الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عباس لغرور خنشلة

كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الإقتصادية

أساسيات بحوث العمليات

مطبوعة علمية موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس

شعب: علوم التسيير، علوم مالية و محاسبية، علوم تجارية والعلوم الإقتصادية

السنة الجامعية 2024/2023

السنة الثانية علوم اقتصادية:

السداسي الرابع:

وحدات التعليم	عنوان المواد	الأرصدة	المعامل	الحجم الساعي الأسبوعي			الحجم الساعي السداسي	أخرى*	نمط التعليم		نوع التقييم	
				دروس	أعمال موجهة	أعمال تطبيقية	(15 أسبوعا)		حضوري	عن بعد	مراقبة مستمرة	امتحان
وحدة تعليم أساسية الرمز: و ت أس 2.2 الأرصدة: 18 المعامل: 9	اقتصاد كلي 2	6	3	3سا00	1سا30	-	67سا30	82سا30	X		40%	60%
	الاقتصاد الدولي	4	2	1سا30	1سا30	-	45سا00	55سا00	X		40%	60%
	الاقتصاد الجزائري	4	2	1سا30	1سا30	-	45سا00	55سا00	X		40%	60%
	تسيير المؤسسة	4	2	1سا30	1سا30	-	45سا00	55سا00	X		40%	60%
وحدة تعليم منهجية الرمز: و ت م 2.2 الأرصدة: 9 المعامل: 5	إحصاء 4	5	3	3سا00	1سا30	-	67سا30	65سا00	X		40%	60%
	أساليب بحوث العمليات	4	2	1سا30	1سا30	-	45سا00	55سا00	X		40%	60%
وحدة تعليم استكشافية الرمز: و ت أس 2.2 الأرصدة: 2 المعامل: 2	ريادة الأعمال (*Entreprenariat*)	1	1	-	1سا30	-	22سا30	2سا30	X		100%	
	أخلاقيات الأعمال	1	1	1سا30	-	-	22سا30	2سا30	X		-	100%
وحدة تعليم أفقية الرمز: و ت أف 2.2 الأرصدة: 1 المعامل: 1	لغة أجنبية 3	1	1	-	1سا30	-	22سا30	2سا30	X	X	100%	-
مجموع السداسي الرابع		30	17	13سا30	12سا00	-	382سا30	375سا00				

مكونات مادة: أساسيات بحوث العمليات

السداسي: الرابع

وحدة التعليم : منهجية

المادة : أساسيات بحوث العمليات

الرصيد: 4

المعامل: 2

نمط التعليم: حضوري

أهداف التعليم: يتمثل الهدف العام من هذا المادة التعليمية في تزويد الطالب ببعض التقنيات الإرشادية الصي تستخدمها بحوث العمليات (البرمجة الخطية) لحل المشكلات بالمؤسسة.

أما المهارات المراد الوصول إليها من خلال هذا المادة التعليمية فتتمثل في التمكن من تحقيق أهداف المؤسسة باستخدام نماذج البرمجة الخطية المختلفة

المعارف المسبقة المطلوبة: التحكم في الرياضيات خاصة الجبر الخطي والمصفوفات

محتوى المادة:

المحور الأول: مدخل عام حول بحوث العمليات

المحور الثاني: البرمجة الخطية (الصيغة القياسية)

المحور الثالث: البرمجة الخطية (الصيغة البيانية)

المحور الرابع: طريقة السابلاكس

المحور الخامس: الثنائية أو الإزدواجية

المحور السادس: برمجة الأعداد الصحيحة (طريقة القطع)

المحور السابع: برمجة الأعداد الصحيحة (مشاكل النقل)

طريقة التقييم: (نوع التقييم + امتحان نهائي)

قياس معدل المادة: بالوزن الترجيحي

- **الدروس 60 %**

- **الأعمال الموجهة 40 %**

المراجع: (*كتب ومطبوعات ، مواقع انترنت*، إلخ)

فهرس المحتويات

المحاضرة الأولى: مدخل عام حول بحوث العمليات

تمهيد:

يرتبط علم بحوث العمليات بكيفية استخدام أساليب التحليل الكمي في التوصل لمعلومات تساعد الإدارة في اتخاذ القرارات، حيث تشمل هذه الأساليب بصفة خاصة الأساليب الرياضية المتقدمة كالبرمجة الخطية و غير الخطية على سبيل المثال، حيث أن الهدف من استخدام تلك الأساليب هة حل المشاكل و التوصل إلى الحل الأمثل من بين تلك البدائل المتاحة.

يمكن القول أن نقطة البداية لبحوث العمليات في بريطانيا تكمن عندما قام فريق من العلماء بدراسة مشكلة تطوير جهاز الرادار للأغراض العسكرية من حيث المواقع المثلى التي يشغلها و الربط بين تلك المواقع من ناحية و بين مواقع المدفعية المضادة للطائرات من ناحية أخرى.

وتعتبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي حققت تطبيقاتها نجاحا واسعا في مختلف مجالات الحياة، إذ أن صناعة القرارات و تطبيقاتها في أي مجال من المجالات يتطلب اللجوء للأساليب العلمية التي تمكن صانعي القرار والقائمين على تنفيذها من الوصول للغايات المرجوة في ظل الإمكانيات المتاحة، و بالتالي الخاصية التي يتميز بها هذا العلم هو مقدرته على اعداد نموذج علمي و عملي لنظام معين يتضمن تحديد العوامل المؤثرة و التنبؤ و مقارنة النتائج لمساعدة الإدارة في قياس دقة النظام المستخدم و بالتالي إتخاذ القرارات المناسبة و السليمة.

1- تعريف بحوث العمليات:

لبحوث العمليات العديد من التعاريف منها:

- **تعريف جمعية بحوث العمليات البريطانية:** هو استخدام الأساليب العلمية لحل المشاكل المعقدة في إدارة الأنظمة الكبيرة من المعدات، المواد الأولية، القوى العاملة، الأموال، والأمور الخدمية الأخرى في المؤسسات والمصانع العسكرية والمدنية.[1]

- **تعريف جمعية بحوث العمليات الأمريكية:** هو علم يهتم بإتخاذ القرارات العلمية لتصميم ووضع أنظمة المعدات والقوى العاملة وفقا لشروط معينة تتطلب تخصيص الموارد المحدودة بشكل أمثل.[2]

---

[1] **يزن إبراهيم مقبل، مقدمة في بحوث العمليات**، مكتبة المجتمع العربي للنشر و التوزيع، الأردن، 2005، ص 11.
[2] **نفسه.**

لذلك تهتم بحوث العمليات بإستخدام الأساليب العلمية والكمية والرياضية لحل المشكلات المعقدة التي تواجهها مختلف الإدارات بالإعتماد على أساليب التحليل الكمي، وهي كذلك العلم الذي يهتم بإتخاذ القرارات الإدارية والتسييرية بشكل مثالي في ظل الموارد المحدودة.

وكذا ترتكز بحوث العمليات على منهجية تنطلق بمعرفة الهدف المطلوب من وراء حل المشكلة المطروحة، ثم إستنتاج متغيرات المسألة، ثم وضع القيود المتحكمة في المشكلة المطروحة، وأخيرا البحث عن الأسلوب الذي يساعد على حل المشكلة وتقديم حل مبدئي قابل للتحسين، حيث تتوقف عند الحصول على الحل الأمثل، هذا الأخير قد يكون متعدد الأوجه، أو لانهائي، أو غير ممكن في بعض الحالات.

3- استخدامات و فوائد تطبيق بحوث العمليات:

تستخدم بحوث العمليات في معظم نواحي الحياة من أبرزها: [1]

- الأغراض العسكرية: و ذلك في مجال الخطط الإستراتيجية و اتخاذ القرارات للتوزيع الأمثل للإمكانيات العسكرية.

- المجالات الصناعية: مثل صناعة الطائرات و الصواريخ، السيارات، الاتصالات، أجهزة الحاسوب، أنظمة النقل و المرور، التسويق، الطاقة، التغذية و غيرها من الصناعات.

- المؤسسات المالية: مثل البورصة الدولية و البنوك من أجل التنبؤ بالمتغيرات المتوقعة.

- الدوائر الحكومية و المستشفيات: لإيجاد أفضل الحلول للمشاكل التي تواجهها .

- الزراعة: وذلك لتحسين الإنتاج الزراعي بأقل تكلفة و تسويق المنتجات الزراعية بطرق أفضل لتحقيق أكبر فائدة ممكنة.

من بين فوائد بحوث العمليات نذكر ما يلي: [2]

---

[1] **أحمد محمد الهزاع الصمادي، أساسيات بحوث العمليات**، دار قنديل،الأردن، 2007، ص 12.

[2] **حسن ياسين طعمة، مروان محمد النسور، إيمان حسين حنوش، بحوث العمليات، نماذج وتطبيقات**، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2009، ص 24.

– يساهم تطبيق مفاهيم بحوث العمليات كمدخل كمي في تقريب المشكلة إلى الواقع بموجب نماذج رياضية وذلك وفقا للتفكير العلمي المنظم والعقلاني.

– يساعد في عرض النتائج المستخلصة من أجل حل النماذج والعلاقات الرياضية بما يؤمن عدد من البدائل والخيارات لأغراض عملية إتخاذ القرارات، وبما يساهم في تفسير كافة ملابسات المشكلة.

– يساهم في إمكانية تعميم المعايير القياسية والمثالية لعملية إتخاذ القرارات.

4– عيوب بحوث العمليات:

فيما يخص عيوب بحوث العمليات فيمكن أن نذكر ما يلي: [1]

– تعد أساليب بحوث العمليات منهج عقيم كونها لا تترك فرصة للسلوك الإنساني في عملية حل المشكلة وتفسير نتائج الحل.

– صعوبة إخضاع بعض المشكلات للنماذج الرياضية أو التفسير الكمي والحسابات المجردة.

– عدم توفير الكوادر الفنية المتخصصة في صناعة وبناء النماذج الرياضية في المواقع المختلفة التي تظهر فيها المشكلة.

– التكاليف العالية المترتبة على تطبيق بحوث العمليات كمدخل كمي بسبب ارتباط هذا المدخل باستخدام الحاسب الإلكتروني، مما يستلزم تشكيل فرق بحثية من شأنها أن تحمل ميزانية المنشأة مبالغ نقدية كبيرة.

5– العوامل التي ساعدت على انتشار بحوث العمليات:

يوجد العديد من العوامل التي ساعدت على انتشار بحوث العمليات منها: [2]

– صعوبة المشاكل التي تواجهها المنظمات الدولية والمؤسسات.

– التطور السريع في مجال الحاسوب والتي تتميز بقدرتها الهائلة على تخزين البيانات و سرعتها العالية جدا في استرجاع هذه البيانات.

– التقدم الكبير الذي حصل في مجال بحوث العمليات، وذلك نتيجة متابعة الكثير من العلماء و الباحثين لأبحاثهم.

[1] **حسن ياسين طعمة وآخرون**، مرجع سبق ذكره، ص 25
[2] **أحمد محمد الهزاع الصمادي**، مرجع سبق ذكرة، ص 13.

- ظهور بعض الجمعيات العلمية المتخصصة في بحوث العمليات مثل الجمعية الأمريكية و التي تأسست عام 1952، و معهد العلوم الإدارية و الذي تأسس في أمريكا عام 1953 .

- اهتمام الجامعات و المعاهد في مختلف أنحاء العالم بعلم بحوث العمليات وقد علموا على تدريس مقررات متنوعة في هذا المجال.

التطور التاريخي لبحوث العمليات:

تعتبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي أحرزت تطبيقاتها نجاحا واسعا في مختلف مجالات الحياة. حيث نشأت بحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية حيث عهدت الإدارة العسكرية في بريطانيا إلى فريق من العلماء و الباحثين مهمة دراسة المشاكل الإستراتيجية و التكتيكية الخاصة بالدفاع البري و البحري عن الدولة.

ولقد لقد هدف ذلك الفريق هو تحديد أفضل استخدام ممكن للموارد الحربية المحدودة بالإضافة إلى دراسة طريقة استخدام الردار الذي كان قد اكتشف حديثا في ذلك الوقت و كذلك دراسة فاعلية الأنواع الجديدة من قاذفات القنابل.

يعتبر تشكيل هذه المجموعة أول بادرة لنشوء ما يسمى ببحوث العمليات مطلع عام 1941م، إتسع تطبيق بحوث العمليات ليشمل جميع قوات الحلفاء ذلك بسبب النجاح الذي أحرزته الإدارة العسكرية البريطانية في إنزال أقصى الضربات بالقوات المعادية.

إن النتائج المشجعة التي توصل إليها فريق العمل الإنجليزي أدت و بعد فترة قصيرة من الزمن إلى قيام السلطات العسكرية الأمريكية بتكوين فريق مماثل بهدف معالجة المشاكل المعقدة بنقل المعدات و المؤمن و المذخر الحربية للقوات الأمريكية و التي إنتشرت أثناء الحرب العالمية الثانية في أرجاء متعددة في العالم.

كما قامت الحكومة الكندية بتكوين فريق مماثل للفريق الأمريكي أثناء الحرب العالمية الثانية مهمته إنتاج بعض المعدات العسكرية و ذلك من خلال الإستخدام الأمثل للموارد المتاحة. يرجع السبب في تكوين فريق بحوث عمليات بدلا من الإعتماد على الفرد الواحد إلا أن كثيرا من المشاكل الإستراتيجية و التكتيكية المرتبطة بالنواحي العسكرية معقدة جدا لدرجة يتعذر معها الفرد الواحد الوصول إلى حلول فرضية و لذلك كان يتم تشكيل فريق لبحوث العمليات يتكون من عدد من العلماء ذو تأهيل علمي متنوع. يرجع نجاح فريق بحوث العمليات في ذلك الوقت إلى تشكيل تلك الفرق من أفراد موهوبين ذوي إختصاصات مختلفة بالإضافة إلى ضغوط فترة الحرب و استخدام أساليب مختلفة، وبعد الحرب العالمية الثانية إتجه الكثير من العلماء الذين كانوا يعملون في فرق بحوث العمليات و التي كانت مهتمهم بالنواحي العسكرية إلى استخدام أساليب بحوث العمليات في الأغراض المدنية، فقد عاد بعضهم إلى

الجامعات و ركزوا جهودهم من أجل تأصيل الأساليب التي سبق إكتشافها، في حين ركز البعض الآخر على إكتشاف أساليب جديدة، كما ركز آخرون على تطبيق أساليب بحوث العمليات في قطاعات و مجالات إقتصادية مختلفة.

إن بحوث العمليات تستخدم الآن في مجالات مختلفة عديدة بالإضافة إلى المجال الصناعي و العسكري، فقد إتسع استخدامها ليشمل مجالات أخرى مثل البنوك، المستشفيات، المكتبات، الفنادق، تخطيط المدن و تخطيط نظم النقل.

لقد بدأ استخدام بحوث العمليات في بريطانيا في الحرب العالمية الثانية لإدارة العمليات العسكرية، و كانت الفكرة في ذلك الوقت أن تحسين استخدام الأسلحة و المهارات الموجودة يعطي نتائج أفضل في الأمد القصير مما لو تركز الإهتمام على تحسين الأسلحة و المهمات نفسها. [1]

و بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية كثر استخدام بحوث العمليات في المجالات المختلفة و من أهمها الصناعة، و أول الأساليب التي استخدمت في هذا المجال هو أسلوب البرمجة الخطية و الذي يتلخص استخدامه في الحصول على أفضل النتائج باستخدام موارد و طاقات محدودة. [2]

هناك تطوران هامان حدثا بعد الحرب العالمية الثانية و أديا إلى التوسع في استخدام بحوث العمليات في المنظمات غير العسكرية هما: [3]

– البحث العلمي المتواصل في استخدام بحوث العمليات في عملية اتخاذ القرار أدى إلى العديد من التطورات المنهجية، ولعل أهم هذه التطورات هو اكتشاف " جورج دانتزغ" في عام 1947 لطريقة السمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية.

– حدوث تطور هائل في مجال الحاسوب و إمكاناته، ولعل أبرز ملامح هذا التطور هو تطوير منهجية لحل عدد كبير من المشكلات و في وقت قياسي.

[1] **فتحي حليل حمدان، رشيق مرعي، مقدمة في بحوث العمليات**، دار وائل للنشر، الأردن، 2004، ص ص 16-17.
[2] **شفيق العتوم، بحوث العمليات**، دار المناهج، الأردن، 2006، ص 14.
[3] **عاصم عبد الرحمن الشيخ، بحوث العمليات و استخدام البرمجيات (برمجية الخوارزمية)**، دار المناهج، الأردن، 1999، ص 15.

المحاضرة الثانية: البرمجة الخطية

تمهيد:

البرمجة الخطية هي طريقة لحل المسائل، حيث وضعت لمساعدة المديرين في اتخاذ القرارات، و تعد البرمجة الخطية أداة بيانية و رياضية كما تعد أساليب البرمجة الخطية أحد أساليب البرمجة الرياضية التي تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل لحلها و تلعب دورا هاما في الوصول إلى التوزيع الأمثل للموارد المتاحة على الأنشطة المختلفة وفقا للهدف المطلوب، في ثنايا هذه المحاضرة سنتطرق إلى تعريف البرمجة الخطية ، افتراضاتها و كذا صياغة البرنامج الخطي مع بعض الأمثلة التوضيحية.

1- تعريف البرمجة الخطية:

يمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد و الإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود و العوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة مكنة، أي أن يكون توزيعا مثاليا، وتعتبر نماذج البرمجة الخطية من ابسط واسهل النماذج الرياضية و التي يمكن انشاؤها لمعالجة معضلات البرمجة الصناعية و الحكومية الكبرى.[1]

يسمى هذا الأسلوب بالبرمجة لأنه يهتم في البحث عن البرامج التي تحقق الهدف المطلوب من بين عدد كبير من البرامج المتاحة، أما صفة الخطية فإنها تعني أن جميع العلاقات التي تربط بين مختلف عناصر النموذج الرياضي للمشكلة المدروسة هي علاقات خطية (ليست أسية أو لوغاريتمية، . . .إلخ)

إذا أسلوب البرمجة الخطية يبحث في توزيع الموارد المحدودة بين الإستخدامات البديلة ضمن إطار القيود و الشروط المفروضة، وذلك لتحقيق الأهداف التي تسعى إلى تحقيقها منظمات الأعمال سواء كان ذلك في حالة تعظيم قيمة دالة الهدف أو في حالة تدنيتها، كما هو الحال بالنسبة لتعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف .[2]

إجمالا يمكن القول إن البرمجة الخطية تسعى إلى تخصيص الموارد النادرة بين الإستخدامات البديلة بحيث يتحقق عن هذا التوزيع الحد الأقصى من الكفاءة، إذ تسعى إلى إيجاد القيمة المثلى لدالة خطية مقيدة بجملة من المعادلات الخطية.[3]

---

[1] **دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، بحوث العمليات**، دار اليازوري، الأردن،2008، ص 23.
[2] **منعم زمرير الموسوي، بحوث العمليات: مدخل علمي لإتخاذ القرارات**، دار وائل للنشر، الأردن، 2009، ص 53.
[3] **عبد النور هبال، رياضيات المؤسسة**، دار الهدى، الجزائر، 2018، ص 9.

2- افتراضات البرمجة الخطية:

لكي تكون نتائج تطبيق نموذج البرمجة الخطية صادقة و موثوق بها من الناحيتين العلمية و العملية ينبغي توفر بعض الشروط الأساسية في صياغة أو بناء النموذج و منها مايلي: [1]

2-1 الخطية: يجب أن تكون جميع العلاقات بين متغيرات دالة الهدف و قيود النموذج ذات طبيعة خطية.

2-2 التأكد: يجب أن تكون معاملات المتغيرات في دالة الهدف و قيود النموذج معروفة و ثابتة أثناء فترة معالجة المشكلة المدروسة.

2-3 عدم السلبية: يجب أن تكون معاملات قيم المتغيرات موجبة ($X_j \geq 0$) وهذا يعني لايمكن أن يكون انتاج عدد سالب من منتج معين.

2-4 قابلية القسمة: أي أن تأخذ بعض المتغيرات قيما كسرية.

3- صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

يقصد بصياغة نموذج البرمجة الخطية كتابة مكونات النموذج و التي تشمل دالة الهدف (سواء كانت تعظيم أرباح أو تدنية تكاليف) و تحديد المتغيرات الخاصة بالقرار، و متباينات القيود الموضوعة و المفروضة على المشكلة، بالإضافة إلى شرط عدم السلبية. [2]

ينبغي توفر ثلاثة عناصر أساسية لبناء نموذج البرمجة الخطية وهي: [3]

3-1 تحديد دالة الهدف: يعني تحديد هدف واحد للمشكلة المدروسة، حيث تعد دالة الهدف دالة خطية بدلالة متغيرات القرار X_j ،وعادة يتم تعظيمها أو تدنيتها على النحو التالي:

$$Max; Min: Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

3-2 تحديد قيود المشكلة: وهي عبارة عن متراجحات أو معادلات خطية تمثل العوامل أو الظروف المحيطة بالمشكلة و تأخذ الشكل التالي:

---

[1] **حسن ياسين طعمة وآخرون**، مرجع سبق ذكره، ص ص 40-41.
[2] **فتحي رزق السوافيري**، **مدخل معاصر في بحوث العمليات تطبيقات باستخدام الحاسب**، الدار الجامعية، مصر، 2004، ص 20.
[3] **حسن ياسين طعمة وآخرون**، مرجع سبق ذكره، ص ص 41-42 .

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j(\leq;=;\geq)b_i \ ,(i = 1,2,\dots m)$$

3-3 تحديد شرط عدم السلبية: ويعني هذا الشرط بأن تكون جميع متغيرات القرار الداخلة في النموذج معدومة أو موجبة (أكبر أو تساوي الصفر) .

$$\boldsymbol{X_j} \geq 0; \forall j = 1,2,\dots n$$

حيث:

Z: تمثل دالة الهدف المطلوب تعظيمها أو تدنيتها .

C_j : معامل متغير القرار **X_j** ويمثل عائد أو تكلفة.

X_j : متغير القرار رقم (**j**) ويمثل نشاط أو مادة أولية أو نوع معين . . .إلخ.

a_{ij}: كمية الموارد المحدودة من النوع (**i**) المخصصة لكل وحدة من النشاط (**j**) .

b_i: تمثل الموارد المحدودة من التنوع (**i**) .

وفيما يلي بعض الأمثلة التطبيقية و التوضيحية لآلية صياغة نموذج البرمجة الخطية.

المثال الأول:

تنتج شركة 3 مواد بحيث تمر هذه الموارد بمراحل ثلاث A و B و C ، كما أن كمية الإنتاج لكل مادة في كل مرحلة محددة و مقاسة بعدد الوحدات المنتجة في الدقيقة الواحدة، حيث الوقت اليومي المخصص للعمليات الثلاث محدد بالقيم 430، 460، 420 دقيقة، و الربح المتوقع من انتاج الوحد الواحة من المواد الثلاث هي 300، 200، 500 وحدة نقدية.
كما أن الوقت المخصص لكل مادة و هذا خلال مرورها بالمراحل الثلاث موضح في الجدول الموالي:

المرحلة/المادة	A	B	C
X_1	1 دقيقة	3 دقيقة	1 دقيقة
X_2	2 دقيقة	00 دقيقة	4 دقيقة
X_3	1 دقيقة	2 دقيقة	00 دقيقة

المطلوب: قم بإنجاز نموذج البرمجة الخطية؟

حل المثال الأول:

نرمز للمنتجات الثلاث بـــ X_1 ، X_2 ، X_3 .

يمكن صياغة البرنامج الخطي كما يلي:

صياغة نموذج البرمجة الخطية:

- **صياغة دالة الهدف:** $Max\ Z= 300\ X_1+ 200\ X_2 + 500X_3$

- **صياغة قيود المشكلة أو المسألة:**

قيد الاحتياجات الدنيا للبروتينات : $20X_1+25X_2+ 30\ X_3 \geq 180$

قيد الاحتياجات الدنيا للألياف: $50X_1+40X_2 + 60\ X_3 \geq 650$

- **شرط عدم السلبية:** $X_1\geq0,\ X_2\geq0\ ,X_3\geq0$

المثال الثاني: [1]

ترغب شركة خاصة بإنتاج ثلاثة أنواع من الوجبات المغذية للرياضيين ، بحيث أن كل نوع يتضمن مزيج محدد من البروتين والألياف، والجدول الموالي يلخص تكاليف الإنتاج والإحتياجات الدنيا لكل من البروتين والألياف.

[1] **حسن ياسين طعمة وآخرون**، مرجع سبق ذكره، ص ص 44-45. (بتصرف)

المركبات	أنواع الوجبات المغذية للرياضيين			الاحتياجات الدنيا بالكلغ
	النوع 01	النوع 02	النوع 03	
البروتينات	20	25	30	240
الألياف	50	40	60	650
تكاليف الإنتاج	200	230	80	

المطلوب:

صياغة نموذج البرمجة الخطية لإنتاج الأنواع الثلاثة من أنواع الأعلاف الغذائية بما يجعل تكاليف الإنتاج أقل ما يمكن؟

حل المثال الثاني:

تشير بيانات المشكلة عن وجود ثلاث متغيرات قرار تتمثل في ثلاث أنواع من الأعلاف الغذائية و أننا بصدد دالة هدف من النوع تدنية تكاليف.

نرمز بــ X_1، X_2، X_3 للأنواع الثلاثة من الأعلاف الغذائية.

صياغة نموذج البرمجة الخطية:

- **صياغة دالة الهدف:** $Min\ Z = 200X_1 + 230X_2 + 80X_3$

- **صياغة قيود المشكلة أو المسألة:**

قيد الاحتياجات الدنيا من البرروتين : $20X_1 + 25X_2 + 30X_3 \geq 240$

قيد الاحتياجات الدنيا من الألياف : $50X_1 + 40X_2 + 60X_3 \geq 650$

- **شرط عدم السلبية:** $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$

المثال الثالث:

إليك الجدول التالي الذي يلخص خطة مقترحة لإنتاج نوعين من المنتجات ka , Ba وذلك من خلال استغلال الطاقة التشغيلية المتاحة لثلاث آلات (01، 02، 03) .

الآلات	**المنتجات**		**عدد ساعات التشغيل المتاحة**
	المنتج ka	**المنتج Ba**	
الالة 01	06	04	90
الالة 02	03	05	80
الالة 03	02	03	100
الربح المتوقع	95	110	

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لإنتاج عدد الوحدات من المنتجين بما يحقق للمؤسسة أكبر قدر ممكن من الأرباح؟

حل المثال الثالث:

يتضح من الجدول أعلاه أن متغيرات القرار هي الوحدات المنتجة من المنتجين Ka و Ba و أن دالة الهدف هي من النوع تعظيم، كما نرمز للمنتجين السالف الذكر كمايلي:

نرمز بـــ: X_1 لعدد الوحدات المنتجة من المنتج Ka .

X_2 لعدد الوحدات المنتجة من المنتج Ba .

Z الأرباح الكلية المتوقعة.

صياغة نموذج البرمجة الخطية:

- **صياغة دالة الهدف:** $\text{Max } Z= 95\,X_1+ 110\,X_2$

- **صياغة قيود المشكلة أو المسألة:**

قيد عدد ساعات تشغيل الآلة 01: $6X_1+4X_2\leq 90$

قيد عدد ساعات تشغيل الآلة 02: $3X_1+5X_2\leq 80$

قيد عدد ساعات تشغيل الآلة 03: $2X_1+3X_2\leq 100$

- **شرط عدم السلبية:** $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

المثال الرابع: [1]

لنفرض أن شركة إنتاج الآثاث المنزلي قد قررت دخول ميدان الآثاث المكتبي نتيجة وجود عروض أمامها، وحسب المعدات المتوفرة لها سابقا يمكنها إما إنتاج المكاتب و/ أو المقاعد.

و الجدول الموالي يلخص المعطيات.

	مكتب	مقعد
ربح الوحدة (الدينار)	20	15
كمية الخشب اللازمة (قطع)	6	5
ساعات العمل اللازمة للوحدة في المؤسسة	3	4

وكمعطيات إضافية لدينا:

- يمكن للشركة الحصول على 300 قطعة أسبوعيا (مساحة القطعة 1 م^2)
- يمكن للشركة أن تعمل فقط 240 ساعة في الشهر.
- يمكن للشركة بيع كل الوحدات المنتجة من المكاتب و المقاعد.

المطلوب: قم بصياغة البرنامج الخطي لهذه المسألة؟

حل المثال الرابع:

نرمز لإنتاج المكاتب بـــ X_1 و نرمز لإنتاج المقاعد بـــ X_2

[1] **السعدي رجال، بحوث العمليات: البرمجة الخطية**، دار رجزو، قسنطينة، الجزائر، 2004، ص ص 38-39. (بتصرف)

صياغة نموذج البرمجة الخطية:

– صياغة دالة الهدف: $Max\ Z = 20X_1 + 15X_2$

– صياغة قيود المشكلة أو المسألة:

قيد كمية الخشب : $6X_1+5X_2 \leq 300$

قيد ساعات العمل: $3X_1+4X_2 \leq 240$

– شرط عدم السلبية: $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$

المثال الخامس:

ينتج مصنع نوعين من المحافظ (محفظة عادية و جيدة)، يمران هذين النوعين بقسمي إنتاج هما: قسم التفصيل و قسم الخياطة. تحتاج المحفظة العادية إلى 2 دقائق في قسم التفصيل و 6 دقائق في قسم الخياطة ، بينما تحتاج المحفظة الجيدة إلى 4 دقائق في قسم التفصيل و 4 في قسم الخياطة. الوقت الكلي المتاح في قسم التفصيل هو 420 دقيقة و قسم الخياطة هو 560 دقيقة. يقدر ربح الوحدة على النوع الأول العادي بـ 4 دج و النوع الجيد بـ 6 دج.

المطلوب: أدرج نموذج البرمجة الخطية لضمان أكبر ربح في ظل القيود الزمنية المفروضة ؟

حل المثال الخامس:

نرمز للمحافظ العادية بـ X_1 و نرمز للمحافظ الجيدة بـ X_2

يمكن تلخيص معطيات التمرين في الجدول الموالي:

	الوقت اللازم لإنتاج المحفظة الواحدة (بالدقائق)		الوقت الكلي المتاح (بالدقائق)
	محفظة عادية	محفظة جيدة	
قسم التفصيل	2	4	420
قسم الخياطة	6	4	560
الربح	4	6	

صياغة نموذج البرمجة الخطية:

- **صياغة دالة الهدف:** $Max\ Z= 4\ X_1+ 6\ X_2$

- **صياغة قيود المشكلة أو المسألة:**

قيد الوقت الكلي المتاح في قسم التفصيل : $2X_1+4X_2 \leq 420$

قيد الوقت الكلي المتاح في قسم الخياطة : $6X_1+4X_2 \leq 560$

- **شرط عدم السلبية:** $X_1\geq0, X_2\geq0$

المثال السادس:

تقوم إحدى الشركات بإنتاج منتجان X_1 وX_2 يمران خلال العملية الانتاجية بثلاث أقسام صناعية هي: قسم الإنتاج (A)، قسم التجميع (B) وقسم التعبئة والتغليف (C)، ويواجه مدير الإنتاج بالشركة موقفا يتطلب تحديد الكمية التي تنتج من X وY، علما أن هامش الربح للوحدة هو 40دج و42دج على الترتيب، كما أن الطاقة الإنتاجية المتاحة في الأقسام بالترتيب هي: 05 ساعات، 330 دقيقة، 340 دقيقة.

بالإضافة لذلك تتطلب الوحدة من X 06 دقائق من A و04 من B و 05 من C، في حين تتطلب الوحدة من Y 06 دقائق من A و03 من B و03 من C.

المطلوب: قم بصياغة نموذج البرمجة الخطية من أجل تحديد الكمية التي تنتج من X_1 وX_2؟

حل المثال السادس:

يمكن تلخيص معطيات المثال في الجدول التالي:

المنتجات	الأقسام الصناعية			هامش الربح
	A	B	C	
X_1	06	04	05	40
X2	06	03	03	42
الطاقة الإنتاجية المتاحة بالدقائق	300	340	330	

كما تجدر الإشارة إلى أن الطاقة الإنتاجية المتاحة لــ A تم تحويلها من 05 ساعات إلى مايعادلها بالدقائق أي 300 دقيقة ($5X60=300$) .

الآن وبعد تلخيص النتائج وتجميعها يصبح من السهل صياغة النموذج الذي سيكون على شكل تعظيم لهامش ربح كما يلي:

صياغة نموذج البرمجة الخطية:

- **صياغة دالة الهدف:** $Max\ Z= 40\ X_1+ 42\ X_2$
- **صياغة قيود المشكلة أو المسألة:**

قيد القسم A : $6\ X+6\ Y \leq 300$

قيد القسم B : $4\ X+3\ Y \leq 340$

قيد القسم C : $5\ X+3\ Y \leq 330$

- **شرط أو قيد عدم السلبية:** $X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0$

المحاضرة الثالثة: البرمجة الخطية (الصيغة العامة، القانونية و القياسية)

تمهيد:

من خلال هذه المحاضرة سوف نعالج المعطيات أو المبادء التي يجدر التمكن منها أثناء إستخدام نماذج البرمجة الخطية، وهي الصيغة العامة، الصيغة القانونية و الأهم الصيغة القياسية، كونها تمثل نقطة البداية لحل مسائل البرمجة الخطية بطريقة السمبلاكس أو الطريقة المبسطة.

حيث سنتطرق في بادئ الأمر للصيغة العامة ثم القانونية و في الأخير للصيغة القياسية كما يلي:

1– الصيغة العامة:

في ضوء ما تقدم، يمكن وضع صيغة عامة لنموذج البرمجة الخطية تتضمن أو تحتوي على دالة الهدف (Z) في حالتي التعظيم أو التدنية ، و على (n) من متغيرات (X_j) و (m) من القيود، معززة بالعلامات الرياضية الممكن أن تأخذها وهي ($\leq,=,\geq$)، ويمكن التعبير عن الصيغة العامة للنموذج الرياضي للبرمجة الخطية على النحو التالي:[1]

دالة الهدف: $\text{Max ou Min}(Z) = C_1X_1+C_2X_2+\ldots+C_nX_n$

القيود:

$$A_{11}X_1 + a_{12}X_2+\ldots+a_{1n}X_n \ (\leq,=,\geq)\ b_1$$
$$A_{21}X_1 + a_{22}X_2+\ldots+a_{2n}X_n \ (\leq,=,\geq)\ b_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_{m1}X_1+a_{m2}X_2+\ldots+a_{mn}X_n \ (\leq,=,\geq)\ b_m$$

شرط عدم السلبية: $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

ملاحظة: إن الصيغة العامة تأخذ نوعين من الصيغ هما الصيغة القانونية و الصيغة القياسة.

[1] **حسن ياسين طعمة وآخرون**، مرجع سبق ذكره، ص ص 47-48.

2- الصيغة القانونية:

يمكن تحديد خصائص الصيغة القانونية في حالتي التعظيم و التدنية فيما يلي: [1]

2-1 حالة التعظيم: خصائص الصيغة القانونية في حالة التعظيم هي:

- دالة الهدف (Z) تكون من النوع Max .

- علامات جميع القيود تكون من النوع أقل أو تساوي ($\leq$) .

- جميع متغيرات القرار X_j موجبة .

وتلخص في:

- دالة الهدف: $Max\ (Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

- القيود: $\sum a_{ij} X_j \leq b_i$

- شرط عدم السلبية: $X_j \geq 0$

حيث: i=1,....m و j= 1,....n

2-2 حالة التدنية:

خصائص الصيغة القانونية في حالة التدنية هي:

- دالة الهدف (Z) تكون من النوع Min .

- علامات جميع القيود تكون من النوع أكبر أو تساوي ($\geq$) .

- جميع متغيرات القرار X_j موجبة .

وتلخص في:

---

[1] المرجع نفسه، ص ص 48-49.

- دالة الهدف: $Min\ (Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

- القيود: $\sum a_{ij} X_j \geq b_i$

- شرط عدم السلبية: $X_j \geq 0$

حيث: $i=1,....m$ و $j= 1,....n$

3- الصيغة القياسية:

تعد الصيغة القياسية أو المعيارية أفضل من الصيغ السابقة من الناحية التطبيقية، ويمكن الحصول على الصيغة القياسية للنموذج إنطلاقا من الصيغة القانونية مع إجراء بعض التحويلات أو التعديلات حسب نوع المشكلة (تعظيم أو تدنية) كمايلي: [1]

3-1 حالة التعظيم:

يمكن تقديم الوصف العام لحالة التعظيم في النقاط التالية:

- إضافة متغيرات راكدة S_i بغرض تحويل المتراجحات إلى معادلات.

- إضافة المتغيرات الراكدة S_i لدالة الهدف مسبوقة بأصفار.

- ضمان عدم سلبية المتغيرات الراكدة S_i لأنها تمثل المستلزمات غير المستغلة.

- ضمان عدم سلبية متغيرات القرار X_j .

وتلخص في مايلي:

- دالة الهدف: $Max\ (Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j + 0 \sum_{i=1}^{m} S_i$

- القيود: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + S_i = b_i$

- شرط عدم السلبية: $X_j \geq 0\ ;\ S_i \geq 0$

[1] **حسن ياسين طعمة وآخرون**، مرجع سبق ذكره، ص ص 49-51.

حيث: i=1,....m و j= 1,....n

X_j متغيرات قرار و S_i متغيرات راكدة أو عاطلة أو غير مستغلة أي لسنا بحاجة إليها .

3–2 حالة التدنية:

يمكن تقديم الوصف العام لحالة التدنية في النقاط التالية:

– طرح متغيرات راكدة بغرض تحويل المتراجحات إلى معادلات.

– إضافة متغيرات إصطناعية (وهمية أو شكلية) إلى قيود المشكلة، لمعالجة الإشارات السالبة للمتغيرات الراكدة، وذلك سغرض التماشي مع شرط عدم السلبية.

– إضافة المتغيرات الراكدة **S_i** لدالة الهدف مسبوقة بأصفار، مع إضافة المتغيرات الإصطناعية R_I لدالة الهدف مسبوقة بكميات كبيرة جدا M و من مضاعفات العدد (10) لتسهيل الحسابات.

– ضمان عدم سلبية المتغيرات الراكدة **S_i** متغيرات القرار **X_j** و المتغيرات الإصطناعية R_i .

وتلخص في مايلي:

– دالة الهدف: $Min(Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j + 0 \sum_{i=1}^{m} S_i + M \sum_{i=1}^{m} R_i$

– القيود: $\sum a_{ij} X_j - S_i + R_i = b_i$

– شرط عدم السلبية: $X_j \geq 0 \; ; S_i \geq 0 \; ; R_i \geq 0$

حيث: i=1,....m و j= 1,....n

حيث: X_j متغيرات القرار، S_i متغيرات راكدة، R_i متغيرات إصطناعية، M قيمة كبيرة جدا .

المثال الأول: أكتب الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية التالية

دالة الهدف: $\text{Max } Z = 20X_1 + 40X_2$

القيود: $\begin{cases} 3X_1 + 8X_2 \leq 50 \\ 6X_1 + 4X_2 \leq 60 \end{cases}$

شرط عدم السلبية: $X_1, X_2 \geq 0$

حل المثال الأول:

دالة $\text{Max } Z = 20X_1 + 40X_2 + 0S_1 + 0S_2$

الهدف:

القيود: $\begin{cases} 3X_1 + 8X_2 + S_1 = 50 \\ 6X_1 + 4X_2 + S_2 = 60 \end{cases}$

شرط عدم السلبية: $X_1, X_2 \geq 0 \; ; \; S_1, S_2 \geq 0$

المثال الثاني: أكتب الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية التالية

دالة الهدف: $\text{Min } Z = 22X_1 + 23X_2$

القيود: $\begin{cases} 3X_1 + 3X_2 \geq 40 \\ 2X_1 + 2X_2 \geq 50 \end{cases}$

شرط عدم السلبية: $X_1, X_2 \geq 0$

حل المثال الثاني:

دالة $\text{Min } Z = 22X_1 + 23X_2 - 0S_1 - 0S_2 + MR_1 + MR_2$

الهدف:

القيود: $\begin{cases} 3X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 40 \\ 2X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 50 \end{cases}$

شرط عدم $X_1, X_2 \geq 0;\ S_1, S_2 \geq 0; R_1, R_2 \geq 0$

المثال الثالث:

أكتب الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية التالية:

دالة الهدف: $\text{Max } Z = 23X_1 + 26X_2$

القيود: $\begin{cases} 7X_1 + 3X_2 \leq 120 \\ 5X_1 \qquad = 320 \end{cases}$

شرط عدم السلبية: $X_1; X_2 \geq 0$

حل المثال الثالث:

دالة الهدف: $\text{Max } Z = 23X_1 + 26X_2 + 0S_1 - MR_1$

القيود: $\begin{cases} 7X_1 + 3X_2 + S_1 = 120 \\ 5X_1 \qquad + R_1 = 320 \end{cases}$

شرط عدم السلبية: $X_1, X_2 \geq 0\ ;\ R_1 \geq 0;\ S_1 \geq 0$

المثال الرابع: أكتب الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية التالي:

دالة الهدف: $\text{Min } Z = 500X_1 + 200X_2$

القيود: $\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 \geq 500 \\ 7X_2 + R_1 = 900 \end{cases}$

شرط عدم السلبية $X_1, X_2 \geq 0$

حل المثال الرابع

دالة الهدف: $\text{Min } Z = 500X_1 + 200X_2 - 0S_1 + MR_1 + MR_2$

القيود: $\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 - S_1 + R_1 = 500 \\ 7X_2 + R_1 = 900 \end{cases}$

شرط عدم السلبية: $X_1, X_2 \geq 0;\ S_1 \geq 0; R_1, R_2 \geq 0$

ملاحظات:

يتضح من الأمثلة المتعلقة بتحويل الصيغة القانونية إلى قياسية بأنها تتصف بمايلي: [1]

- دالة الهدف تكون من النوع Max أو Min .

