concerne l'application S, noté par (CLR_S) s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X tels que*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = t,$$

où $t \in S(X)$.

Définition 1.5.2 *Soit (X, d) un espace métrique, $f : X \to X$ et $T : X \to CB(X)$. On dit que la paire (f, T) satisfait la propriétié (CLR) qui concerne l'application f, noté par (CLR_f) s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X tels que*

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = fu \in A = \lim_{n\to\infty} Tx_n,$$

pour un certain $u \in (X)$ et $A \in CB(X)$.

Chapitre 2

Théorèmes de Points fixes communs pour les (F, φ)-contractions hybrides généralisées sous la propriété (CLR)

Dans ce chapitre on annonce quelques propriétés et notations décrites dans le chapitre précédent mais dans le cas les paires hybrides des applications, puis les deux principaux théorèmes avec leurs preuves et un exemple explicatif

2.1 Théorème du point fixe de Nadler

En 1969, Nadler a prouvé que toute contraction multivoque définie sur un espace métrique complet a un point fixe. En prouvant ce résultat, Nadler a utilisé l'idée de la métrique de Hausdorff pour établir la version multivoque de Principe de Contraction de Banach comme suit :

Théorème 2.1.1 *Soit (X, d) un espace métrique complet et $\mathcal{T}$ une application de X dans $CB(X)$ telle que pour tout $x, y \in X$,*

$$\mathcal{H}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \lambda d(x, y),$$

où $\lambda \in [0, 1)$. Alors $\mathcal{T}$ a un point fixe, i.e, alors il existe $x \in X$ tel que $x \in \mathcal{T}x$.

2.2 Applications F-contractives

Définition 2.2.1 *Soient $f : X \to X, T : X \to CB(X)$ deux applications univoque (resp multivoque). Alors :*

- *Un point $x \in X$ est un point fixe de f (resp. T) si $x = fx$ (resp $x \in Tx$). L'ensemble de tous les points fixes de f(resp. T) est noté par $F(f)$ (resp. $F(T)$).*
- *Un point $x \in X$ est un point de coïncidence de f et T si $fx \in Tx$. L'ensemble de tous les points de coïncidence de f et Test noté par $\mathcal{C}(f, T)$.*
- *Un point $x \in X$ est un point fixe commun de f et T si $x = fx \in Tx$. L'ensemble de tous les points fixes communs de f et T est noté par $F(f, T)$.*
- *T est une application multivoque fermée si le graphe de T ;i.e, $G(T) = \{(x, y) : x \in X, y \in Tx\}$ est un sous-ensemble fermé de $X \times X$.*

Nous rappelons aussi la terminologie suivante souvent utilisée dans les considérations des paires hybrides des applications.

Définition 2.2.2 *Soit (X, d) un espace métrique, f :$X \to X$, $T : X \to CB(X)$. Alors la paire hybride (f, T) est dite :*

- *commutative sur X si $fTx \subseteq Tfx$, $\forall x \in X$.*
- *faiblement commutative sur X si $\mathcal{H}(fTx, Tfx) \leq d(fx, Tx) \forall x \in X$.*
- *compatible si $fTx \in CB(X)$, $\forall x \in X$ et $\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(Tfx_n, fTx_n) = 0$,*
  $\forall \{x_n\}$ une suite de X telle que :
  $\lim_{n\to\infty} Tx_n \to A \in CB(X)$ *et* $\lim_{n\to\infty} fx_n \to t \in A$.
- *non-compatible s'il existe au moins une suite $\{x_n\}$ de X telle que :*

  $\lim_{n\to\infty} Tx_n \to A \in CB(X)$ *et* $\lim_{n\to\infty} fx_n \to t \in A$ *mais* $\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(Tfx_n, fTx_n) \nrightarrow 0$ *ou bien n'existe pas.*
- *faiblement compatible si $Tfx = fTx$ pour tout $x \in \mathcal{C}(f, T)$.*
- *coïncidente idempotente, si pour tout $v \in \mathcal{C}(f, T), ffv = fv$ i.e, f est idempotente aux points de coïncidence de f et T.*
- *occasionnellement coïncidente idempotente si $ffv = fv$ pour un certain $v \in \mathcal{C}(f, T)$.*
- *vérifie la propriété $(E.A)$ s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X telle que*

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = t \in A = \lim_{n\to\infty} Tx_n,$$

pour un certain $t \in X$ et $A \in CB(X)$.

- *vérifie la propriété (CLR$_f$) qui concerne l'application f s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X telle que*

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} fu \in A = \lim_{n\to\infty} Tx_n$$

pour un certain $u \in X$ et $A \in CB(X)$.

L'exemple suivant démontre l'interaction de la propriété d'idempotente occasionnellement coïncidence avec d'autres notions décrites dans la définition précédente.

Exemple 1 Soit $X = \{1, 2, 3\}$ (avec la métrique euclidienne)

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } T : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1\} & \{1,3\} & \{1,3\} \end{pmatrix}$$

Alors, il est claire que :

- $\mathcal{C}(f, T) = \{1, 2\}$ et $F(f, T) = \{1\}$.
- (f, T) n'est pas commutative ni faiblement commutative.
- (f, T) n'est pas compatible.
- (f, T) n'est pas faiblement compatible.
- (f, T) n'est pas coïncidente idempotente car $ff2 = f3 = 2 \neq 3 = f2$.
- (f, T) est occasionnellement coïncidente idempotente car$ff1 = 1 = f1$.

L'exemple suivant démontre la relation entre la propriété $(E.A)$ et la propriété (CLR$_f$).

Exemple 2 Soient $X = [0, 2]$ un espace métrique munit de la métrique usuelle $d(x, y)$ $= |x - y\ |$. On définit ,$f, g : X \to X$ et $T : X \to CB(X)$ comme suit :

$$fx = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{9}{5}, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases} \quad gx = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{9}{5}, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad Tx = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], & 0 \leq x \leq 1, \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

D'une part on peut vérifier que la paire (f, T) satisfait la propriété $(E.A)$, mais pas la propriété (CLR$_f$). D'autre part, la paire (g, T) satisfait la propriété (CLR$_g$).