- إن جميع قيود المشكلة عبارة عن معادلات، بإستثناء قيد عدم السلبية.

[1] **حسن ياسين طعمة وآخرون**، مرجع سبق ذكره، ص ص 54-55.

– إن جميع متغيرات القرار X_j و المتغيرات الراكدة S_i و المتغيرات الإصطناعية R_i تكون مقيدة بالإشارة أي: $X_j \geq 0;\ S_i \geq 0;\ R_i \geq 0$.

– إليك الجدول التالي الذي يوضح استخدامات المتغيرات الراكدة و المتغيرات الإصطناعية أو الوهمية عند تحويل الصيغة القانونية للنموذج إلى صيغة قياسية.

نوع العلامة الرياضية للقيود	آلية استخدام المتغيرات الراكدة S_i و المتغيرات الإصطناعية R_i في قيود النموذج	آلية استخدام المتغيرات الراكدة S_i و المتغيرات الإصطناعية R_i في دالة الهدف	
		Max	**Min**
أقل أو تساوي $\leq$	$+S_i$	$0S_i +$	$+0S_i$
أكبر أو تساوي $\geq$	$-S_i+R_i$	$-0S_i-MR_i$	$-0S_i+MR_i$
يساوي $=$	$+R_i$	$-MR_i$	$+MR_i$

المحاضرة الرابعة : البرمجة الخطية (الحل البياني)

تمهيد :

تعد الطريقة البيانية في البرمجة الخطية وسيلة لحل مشكلاتها، حيث تستخدم إذا كان النموذج يحتوي على متغيرين فقط، إذ يتعذر رسم النموذج في حالة احتواءه على أكثر من متغيرين، و منه فإن هذه الطريقة تقوم على فكرة تمثيل القيود بمعادلة خط مستقيم و من ثم تحديد منطقة الحلول الممكنة، في مايلي شرح مفصل للطريقة البيانية.

1– الطريقة البيانية:

تعد الطريقة البيانية من أسهل طرق حل مشكلات البرمجة الخطية، حيث تصلح للوصول إلى الحل الأمثل للنماذج التي تحتوي على متغيرا قرار فقط هما : X_1 , X_2 بإتباع الخطوات التالية:

- كتابة قيود النموذج على هيئة معادلات بدلا من المتراجحات.
- رسم القيود على هيئة خطوط مستقيمة.
- تحديد زاوية الحل الممكن.
- تعويض قيم احداثيات زوايا منطقة الحل الممكن في دالة الهدف Z .
- اختيار نقطة الحل الأمثل، من بين نقاط زوايا منطقة الحل الممكن.

المثال الأول:[1]

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي بإستخدام الطريقة البيانية ؟

– **دالة الهدف:** $Max\ Z= 5 X_1+ 6 X_2$

– **القيود:**

$$2X_1+3X_2 \leq 30$$
$$5X_1+4X_2 \leq 60$$

[1] **حسن ياسين طعمة وآخرون**، مرجع سبق ذكره، ص 56.

- **شرط عدم السلبية:** $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

حل المثال الأول:

نقوم في أول الأمر بتحويل المتراجحات إلى معادلات

القيد الأول: $2X_1+3X_2 = 30$

القيد الثاني: $5X_1+4X_2 = 60$

نعوض بإحداثيات النقاط في القيدين أو المعادلتين فنجد :

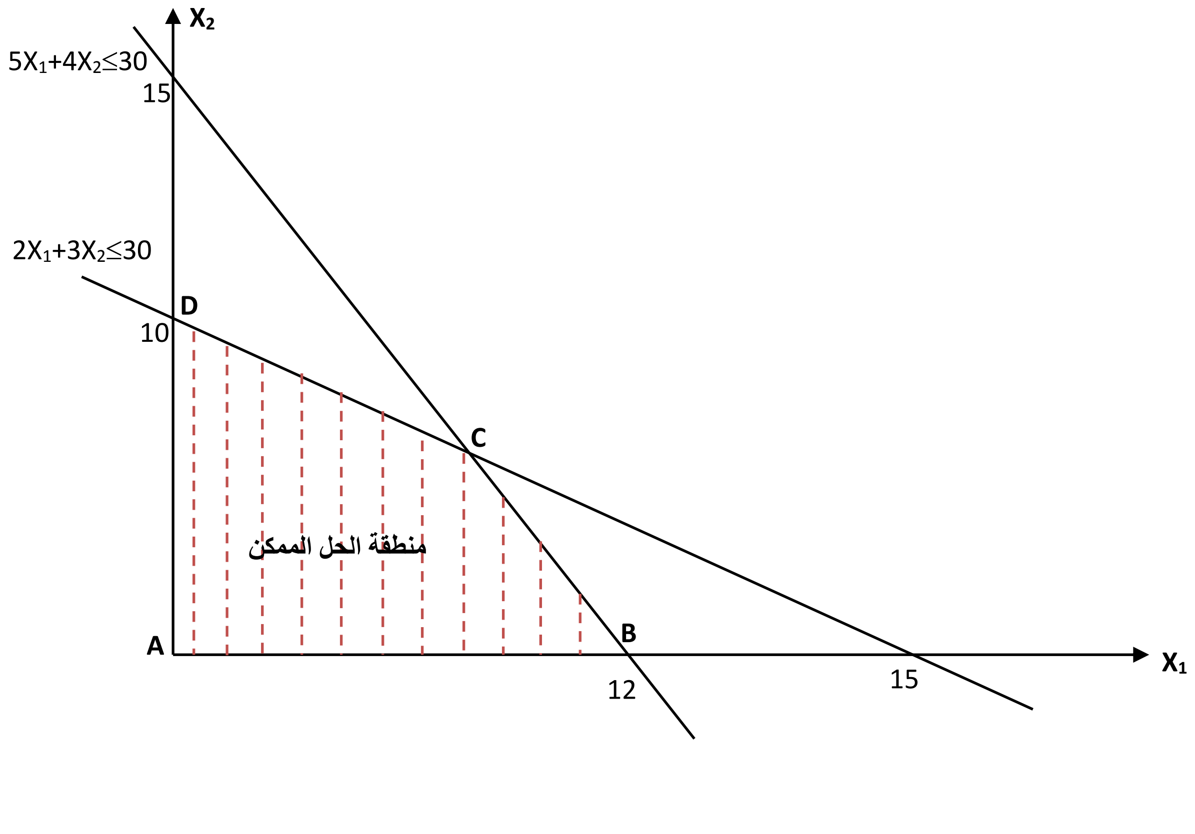
القيد الأول: $2X_1+3X_2 = 30$

X_1	0	15
X_2	10	0

القيد الثاني: $5X_1+4X_2 = 60$

X_1	0	12
X_2	15	0

وعليه تكون منطقة الحلول الممكنة كما يلي:



من الشكل البياني يتضح بأن منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (A ,B,C,D)

إذ أن إحداثيات النقاط A(0 ,0), B(12,0), D(0,10)

أما النقطة C فهي ناتجة عن تقاطع القيدين الأول و الثاني، يتم تحديد إحداثيات النقطة Cكما يلي:

$$(2X_1+3X_2=30)x5$$
$$(5X_1+4X_2=60)x2$$

فتعطينا :

$$10X_1+15X_2=150$$
$$10X_1+8X_2=120$$

بالطرح المعادلتين نجد: ----------------------------

$$7X_2=30$$

ومنه: $X_2=7/30\approx4,3$

نقوم بتعويض قيمة X_2 في معادلة القيد الأول فنجد:

$$2X_1+3\ (4\ ,3) = 30$$

$$2X_1+12\ ,9 = 30$$

$$2X_1= 17.1 \quad \Rightarrow \quad X_1 \approx 8,6$$

ومنه النقطة C لها الإحداثيات التالية: **C(8.6,4.3)**

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج نقوم بتعويض قيم إحداثيات نقاط زوايا الحل في دالة الهدف ملخصة في الجدول التالي:

Max $Z= 5x_1+6X_2$	X_2	X_1	نقاط الحل
0	0	0	A(0,0)
60	0	12	B(12,0)
68.8 *	4.3	8.6	C(8.6,4.3)
60	10	0	D(0,10)

وعليه يكون الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:

$X_1=8.6$; $X_2=4.3$; $z^*=68.8$ وهو يمثل أكبر قيمة في دالة الهدف لأنها حالة تعظيم.

المثال الثاني:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي بإستخدام الطريقة البيانية ؟

– **دالة الهدف:** $Min\ Z = 8X + 15Y$

– **القيود:**

$X+Y = 40$

$X \leq 12$

$Y \geq 10$

– **شرط عدم السلبية:** $X \geq 0,\ Y \geq 0$

حل المثال الثاني: نقوم في أول الأمر بتحويل المتراجحات إلى معادلات

القيد الأول: $X+Y = 40$

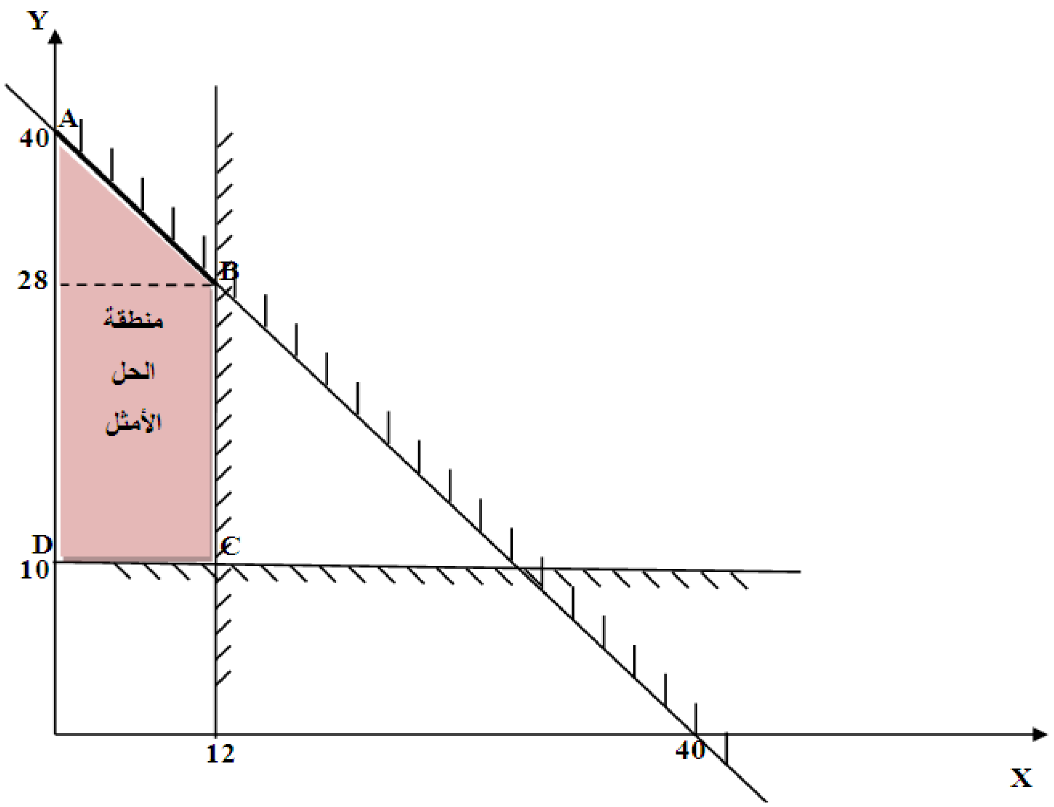
القيد الثاني: $X = 12$

القيد الثالث: $Y = 10$ نعوض بالصفر كقيمة في القيد الأول تارة في X و أخرى في Y فنجد:

القيد الأول: $X+Y = 40$

X	0	40
Y	40	0

أما القيدين الثاني و الثالث فيرسمان مباشرة وبدون تعويض، وعليه تكون منطقة الحلول الممكنة كما يلي:



لإيجاد الحل الأمثل نعوض بتوليفات القيم أو النقاط الحدودية لمنطقة الحل الممكنة (وهي عبارة عن قطعة مستقيمة [A,B]) في دالة الهدف على النحو التالي:

$A(0,40) \Rightarrow \text{Min } Z = 8(0) + 15(40) = 600$

$B(12,28) \Rightarrow \text{Min } Z = 8(12) + 15(28) = 516$

بما أن دالة الهدف من النوع تدنية فإن الحل الأمثل هو النقطة ذات القيمة الأصغر عند تعويضها في دالة الهدف، وهي النقطة B (12,28) .

وبالتالي الحل الأمثل هو **X=12 ; Y= 28 ; Z*=516**

المثال الثالث: [1]

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي بإستخدام الطريقة البيانية ؟

– دالة الهدف: $\text{Max } Z= 2 X_1+ 3 X_2$

– القيود:

$X_1+X_2 \geq 10$

$X_1 \leq 8$

$X_2 \leq 7$

– شرط عدم السلبية: $X_1\geq0,\ X_2\geq0$

حل المثال الثالث:

نقوم في أول الأمر بتحويل المتراجحات إلى معادلات

القيد الأول: $X_1+X_2 = 10$

القيد الثاني: $X_1 = 8$

القيد الثالث: $X_2= 7$

---

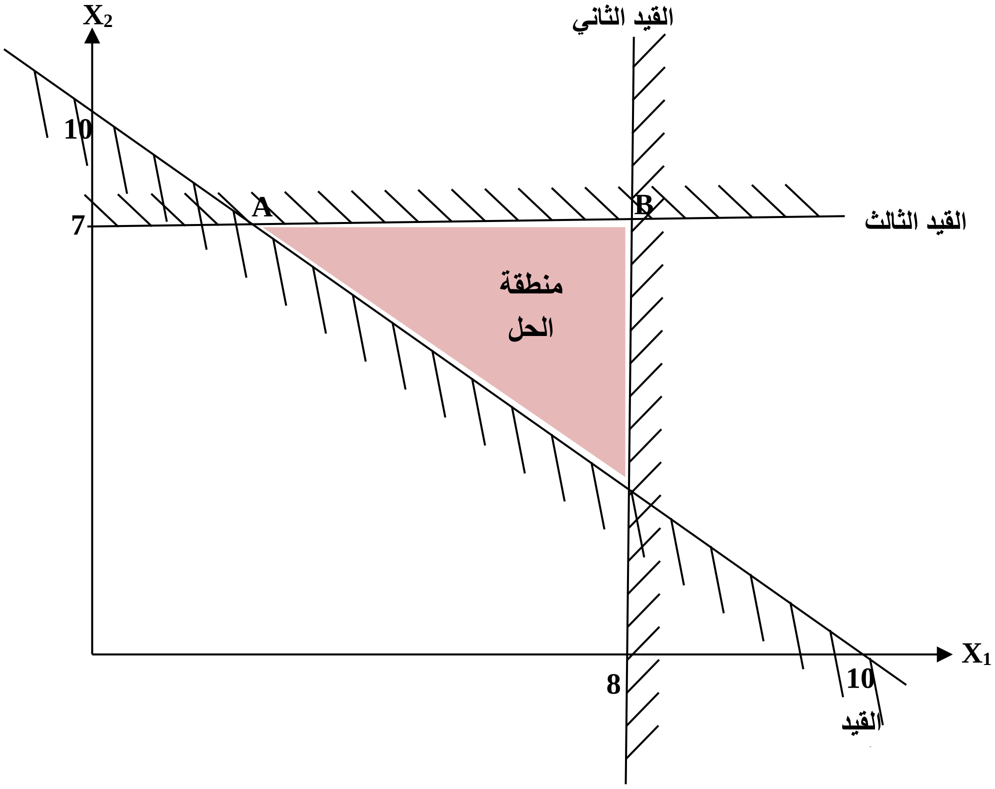
[1] **كريم زرمان، نبيلة باديس، رياضيات المؤسسة: كتاب بيداغوجي مدعم بدروس و تمارين**، دار الهدى، الجزائر، 2022، ص ص 61-64. بتصرف

نعوض بالصفر كقيمة في القيد الأول تارة في X_1 و أخرى في X_2 فنجد:

القيد الأول: $X_1+X_2 = 10$

X_1	0	10
X_2	10	0

أما القيدين الثاني و الثالث فيرسمان مباشرة وبدون تعويض،وعليه تكون منطقة الحلول الممكنة كما يلي:



لإيجاد الحل الأمثل نعوض بتوليفات القيم أو النقاط الحدودية لمنطقة الحل الممكنة (وهي عبارة عن مثلث و توليفات نقاطه هي A(3,7) ; B(8,7) ; C(8,2)) في دالة الهدف على النحو التالي:

$$A(3,7) \Rightarrow \text{Max } Z = 2(3) + 3(7) = 27$$

$$B(8,7) \Rightarrow \text{Max } Z = 2(8) + 3(7) = 37$$

$$C(8,2) \Rightarrow \text{Max } Z = 2(8) + 3(2) = 27$$

و بالتالي النقطة B المتكونة من 8 وحدات من X_1 و 7 وحدات من X_2 تمثل الحل الأمثل بقيمة قصوى وهي37، وعليه الحل الأمثل هو: **$X_1= 8$; $X_2=7$; $Z^*= 37$.**

المثال الرابع :

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي بإستخدام الطريقة البيانية ؟

- دالة الهدف: $Min\ Z = 3X_1 + 8X_2$

- القيود:

$3X_1 + 5X_2 \geq 30$

$X_1 \leq 7$

$4X_1 + 3X_2 \leq 36$

- شرط عدم السلبية: $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$

حل المثال الرابع :

نقوم في أول الأمر بتحويل المتراجحات إلى معادلات

القيد الأول: $3X_1 + 5X_2 = 30$

القيد الثاني: $X_1 = 7$

القيد الثالث: $4X_1 + 3X_2 = 36$

نعوض بالصفر كقيمة في القيد الأول و الثالث تارة في X_1 و أخرى في X_2 فنجد:

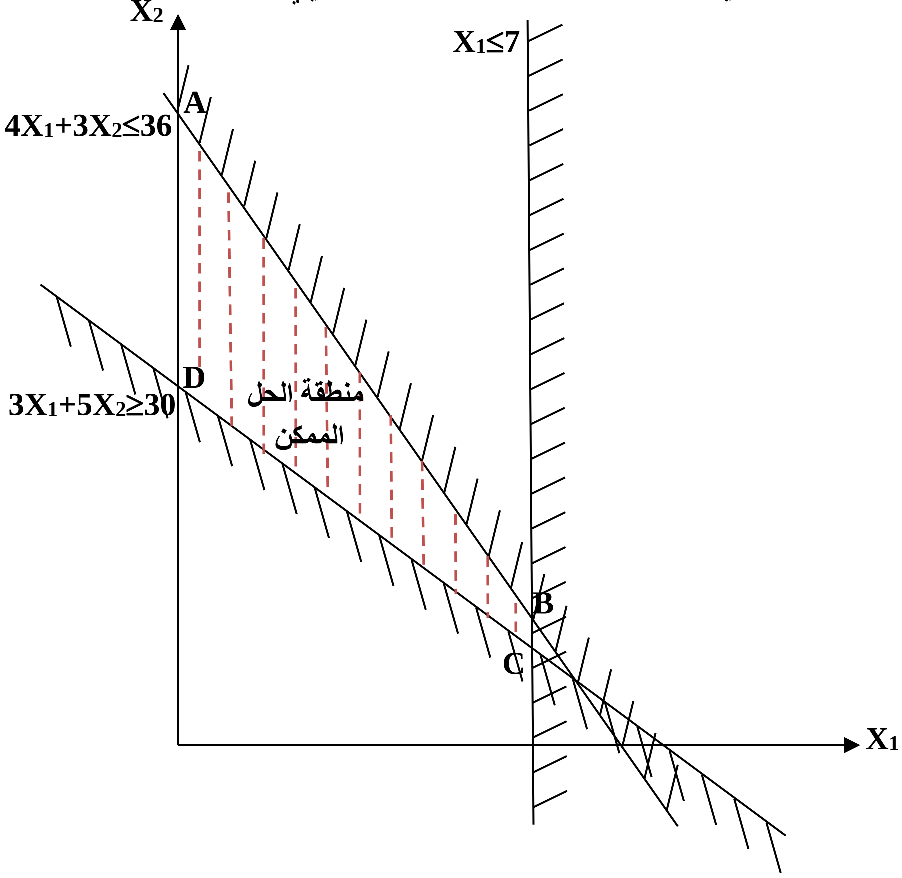
القيد الأول: $3X_1 + 5X_2 = 30$

X_1	0	9
X_2	12	0

القيد الثالث : $4X_1 + 3X_2 = 36$

X_1	0	9
X_2	12	0

أما القيد الثاني فيرسم مباشرة وبدون تعويض، وعليه تكون منطقة الحلول الممكنة كما يلي:



لإيجاد الحل الأمثل نعوض بتوليفات القيم أو النقاط الحدودية لمنطقة الحل الممكنة (; A(0,12) B(7,2.67) C(7,1.8)

D(0,6)) في دالة الهدف على النحو التالي:

$A\ (0,12) \Rightarrow Min\ Z = 3(0) + 8(12) = 96$

$B\ (7,2.67) \Rightarrow Min\ Z = 3(7) + 8(2.67) = 42.36$

$C\ (7,1.8) \Rightarrow Min\ Z = 3(7) + 8(1.8) = 35.4^*$

$D\ (0,6) \Rightarrow Min\ Z = 3(0) + 8(6) = 48$

و بالتالي النقطة C المتكونة من 7 وحدات من X_1 و 1 ,8 وحدات من X_2 تمثل الحل الأمثل بأدنى قيمة لأن دالة الهدف من النوع تدنية وهي 35,4، وعليه الحل الأمثل هو: **$X_1= 7$; $X_2=1.8$; $Z^*= 35.4$**

المحاضرة الخامسة: البرمجة الخطية (الحالات الخاصة للحل البياني)

تمهيد:

هناك حالات عديدة لا يتوفر فيها نقطة حل أمثل واحدة، أو قد يتعذر فيها الوصول إلى حل، ومن هذه الحالات نذكر: [1]

- حالة وجود دالة الهدف لا نهائية.
- حالة عدم وجود حل.
- حالة عدم تأثير أحد القيود على تحديد منطقة الحل الممكن.
- حالة وجود أكثر من حل.

وفيما يلي سيتم توضيح هذه الحالات الخاصة من خلال أمثلة:

1- حالة وجود حل لا نهائي:

المثال الأول:[2]

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي بإستخدام الطريقة البيانية ؟

- **دالة الهدف:** $Max\ Z= 5\ X_1+ 8\ X_2$

- **القيود:**

$$X_1 \geq 8$$
$$X_2 \leq 15$$
$$X_1+2X_2 \geq 15$$

- **شرط عدم السلبية:** $X_1\geq 0,\ X_2\geq 0$

حل المثال الأول:

نقوم في أول الأمر بتحويل المتراجحات إلى معادلات

القيد الأول: $X_1 = 8$

القيد الثاني: $X_2 = 15$

---

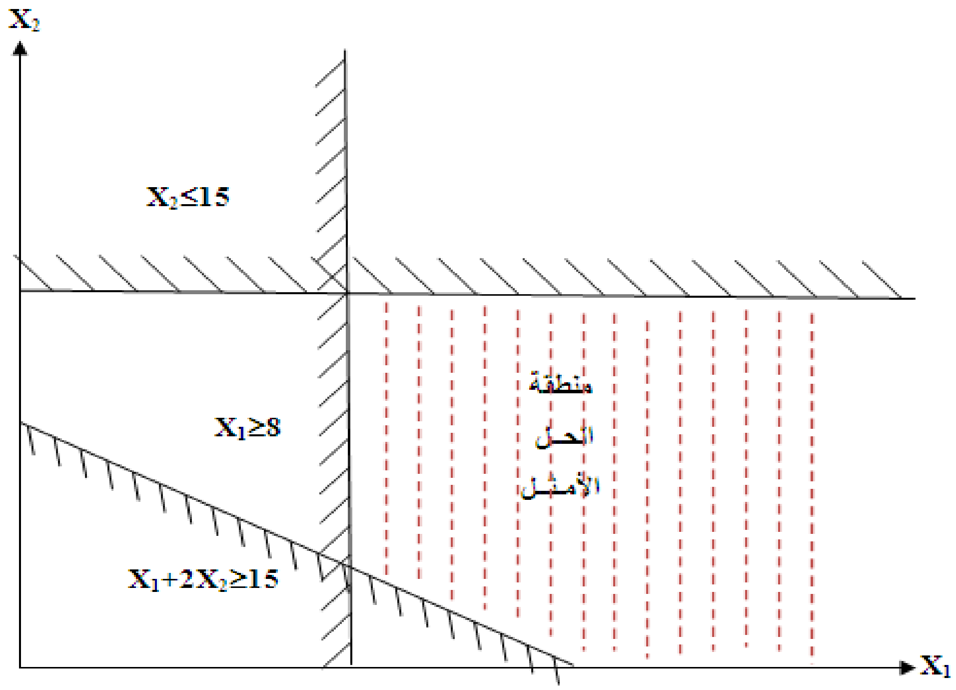
[1] **عبد الرسول غبد الرزاق الموسوي**، **المدخل لبحوث العمليات**، الطبعة الثانية، دار وائل للنشر، الأردن، 2006، ص 28.

[2] **محمد الطراونة ، سليمان عبيدات**، **مقدمة في بحوث العمليات**، دار الميسرة، الأردن، 2009، ص ص 102-103.

القيد الثالث : $X_1+2X_2=15$

X_1	0	15
X_2	7.5	0

يرسم القيدين الأول و الثاني مباشرة أما القيد الثالث فيتم إسقاط احداثيات النقاط ، مع تحديد منطقة الحلول الممكنة كما يلي:



حل نموذج البرمجة الخطي السابق هو حالة خاصة مفادها أن الحل عبارة عن حل لانهائي، أي يمكن إنتاج كميات لا متناهية من السلعتين X_1 و X_2 و تعظيم الربح بدرجة لا متناهية أيضا .

2– حالة عدم وجود حل أمثل:

لتوضيح ذلك نقدم المثال التالي:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي بإستخدام الطريقة البيانية ؟

– دالة الهدف: $\text{Max } Z= 3 X_1+ 6 X_2$

– القيود:

$$X_1+X_2 \geq 12$$
$$3X_1+4X_2 \leq 24$$

– **شرط عدم السلبية:** $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

حل المثال:

نقوم في أول الأمر بتحويل المتراجحات إلى معادلات

القيد الأول: $X_1+X_2 = 12$

القيد الثاني: $3X_1+4X_2 = 24$

نعوض بالصفر كقيمة في القيد الأول و الثاني تارة في X_1 و أخرى في X_2 فنجد:

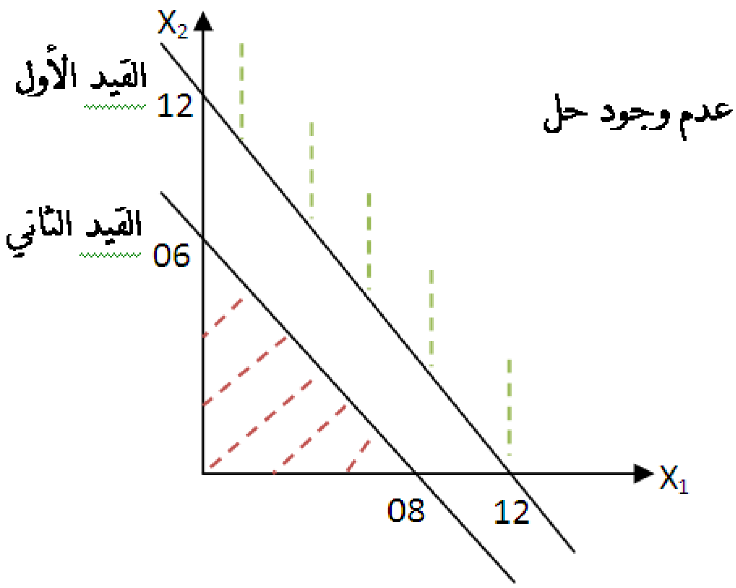
القيد الأول: $X_1+X_2 = 12$

X_1	0	12
X_2	12	0

القيد الثاني : $3X_1+4X_2 =24$

X_1	0	8
X_2	6	0

يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة في الشكل الموالي كما يلي:



من خلال الحل البياني يتضح لنا أن أنه لا يوجد حل لهذا البرنامج الخطي لعدم تقاطع مناطق الحل بين القيدين الأول والثاني.

3- حالة عدم تأثير أحد القيود على تحديد منطقة الحل الممكنة :

في هذه الحالة يظهر أحد القيود كقيد فائض لاحاجة له وليس له أي أثر على الحل و يتضح ذلك في المثال الموالي:

المثال الثالث: [1]

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي بإستخدام الطريقة البيانية ؟

- **دالة الهدف:** $Max\ Z = 12X_1 + 8X_2$
- **القيود:**

$$4X_1 + 9X_2 \leq 1800$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 400$$

- **شرط عدم السلبية:** $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$

حل المثال الثالث:

نقوم في أول الأمر بتحويل المتراجحات أو المتباينات إلى معادلات.

القيد الأول: $4X_1 + 9X_2 = 1800$

القيد الثاني: $3X_1 + 2X_2 = 400$

نعوض بالصفر كقيمة في القيد الأول و الثاني تارة في X_1 و أخرى في X_2 فنجد:

القيد الأول: $4X_1 + 9X_2 = 1800$

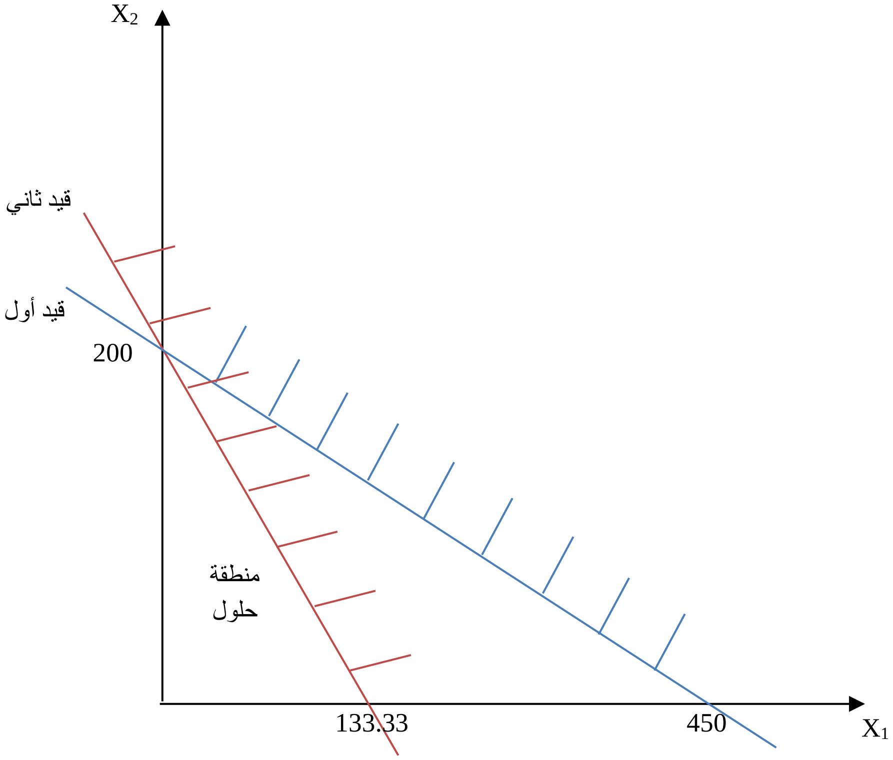
X_1	0	450
X_2	200	0

القيد الثاني : $3X_1 + 2X_2 = 400$

X_1	0	133.33
X_2	200	0

[1] كريم زرمان، باديس نبيلة، مرجع سبق ذكره، ص ص 79-81.

بعدتحويل القيود إلى معادلات ثم إيجاد نقاط تقاطع المستقيمات، يتم رسم الشكل البياني و توضيح منطقة الحلول كما يلي:



نلاحظ من الشكل أن الحل الأمثل هو في النقطة B(0.200) و أن القيد الأول هو قيد فائض و يسمى الحل في مثل هذه الحالة حلا منحلا.

4– حالة وجود أكثر من حل أو حالة تعدد الحلول المثلى:

في هذه الحالة فهو احتمال وجود أكثر من حل أمثل للمشكلة و كما هو موضح في المثال الموالي:[1]

المثال الرابع:

يقوم مصنع بإنتاج سلعتين يمر إنتاج كل سلعة على مرحلتين هي الطهي و التعبئة، و الجدول الآتي يبين متوسط الزمن بالساعة الذي يستغرقه إنتاج الوحدة الواحدة في مراحل الإنتاج وكذلك الربح الذي تحققه الوحدة الواحدة و الساعات المتاحة لكل مرحلة.

[1] **دلال صادق جواد، حميد ناصر الفتال، <u>بحوث العمليات</u>**، دار اليازوري، الأردن،2008، ص ص 36-39.

حدد الكميات المثلى للإنتاج لكل من السلعتين بحيث تحقق أكبر ربح ممكن بإستخدام الطريقة البيانية؟

مراحل الإنتاج / نوع السلعة	الطهي	التعبئة	ربح الوحدة
السلعة الأولى	3	1	40
السلعة الثانية	1	2	50
الساعات المتاحة	15	12	

حل المثال الرابع:

نفترض أن X_1 تمثل عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى، و أن X_2 تمثل الوحدات المنتجة من السلعة الثانية.

المشكلة هي إيجاد قيم X_1 و X_2.

و عليه فإن نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل المشكلة يأخذ الشكل الآتي:

- **دالة الهدف:** $Max\ Z = 5X_1 + 10X_2$

- **القيود:**

$$X_1 + 2X_2 \leq 40$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 45$$

- **شرط عدم السلبية:** $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$

و لتمثيل المشكلة بيانيا يتم تحويل القيود إلى معادلات كما يلي:

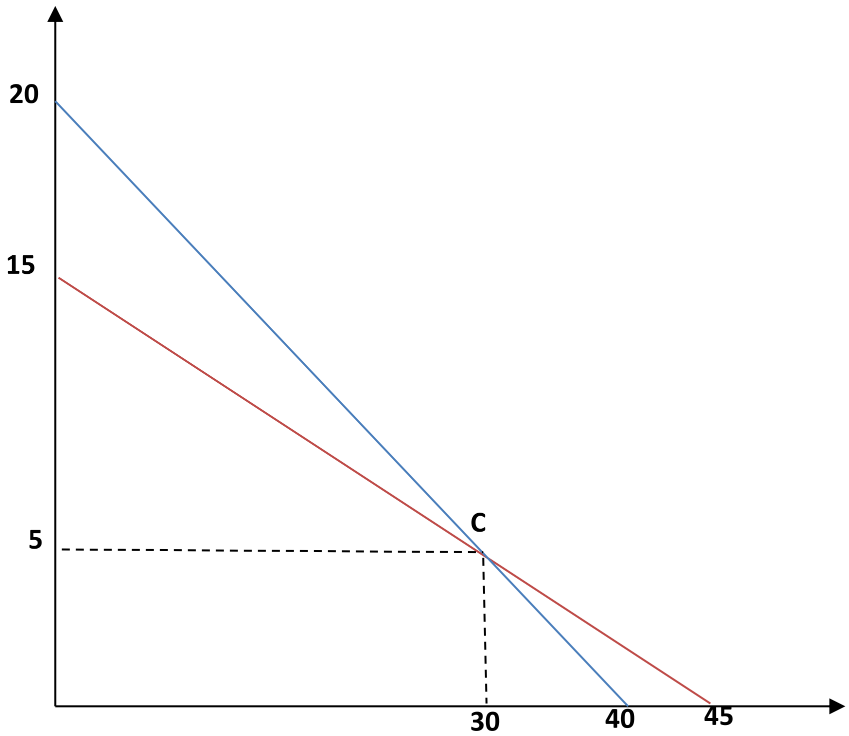
$$X_1 + 2X_2 = 40 \ ....(1)$$

$$X_1 + 3X_2 = 45 ....(2)$$

الجدول التالي يبين نقاط التقاطع للمعادلات (1) و (2)

	X_1	X_2
المعادلة الأولى : $X_1+2X_2 = 40$	0	20
	40	0
المعادلة الثانية : $X_1+3X_2 = 45$	0	15
	45	0

يتم تحديد نقاط التقاطع للمعادلات (1) و (2) على المحورين X_1 و X_2 ثم نصل بينهما بخط مستقيم و كما هو مبين بالشكل التالي:



إن جميع النقاط داخل المنطقة المضللة تمثل منطقة الحل الممكن و هي منطقة تقاطع مناطق الحل و التي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق القيدين في آن واحد و النقاط A , B , C , D فهي الحلول الأساسية، أما نقطة التقاطع بين المستقيمين التي تمثل النقطة C(30,5) تم الحصول عليها بحل المعادلتين اللتان تمثلان المستقيمان واحد و اثنان.

يتم تحديد الحل الأمثل و ذلك بتعويض كل من الحلول الأربعة في دالة الهدف لتعظيم الربح كما يلي:

	X_1	X_2	Max $Z= 5 X_1+ 10 X_2$
A	0	0	0
B	0	15	150
C*	30	5	200
D*	40	0	200

من الجدول نجد أن النقطتين C و D تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية إلى 200، أي أن النقطة C تحدد الكمية التي يجدب إنتاجها من السلعة الأولى و هي مساوية إلى 30 وحدة و من السلعة الثانية 5 وحدات و يكون الربح المحقق هو 200، كما أن النقطة D تحقق مقدار ربح مساوي إلى 200 في حالة تخصيص الإنتاج للسلعة الأولى فقط و بمقدار 40 وحدة.

يتضح من كل هذا أن للمشكلة البرمجة الخطية أكثر من حل واحد و يعود السبب في ذلك هو أن دالة الهدف تكون موازية لأحد القيود الهيكلية، أي عند رسم دالة الهدف و تحريك الرسم ينطلق الرسم في إحدى أوضاعه على أحد المستقيمات المرسومة و هنا يقال أن للمشكلة مجموعة من الحلول المثلى.

المحاضرة السادسة: حل مشكلات البرمجة الخطية بإستخدام طريقة السمبلاكس في حالة التعظيم " Max "

تمهيد :

تعد الطريقة المبسطة " طريقة السمبلاكس" أسلوب رياضي متقدم في حل مشكلات البرمجة الخطية، كونها تعالج المشكلات التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات، كما تعد هذه الطريقة أدق وأفضل من الطرق الأخرى، و لإيجاد حل مشكلات البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة وفقا لثلاث مراحل أساسية متسلسلة وهي:

- المرحلة الأولى: مرحلة إيجاد الحل الأساسي " **الحل الأولي**" .
- المرحلة الثانية: مرحلة تحسين الحل الأولي للحصول على " **الحل الأفضل**" .
- المرحلة الثالثة: مرحلة تحسين الحل الأفضل للحصول على "**الحل الأمثل** " .

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن الوصول إلى الحل الأمثل بخطوة واحدة أو عدد من الخطوات، و فيما يلي شرح مفصل لحل مشكلات البرمجة حالتي التعظيم ثم التدنية.

ولإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بطريقة السمبلاكس نتبع الخطوات التالية: [1]

1- تحويل النموذج من الصيغة القانونية إلى القياسية، ويعني هذا إضافة متغيرات راكدة S_i إلى دالة الهدف و قيود النموذج، مع جعل دالة الهدف مساوية للصفر .

2- تصميم جدول الحل الأساسي الممكن، يعني وضع جدولا للحل الأولي الذي يضم أو يحتوي على جميع المتغيرات (S_i , X_j) .