Remarque 2.2.1 *Si la paire (f, T) satisfait la propriété $(E.A)$, avec le fait que $f(X)$ soit fermé, donc elle satisfait aussi la propriété (CLR$_f$).*

Dans toute la suite on note par $\mathcal{F}$ la famille de toutes les fonctions $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui satisfait les conditions suivantes :

(F_1) F est continue et strictement croissante ;

(F_2) pour toute suite $\{\beta_n\}$ de nombres positifs, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} F(\beta_n) = -\infty$;

(F_3) Il existe $k \in (0,1)$ tel que $\lim\limits_{\beta\to 0^+} \beta^k F(\beta) = 0$.

Quelques exemples de fonctions $F \in \mathcal{F}$ sont $F(t) = ln\ t$, $F(t) = t + ln\ t$, $F(t) = -1/\sqrt{t}$.

Définition 2.2.3 *Soient (X,d) un espace métrique, T une application de X sur lui même est appelée une F-contraction s'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau \in \mathbb{R}^+$ tels que :*

$$\tau + F(d(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y)), \tag{2.1}$$

pour tout $x, y \in X$ et $d(Tx,Ty) > 0$.

Exemple Soit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application donnée par $F(x) = ln\ x$. Il est clair que F satisfait $(F_1) - (F_3)$ pour tout $k \in (0,1)$. D'après cette position (2.1) est réduite à

$$d(Tx,Ty) \leq e^{-\tau} d(x,y) \text{ pour tout } x, y \in X, Tx \neq Ty.$$

Remarquons que pour tout $x, y \in X$ tel que $Tx = Ty$, l'inégalité précédente se tient aussi et par conséquent T est une contraction.

Dans ce qui suit, pour un espace métrique (X,d) et une application multivoque $T : X \to CL(X)$, on dénote :

$$M(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}\left[d(x,Ty) + d(y,Tx)\right]\right\}.$$

Définition 2.2.4 *Soit (X,d) un espace métrique, une application multivoque $T : X \to CL(X)$ est une F-contraction s'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau \in \mathbb{R}^+$tels que pour tout $x, y \in X$ avec $y \in Tx, \exists z \in Ty$,*

$$\tau + F(d(y,z)) \leq F(M(x,y)), \forall d(y,z) > 0. \tag{2.2}$$

Exemple Soit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application donnée par $F(x) = ln\ x$, pour toute application multivoque $T : X \to CL(X)$ satisfait (2.2) on a :

$$d(y,z) \leq e^{-\tau} M(x,y) \text{ pour tout } x, y \in X, z \in Ty, y \neq z.$$

2.3 (F,φ)-contractions hybrides généralisées et le théorème de point fixe

Cette section est divisée par deux parties. Dans la première partie, on prouve un théorème de point fixe commun pour une paire hybride des applications occasionnellement coïncidentes idempotentes satisfaisants les conditions (F,φ)- contractions généralisés via la propriété (CLR) dans des espaces métriques complets, tandis que dans la deuxième on obtient des résultats pour des paires hybrides qui satisfont un une condition (F,φ)-contractive de type Hardy- Roger Rationnelle.

Nous rappelons d'abord la définition suivante :

Semi-continuité inférieure :

Définition 2.3.1 *Soit X un espace métrique. Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement si, pour tout $x \in X$ $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$ ou, de façon équivalente, si l'ensemble $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ est fermé pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Elle est semi-continue supérieurement si $(-f)$ est semi-continue inférieurement .*

Définition 2.3.2 *Soient (X,d) un espace métrique, $f : X \to X$ et $T : X \to CB(X)$. La paire hybride (f,T) est appelée une (F,φ) - contraction généralisée, s'il existe une application croissante semi-continue supérieurement.*

$$\Phi = \left\{\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty) \mid \lim_{s\to t^+} \sup \varphi(s) < \varphi(t), \varphi(t) < t, \forall t > 0\right\},$$

$F \in \mathcal{F}$ et $\tau \in \mathbb{R}^+$ tel que

$\tau + F(\mathcal{H}^p(Tx,Ty))$

$$\leq F\left(\varphi\left(\max\left\{\begin{array}{c} d^p(fx,Tx), d^p(fy,Ty), d^p(fy,fx), \frac{1}{2}[d^p(fx,Ty) + d^p(fy,Tx)] \\ \frac{d^p(fx,Tx)d^p(fy,Ty)}{1+d^p(fy,fx)}, \frac{d^p(fx,Ty)d^p(fy,Tx)}{1+d^p(fy,fx)}, \frac{d^p(fx,Ty)d^p(fy,Tx)}{1+d^p(Tx,Ty)} \end{array}\right\}\right)\right) \tag{2.3}$$

pour tout $x,y \in X, p \geq 1$ avec $\mathcal{H}(Tx,Ty) > 0$.

Définition 2.3.3 *Soit (X,d) un espace métrique, $f : X \to X$, $T : X \to CB(X)$. Alors on dit que la paire hybride (f,T) est une (F,φ) - contraction de type Hardy- Rogers Rationnelle, s'il existe une application croissante semi-continue supérieurement.*

$$\Phi = \left\{ \varphi : [0,\infty) \to [0,\infty) \mid \lim_{s\to t^+} \sup \varphi(s) < \varphi(t), \varphi(t) < t, \forall t > 0 \right\},$$

$F \in \mathcal{F}$ et $\tau \in \mathbb{R}^+$ tel que

$\tau + F(\mathcal{H}^p(Tx,Ty))$

$$\leq F\left(\varphi\left(\begin{array}{c} \alpha d^p(fx,fy) + \frac{\beta[1+d^p(fx,Tx)]d^p(fy,Ty)}{1+d^p(fx,fy)} + \gamma[d^p(fx,Tx)+d^p(fy,Ty)] \\ +\delta[d^p(fx,Ty)+d^p(fy,Tx)] \end{array}\right)\right) \tag{2.4}$$

pour tout $x,y \in X, Tx \neq Ty$ quand $p \geq 1, \alpha,\beta,\gamma,\delta \geq 0, \alpha+\beta+2\gamma+2\delta \leq 1$.

Le premier résultat principal proposé est :

Théorème 2.3.1 *Soient (X,d) un espace métrique, $f : X \to X$ et $T : X \to CB(X)$. Si la paire hybride (f,T) satisfait la condition $(F,\varphi)-$ contraction généralisée (2.3) et satisfait aussi la propriété (CLR_f), alors f et T ont un point de coïncidence.*
De plus, si la paire hybride (f,T) est occasionnellement coïncidente idempotente, donc elle a un point fixe commun.

Preuve Comme la paire (f,T) satisfait la propriété CLR$_f$, il existe une suite $\{x_n\}$ dans X telle que

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = fu \in A = \lim_{n\to\infty} Tx_n,$$

pour un certain $u \in X$ et $A \in CB(X)$. On assure que $fu \in Tu$. Sinon, utilisant ensuite la condition (2.3), on a

$\tau + F(\mathcal{H}^p(Tx_n,Tu))$

$$\leq F\left(\varphi\left(\max\left\{\begin{array}{c} d^p(fx_n,Tx_n), d^p(fu,Tu), d^p(fu,fx_n), \frac{1}{2}\left[d^p(fx_n,Tu)+d^p(fu,Tx_n)\right], \\ \frac{d^p(fx_n,Tx_n)d^p(fu,Tu)}{1+d^p(fu,fx_n)}, \frac{d^p(fx_n,Tu)d^p(fu,Tx_n)}{1+d^p(fu,fx_n)}, \frac{d^p(fx_n,Tu)d^p(fu,Tx_n)}{1+d^p(Tx_n,Tu)} \end{array}\right\}\right)\right)$$

Passant à la limite si $n \to \infty$ on obtient

$$\begin{aligned}\tau + F(\mathcal{H}^p(A,Tu)) &\leq F\left(\varphi\left(\max\left\{\begin{array}{c} d^p(fu,A), d^p(fu,Tu), 0, \frac{1}{2}\left[d^p(fu,Tu)+d^p(fu,A)\right], \\ \frac{d^p(fu,A)d^p(fu,Tu)}{1+d^p(fu,fu)}, \frac{d^p(fu,Tu)d^p(fu,A)}{1+d^p(fu,fu)}, \frac{d^p(fu,Tu)d^p(fu,A)}{1+d^p(A,Tu)} \end{array}\right\}\right)\right) \\ &= F\left(\varphi\left(\max\left\{\begin{array}{c} d^p(fu,A), d^p(fu,Tu), 0, \frac{1}{2}\left[d^p(fu,Tu)+d^p(fu,A)\right], \\ d^p(fu,A)d^p(fu,Tu), \frac{d^p(fu,A)d^p(fu,Tu)}{1+d^p(A,Tu)} \end{array}\right\}\right)\right).\end{aligned}$$

On utilise la propriété de Φ et (F_1) et comme $fu \in A, \tau > 0$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^p(A,Tu) &\leq \varphi\left(\max\left\{0, d^p(fu,Tu), 0, \frac{1}{2}\left[d^p(fu,Tu)+0\right], 0, 0\right\}\right) \\ &= \varphi(d^p(fu,Tu)) \\ &< d^p(fu,Tu).\end{aligned}$$

Comme $fu \in A$ l'inégalité ci-dessus implique

$$d(fu,Tu) \leq \mathcal{H}(A,Tu) < d(fu,Tu),$$

Une contradiction. Par conséquent $fu \in Tu$ qui montre que la paire (f,T) a un point de coïncidence ($i.e$, $\mathcal{C}(f,T) \neq \emptyset$).

Supposons que la paire hybride (f,T) est occasionnellement coïncidente idempotente. Alors pour un certain $v \in \mathcal{C}(f,T)$, on a $ffv = fv \in Tv$, Si $Tv = Tfv$, Sinon, on utilise ensuite la condition (2.3), on aura

$\tau + F(\mathcal{H}^p(Tfv,Tv))$

$$\begin{aligned}&\leq F\left(\varphi\left(\max\left\{\begin{array}{c} d^p(ffv,Tfv), d^p(fv,Tv), d^p(fv,f\ fv), \frac{1}{2}\left[d^p(fv,Tfv)+d^p(f\ fv,Tv)\right], \\ \frac{d^p(f\ fv,Tfv)d^p(fv,Tv)}{1+d^p(fv,f\ fv)}, \frac{d^p(fv,Tfv)d^p(f\ fv,Tv)}{1+d^p(fv,f\ fv)}, \frac{d^p(fv,Tfv)d^p(f\ fv,Tv)}{1+d^p(Tfv,Tv)} \end{array}\right\}\right)\right) \\ &= F\left(\varphi\left(\max\left\{\begin{array}{c} d^p(fv,Tfv), d^p(fv,Tv), 0, \frac{1}{2}\left[d^p(fv,Tfv)+d^p(fv,Tv)\right], \\ d^p(fv,Tfv)d^p(fv,Tv), d^p(fv,Tfv)d^p(fv,Tv), \frac{d^p(fv,Tfv)d^p(fv,Tv)}{1+d^p(Tfv,Tv)} \end{array}\right\}\right)\right).\end{aligned}$$

Comme $fv \in Tv$ l'inégalité ci-dessus implique

$$\begin{aligned}\tau + F(\mathcal{H}^p(Tfv,Tv)) &\leq F\left(\varphi\left(\max\left\{d^p(fv,Tfv), 0, 0, \frac{1}{2}d^p(fv,Tfv), 0, 0, 0\right\}\right)\right) \\ &= F(\varphi(d^p(Tfv,fv))).\end{aligned}$$

on utilise (F_1) et la propriété de Φ on obtient

$$d^p(Tfv, fv) < d^p(Tfv, fv),$$

c'est une contradiction. Ainsi on a $fv = ffv \in Tv = Tfv$ qui montre que fv est un point fixe commun de f et T.