3- تحديد المتغير الداخل، الذي يحدد على أساس أصغر قيمة سالبة في سطر دالة الهدف أو أكبر قيمة سالبة بالقيمة المطلقة أو أكبر قيمة بإشارة سالبة في سطر دالة الهدف.

[1] **حسن ياسين طعمة وآخرون**، مرجع سبق ذكره، ص ص 102-103.

4- تحديد المتغير الخارج ، الذي يحدد على أساس قسمة القيم الواقعة في عمود الثوابت b_i على مايقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري، بحيث أن المتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة من حاصل القسمة (توضع النتائج في عمود النسبة) يعد هو المتغير الخارج ليحل محله المتغير الداخل.

5- العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل، يسمى بالعمود المحوري أو عمود الدوران أو العمود المركزي.

6- الصف أو السطر الذي يوجد فيه المتغير الخارج، يسمى بالصف المحوري أو صف الدوران أو الصف المركزي.

7- العنصر الذي يقع تحت المتغير الداخل و أمام المتغير الخارج يسمى بالعنصر المحوري أو العنصر المركزي أو عنصر الدوران.

8- إجراء بعض الحسابات بغرض الحصول على الحل الأفضل مع إدراج النتائج في جدول جديد يسمى بجدول الحل الأفضل.

9- يمكن الحصول على الحل الأمثل عندما تكون جميع معاملات متغيرات دالة الهدف في حالة التعظيم في جدول الحل الأفضل أكبر أو تساوي الصفر.

10- يعاد إجراء الخطوات السابقة من (3 إلى 10) حتى يتم الحصول على جميع معاملات دالة الهدف أكبر أو تساوي الصفر ($C_j \geq 0$)، الذي يعني أنه تم الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة من النوع تعظيم (**Max**) .

مثال:

- أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بإستخدام طريقة السمبلاكس؟

- دالة الهدف: $\text{Max } Z = 5X_1 + 6X_2$

- القيود: $2X_1 + 3X_2 \leq 30$

$5X_1 + 4X_2 \leq 60$

- شرط عدم السلبية: $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$

حل المثال:

1- تحويل النموذج من الصيغة القانونية إلى الصيغ القياسية:

- دالة الهدف: $Z - 5X_1 - 6X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$

- القيود: $2X_1+3X_2+S_1 = 30$

$5X_1+4X_2+S_2 = 60$

- شرط عدم السلبية: $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \ ;\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0$

2- تصميم جدول الحل الأساسي " الحل الأولي":

متغيرات أساسية أو قاعدية	متغيرات النموذج				الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i	
S_1	2	3	1	0	30	30/3=10
S_2	5	4	0	1	60	60/4=15
Z	-5	-6	0	0	0	

سطر الدوران

عمود الدوران

ملاحظة: يتم وضع الجدول بالنظر إلى الصيغة القياسية من جهة، و من جهة أخرى يتم تحديد عنصر الدوران بالرجوع إلى الملاحظات السابقة من 3 إلى 7 . ثم نقوم ببعض الحسابات من أجل تحديد أو تصميم جدول جديد يسمى بجدول الحل الأفضل.

3- جدول الحل الثاني " الحل الأفضل":

متغيرات أساسية أو قاعدية	متغيرات النموذج				الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i	
X_2	2/3	1	1/3	0	10	15
S_2	7/3	0	-4/3	1	20	60/7≈8.6
Z	-1	0	2	0	60	

سطر الدوران

عمود الدوران

ملاحظات:

– تم الحصول على سطر X_2 بقسمة عناصر S_1 في الجدول الأول على عنصر الدوران 3 فنحصل على:

2/3، 1، 1/3 ، 0، 30/3=10 .

– تم الحصول على عناصر سطر S_2 كمايلي:

$$\frac{(5*3)-(2*4)}{3}=\frac{7}{3} \text{،} \quad \frac{(4*3)-(3*4)}{3}=0 \text{،} \quad \frac{(0*3)-(1*4)}{3}=\frac{-4}{3} \text{،} \quad \frac{(1*3)-(0*4)}{3}=1 \text{،}$$
$$\frac{(60*3)-(4*30)}{3}=20$$

–تم الحصول على السطر Z الجديد كمايلي:

$$\frac{(-5*3)-(-6*2)}{3}=-1 \text{،} \quad \frac{(-6*3)-(-6*3)}{3}=0 \text{،} \quad \frac{(0*3)-(-6*1)}{3}=2 \text{،} \quad \frac{(0*3)-(-6*0)}{3}=0 \text{،}$$
$$\frac{(0*3)-(-6*30)}{3}=60$$

– يتم تحديد عنصر الدوران بالرجوع إلى الملاحظات السابقة من 3 إلى 10، ثم نقوم ببعض الحسابات من أجل إيجاد الحل الثالث (قد يكون الحل الأمثل) .

– إن السبب الذي يدفعنا نحو تحسين الحل الثاني هو وجود قيمة سالبة في سطر دالة الهدف "Z" .

4– جدول الحل الثالث " الحل الأمثل" :

الثوابت b_i	متغيرات النموذج				متغيرات أساسية أو قاعدية
	S_2	S_1	X_2	X_1	
30/7≈4.3	-2/7	5/7	1	0	X_2
60/3≈8.6	3/7	-4/3	0	1	X_1
60/7≈68.6	3/7	10/7	0	0	Z

ملاحظات:

– تم الحصول على السطر X_1 عن طريق قسمة عناصر S_2 في الجدول الثاني على عنصر الدوران 7/3 فنحصل على مايلي :

$$\frac{\frac{-4}{3}}{\frac{7}{3}}=\frac{-4}{7} \; ; \quad \frac{1}{\frac{7}{3}}=\frac{320}{7\,\frac{7}{3}}=\frac{60}{7}=8.6 \; ;$$

$$0=\frac{0}{\frac{7}{3}} \quad 1=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}} ;$$

- تم الحصول على سطر X_2 كما يلي:

$$4.3 \approx \frac{(10*7/3)-(20*2/3)}{7/3} \text{ ، } \frac{-2}{7} = \frac{(0*7/3)-(1*2/3)}{7/3} \text{ ، } \frac{5}{7} = \frac{(1/3*7/3)-(-4/3*2/3)}{7/3} \text{ ، }$$

$$0 = \frac{(2/3*7/3)-(7/3*2/3)}{\frac{7}{3}} \text{ ، } 1 = \frac{(1*7/3)-(0*2/3)}{7/3}$$

- تم الحصول على سطر Z كما يلي:

$$\frac{10}{3} = \frac{\left(2*\frac{7}{3}\right)-\left(-\frac{4}{3}*-1\right)}{\frac{7}{3}} \text{ ، } 0 = \frac{\left(0*\frac{7}{3}\right)-(-1*0)}{\frac{7}{3}} \text{ ، } 0 = \frac{\left(-1*\frac{7}{3}\right)-\left(\frac{7}{3}*(-1)\right)}{\frac{7}{3}} \text{ ، } \frac{3}{7} = \frac{\left(0*\frac{7}{3}\right)-(-1*1)}{\frac{7}{3}} \text{ ، }$$

$$68.6 \approx \frac{60}{7} = \frac{\left(60*\frac{7}{3}\right)-(-1*20)}{\frac{7}{3}}$$

- لا يمكن تحسين هذا الحل لأنه لا توجد إشارة سالبة في سطر دالة الهدف Z، ومنه لقد توصلنا إلى الحل الأمثل حيث:

$$X_1 = 4.3$$

$$X_2 = 8.6$$

$$Z = 68.8$$

المثال الثاني: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي بإستخدام طريقة السمبلاكس (الطريقة المبسطة) ؟

دالة الهدف: $\mathrm{Max}\ Z = 6X_1 + 8X_2 + 4X_3$

القيود:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 2 \\ X_1 + 3X_3 \leq 6 \\ X_2 \leq 1 \end{cases}$$

شرط عدم السلبية: $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

حل المثال الثاني:

- تحويل النموذج للصيغة القياسية:

$$Z - 6X_1 - 8X_2 - 4X_3 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

القيود:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + S_1 = 2 \\ X_1 + 3X_3 + S_2 = 6 \\ X_2 + S_3 = 1 \end{cases}$$

شرط عدم السلبية: $X_1, X_2, X_3 \geq 0 \; ; \; S_1, S_2, S_3 \geq 0$

- تصميم جدول الحل الأولي (الأساسي):

متغيرات القاعدية	متغيرات النموذج						الثوابت	النسبة
	X_1	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**b_i**	
S_1	1	1	0	1	0	0	2	2/1=2
S_2	1	0	3	0	1	0	6	6/0=∞
S_3	0	1	0	0	0	1	1	1/1=1
Z	-6	-8	-4	0	0	0	0	

- نلاحظ أن المتغير الداخل هو X_2 و المتغير الخارج هو S_3.

- نقوم بإجراء الحسابات الازمة و التي تم شرحها في المثال السابق لتكوين الجدول الثاني " جدول الحل الأفضل".

متغيرات القاعدية	متغيرات النموذج						الثوابت b_i	النسبة
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
S_1	1	0	0	1	0	-1	1	1/1=1
S_2	1	0	3	0	1	0	6	6/1=6
X_2	0	1	0	0	0	1	1	1/0=∞
Z	-6	0	-4	0	0	8	8	

ملاحظات:

- بما أن بعض معاملات صف أو سطر دالة الهدف Z سالبة، يستلزم إمكانية لتحسين الحل، بحيث سنقوم بإتباع نفس الإجراءات السابقة.

- إن المتغير الداخل هو **X_1** و المتغير الخارج هو **S_1**.

- نقوم بإجراء بعض الحسابات للحصول على الجدول الثالث.

متغيرات القاعدية	متغيرات النموذج						الثوابت b_i	النسبة
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
X_1	1	0	0	1	0	-1	1	∞
S_2	0	0	3	-1	1	1	5	5/3≈1.66
X_2	0	1	0	0	0	1	1	1/0=∞
Z	0	0	-4	6	0	2	14	

ملاحظات:

- بماأن سطر دالة الهدف **Z** يحتوي على قيمة سالبة فإنه يستلزم علينا تحسين الحل بإجراء الخطوات المعروفة.

- إن المتغير الداخل هو **X_3** و المتغير الخارج هو **S_2**.

- نقوم بإجراء بعض الحسابات للحصول على الحل الرابع (قد يكون الحل الأمثل).

متغيرات القاعدية	متغيرات النموذج						الثوابت b_i
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
X_1	1	0	0	1	0	-1	1
X_3	0	0	1	-1/3	1/3	1/3	5/3
X_2	0	1	0	0	0	1	1
Z	0	0	0	14/3	4/3	10/3	62/3

- يتضح من الجدول أعلاه أن جميع معاملات دالة الهدف **Z** موجبة أو معدومة، وعليه فقد توصلنا للحل الأمثل.

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = 5/3$$

$$X_3 = 1$$

$$Z = 62/3 \approx 20.7$$

المثال الثالث: أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية باستخدام الطريقة المبسطة **Simplex Method** ؟

$$\text{Max } Z = X_1+3X_2$$

$$X_1 \leq 5$$

$$X_1+2X_2 \leq 10$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

حل المثال الثالث:

- **تحويل النموذج للصيغة القياسية:** يتم تحويل نموذج البرمجة الخطية أعلاه إلى النموذج القياسي، وذلك بإضافة متغيرات راكضة أو فائضة من أجل تحويل المتباينات من النوع أقل أو تساوي إلى معادلات، كما يتم تحويل دالة الهدف إلى دالة صفرية.

- دالة الهدف: $Z-X_1-3X_2-0S_1-0S_2-0S_3=0$

- القيود: $X_1+S_1 = 5$

$$X_1+2X_2+S_2 = 10$$

$$X_2+S_3 = 4$$

- شرط عدم السلبية: $X_1\geq0, X_2\geq0 ; S_1\geq0, S_2\geq0 , S_3\geq0$

- تصميم جدول الحل الأولي (الأساسي):

متغيرات القاعدية	متغيرات النموذج					الثوابت b_i	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
S_1	1	0	1	0	0	5	∞
S_2	1	2	0	1	0	10	10/2
S_3	0	1	0	0	1	4	4/1
Z	-1	-3	0	0	0	0	

- نلاحظ أن المتغير الداخل هو X_2 و ذلك كونه يمثل أقل قيمة سالبة في سطر دالة الهدف (−3) .

- نقوم بحساب عمود النسبة كما تم شرحه في المثال السابق ثم نقوم باختيار أقل نسبة موجبة و التي تمثل سطر الدوران.

- النسبة 4 تقابل المتغير S_3 الذي يمثل سطر الدوران و بالتالي المتغير الذي سوف يخرج من الحل.

- عنصر الدوران هو تقاطع سطر و عمود الدوران و يمثل القيمة 1 .

- نقوم بإجراء الحسابات الازمة و التي تم شرحها في المثال السابق لتكوين الجدول الثاني " جدول الحل الأفضل" .

متغيرات القاعدية	متغيرات النموذج					الثوابت b_i	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
S_1	1	0	1	0	0	5	5/1
S_2	1	0	0	1	-2	2	2/1
X_2	0	1	0	0	1	4	4/0=∞
Z	-1	0	0	0	3	12	

- بما أن قيم دالة الهدف لاتزال بها معاملات سالبة، يستلزم إمكانية لتحسين الحل، بحيث سنقوم بإتباع نفس الإجراءات السابقة.

- إن المتغير الداخل هو X_1 و المتغير الخارج هو S_2.

- نقوم بإجراء بعض الحسابات للحصول على الجدول الثالث.

متغيرات القاعدية	متغيرات النموذج					الثوابت b_i
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	0	0	1	-1	2	3
X_1	1	0	0	1	-2	2
X_2	0	1	0	0	1	4
Z	0	0	0	1	1	14

- يتضح من الجدول أعلاه أن جميع معاملات دالة الهدف **Z** موجبة أو معدومة، وعليه فقد توصلنا للحل الأمثل.

$$X_1 = 2$$

$$S_1 = 3$$

$$X_2 = 4$$

$$Z = 14$$

المثال الرابع: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي بإستخدام طريقة السمبلاكس (الطريقة المبسطة) ؟

دالة الهدف: $$\text{Max } Z = 2X_1 + X_2 - 3X_3$$

القيود: $$\begin{cases} X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 8 \\ 2X_1 + X_3 \leq 6 \\ 4X_1 - 3X_2 \leq 3 \\ 2X_2 - 4X_3 \leq 1 \end{cases}$$

شرط عدم السلبية: $$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

حل المثال الرابع :

- تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية:

$$Z - 2X_1 - X_2 + 3X_3 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - 0S_4 = 0$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 3X_3 + S_1 = 8 \\ 2X_1 + X_3 + S_2 = 6 \\ 4X_1 - 3X_2 + S_3 = 3 \\ 2X_2 - 4X_3 + S_4 = 1 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0\ ;\ S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$$

دالة الهدف: $\text{Max } Z = 2X_1 + X_2 - 3X_3$

القيود:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 8 \\ 2X_1 + X_3 \leq 6 \\ 4X_1 - 3X_2 \leq 3 \\ 2X_2 - 4X_3 \leq 1 \end{cases}$$

شرط عدم السلبية: $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

- تصميم جدول السمبلاكس:

متغيرات القاعدية	متغيرات النموذج							الثوابت b_i	النسبة
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4		
S_1	1	1	1	1	0	0	0	8	8
S_2	2	0	1	0	1	0	0	6	3
S_3	4	-3	0	0	0	1	0	3	0.75
S_4	0	2	-4	0	0	0	1	1	∞
Z	-2	-1	3	0	0	0	0	0	//////////
S_1	0	7/4	1	1	0	-1/4	0	29/4	29/7≈4.14
S_2	0	6/4	1	0	1	-1/2	0	18/4	3
X_1	1	-3/4	0	0	0	1/4	0	3/4	-1
S_4	0	2	-4	0	0	0	1	1	0.5
Z	0	**-10/4**	3	0	0	1/2	0	6/4	//////////
S_1	0	0	9/2	1	0	-1/4	-7/8	51/8	51/36≈1.42
S_2	0	0	4	0	1	-1/2	-3/4	15/4	15/16≈0.94
X_1	1	0	-3/2	0	0	1/4	3/8	9/8	-0.75
X_2	0	1	-2	0	0	0	1/2	1/2	-0.25
Z	0	0	-2	0	0	1/2	5/4	11/4	//////////
S_1	0	0	0	1	-9/8	5/16	-1/32	69/32	
X_3	0	0	1	0	1/4	-1/8	-3/16	15/16	
X_1	1	0	0	0	3/8	1/16	3/32	81/32	
X_2	0	1	0	0	1/2	-1/4	1/8	19/8	
Z	0	0	0	0	1/2	1/4	7/8	37/8	

ملاحظة: في الجدول الأخير لا توجد إشارة سالبة في سطر دالة الهدف **Z** ومنه فقد توصلنا للحل الأمثل وهو:

$Z=37/8$; $X_1=81/32$; $X_2=19/8$; $X_3=15/16$; $S_1=69/32$

المحاضرة السابعة: حل مشكلات البرمجة الخطية بإستخدام طريقة السمبلاكس في حالة التدنية " Min "

تمهيد:

عند حل مشكلات البرمجة الخطية ذلك يكون وفق طريقة السمبلاكس في حالة التدنية (القيود تكون من الشكل أكبر أو تساوي أو من الشكل مساواة) يتم بواسطة إحدى الطريقتين: طريقة M كبيرة Big M Method أو طريقة المرحلتين Tow phase Method. وفيما يلي شرح مفصل لطريقة M كبيرة.

- تطبيق طريقة M كبيرة The big M Method:

تنطوي فكرة هذه الطريقة على إضافة متغيرات إصطناعية R_i إلى جانب المتغيرات الراكدة S_i، بحيث تأخذ معاملات المتغيرات الراكدة القيمة الصفرية أو المعدومة (0) . أما معاملات R_i تأخذ قيمة كبيرة جدا (M) في دالة الهدف، بحيث تجدر الإشارة إلى أنه تحمل هذه المعاملات (M) إشارة موجبة في دالة الهدف في حالة التدنية Min و إشارة سالبة في حالة التعظيم Max.

ولإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية في حالة التدنية بطريقة السمبلاكس و بإتباع منهجية M كبيرة، نتبع تقريبا نفس الخطوات التي تم ذكرها في حالة التعظيم، بحيث توجد بعض الإختلافات التي سيشار إليها في التمرين التالي:

المثال الأول: " طريقة السمبلاكس Min"

- أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بإستخدام طريقة السمبلاكس و بإتباع طريقة **M** كبيرة؟

دالة الهدف: $$\text{Min } Z = 2X_1 + X_2$$

القيود:

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$4X_1 + 2X_2 \geq 40$$

شرط عدم السلبية:

$$X_1, X_2 \geq 0$$

حل المثال الأول:

- تحويل النموذج من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية:

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + X_2 - 0S_1 - 0S_2 + MR_1 + MR_2$$

القيود:

$$X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40$$

شرط عدم السلبية:

$$X_1, X_2 \geq 0; \;\; S_1, S_2 \geq 0; \; R_1, R_2 \geq 0$$

M عدد كبير جدا

ملاحظة هامة: لقد قمنا بإضافة R_1 , R_2 لأن المتغيرين الراكدين S_1,S_2 لهما إشارتين سالبتين وهذا يتعارض مع شرط عدم السلبية (تم إضافة المتغيران الإصطناعيان أو الوهميان من أجل تعيدل مشكل الإشارة) .

- صياغة دالة الهدف Z بدلالة المتغيرات القرارية X_j و المتغيرات الراكدة S_i فقط:

* من القيود يمكن استخراج:

$$R_1 = 30 - X_1 - 3X_2 + S_1 \ldots\ldots (1)$$
$$R_2 = 40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2 \ldots\ldots (2)$$

* نعوض (1) و (2) في دالة الهدف Z فنحصل على:

$$Z = 2X_1 + X_2 - 0S_1 - 0S_2 + MR_1 + MR_2$$
$$Z = 2X_1 + X_2 + M(30 - X_1 - 3X_2 + S_1) + M(40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2)$$
$$Z = 2X_1 + X_2 + 70M - 5MX_1 - 5MX_2 + MS_1 + MS_2$$
$$Z = 70M + (2-5M)X_1 + (1 - 5M)X_2 + MS_1 + MS_2$$

$$Z-(2-5M)X_1-(1-5M)X_2-MS_1-MS_2=70M$$

* تصميم جدول الحل الأولي " الحل الممكن": يتم تصميم هذا الجدول إنطلاقا من القيود التي تم الحصول عليها من الصيغة القياسية، ومن المعادلة الأخيرة لصياغة دالة الهدف Z.