Vue la remarque 2.2.1, on a le résultat suivant :

Corollaire 2.3.1 *Soient (X,d) un espace métrique, $f : X \to X$ et $T : X \to CB(X)$. Si la paire hybride (f,T) satisfait la condition (F,φ)- contraction généralisée (2.3), et vérifie la propriété (E,A), avec le fait que $f(X)$soit fermé, alors $f$et T ont un point de coïncidence. De plus, si la paire hybride (f,T) est occasionnellement coïncidente idempotente, alors elle possède un point fixe commun.*

On remarque que la paire hybride non-compatible satisfait toujours la propriété $(E.A)$. D'où, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.2 *Soient f une application dans un espace métrique (X,d), $T : X \to CB(X)$ satisfait la condition (F,φ)- contraction généralisée (2.3). Si la paire hybride (f,T) est non-compatible, et $f(X)$ est un sous-ensemble fermé de X, alors f et Tont un point de coïncidence.*

De plus, si la paire (f,T) est occasionnellement coïncidente idempotente, donc elle a un point fixe commun.

Si $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = ln\ t$ et notant par $e^{-\tau} = k$, alors on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.3 *Soient (X,d) un espace métrique, $f : X \to X$ et $T : X \to CB(X)$, Supposons qu'il existe $k \in (0,1)$, $\varphi \in \Phi$ tel que*

$$\mathcal{H}^p(Tx,Ty) \leq k \left(\varphi \left(\max \left\{ \begin{array}{c} d^p(fx,Tx), d^p(fy,Ty), d^p(fy,fx), \frac{1}{2}\left[d^p(fx,Ty) + d^p(fy,Tx)\right], \\ \frac{d^p(fx,Tx)d^p(fy,Ty)}{1+d^p(fy,fx)}, \frac{d^p(fx,Ty)d^p(fy,Tx)}{1+d^p(fy,fx)}, \frac{d^p(fx,Ty)d^p(fy,Tx)}{1+d^p(Tx,Ty)} \end{array} \right\} \right) \right)$$

pour tout $x,y \in X$ et $\mathcal{H}(Tx,Ty) > 0, p \geq 1$, et la paire hybride (f,T) vérifie la propriété (CLR_f). Alors f et T ont un point de coïncidence.

De plus, si la paire hybride (f,T) est occasionnellement coïncidente idempotente, alors elle a un point fixe commun.

Maintenant le second résultat :

Théorème 2.3.2 *Soient (X,d) un espace métrique, $f : X \to X$ et $T : X \to CB(X)$, si la paire hybride (f,T) satisfait la condition (F,φ)- contraction généralisée de type Hardy-Rogers Rationnelle (2.4), et vérifie aussi la propriété (CLR_f), alors f et T ont un point de coïncidence.*
De plus, si la paire hybride (f,T) est occasionnellement coïncidente idempotente, alors elle a un point fixe commun.

Preuve Comme la paire (f,T) vérifie la propriété (CLR_f), alors il existe une suite $\{x_n\}$ dans X telle que

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = fu \in A = \lim_{n\to\infty} Tx_n,$$

pour un certain $u \in X$ et $A \in CB(X)$. on affirme que $fu \in Tu$. Sinon, on utilise la condition (2.4), on obtient :
$\tau + F(\mathcal{H}^p(Tx_n, Tu))$

$$\leq \; F\left(\varphi\left(\begin{array}{c} \alpha d^p(fx_n, fu) + \frac{\beta[1+d^p(fx_n,Tx_n)]d^p(fu,Tu)}{1+d^p(fx_n,fu)} \\ +\gamma\left[d^p(fx_n,Tx_n) + d^p(fu,Tu)\right] + \delta\left[d^p(fx_n,Tu) + d^p(fu,Tx_n)\right] \end{array}\right)\right)$$

Passant à la limite, si $n \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\tau + F(\mathcal{H}^p(A,Tu)) \leq F\left(\varphi\left(\beta+\gamma+\delta\right) d^p(fu,Tu)\right),$$

Utilisant la propriété de Φ et Comme $\tau > 0$ et (F_1), il s'ensuit que

$$d^p(fu,Tu) \leq d^p(A,Tu) < (\beta+\gamma+\delta)\, d^p(fu,Tu),$$

une contradiction, comme $\beta+\gamma+\delta \leq 1$. par conséquent , $fu \in Tu$ qui montre que la paire hybride (f,T) possède un point de coïncidence, ($i.e$, $\mathcal{C}(f,T) \neq \emptyset$).
Maintenant, si$f$ et T sont occasionnellement coïncidentes idempotentes, alors il existe $v \in \mathcal{C}(f,T)$ tel que $f\ fv = fv \in Tv$. Si fu est le point fixe commun de f et T. Il est suffisant de montrer que $Tv = Tfv$. Sinon, utilisant ensuite la condition (2.4), on a

$\tau + F(\mathcal{H}^p(Tfv, Tv))$

$$\begin{aligned}
&\leq F\left(\varphi\left(\begin{array}{c} \alpha d^p(f\ fv, fv) + \frac{\beta[1+d^p(f\ fv, Tfv)]d^p(fv,Tv)}{1+d^p(f\ fv, fv)} \\ +\gamma\left[d^p(f\ fv, Tfv) + d^p(fv, Tv)\right] + \delta\left[d^p(f\ fv, Tv) + d^p(fv, Tfv)\right] \end{array}\right)\right) \\
&= F\left(\varphi\left(\begin{array}{c} \beta\left[1 + d^p(\ fv, Tfv)\right] d^p(fv, Tv) + \gamma\left[d^p(fv, Tfv) + d^p(fv, Tv)\right] \\ +\delta\left[d^p(fv, Tv) + d^p(fv, Tfv)\right] \end{array}\right)\right)
\end{aligned}$$

Comme $fv \in Tv$, l'inégalité ci-dessus implique

$$\tau + F(d^p(Tfv, Tv)) \leq F\left(\varphi\left(\gamma + \delta\right) d^p(fv, Tfv)\right).$$

On utilise (F_1) et la propriété de Φ, on a

$$d^p(Tfv, fv) < (\gamma + \delta) d^p(fv, Tfv),$$

C'est une contradiction, comme $\gamma + \delta \leq 1$. Ainsi, $fv = f\ fv \in Tv = Tfv$ qui montre que fv est un point fixe commun de f et T.

Si $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est donnée par $F(t) = ln\ t$, notant $e^{-\tau} = k$, alors on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.4 *Soient (X, d) est un espace métrique, $f : X \to X$ et $T : X \to CB(X)$. supposons qu'il existe $k \in (0,1), \varphi \in \Phi$ tels que*

$$\mathcal{H}^p(Tx, Ty) \leq k\varphi\left(\begin{array}{c} \alpha d^p(f\ x, fy) + \frac{\beta[1+d^p(fx,Tx)]d^p(fy,Ty)}{1+d^p(fx,fy)} + \gamma\left[d^p(fx, Tx) + d^p(fy, Ty)\right] \\ +\delta\left[d^p(fx, Ty) + d^p(fy, Tx)\right] \end{array}\right)$$

pour tout $x, y \in X$ et $Tx \neq Ty$ quand $p \geq 1, \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0, \alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta \leq 1$, et la paire hybride (f, T) vérifie la CLR_f. Alors f et T ont un point de coïncidence.

De plus, si la paire (f, T) est occasionnellement coïncidente idempotente, alors elle a un point fixe commun.

2.4 Exemple Explicatif

Exemple Soit $X = [0,3]$ un espace métrique munit de la métrique $d(x,y) = |x-y|$, on définit $f : X \to X$ et $T : X \to CB(X)$ comme suit :

$$fx = \begin{cases} 3-x, & x \in [0,2], \\ 3, & x \in (2,3], \end{cases} \quad Tx = \begin{cases} [1,2], & x \in [0,2], \\ \left[0, \frac{1}{2}\right], & x \in (2,3], \end{cases}$$

Soit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $F(t) = ln\ t$, $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $\varphi(t) = \frac{9}{10}t$ et $\tau = \frac{1}{5} > 0$ et $p \geq 1$. Alors il est facile de vérifier que :

- $F \in \mathcal{F}; \varphi \in \Phi; f(X) = [1,3] \cup \{3\}$, est un fermé de X ;$\mathcal{C}(f,T) = [1,2]$;
- La paire hybride (f,T) satisfait la propriété de (CLR$_f$), comme pour la suite $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 = f1 \in [1,2] = \lim_{n\to\infty} T(1 + \frac{1}{n});$$

- (f,T) n'est pas coïncidente idempotente parce que $ff1 = f2 = 1 \neq 2 = f1$;
- (f,T) est occasionnellement coïncidente idempotente, parce que $ff\frac{3}{2} = f\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$;

Maintenant, pour vérifier la condition (2.3), on distingue deux cas :

Cas 1 : si $x \in [0,2]$ et $y \in (2,3]$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(Tx,Ty) &= \mathcal{H}\left([1,2], \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \max\left\{d\left([1,2], \left[0, \frac{1}{2}\right]\right), d\left(\left[0, \frac{1}{2}\right], [1,2]\right)\right\} \\ &= \max\left\{\frac{3}{2}, 1\right\} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

et $d(fy,Ty) = d(3, \left[0, \frac{1}{2}\right]) = \frac{5}{2}$. Donc, pour tout $p \geq 1$, on a

$$\mathcal{H}^p(Tx,Ty) = \left(\frac{3}{2}\right)^p < e^{-\frac{1}{5}} \frac{9}{10} \left(\frac{5}{2}\right)^p = e^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{9}{10} d^p(fy,Ty)\right) = e^{-\tau} \varphi(d^p(fy,Ty)).$$

En prenant les logarithmes des deux côtés avec $F(t) = ln\ t$, on obtient

$$\tau + F(\mathcal{H}^p(Tx,Ty)) < F(\varphi(d^p(fy,Ty))).$$

Cas 2 : Si $x \in (2,3]$ et $y \in [1,2]$ alors

$$\mathcal{H}(Tx,Ty) = \mathcal{H}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right], [1,2]\right) = \frac{3}{2} \text{ et } d\left(fx,Tx\right) = d\left(3, \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{5}{2}.$$

Donc, pour tout $p \geq 1$, on a

$$\mathcal{H}^p(Tx, Ty) = \left(\frac{3}{2}\right)^p < e^{-\frac{1}{5}} \frac{9}{10} \left(\frac{5}{2}\right)^p = e^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{9}{10} d^p(fx, Tx)\right) = e^{-\tau} \varphi(d^p(fx, Tx)).$$

Prenant le logarithme des deux côté de l'inégalité ci-dessus que et en utilisant $ln(t) = F(t)$, on obtient :

$$\tau + F(\mathcal{H}^p(Tx, Ty)) < F(\varphi(d^p(fx, Tx))).$$

On remarque que pour $x, y \in [1, 2]$ (ou $x, y \in (2, 3]$) $\mathcal{H}(Tx, Ty) = 0$.

Ainsi, toutes les hypothèses du Théorème 2.3.1 sont satisfaites et la paire hybride (f, T) admet un point fixe commun (vaut $\frac{3}{2}$).

Chapitre 3

Applications

Ce chapitre est consacré pour quelques applications. Premièrement, on va appliquer le théorème 2.3.1 pour montrer l'existence d'un système des equations fonctionnelles qui apparaissent dans la programmation dynamique. Pour la deuxiéme application, on va appliquer le théorème 2.3.2 pour garantir l'existence de la solution commune d'inclusion intégrale Volterra.