متغيرات القاعدة	متغيرات النموذج						الثوابت b_i	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
R_1	1	3	-1	0	1	0	30	30/10=10
R_2	4	2	0	-1	0	1	40	40/2=20
Z	(-2+5M)	(-1-5M)	-M	-M	0	0	70M	

ملاحظة: يتم إختيار عمود الدوران على أساس أكبر قيمة موجبة وهي تقابل متغير القرار الثاني X_2، أما سطر الدوران فيتم إختياره بناءا على أقل قيمة موجبة في خانات عمود النسبة ويقابل القيمة 10 أي المتغير الإصطناعي R_1 هو الذي سوف يخرج من الحل ليحل محله متغير القرار X_2أما نقطة الإرتكاز أو LE PIVOT فإنه يمثل تقاطع السطر و العمود في العدد 3.

* تصميم جدول الحل الثاني: " الحل الأفضل" يتم تصميم هذا الجدول وفق الخطوات و الحسابات المعروفة سابقا.

متغيرات القاعدة	متغيرات النموذج						الثوابت b_i	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
X_2	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	10	30
R_2	10/3	0	2/3	-1	-2/3	1	20	6
Z	$-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M$	0	$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M$	-M	$-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M$	0	10+20M	

* تصميم جدول الحل الثالث:

متغيرات القاعدة	متغيرات النموذج						الثوابت b_i
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
X_2	0	1	-2/5	1/10	2/5	-1/10	8
X_1	1	0	1/5	-3/10	-1/5	3/10	6
Z	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	-M	$\frac{1}{2}-M$	20

ملاحظة بما أن جميع معاملات سطر دالة الهدف Z سالبة أو معدومة، فإننا توصلنا للحل الأمثل الذي يحقق أقل تكلفة ممكنة وهو:

$$X_1 = 6$$

$$X_2 = 8$$

$$Z = 20$$

المثال الثاني:

أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية باستخدام طريقة Big-M ؟

$$Min\ Z = 5X_1 + 7X_2$$
$$X_1 + 2X_2 = 50$$
$$X_1 \geq 20$$
$$X_2 \leq 20$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

حل المثال الثاني:

يتم تحويل قيود النموذج إلى النموذج القياسي و ذلك بإضافة المتغيرات الراكدة أو الفائضة، فبالنسبة للقيد الثالث و الذي هو بصيغة أقل أو تساوي يتم تحويله كالآتي:

$$X_2 + S_2 = 20$$

أما بالنسبة للقيد الثاني و الذي هو بصيغة أكبر أو تساوي فيعالج بطرح المتغير الفائض منه بدلا من إضافته ، و في هذه الحالة يجب الإنتباه إلى أحد الشروط الأساسية في مسائل البرمجة الخطية وهو شرط عدم السلبية. إذ نلاحظ أن معالجة القيد الثاني لاتلبي الشرط المذكور، ففي حالة افتراض أن $X_1 = 0$ فإن قيمة $S_1 = -20$ و هذا غير منطقي، لذلك وجب معالجة الحالة و ذلك بإضافة متغير آخر لكي نحافظ على شرط عدم السلبية. و يطلق على هذا المتغير بالمتغير الإصطناعي و بذلك يصبح القيد الثاني بالشكل الآتي:

$$X_1 - S_1 + R_2 = 20$$

أما القيد الأول و الذي هو بصيغة مساواة فنستخدم أيضا المتغير الإصطناعي في المعادلة فتصبح كآتي:

$$X_1 + 2X_2 + R_1 = 50$$

وحتى يكون الحل الأمثل صحيحا يجب إضافة هذه المتغيرات الإصطناعية إلى دالة الهدف بعد ضربها في قيمة ثابته M و هي قيمة كبيرة جدا فتصبح دالة الهدف كالآتي:

$$Min\ Z = 5X_1 + 7X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$$

وبذلك تصبح صيغة القيود لنموذج البرمجة الخطية كالآتي:

$$X_1 + 2X_2 + R_1 = 50$$

$$X_1 - S_1 + R_2 = 20$$

$$X_2 + S_2 = 20$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

ولأن المتغيران الإصطناعيان هما متغيران أساسيان في القيود يجب أن يكون معاملها في دالة الهدف في الحل الأولي يساوي الصفرا لذلك يجب التعويض عنهما في دالة الهدف من القيدين الأول و الثاني حيث:

$R_1 = 50 - X_1 - 2X_2$.........(1)

$R_2 = 20 - X_1 + S_1$..........(2)

بتعويض 1 و 2 في دالة الهدف و بعد تبسيطها تصبح كمايلي:

$$Z - (5 - 2M)X_1 - (7 - 2M)X_2 - MS_1 = 70M$$

تصميم جدول الحل الأولي:

المتغيرات الأساسية	متغيرات النموذج						الثوابت Bi
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
R_1	1	2	0	0	1	0	50
R_2	1	0	-1	0	0	1	20
S_2	0	1	0	1	0	0	20
Max Z	-5+2M	-7+2M	-M	0	0	0	70M

وفي مثالنا هذا ان المتغير الداخل هو X_1 لأنه يقابل أكبر قيمة موجبة في الصف Z . أما تحديد المتغير الخارج فنستخدم نفس الأسلوب الذي تم اتباعه في الحل بالطريقة المبسطة و ذلك بقسمة عمود الثوابت على عناصر عمود الدوران أي العمود الذي يمثل العنصر الذي سوف يدخل الحل وهو X_2 و عند حساب النسبة نجد أن أقل نسبة تمثل في مثالنا المتغير الخارج R_2 .

و بإتباع نفس الخطوات التي تم شرحها سابقا في عملية حل بطريقة السمبلاكس نجد جدول الحل الأفضل التالي:

المتغيرات الأساسية	متغيرات النموذج						الثوابت
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Bi**
R_1	0	2	0	0	1	0	30
X_1	1	0	-1	0	0	1	20
S_2	0	1	0	1	0	0	20
Max Z	0	-7+2M	5-M	0	0	-5+2M	-100-30M

نلاحظ أن صف Z لا يزال يحتوي على قيم موجبة، لذلك نستمر في عملية تحسين الحل إلى أن نصل إلى الحل الأمثل، و بنفس الطريقة السابقة الشرح (طريقة السمبلاكس) يتبين أن عمود الدوران و الذي يمثل المتغير الداخل يمثل العنصر X_2 أما المتغير الخارج فهو أصغر نسبة موجبة من حاصل قسمة عمود الثوابت على عمود الدوران و يمثل العنصر R_1 .

و بنفس الخطوات الموضحة سابقا نتحصل عل الجدول الأخير الذي يمثل جدول الحل الأمثل كمايلي:

المتغيرات الأساسية	متغيرات النموذج						الثوابت
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Bi**
X_2	0	1	1/2	0	½	-1/2	15
X_1	1	0	-1	0	0	1	20
S_2	0	0	-1/2	1	-1/2	1/2	5
Max Z	0	0	-3/2	0	7/2-M	3/2-M	205

من الجدول الأخير نلاحظ أن جميع قيم الصف Z سالبة، إذن نكون قد حصلنا على الحل الأمثل وهو:

$X_1= 20, X_2= 15, S_1= 0, S_2= 5, Z^*=205$

المثال الثالث:

- أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بإستخدام طريقة السمبلاكس و بإتباع طريقة **M** كبيرة؟

دالة الهدف: $\text{Min Z} = 80\text{X}_1 + 60\text{X}_2$

القيود:

$$6X_1 + 9X_2 \leq 162$$
$$5X_1 + 10X_2 = 100$$
$$18X_1 + 12X_2 \geq 180$$

شرط عدم السلبية:

$$X_1, X_2 \geq 0$$

حل المثال الثالث:

- تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية:

$$\text{Min Z} = 80\text{X}_1 + 60\text{X}_2 + 0\text{S}_1 - 0\text{S}_2 + \text{MR}_1 + \text{MR}_2$$

القيود:

$$6X_1 + 9X_2 + S_1 = 162$$
$$5X_1 + 10X_2 + R_1 = 100$$
$$18X_1 + 12X_2 - S_2 + R_2 = 180$$

شرط عدم السلبية:

$$X_1, X_2 \geq 0;\ S_1, S_2 \geq 0\ ;\ R_1, R_2 \geq 0$$

ملاحظة: لقد أضفنا المتغيرين الإصطناعيين R_1 و R_2 لأن القيد الثاني في شكل معادلة و القيد الثالث له متغير راكد ذو إشارة سالبة.

- صياغة دالة الهدف بدلالة متغيرات القرار و المتغيرات الإصطناعية فقط:

*من قيد الثاني و الثالث نستخرج:

$$R_{1=}100 - 5X_1 - 10X_2 \ldots\ldots(1)$$

$$R_2 = 180 - 18X_1 - 12X_2 + S_2 \ldots.(2)$$

* نعوض (1) و (2) في دالة الهدف Z فنحصل على:

$$\mathrm{Z} = 80\mathrm{X}_1 + 60\mathrm{X}_2 + 0\mathrm{S}_1 - 0\mathrm{S}_2 + \mathrm{MR}_1 + \mathrm{MR}_2$$

$$\mathrm{Z} = 80\mathrm{X}_1 + 60\mathrm{X}_2 + \mathrm{M}(100 - 5X_1 - 10X_2) + \mathrm{M}(180 - 18X_1 - 12X_2 + S_2)$$

$$\mathrm{Z} = 80\mathrm{X}_1 + 60\mathrm{X}_2 + 280M - 23\mathrm{MX}_1 - 22\mathrm{MX}_2 + \mathrm{MS}_1$$

$$\mathrm{Z} = 280M + (80 - 23\mathrm{M})\mathrm{X}_1 + (60 - 22\mathrm{M})\mathrm{X}_2 + \mathrm{MS}_1$$

$$\mathrm{Z} - (80 - 23\mathrm{M})\mathrm{X}_1 - (60 - 22\mathrm{M})\mathrm{X}_2 - \mathrm{MS}_1 = 280M$$

* تصميم جدول السمبلاكس:

متغيرات قاعدية	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	الثوابت b_i	النسبة
S_1	6	9	1	0	0	0	162	27
R_1	5	10	0	0	1	0	100	20
R_2	18	12	0	-1	0	1	180	10
Z	-80+23M	-60+22M	0	-M	0	0	280M	/////
S_1	0	5	1	1/3	0	-1/3	102	20.4
R_1	0	20/3	0	5/18	1	-5/18	50	7.5
X_1	1	2/3	0	-1/18	0	1/18	10	15
Z	0	$\frac{-20+20M}{3}$	0	$\frac{-80+5M}{18}$	0	$\frac{80-23M}{18}$	50M+800	/////
S_1	0	0	1	1/8	-3/4	-1/8	64.5	
X_2	0	1	0	1/24	3/20	-1/24	7.5	
X_1	1	0	0	-1/12	-1/10	1/12	5	
Z	0	0	0	$\frac{-150-10M}{36}$	-1-2M	$\frac{150-26M}{36}$	750	

ملاحظة: بما أن جميع معاملات سطر دالة الهدف Z سالبة أو معدومة، فإننا توصلنا للحل الأمثل حيث:

$$S_1 = 64.5$$

$$X_2 = 7.5$$

$$X_1 = 5$$

Z= 750

ملاحظات هامة: أثناء سيرورة الحل قد تصادفنا حالات خاصة منها:

*** حالة التعادل في السطر الأخير Z :** قد تتعادل القيمالسالبة في حالة التعظيم و القيم الموجبة في حالة التذنية في السطر الأخير من جدول السمبلاكس .

– القاعدة 01: إذا كان التعادل بين متغيرات القرار X_j و المتغيرات الراكدة S_i فيفضل إختيار متغير القرار (المتغير الأصلي) .

– **القاعدة 02:** إذا كان التعادل بين متغيرات القرار X_j فقط يفضل أخذ المتغير الذي له أثر أكبر في دالة الهدف أي (أكبر معامل C_j في حالة التعظيم و أصغر معامل C_j في حالة التدنية) .

– **القاعدة 03:** إذا كان التعادل بين المتغيرات الراكدة أو متغيرات الفائض أو متغيرات الفرق S_i يتم اختيار أي متغير لا على التحديد (عشوائيا) .

*** حالة التعادل في النسبة (حالة الحل الغير منتظم) :** نكون في هذه الحالة عندما نجد في عمود النسبة قيمتين متساويتين تمثلان متغيران سيخرجان ، نختار واحدا من هذه المتغيرات لا على التحديد (تسمى هذه الحالة في الغالب بحالة الحل الغير منتظم) .

*** حالة وجود الحل الأمثل:**

– في هذه الحالة نكون قد وصلنا إلى الحل النهائي أي الأمثل وهو أن جميع قيم السطر الأخير Z موجبة أو صفرية في حالة التعظيم أو سالبة أو صفرية في حالة التدنية، ولكن المتغيرات الأساسية أو القاعدية تتضمن متغير اصطناعي أو وهمي واحد أو أكثر من واحد .

– في حالة وجود متغير في السطر الأخير من جدول السمبلاكس Z قابل للدخول في الحل أو القاعدة من أجل تحسين الحل مع كون كل القيم المقابلة له في عمود الدوران هي سالبة أو صفرية مع العلم أن قيم عمود الثوابت b_i دائما موجب، عندها يكون في عمود النسبة قيم سالبة أو مالانهاية ∞ وبالتالي فهذا يعني أن المسألة لايوجد لها حل.

المحاضرة الثامنة: النموذج الثنائي (الإزدواجية أو المرافق أوالمقابل أو الثنائية)

تمهيد:

إن لكل نموذج أولي Primel Model من نماذج البرمجة الخطية، يوجد آخر يدعى بالنموذج المقابل Dual Model و للنموذج المقابل يوجد حل أمثل Optimal Solution يتطابق مع الحل الأمثل للنموذج الأولي.

وتتمثل أهمية النموذج المقابل في حل مسائل البرمجة الخطية بما يلي:

- تقليص الجهد الحسابي عند احتواء نموذج البرمجة الخطية الأولي على عدد كبير من القيود.

- يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج المقابل مباشرة من جدول الحل الأمثل النهائي للنموذج الأولي، و العكس صحيح.

تتمثل خطوات تحويل النموذج الأولي إلى مقابل أو ثنائي: [1]

1- تعظيم دالة الهدف في النموذج الأولي تعني تقليل دالة الهدف في النموذج المقابل، و العكس صحيح. أي إذا كانت دالة الهدف تعظيم Max تصبح تدنية أو تقليل Min في النموذج المقابل. أما إذا كانت دالة الهدف تقليل Min فإنها تصبح تعظيم Max في النموذج المقابل، مع مراعاة تحويل رمز الدالة للنموذج من **Z** إلى **W** في النموذج المقابل.

$$Max\ (\ Primal) = Min\ (\ Dual)$$

$$Min\ (\ Primal) = Max\ (Dual)$$

2- إبدال المتغيرات النموذج الأولي من X_{ij} إلى Y_{ij} في النموذج المقابل.

3- كل قيد في المسألة الرئيسية يقابل متغير قرار Y_{ij} في المسألة المقابلة، و بالتالي يكون عدد متغيرات القرار مساويا لعدد القيود في النموذج الأساسي أو الأولي.

[1] **أحمد محمد الهزاع الصامدي**، **أساسيات بحوث العمليات**، مرجع سبق ذكره، ص ص 103-104.

4- جعل قيم الثوابت b_i التي تقع في الطرف الأيمن من قيود النموذج الأولي، كمعاملات C_j للمتغيرات Y_j في دالة الهدف W للنموذج المقابل.

4- جعل معاملات متغيرات دالة الهدف Z للنموذج الأولي C_j، كقيم للثوابت b_i التي تقع في الطرف الأيمن من القيود الجديدة للنموذج المقابل.

5- إبدال مصفوفة معاملات المتغيرات في قيود النموذج الأولي a_{ij} ، بحيث تصبح الصفوف أعمدة، و الأعمدة صفوف، (بمعنى آخر إيجاد مبدلة معاملات المتغيرات X_{ij}) .

6- إضافة شرط عدم على المتغيرات الجديدة أي ($Y_j \geq 0$) .

7- تحويل علامات القيود من أصغر أو تساوي إلى أكبر أو تساوي و بالعكس.

ملاحظات هامة:

- في حالة النموذج الأولي، إذا كان عدد المتغيرات تساوي n و عدد القيود يساوي m، فإنه يصبح في النموذج المقابل عدد المتغيرات يساوي m و عدد القيود n. [1]

- عند تحويل النموذج الأولي إلى نموذج مرافق يجب مراعاة ما يلي:

1. يجب أن تكون جميع علامات القيود أصغر من أو تساوي، عندما تكون دالة الهدف من النوع تعظيم Max .
2. يجب أن تكون جميع علامات القيود أكبر من أو يساوي ، عندما تكون دالة الهدف Min .

- عندما تكون في النموذج الأولي المتغيرات غير مقيدة بالإشارة فإن القيود المقابلة لها في النموذج الثنائي تكون عبارة عن مساواة.

[1] **حسن ياسين طعمة وآخرون**، مرجع سبق ذكره، ص 137.

– عندما تكون القيود في النموذج الأولي عبارة عن مساواة فإن المتغيرات المقابلة لها في البرنامج الثنائي تكون غير مقيدة بالإشارة.

– يتطابق الحل الأمثل Optimal Solution للنموذج الأولي مع الحل الأمثل للنموذج المقابل، أي $W^* = Z^*$.

– عند إيجاد الحل الأمثل للنموذج المقابل Dual فإنه بالإمكان الحصول على الحل الأمثل للنموذج الأولي Primal مباشرة من الحل النهائي للنموذج المقابل، و يتمثل هذا الحل بمعاملات دالة الهدف W التي تقع تحت المتغيرات الراكدة S_i أو الإصطناعية R_i في جدول السمبلاكس.[1]

المثال الأول: أكتب النموذج المقابل للنموذج الأولي التالي؟

النموذج الأولي:

$$Max\ Z = 7X_1 + 5X_2 - 4X_3$$

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 \le 13$$

$$X_1 + 4X_2 \le 15$$

$$3X_1 + 5X_3 \le 17$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

حل المثال الأول:

النموذج المقابل

$$Min\ W = 13Y_1 + 15Y_2 + 17Y_3$$

$$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \ge 7$$

$$Y_1 + 4Y_2 \ge 5$$

$$2Y_1 + 5Y_3 \ge -4$$

[1] **يزن ابراهيم مقبل، مقدمة في بحوث العمليات**، مرجع سبق ذكره، بتصرف

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

المثال الثاني: أوجد النموذج المراق للبرنامج الخطي التالي؟

$$Min\ Z = 5X_1 + 3X_2$$

$$10X_1 + 20X_2 \geq 150$$

$$15X_1 + 12X_2 \geq 200$$

$$16X_1 + 18X_2 \geq 250$$

حل المثال الثاني:

$$\text{Max W} = 150\text{Y}_1 + 200\text{Y}_2 + 250\text{Y}_3$$

$$10Y_1 + 15Y_2 + 16Y_3 \leq 5$$

$$20Y_1 + 12Y_2 + 18Y_3 \leq 3$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

المثال الثالث: أكتب النموذج المقابل للنموذج الأولي التالي؟

النموذج الأولي:

$$Min\ Z = 2\ X_1 + 6X_2 + 9X_3$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 1$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 3$$

$$3X_2 + 4X_3 \geq 6$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

حل المثال الثالث:

النموذج المرافق أو المقابل:

$$Max\ W = 1Y_1 + 3Y_2 + 6Y_3$$

$$Y_1 + Y_2 \leq 2$$

$$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \leq 6$$

$$Y_2 + 4Y_3 \leq 9$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

المثال الرابع : أوجد النموذج المرافق للبرنامج الخطي الموالي؟

$$Max\ Z = 3X_1 + 5X_2 - 8X_3$$

$$2X_1 + 2X_2 - 3X_3 \leq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 18$$

$$2X_2 - 2X_3 \geq 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

حل المثال الرابع: نقوم في أول الأمر بجعل علامات القيود أقل أو تساوي و ذلك بضرب القيد الثالث في (-1) فنتحصل على:

$$Max\ Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3$$

$$2X_1 + 2X_2 - 3X_3 \leq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 18$$

$$-2X_2 + 2X_3 \leq -10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

وعليه يكتب النموذج المقابل Dual على النحو الآتي:

$$Min\ W = 20Y_1 + 18Y_2 - 10Y_3$$

$$2Y_1 + Y_2 \geq 3$$

$$2Y_1 + 3Y_2 - 2Y_3 \geq 5$$

$$-Y_1 + 2Y_3 \geq -8$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

المثال الخامس: [1]

-لديك نموذج البرمجة الخطية

$$Min\ Z = 2X_1 + X_2$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$4X_1 + 2X_2 \geq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

– أكتب النموذج المقابل للنموذج الأولي أعلاه؟

– إليك جدول الحل الأمثل بالطريق المبسطة للنموذج المرافق، استنتج حل النموذج الأولي؟

الثوابت b_i	متغيرات النموذج				متغيرات قاعدية
	S_2	S_1	Y_2	Y_1	
½	-1/10	3/10	1	0	Y_2
0	2/5	-1/5	0	1	Y_1
20	8	6	0	0	W

حل المثال الخامس: النموذج المرافق للبرنامج الأول

$$Max\ W = 30Y_1 + 40Y_2$$

$$Y_1 + 4Y_2 \leq 2$$

$$3Y_1 + 2Y_2 \leq 1$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

[1] **حسن ياسين طعمة وآخرون** ، مرجع سبق ذكره، ص ص 140-143 بتصرف.