3.1 Application à la programmation dynamique

En 1978, Bellman et Lee ont premièrement étudié l'existence des solutions des équations fonctionnelles dans lesquelles ils ont remarqué que la forme de base de ces équations dans la programmation dynamique peut être décrite comme suit :

$$q(x) = \sup_{y \in D} \left\{ G\left(x, y, q(\tau(x,y))\right) \right\}, \qquad x \in W,$$

où $\tau : W \times D \to W, G : W \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des applications, et $W \subseteq U$ est un espace d'état, $D \subseteq V$ est un espace de décision et U, V sont des espaces de Banach.
En 1984, Bhakta et Mitra ont obtenu quelques théorèmes d'existence pour l'équation fonctionnelle suivante qui surgit dans un processus à plusieurs étapes lié à la programmation dynamique

$$q(t) = \sup_{y \in D} \{ g(x,y) + G(x,y,q(\tau(x,y))) \}, \quad x \in W,$$

où $\tau : W \times D \to W, g : W \times D \to \mathbb{R}, G : W \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des applications ,$W \subseteq U$ est un espace d'état, $D \subseteq V$ est un espace de décision et U, V des espaces de Banach.

Ces dernières années, beaucoup de travail a été fait dans cette direction où une multitude des résultats d'existence et d'unicité a été obtenue pour des solutions et des solutions communes de quelques équations fonctionnelles, comprenant des systèmes d'équations fonctionnelles dans la programmation dynamique en utilisant des résultats de point fixes appropriés.

On considère maintenant un processus à plusieurs étapes, réduit à un système d'équations fonctionnelles

$$q_i(x) = \sup_{y \in D} \left\{ g(x,y) + G_i(x,y,q_i(\tau(x,y))) \right\}, x \in W, i \in \{1,2\}, \tag{3.1}$$

où $\tau : W \times D \to W, g : W \times D \to \mathbb{R}, G_i : W \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des applications données, $W \subseteq U$ est un espace d'état, $D \subseteq V$ est un espace de décision et U, V deux espaces de Banach.

Le but de cette section est de prouver l'existence des solutions pour un système d'équations fonctionnelles (3.1) en utilisant le Théorème 2.3.1.

Soit $B(W)$ l'ensemble de toutes les fonctions bornées à valeurs réelles sur W. Pour un h arbitraire $\in B(W)$ on définit $\|h\| = \sup\limits_{x \in W} \mid h(x) \mid$, avec la métrique d, et $(B(W), \|.\|)$ est un espace de Banach et la convergence est uniforme. Donc, si on considérer une suite de Cauchy $\{h_n\}$ dans $B(W)$, alors la suite $\{h_n\}$ converge uniformément vers une fonction h^*, alors $h^* \in B(W)$.

on considère les opérateurs : $T_i : B(W) \to B(W)$ donné par

$$T_i h_i(x) = \sup_{y \in D} \left\{ g(x,y) + G_i(x,y,h_i(\tau(x,y))) \right\}, \tag{3.2}$$

pour $h_i \in B(W), x \in W$, pour $i = 1,2$; ces applications sont bien définies si les fonctions g et G_i sont bornées, on dénote

$$\Theta(h,k) = \max \left\{ \begin{array}{c} d(T_2h, T_2k), d(T_2h, T_1h), d(T_2k, T_1k), \frac{d(T_1h,T_2k)+d(T_1k,T_2h}{2}, \\ \frac{d(T_1h,T_2h)d(T_1k,T_2k)}{1+d(T_2k,T_2h)}, \frac{d(T_1h,T_1k)d(T_1k,T_2h)}{1+d(T_2k,T_2h)}, \frac{d(T_1h,T_1k)d(T_1k,T_2h)}{1+d(T_1k,T_1h)} \end{array} \right\},$$

pour $h, k \in B(W)$.

Théorème 3.1.1 *Soit $T_i : B(W) \to B(W)$ donné par (3.2), pour $i = 1,2$. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(1) Il existe $\tau \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \Phi$ tels que

$$| G_1(x, y, h(x)) - G_2(x, y, k(x)) | \leq e^{-\tau}\varphi((\Theta(h, k))$$

pour tout $x \in W, y \in D$;

(2) $g : W \times D \to \mathbb{R}$ et $G_i : W \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées pour $i = 1, 2$;

(3) Il existe une suite $\{h_n\}$ dans $B(W)$ et une fonction $h^* \in B(W)$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} T_1 h_n = \lim_{n\to\infty} T_2 h_n = T_1 h^*;$$

(4) $T_1 T_1 h = T_1 h$, quand $T_1 h = T_2 h$, pour un certain $h \in B(W)$.

Alors le système d'équations fonctionnelles (3.1) a une solution bornée.

Preuve Selon l'hypothèse (3), la paire (T_1, T_2) partage la propriété (CLR) en réspectant T_1. Maintenant, soit λ un nombre positif arbitraire, $x \in W$ et $h_1, h_2 \in B(W)$. Alors il existe $y_1, y_2 \in D$ tels que

$$T_1 h_1(x) < g(x, y_1) + G_1(x, y_1, h_1(\tau(x, y_1))) + \lambda, \tag{3.3}$$

$$T_2 h_2(x) < g(x, y_2) + G_2(x, y_2, h_2(\tau(x, y_2))) + \lambda, \tag{3.4}$$

$$T_1 h_1(x) \geq g(x, y_2) + G_1(x, y_2, h_1(\tau(x, y_2))), \tag{3.5}$$

$$T_2 h_2(x) \geq g(x, y_1) + G_2(x, y_1, h_2(\tau(x, y_1))), \tag{3.6}$$

Ensuite, en utilisant (3.3) et (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} T_1 h_1(x) - T_2 h_2(x) &< G_1(x, y_1, h_1(\tau(x, y_1))) - G_2(x, y_1, h_2(\tau(x, y_1))) + \lambda \\ &\leq | G_1(x, y_1, h_1(\tau(x, y_1))) - G_2(x, y_1, h_2(\tau(x, y_1))) | + \lambda \\ &\leq e^{-\tau}\varphi(\Theta(h_1, h_2)) + \lambda \end{aligned}$$

donc on a

$$T_1 h_1(x) - T_2 h_2(x) < e^{-\tau}\varphi(\Theta(h_1, h_2)) + \lambda \tag{3.7}$$

D'une façon analogue, en utilisant (3.4) et (3.5), on aura :

$$T_2h_2(x) - T_1h_1(x) < e^{-\tau}\varphi(\Theta(h_1,h_2)) + \lambda \tag{3.8}$$

faisant une combinaison entre (3.7) et (3.8), on aura

$$\mid T_1h_1(x) - T_2h_2(x) \mid < e^{-\tau}\varphi(\Theta(h_1,h_2)) + \lambda,$$

ce qui implique

$$d(T_1h_1, T_2h_2) \leq e^{-\tau}\varphi(\Theta(h_1,h_2)) + \lambda,$$

Remarquons que, la dernière inégalité ne dépend pas de $x \in W$ et $\lambda > 0$ est arbitraire, donc on obtient

$$d(T_1h_1, T_2h_2) \leq e^{-\tau}\varphi(\Theta(h_1,h_2)),$$

en passant aux logarithmes, on peut écrire

$$\tau + \ln(d(T_1h_1, T_2h_2)) \leq \ln(\varphi(\Theta(h_1,h_2))).$$

Si on considère $F \in \mathcal{F}$ définie par $F(t) = ln\ t$, pour chaque $t \in (0,+\infty)$ et posons $f = T_1$, $T = T_2$, alors toutes les hypothèses de Théorème 2.3.1 sont satisfaites pour la paire (f,T) et $p = 1$. De plus, vue de l' hypothèse (4), la paire (T_1,T_2) est occasionnellement coïncidente idempotente, alors, en utilisant le Théorème 2.3.1, les applications T_1 et T_2 ont un point fixe commun, cela fait que le système d'équations fonctionnelles (3.1) a une solution bornée.

3.2 Application à inclusions intégrales Volterra

On établit de nouveaux résultats sur l'existence des solutions d'inclusion intégrale du type

$$x(t) \in q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)F(s,x(s))\,ds \tag{3.9}$$

Pour $t \in J = [0,1] \subset \mathbb{R}$, où $\sigma : J \to J$, $q : J \to E$, $k : J \times J \to \mathbb{R}$ sont continues et $F : J \times E \to C(E)$, où E est un espace de Banach avec la norme $\|.\|_E$ et $C(E)$ dénote la classe de tous les sous-ensembles fermés non vides de E.

Soit $C(J,E)$ l'espace de toutes les fonctions qui ont valeurs dans E sur J continues sur J. Définissons une norme $\|.\|$ sur $C(J,E)$ par

$$\|x\| = \sup_{t\in J} \|x(t)\|_E.$$

Définition 3.2.1 *Une fonction continue $a \in C(J, E)$ est une solution inférieure de l'inclusion intégrale (3.9), si elle satisfait*

$$a(t) \leq q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v_1(s)\,ds, \text{ pour tout } v_1 \in B(J,E)$$

tels que $v_1(t) \in F(t, a(t))$ presque partout pour $t \in J$, où $B(J, E)$ est l'espace de toutes les fonctions Bochner-intégrables qui ont valeurs dans E sur J. De même pour une fonction continue $b \in C(J, E)$ est une solution supérieure de l'inclusion intégrale (3.9), si elle satisfait

$$b(t) \geq q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v_2(s)\,ds, \text{ pour tout } v_2 \in B(J,E)$$

tels que $v_2(t) \in F(t, b(t))$ pour $t \in J$.

Remarquons que toute la solution se trouve entre la solution inférieure 'a' et la solution supérieure 'b'. Pouvons dénoter l'ensemble de solution comme un intervalle $[a, b]$.

Définition 3.2.2 *On dit que la fonction continue $x : J \to E$ est une solution de l'inclusion intégrale (3.9), si*

$$x(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v(s)\,ds$$

pour un certain $v \in B(J, E)$ satisfaisant $v(t) \in F(t, x(t))$, pour tout $t \in J$.
Dans ce qui suit, nous avons aussi besoin des définitions suivantes :

Définition 3.2.3 *Une application multivoque $F : J \to 2^E$ est mesurable si pour tout $y \in E$, la fonction $t \to d(y, F(t)) = \inf\{\|y - x\| : x \in F(t)\}$ est mesurable.*

Définition 3.2.4 *Une application multivoque $\beta : J \times E \to 2^E$ est dite Carathédory si*
(i) $t \to (t, x)$ est mesurable pour chaque $x \in E$,et
(ii) $x \to (t, x)$ est semi continu supérieurement presque partout pour $t \in J$.
Dénoter

$$\|F(t,x)\| = \sup\{\|u\|_E : u \in F(t,x)\}.$$

Définition 3.2.5 *Une application multivoque de Carathéodory $F(t, x)$ est L^1-Carathéodory si pour chaque $r > 0$, il existe une fonction $h_r \in L^1(J, \mathbb{R}$ telle que*

$$\|F(t,x)\| \leq h_r(t) \text{ pour presque tout } t \in J$$

et pour tout $x \in E$ *avec* $\|x\|_E \leq r$.

Dénoter

$$S_F^1(x) = \{v \in B(J,E) : v(t) \in F(t,x(t)),\ \textit{pour tout}\ t \in J\}.$$

Lemme 3.2.1 *Si* $diam(E) < \infty$ *et* $F : J \times E \to 2^E$ *est* L^1*-Carathéodory, alors* $S_F^1(x) \neq \emptyset$ *Pour chaque* $x \in C(J,E)$.

Lemme 3.2.2 *Soient* E *un espace de Banach,* F *une application multivoque de Carathéodory avec* $S_F^1 \neq \emptyset$ *et* $\mathcal{L} : L^1(J,E) \to C(J,E)$ *une application linéaire continue. Alors l'opérateur*

$$\mathcal{L} \circ S_F^1 : C(J,E) \to 2^{C(J,E)}$$

est un opérateur de graphe fermé sur $C(J,E) \times C(J,E)$.