حل النموذج المرافق هو: $W^{*}=20, Y_1=0, Y_2=\frac{1}{2}$

حل النموذج الأولي: $Z^{*}=20, X_1=6, X_2=8$

المثال السادس: لديك نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\text{Max Z} = 2X_1 + 5X_2$$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 8$$

$$2X_1 + 7X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- أكتب النموذج المقابل للنموذج الأولي السابق؟

- أوجد الحل الأمثل للنموذج الأولي؟

- إيجاد الحل للنموذج المقابل مباشرة من جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي؟

حل المثال السادس:

- يكتب النموذج المقابل كالآتي:

$$\text{Min W} = 8Y_1 + 12Y_2$$

$$3Y_1 + 2Y_2 \geq 2$$

$$5Y_1 + 7Y_2 \geq 5$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

- إيجاد الحل الأمثل للنموذج الأولي:

صياغة النموذج بالصيغة القياسية:

$$Z - 2X_1 - 5X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

$$3X_1 + 5X_2 + S_1 = 8$$

$$2X_1 + 7X_2 + S_2 = 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0;\ S_1, S_2 \geq 0$$

- إعداد جدول السمبلاكس:

متغيرات القاعدة	متغيرات النموذج				الثوابت b_i	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2		
S_1	3	5	1	0	8	$\frac{8}{5} = 1.6$
S_2	2	7	0	1	12	$\frac{12}{7} = 1.7$
Z	-2	-5	0	0	0	
X_2	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	
S_2	$\frac{-11}{5}$	0	$\frac{-7}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	
Z	1	0	1	0	8	

إن جميع معاملات دالة الهدف موجبة أو معدومة، ومنه فإننا توصلنا إلى الحل الأمثل وهو:

$Z^{*}= 8, X_1 =0, X_2 =8/5, S_2=4/5$

أما بالنسبة للحل الأمثل للنموذج المقابل فنحصل عليه مباشرة من جدول الحل الأمثل النهائي للنموذج الأولي، حيث يتمثل الحل الأمثل بمعاملات دالة الهدف Z التي تقع أسفل المتغيرات الراكدة S_1,S_2 وعليه:

$Z^{*}=W^{*}=8$

$Y_1=1, Y_2=0$

المثال السابع : أوجد النموذج المقابل للنموذج الأولي التالي؟

$$Max\ Z = 50X_1 + 120X_2 + 40X_3$$

$$5X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 5$$

$$2X_1 - 1X_2 + 3X_3 \leq 2$$

X_1, X_2, X_3 غير مقيد بالإشارة

حل المثال السابع:

$$Min\,W = 5Y_1 + 2Y_2$$

$$5Y_1 + 2Y_2 = 50$$

$$2Y_1 - Y_2 = 120$$

$$Y_1 + 3Y_2 = 40$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

ملاحظة: إذا كان في النموذج الأولي المتغيرات غير مقيدة بالإشارة فإن القيود المقابلة لها تكون عبارة عن مساوات. أي المتغير X_1, X_2, X_3 غير مقيدين بالإشارة ومنه فإن القيد الأول والثاني والثالث عبارة عن مساوات.

المثال الثامن: أوجد النموذج الثنائي للبرنامج الأولي التالي؟

$$MaxZ = 100X_1 + 120X_2$$

$$2X_1 + 4X_2 = 10$$

$$2X_1 - 10X_2 \leq -6$$

$$8X_1 + 14X_2 \leq 16$$

X_1 *غير مقيد بالإشارة*

$$X_2 \geq 0$$

حل المثال الثامن:

$$\text{Min W} = 10\text{Y}_1 - 6\text{Y}_2 + 10\text{Y}_3$$

$$2Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 = 100$$

$$4Y_1 - 10Y_2 + 14Y_3 \geq 120$$

Y_1 غير مقيد بالإشارة

$$\text{Y}_2, \text{Y}_3 \geq 0$$

ملاحظة :

- بما أن القيد الأول في النموذج الأولي عبارة عن مساواة فإن المتغير الأول Y_1 في النموذج الثنائي غير مقيد بالإشارة .

- بما أن المتغير الأول X_1 غير مقيد بالإشارة في النموذج الأولي فإن القيد المقابل له أي القيد الأول في النموذج الثنائي عبارة عن مساواة

المحاضرة التاسعة: برمجة الأعداد الصحيحة (طريقة القطع)

تمهيد:

تعد البرمجة بالأعداد الصحيحة أحد النماذج الرياضية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية وكما ذكرنا سابقا أن منطقة الحل في الحل البياني على سبيل المثال هي عبارة عن منطقة حلول لمشاكل البرمجة الخطية، بحيث أن كل نقطة تقع ضمن مجال الحل تحقق قيود مشكلة البرمجة الخطية، فإن كل نقطة تعتبر حلا أساسيا لكن لا تعتبر حلا أمثلا، إن الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية قد لا تكون حلولا عادية صحيحة بل تكون كسور حقيقية و ربما أن البرمجة العددية ينصب اهتمامها أكثر بالأعداد الصحيحة الخالية من الكسور.

1- السبب من وجود البرمجة بالأعداد الصحيحة: [1]

توجد بعض المتغيرات الاقتصادية لايمكن تجزئتها، و إلا فقدت صفتها، فعندما نكون بصدد تحديد كميات الثلاجات الواجب إنتاجها في مصنع ما، فلا مجال لتقديرها بالأجزاء كأن نقول أن الإنتاج اليومي هو 20.4 جهاز، فالجهاز يجب أن يكون وحدة كاملة، فنقول أن الإنتاج اليومي هو 20 جهازا أو 21 جهاز، وفي البرامج الخطية كثير ما يعطينا الحل الأمثل متغيرات قيمتها بالفاصلة و هو ما أدى إلى البحث في التخلص من هذا المشكل، فنتج ما يسمى برمجة الأعداد الصحيحة.

فبرمجة الأعداد الصحيحة هي طريقة من طرق البرمجة الخطية تقتضي البحث عن الحل الأمثل للبرامج الخطية بحيث يحتوي الحل الأمثل على متغيرات قيمتها أعداد صحيحة، و يتطلب ذلك المرور بعدة مراحل.

- **المرحلة الأولى:** إيجاد الحل الأمثل وفق البرنامج الأصلي، إذا حصل حل أمثل متغيراته لا تحمل قيما صحيحة ننتقل إلى المرحلة الثانية.

- **المرحلة الثانية:** تسمى بمرحلة التفريغ، وفيها تتم إضافة قيود جديدة للبرنامج الأصلي، بهدف الحصول على حل أمثل آخر متغيراته تأخذ قيما صحيحة، وهناك طريقتين الأولى هي طريقة التفريغ و التحديد و الثانية هي طريقة القطع، و نظرا لأن الطريقة الأولى هي الأكثر شيوعا و سهولة لذلك فسوف نقتصر عليها.

[1] محمد راتول، مرجع سبق ذكره، ص ص 95-96.

يتم إيجاد الحل الأمثل بطريقة التفريغ و التحديد للبرنامج الأولي كما ورد أصلا دون إعتبار لشرط المتغيرات أعداد صحيحة. إذا كانت قيم المتغيرات المحصل عليها في الحل الأمثل صحيحة، توقف و يكون ذلك هو الحل المراد الوصول إليه، وإذا كانت قيم المتغيرات المحصل عليها في الحل الأمثل للبرنامج الأصلي ليست قيما صحيخة فحينئذ نقوم بتوليد برنامج جديد، حيث يضاف إلى البرنامج الأصلي قيد آخر وفق ما يلي:

إذا كان المتغير في الحل الأمثل هو Xj حيث يأخذ قيمة غير صحيحة و لتكن bi ، فأنه يمكن كتابته ضمن مجال كمايلي:

$$b_{i1} \le Xj \le b_{i2}$$

حيث b_{i1} و b_{i2} أعداد صحيحة غير سالبة، فلتجنيب المتغير قيمة ضمن هذا المجال فإنه يتم إشتقاق قيدين منهما إلى البرنامج الأصلي فنحصل على برنامجين آخرين، نقوم بحل كل واحد منهما حلا مستقلا، إذا كانت متغيرات الحل الأمثل صحيحة توقف، و نأخذ الحل الذي يعطي أكبر قيمة للدلة الاقتصادية من بين الحلين في حالة التعظيم و أقل قيمة للدالة الاقتصادية في حالة التدنية، و إلا نستمر في تفريغ البرنامج الذي أعطى أمثل قيمة للدالة الاقتصادية وهذا لغاية الوصول إلى حل أمثل قيم متغيراته صحيحة، وهذا ما يسمى بالتفريغ.

مثال توضيحي:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي: [1]

$$\text{Max Z} = 20X_1 + 2X_2$$

$$4X_1 + 10X_2 \le 22$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

وهي صحيحية

[1] **محمد راتول، مرجع سبق ذكره**، ص ص 96-99.

حل المثال التوضيحي: و منه فإن جدول الحل الأمثل فهو ممثل بجدول السمبلاكس

الثوابت b_i		S_1	X_2	X_1	متغيرات القاعدة
11/2		1/4	5/2	*1*	S_1
110		5	48	0	Z

ومنه الحل هو: **$X_1= 11/2$, $X_2= 0$, $Z= 110$**

يلاحظ أن X_1 هو قيمة غير صحيحة، يمكن كتابتها كما يلي:

أي يمكن استنتاج قيدين الأول هو : $X_1 \leq 5$ و الثاني هو: $X_1 \geq 6$.

و عليه فإن البرنامج الأصلي يفرغ إلى برنامجين الأول يكون من البرنامج الأصلي مضافا إليه القيد الأول المستنتج و هو $X_1 \leq 5$ و الثاني أيضا من البرنامج الأصلي مضافا إليه القيد $X_1 \geq 6$ و هما:

البرنامج الأول:	*البرنامج الثاني:*
$\text{Max } Z = 20X_1 + 2X_2$ $4X_1 + 10X_2 \leq 22$ $X_1 \leq 5$ $X_1, X_2 \geq 0$ وهي صحيحي	$\text{Max } Z = 20X_1 + 2X_2$ $4X_1 + 10X_2 \leq 22$ $X_1 \geq 6$ $X_1, X_2 \geq 0$ وهي صحيحية

نوجد الحل الأمثل لكل برنامج من البرنامجين: جدول الحل الأمثل للبرمنامج الأول هو:

الثوابت b_i	S_2	S_1	X_2	X_1	متغيرات قاعدية
1/5	-4/10	1/10	1	0	X_2
5	1	0	0	1	X_1
502/5	96/5	1/5	0	0	Z

و منه النتيجة تكون *:* **$X_1= 5$, $X_2= 1/5$, $Z= 502/5$**

بينما البرنامج الثاني فهو متناقض و ليس له حل، لذلك يتم الإستغناء عنه.

من خلال حل البرنامج الأول وجدنا أن المتغيرة **X_2** لا تأخذ قيمة صحيحة و يمكن كتابتها أيضا على الشكل:

$$0 \leq X_2 \leq 1$$

و منه نستنتج القيدين الأول هو : $X_2 \geq 1$ و القيد الثاني هو: $0 < X_2$ و هو مرفوض لتناقضه مع شرط عدم السلبية.

لذلك فالبرنامجين الجديدين المتفرعين عن البرنامج الأول هما:

البرنامج الجديد الأول	البرنامج الجديد الثاني:
$\text{Max } Z = 20X_1 + 2X_2$ $4X_1 + 10X_2 \leq 22$ $X_1 \leq 5$ $X_2 \geq 1$ $X_1, X_2 \geq 0$ وهي صحيحية	$\text{Max } Z = 20X_1 + 2X_2$ $4X_1 + 10X_2 \leq 22$ $X_1 \leq 5$ $X_2 \leq 0$ $X_1, X_2 \geq 0$ وهي صحيحية

غير أن البرنامج الجديد الثاني يلاحظ أنه متناقض لأن القيد $X_2 \leq 0$ مرفوض و يتناقض مع شرط عدم السلبية.

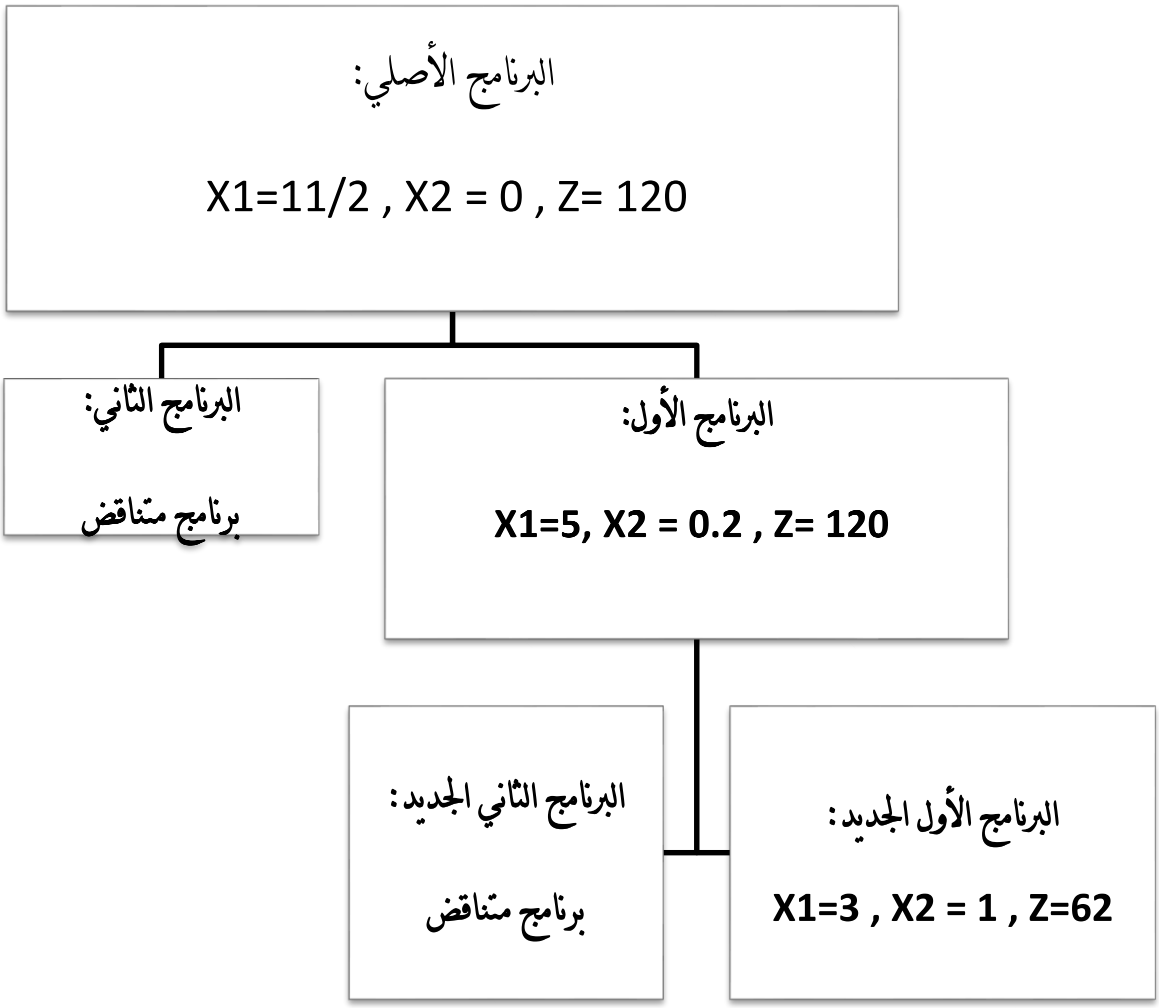
أما جدول الحل الأمثل للبرنامج الأول الجديد فهو:

الثوابت b_i	متغيرات النموذج						متغيرات القاعدية
	R_1	S_3	S_2	S_1	X_2	X_1	
3	/	10/4	-1	1/4	0	1	X_1
2	/	-10/4	1	-1/4	0	0	S_2
1	/	-1	0	0	1	0	X_2
62	/	48	1	5	0	0	Z

و منه النتيجة تكون : $X_1= 3 , X_2= 2 , Z= 62$

يلاحظ أن المتغيرات كلها أصبحت صحيحة، و بالتالي فإن هذا الحل يسمى بحل الحد الأسفل للمسألة، و تكون كل الحلول الأخرى التي تعطي قيما صحيحة للمتغيرات ملغاة، ويكون حل الحد الأسفل هذا هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي ، وهو يحققه بالكامل و يمكن التأكد من ذلك بالتعويض في البرنامج الأصلي.

المخطط الموالي يوضح التفرعات المستنتجة من البرنامج الأصلي حتى الحصول على الحل الأمثل.



المحاضرة العاشرة : برمجة الأعداد الصحيحة (مشكلة النقل)-1-

تمهيد:

تعتبر مشكلة النقل من نماذج التخصيص، التي تهتم بكيفية توزيع عدد معين من الموارد على عدد من الأنشطة، وكمثال لمشاكل النقل نذكرعلى سبيل المثال لا الحصر البحث عن الحل الأمثل لأقل تكلفة لنقل الموارد كمنتجات المصانع إلى غايات معينة كالمخازن التي تقوم بدورها في عملية التوزيع الى مراكز التسويق، وفي هذه الحالة يمكن أن تنقل المنتجات من أكثر من مصنع معين لعدة مخازن والسياسة المتبعة لذلك تعتمد بالدرجة الأولى على تكاليف نقل الوحدة الواحدة من مصنع معين لكل مخزن من المخازن وعلى إحتياجات هذا المخزن من المنتجات (الإعتماد على العرض والطلب) .

1- جدول مشكلة النقل:

يتم تفريغ البيانات المتعلقة بمشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل، الذي يحتوي على ما يلي:[1]

- مراكز التوزيع أو المصادر
- العرض: الكميات المتوفرة في كل مركز من مراكز التوزيع (المصادر)
- مراكز الإستلام (المخازن)
- الطلب: الكميات المطلوبة من كل مركز من مراكز الإستلام (المخازن)
- تكاليف نقل الوحدة من كل مركز من مراكز التوزيع إلى كل مركز من مراكز الإستلام
- مجموع العرض ومجموع الطلب.

تجدر الإشارة إلى أنه إذا تساوى العرض والطلب تكون مشكلة النقل متوازنة، وفيما عدا ذلك ستكون غير متوازنة.

وفيما يلي جدول مشكلة النقل.

---

[1] **مراد كمال عوض، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، دار البداية للنشر والتوزيع، الأردن، 2010، ص ص117-118.

المخازن / المصادر	المخزن 1	المخزن 2	....	مجموع المصادر
المصدر 1				
المصدر 2				
....				
مجموع المخازن				مجموع العرض / مجموع الطلب

حيث يوضع في المربعات الصغيرة تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر نحو المخزن، وتعتبر عملية تفريغ البيانات المتعلقة بمشكلة النقل في جدول النقل هي نقطة البداية لإيجاد حل أولي يمكننا من الوصول إلى الحل الأمثل الذي يحقق أقل تكلفة ممكنة لمشكلة النقل وبعد الإنتهاء من جدول النقل يجب البدأ بالحل الأولي للجدول بإحدى الطرق التالية:[1]

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية
- طريقة أقل تكلفة
- طريقة فوجل التقريبية

وبعد الحصول على الحل الأولي بإحدى الطرق السابقة، يجب التحقق من مدى أمثلية الحل الأولي الذي توصلنا إليه، من خلال إختبار الحل وتحسينه بإحدى الطرق التالية:[2]

- طريقة المسار المتعرج (الحجر المتدرج) .
- طريقة التوزيع المعدل.