Soit l'ensemble de conditions suivant :

(H_0) la fonction $k(t,s)$ est continue et non négatif sur $J \times J$ avec

$$e^{-\tau} = \sup_{t,s \in J} k(t,s)$$

pour un certain $\tau \in \mathbb{R}^+$;

(H_1) l'application multivoque $F(t,x)$ est carathéodory ;

(H_2) l'application multivoque $F(t,x)$ est croissante en x presque partout pour $t \in J$;

(H_3) Il existe $\tau \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \Phi$ tels que

$$\mid F(s,x(s)) - F(s,y(s)) \mid \leq e^{-\tau}\varphi(\Delta(x,y))$$

pour tout $s \in J$,$x \in E$, où

$$\begin{aligned}\Delta(x,y) &= \alpha \mid fx - fy \mid + \frac{\beta\,[1+ \mid fx - Tx \mid] \mid fy - Ty \mid}{1+ \mid fx - fy \mid} + \gamma\,[\mid fx - Tx \mid + \mid fy - Ty \mid] \\ &+ \delta\,[\mid fx - Ty \mid + \mid fy - Tx \mid]\end{aligned}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, $\alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta \leq 1$;

(H_4) $S_F^1(x) \neq \emptyset$ pour chaque $x \in C(J,E)$.

Théorème 3.2.1 *Supposons que les conditions* (H_0)*-*(H_4) *sont vérifiées. Alors l'inclusion intégrale (3.9) a une solution dans [a,b] définie sur* J.

Preuve Soit $X = C(J, E)$ Définissons une application multivoque $T : [a, b] \subset X \to 2^X$ donée par :

$$Tx = \left\{ u \in [a, b] : u(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)v(s)ds; v \in S_F^1(x), \text{ pour tout } t \in [0, 1] \right\}.$$

Observons que T est bien défini, selon la condition (H_4), $S_F^1(x) \neq \emptyset$. Pour montrer que T satisfait toutes les hypothèses de Théorème 2.3.2 défini sur $[a, b]$.
Pour tout $\vartheta, \mu \in 2^X$ en $t \in J$ et utilisons (H_0) et (H_3), on a

$$\begin{aligned} \|\vartheta(t) - \mu(t)\|_E &= \| \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)v_1(s)ds - \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)v_2(s)ds\|_E \\ &\leq \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)ds \parallel v_1(s) - v_2(s) \parallel_E \\ &\leq \sup_{t,s \in J} k(t, s)\varphi(\Delta(v_1, v_2)) \quad \text{pour } v_1, v_2 \in S_F^1(x). \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\parallel \vartheta(t) - \mu(t) \parallel_E \leq e^{-\tau}\varphi(\Delta(v_1, v_2)).$$

pour tout $t \in J$. En passant aux logarithmes, nous pouvons écrire

$$\tau + \ln \parallel \vartheta(t) - \mu(t) \parallel_E \leq \ln(\varphi(\Delta(v_1, v_2))).$$

Si on considére $F \in \mathcal{F}$ définie par $F(z) = ln\ z$, pour chaque $z \in (0, +\infty)$, on déduire que l'opérateur T satisfait la condition (2.4) où f est une application d'identité et $p = 1$. Aussi T est une application fermée, en utilisons le théorème 2.3.2, on conclue que l'inclusion intégrale donnèe a une solution dans [a,b].

Conclusion

Il y avait beaucoup d'idées concernant la théorie des points fixes, ces diffèrences habituellement dans les propriétés des applications ou les conditions de contraction et parfois dans l'espace utilisé, ont été généralisées et développées après pour le théorème du point fixe commun de plusieurs applications.

Ce travail est parmi beaucoup d'œuvres qui caractérisent la théorie des points fixes où l'auteur prouver un théorème de point fixe commun d'une paire hybride des applications occasionnellement coïncidentes idempotentes qui satisfait la condition (F, φ)-contraction généralisée sous la propriété (CLR) dans des espaces métriques complets, et un théorème concernant une paire hybride des applications satisfaisant une condition (F, φ)-contractive de type Hardy Rogers Rationnelle avec quelques applications, qui est le produit des travaux antérieurs 2014 [5, 6, 9]

La question posée est d'arrêter ou non de proposer ces théories. La réponse est certainement non, parce que la science des mathématiques évolue comme toute autre science, et le théorème de point fixe a de nombreuses applications et utilisations dans le domaine des mathématiques et les autres sciences.

Bibliographie

[1] **A.Ahmed**, Mémoire de magister, Université de Tébessa, 2011.

[2] **C.Dazé**, Mémoire des études supérieures, Université de Montréal, 2010.

[3] **H. K.Nashine, M.Imdad** and **M.Ahmadullah**, Common fixed point theorems for hybrid generalized (F,φ)-contractions under common limit range property with applications, arXiv :1604.00121v1 [math.FA] 1 Apr 2016.

[4] **M. Cosentino, P. Vetro**, Fixed point results for F-contractive mappings of Hardy-RogersType, 2014.

[5] **M. Imdad, S. Chauhan** and **A. H. Saliman**, Hybrid fixed point theorems in symmetric spaces via common limit range property, Demonstratio Mathematic. In press, vol. XLVII. No 4. 2014.

[6] **M. Imdad, S. Chauhan** and **P. Kumam**, Fixed point theoremsfor tow hybrid pairs of non-self mappings under joint common limit range property in metric spaces, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol 16, No 1, Proof,-1, 2014.

[7] **S.Beloul**, Thése de doctorat,Université de Biskra, 2016.

[8] **S.Rechachi** and **K.Hoggas**, Mémoire de licence ,Université de Khenchela, 2012.

[9] **Z. Kadelburg, S. Chauhan** and **M. Imdad**, A hybrid common fixed point theorem under certain recent properties, the scientific word journal, Vol 2014, Article ID 860436, 6 pages, 2014.