[1] **مراد كمال عوض**، مرجع سبق ذكره، ص 119**.**
[2] المرجع نفسه، ص 119.

2- فرضيات نموذج النقل:

هناك العديد من الفرضيات المبدئية في صياغة مشكلة النقل وهي:[1]

- عدد من مصادر عرض للموارد (مصانع إنتاج، مخازن أولية، . . .) وعددها ($m\geq2$)

- عدد من مراكز طلب للموارد (وحدات إنتاج، محلات تسويق، . . .) وعددها ($n\geq2$)

- عرض السلع أو الطلب عليها من طرف المصدر أو المركز قد يختلف من عارض أو طالب إلى آخر

- الشكل الأولي للنموذج يفترض تساوي العرض من السلع مجتمعة مع الطلب عليها مجتمعة.

- تكلفة النقل بين المصادر والمراكز محددة بدقة

- كلفة النقل تزداد طردا مع زيادة الكمية المنقولة

- هدف النقل يتمثل في تلبية طلبات المراكز إنطلاقا مما هو معروض عند المصادر بأقل تكلفة ممكنة.

3- الصياغة الرياضية لنموذج النقل:

إنطلاقا من الفرضيات السابقة يمكن صياغة النموذج كما يلي:[2]

$$\text{Min } C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

وذلك في ظل القيود الخطية التالية:

- قيد العرض . . . . $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = O_i \quad /i=1,2,\ldots,m$

- قيد الطلب . . . . $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = D_j \quad /j=1,2,\ldots,n$

- شرط عدم السلبية. . . . . $X_{ij} = 0 \;\; / \;\; i = 1,2,\ldots,m \; ; \; j = 1,2,\ldots,n$

---

[1] **السعدي رجال،** مرجع سبق ذكره، ص 183.

[2] المرجع نفسه، ص 184.

حيث أن:

X_{ij} : كمية أو عدد الوحدات (كلغ، طن، صندوق،. . .إلخ) الواجب نقلها من المصدر i نحو المركز j .

C_{ij} : هي تكلفة نقل الوحدة الواحدة (كلغ، طن، صندوق،. . .إلخ) من المصدر i نحو المركز j .

O_i : هي كمية أوعدد الوحدات المعروضة من طرف المصدر i .

D_j : هي كمية أوعدد الوحدات المطلوبة من طرف المركز j .

ملاحظات هامة:

ملاحظة 1: يجب أن تكون الوحدات المنقولة متجانسة (متماثلة)

ملاحظة 2: يكون لمسألة النقل حلول ممكنة عندما تكون الكمية المعروضة مساوية للكمية المطلوبة.

ملاحظة 3: يسمى البرنامج الذي نعتمده بالبرنامج الخطي المغلق (مجموع العرض = مجموع الطلب)

ملاحظة 4: في حالة عدم تحقق الشرط أعلاه نقوم بإضافة مصدر عرض أو مركز طلب وهمي يسمح بتحقق شرط التساوي بين العرض والطلب وعندها نبحث عن الحلول الممكنة.

مثال تطبيقي: [1]

تدير شركة لإنتاج الحليب 3 وحدات بطاقات إنتاجية محددة، وتملك 4 مراكز تسويقية وهي كما يلي: (الوحدة =ألف لتر)

- الوحدة الإنتاجية A طاقتها 30 وحدة من الحليب، الوحدة الإنتاجية B طاقتها 60 وحدة من الحليب، الوحدة الإنتاجية C طاقتها 80 وحدة من الحليب.

[1] **السعدي رجال**، مرجع سبق ذكره، ص185.

- المركز التسويقي الأول: E يغطي طلب قدره 75 وحدة من الحليب، المركز التسويقي الثاني: F يغطي طلب قدره 35 وحدة من الحليب، المركز التسويقي الثالث: G يغطي طلب قدره 40 وحدة من الحليب، المركز التسويقي الرابع: H يغطي طلب قدره 20 وحدة من الحليب.

وبفرض أن تكاليف النقل بين كل وحدة إنتاجية ومركز تسويق بالنسبة لكل وحدة من الحليب (ألف لتر) هي كما يلي:

من الوحدة الإنتاجية	إلى مراكز التسويق			
	E	F	G	H
A	9	7	6	5
B	2	8	9	12
C	4	3	10	8

المطلوب:

1- قم صياغة التابع الإقتصادي، قيود العرض، قيود الطلب، (الصياغة الرياضية لمشكلة النقل)؟

2- إيجاد الحل الأولي بطريقة:

- الزاوية الشمالية الغربية
- أقل تكلفة (أدنى تكلفة)
- طريقة الجزاء (فوجل التقريبية)

3- إيجاد الحل الأمثل بإستخدام طريقة الحجر المتدرج (القفز على الخانات)

الحل: نعد أولا جدول مشكلة النقل بإضافة عمود لمجموع العرض، وسطر خاص بمجموع الطلب

من الوحدة الإنتاجية	إلى مراكز التسويق				مجموع العرض
	E	F	G	H	
A	9	7	6	5	**30**
B	2	8	9	12	**60**
C	4	3	10	8	**80**
مجموع الطلب	**75**	**35**	**40**	**20**	**170**

- **صياغة النوذج الرياضي لمشكلة النقل:**

$$\text{Min } C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} = 9X_{11} + 7X_{12} + \cdots + 10X_{33} + 8X_{34}$$

قيد العرض: $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = O_i$

$$i = 1 \iff X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 30$$

$$i = 2 \iff X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 60$$

$$i = 3 \iff X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 80$$

قيد الطلب: $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = D_j$

$$j = 1 \iff X_{11} + X_{21} + X_{31} = 75$$

$$j = 2 \iff X_{12} + X_{22} + X_{32} = 35$$

$$j = 3 \iff X_{13} + X_{23} + X_{33} = 40$$

$$j = 4 \iff X_{14} + X_{24} + X_{34} = 20$$

شرط عدم السلبية: $X_{ij} \geq 0 \ / \ i = 1,2,3 \ ; \ j = 1,2,3,4$

كما نلاحظ أن العرض يساوي الطلب (برنامج خطي مغلق)، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{j=1}^{n} D_j = 170$$

$$30 + 60 + 80 = 75 + 35 + 40 + 20 = 170$$

- **إيجاد الحل الأولي بإستخدام الزاوية الشمالية الغربية:**

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق في تحديد الحل الأولي وكما يتضح من إسمها، فإننا ننطلق في تعبئة الخانات من الخانة X_{11} ونعطيها القيمة المحددةبين العرض والطلب بحيث $X_{11} = \text{Min}(O_1 , D_1)$ ثم نواصل حتى نكمل الجدول التالي:

من الوحدة الإنتاجية	إلى مراكز التسويق				مجموع العرض	الباقي1	الباقي2	الباقي3
	E	F	G	H				
A	9 30	7	6	5	~~30~~	0		
B	2 45	8 15	9	12	~~60~~	~~15~~	0	
C	4	3 20	10 40	8 20	~~80~~	~~60~~	~~20~~	0
مجموع الطلب	~~75~~	~~35~~	~~40~~	~~20~~	170			
الباقي1	~~45~~	~~20~~	0	0				
الباقي2	0	0						

ملاحظات:

- نلاحظ أن إجمالي الخانات المعبئة = 170 وحدة ، العرض = الطلب

- نلاحظ أن عدد الخانات المعبئة تساوي 6 ومنه الشرط التالي m+n-1 = عدد الخانات المملوئة محقق، وعليه نكون بصدد حالة الحل الأولي المقبول أساسا (فيما عدا ذلك فهو حل مقبول شكليا أو حل متفسخ، لابد من إضافة كمية صغيرة جدا جدا ε في خانات فارغة حتى نتحصل على الشرط السابق m+n-1 = عدد الخانات المملوئة محقق.

- لإيجاد مجموع تكاليف النقل حسب الحل الأولي نعوض في النموذج الرياضي كما يلي:

$$\text{Min C} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} = 9X_{11} + 7X_{12} + \cdots + 10X_{33} + 8X_{34}$$

$$= 9(30) + 7(0) + \cdots + 10(40) + 8(20)$$

$$= 1100 \ * 10^3 \text{دج}$$

- في هذه الطريقة فإن تعبئة الخلايا لا تتم على أساس تكاليف النقل من المصادر إلى المراكز وإنما على أساس موقع الخلايا في الجدول الشمالي الغربي، وبالتالي فإن هذه الطريقة لا تؤدي في معظم الأحيان إلى تحقيق أقل تكلفة ممكنة بصورة مباشرة دون اللجوء إلى إجراء التحسينات.

- إيجاد الحل الأولي بإستخدام طريقة أقل تكلفة:

نعتمد في هذه الطريقة أسلوب أو مبدأ أقل تكلفة في توزيع المصادر نحو المراكز، أوإختيار أدنى تكلفة للوحدة في ملئ الخلايا في جدول الحل الأولي:

من الوحدة الإنتاجية	**إلى مراكز التسويق**				**مجموع العرض**	**الباقي1**	**الباقي2**	**الباقي3**
	E	**F**	**G**	**H**				
A	9	7	6 10	5 20	**~~30~~**	**~~10~~**	**0**	
B	2 60	8	9	12	**~~60~~**	**0**		
C	4 15	3 35	10 30	8	**~~80~~**	**~~45~~**	**~~30~~**	**0**
مجموع الطلب	**~~75~~**	**~~35~~**	**~~40~~**	**~~20~~**	**170**			
الباقي1	**~~15~~**	**0**	**~~30~~**	**0**				
الباقي2	**0**		**0**					

ملاحظات:

- نلاحظ أن عدد الخانات المعبئة تساوي 6 ومنه الشرط التالي m+n-1 = عدد الخانات المملوئة محقق، إذا هو حل مقبول أساسيا.

- لإيجاد مجموع تكاليف النقل حسب الحل الأولي نعوض في النموذج الرياضي كما يلي:

$$\text{Min } C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} = 9X_{11} + 7X_{12} + \cdots + 10X_{33} + 8X_{34}$$

$$= 9(0) + 7(0) + 6(10) + \cdots + 3(35) + 10(30) + 8(0)$$

$$= 745 \ * 10^3 \text{دج}$$

- نلاحظ أن هذه الطريقة أعطتنا حلا بتكلفة أقل من الطريقة السابقة.

- إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة فوجل (طريقة الجزاء):

تستلزم هذه الطريقة حساب الفرق بين أقل تكلفتين لكل سطر ولكل عمود في كل مرحلة أو خطوة، نختار أكبر فرق، ونقوم بعملية التوزيع الممكنة، حيث تنتهي الخطوة أو المرحلة بإنتهاء السطر أو العمود. نواصل الخطوات حتى ننتهي من جميع الكميات المعروضة أو المطلوبة، والجداول التالية توضح مختلف العمليات:

الخطوة الأولى:

من الوحدة الإنتاجية	إلى مراكز التسويق				مجموع العرض	الفروق	الباقي1
	E	F	G	H			
A	9	7	6	5	**30**	$\boxed{1}=5-6$	
B	2 60	8	9	12	~~**60**~~	$\boxed{6}=2-8$	0
C	4	3	10	8	**80**	$\boxed{1}=3-4$	
مجموع الطلب	~~**75**~~	**35**	**40**	**20**	**170**		
الفروق	$\boxed{2}=2-4$	$\boxed{4}=3-7$	$\boxed{3}=6-9$	$\boxed{3}=5-8$			
الباقي1	15						

الخطوة الثانية: نقوم أولا بحذف السطر (المصدر) الذي إنتهى وهو B :

من الوحدة الإنتاجية	إلى مراكز التسويق				مجموع العرض	الفروق	الباقي1
	E	F	G	H			
A	9	7	6	5	**30**	$\boxed{1}=5-6$	
C	4 15	3	10	8	~~**80**~~	$\boxed{1}=3-4$	~~**65**~~
مجموع الطلب	~~**75**~~	**35**	**40**	**20**	**170**		
الفروق	$\boxed{5}=4-9$	$\boxed{4}=3-7$	$\boxed{4}=6-10$	$\boxed{3}=5-8$			
الباقي1	~~**15**~~						
الباقي2	0						

الخطوة الثالثة: نقوم كذلك بحذف العمود (المركز) الذي إنتهى وهو E :

من الوحدة الإنتاجية	إلى مراكز التسويق			مجموع العرض	الفروق	الباقي1	الباقي2
	F	G	H				
A	7	6	5	**30**	$\boxed{1}=5-6$		
C	3 35	10	8	~~**80**~~	$\boxed{5}=3-8$	~~**65**~~	**30**
مجموع الطلب	~~**35**~~	**40**	**20**	**170**			
الفروق	$\boxed{4}=3-7$	$\boxed{4}=6-10$	$\boxed{3}=5-8$				
الباقي1	0						

الخطوة الرابعة: نقوم مرة أخرى بحذف العمود الذي إنتهى وهو F:

من الوحدة الإنتاجية	إلى مراكز التسويق		مجموع العرض	الفروق	الباقي1	الباقي2
	G	H				
A	6 30	5	**~~30~~**	1=5−6	0	
C	10	8	**~~80~~**	2=8−10	**~~65~~**	**30**
مجموع الطلب	**~~40~~**	**20**	**170**			
الفروق	**4**=6−10	3=5−8				
الباقي1	10					

الخطوة الخامسة: نحذف السطر الذي إنتهى وهو A:

من الوحدة الإنتاجية	إلى مراكز التسويق		مجموع العرض	الفروق	الباقي1	الباقي2	الباقي3	الباقي4
	G	H						
C	10 10	8 20	**~~80~~**	2=8−10	**~~65~~**	**~~30~~**	**~~10~~**	**0**
مجموع الطلب	**~~40~~**	**~~20~~**	**170**					
الفروق	10=0−10	8=0−8						
الباقي1	**~~10~~**	**0**						
الباقي2	**0**							

الخطوة السادسة: نضع جميع الخطوات السابقة في جدول الحل الأولي كما يلي:

من الوحدة الإنتاجية	إلى مراكز التسويق				مجموع العرض
	E	**F**	**G**	**H**	
A	9	7	6 30	5	**30**
B	2 60	8	9	12	**60**
C	4 15	3 35	10 10	8 20	**80**
مجموع الطلب	**75**	**35**	**40**	**20**	**170**

ملاحظات:

- نلاحظ أن كل المراكز قد تم تلبية طلبها وأن عدد الخانات المعبئة يساوي 6، الشرط محقق، وعليه نحن بصدد حل أولي مقبول أساسيا .

- مجموع تكاليف النقل هي:

$$\text{Min C} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} = 9X_{11} + 7X_{12} + \cdots + 10X_{33} + 8X_{34}$$

$$= 9(0) + 7(0) + 6(30) + \cdots + 3(35) + 10(10) + 8(20)$$

$$= 725 \ * 10^3 \text{دج}$$

- نلاحظ في الأخير أن طريقة فوجل (طريقة الجزاء) تعطينا أقل فارق في التكاليف وهو السبب الذي يجعلها أحسن من الطريقتين السابقتين.

المحاضرة الحادية عشر : برمجة الأعداد الصحيحة (مشكلة النقل)- 2-

تمهيد:

لمشكلات النقل أيضا مايسمى بالحل الأولي الذي يجب تحسينه و الذي سنحاول توضيح جميع خطواته من خلال المحاضرة الحادية عشر .

- إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة الكلفة الحدية:

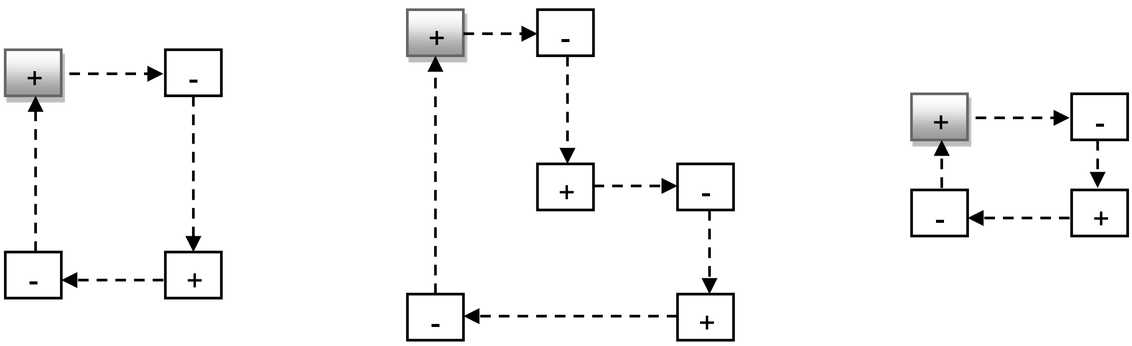
تسمى هذه الطريقة كذلك بطريقة الحجر المتدرج، طريقة القفز على الخانات أو الخلايا، وتمر عبر مجموعة من المراحل وهي:

- التأكد من أن الخلايا المعبئة في الجدول تساوي m+n-1 .

- تحديد المسارات المغلقة، وهي شكل هندسي كمربع ومستطيل . . .إلخ، تبدأ بالخلية غير المملوءة وتنتهي عندها مرورا بمجموعة من الخلايا المملوءة.

- خلية الإنطلاق تأخذ إشارة موجبة أما الخلية التي تليها تأخذ إشارة سالبة وهكذا، إلى نهاية المسار.

- المسارات تأخذ الأشكال التالية:



بالرجوع لمثالنا السابق وعند الحل بطريقة فوجل، نجري المسارات المغلقة للخانات الفارغة، فنتحصل على ما يلي:

$$\delta_{1.1} = 9 - 6 + 10 - 4 = +9$$

$$\delta_{1.2} = 7 - 6 + 10 - 3 = +8$$

$$\delta_{1.4} = 5 - 6 + 10 - 8 = +1$$

$$\delta_{2.2} = 8 - 3 + 4 - 2 = +7$$

$$\delta_{2.3} = 9 - 10 + 4 - 2 = +1$$

$$\delta_{2.4} = 12 - 8 + 4 - 2 = +6$$

ملاحظات هامة:

- نلاحظ أن جميع المسارات أعطتنا نتائج موجبة، أكبر من الصفر، وبالتالي الحل الأولي الذي توصلنا إليه بطريقة فوجل يعتبر حلا مثاليا وحيدا ونهائي.

- في حالة وجود مسارات ذات قيمة صفرية فإن هناك حل آخر أمثل وله نفس التكلفة.

- في حالة وجود قيمة أو قيم سالبة نختار أكبر قيمة سالبة بالقيمة المطلقة ونحول لها أكبر كمية ممكنة عبر المسار الذي تنتمي إليه، نعيد الحسابات بنفس الطريقة السابقة إلى غاية حصولنا على جميع قيم المسارات موجبة.

- نكون بصدد حالة تفسخ إذا لم يتحقق شرط m+n-1 خانة مملوءة.

- في حالة عدم تساوي الطلب مع العرض نضيف عارض وهمي أو طالب وهمي، بتكاليف نقل معدومة (لكي لا تؤثر في حساب التكلفة الإجمالية).

- يمكن كذلك دراسة مشكلة النقل من زاوية تعظيم الأرباح.

المحاضرة الثانية عشر: برمجة الأعداد الصحيحة (حالات خاصة لمشكلة النقل) -1-

هناك الكثير من الحالات الخاصة التي تصادفنا أثناء حل مشكلات النقل، منها على أساس المثال لا الحصر حالة عدم تساوي العرض والطلب، حالة التفسخ، . . .إلخ، وفيما يلي سنعالج حالة عدم تساوي العرض و الطلب بنوع من التفصيل.

- حالة عدم تساوي العرض والطلب:

من المنطقي أنه في أغلب الأحيان لا يتساوى كل من العرض والطلب، ونكون بصدد إحدى الوضعيتين التاليتين:

- الوضعية الأولى: العرض أكبر من الطلب (الطلب أصغر من العرض) فإذا حدث وأن صادفتنا هذه الوضعية، لابد أن نقترح وجود طالب وهمي مقترح في الجدول، بمعنى آخر إضافة مركز وهمي بمقدار من الإحتياجات مساوية للفرق بين الموارد المتاحة (العرض) والإحتياجات الفعلية (الطلب) بشرط أن تكون مصاريف النقل من المصدر نحو المركز إما بقيمة مساوية للصفر لكي لا تتأثر التكلفة الإجمالية للنقل، أو منح تكلفة كبيرة (مثلا ضعف أكبر تكلفة نقل) لكي لا تدخل أثناء عملية التوزيع أو التعبئة.

- الوضعية الثانية: العرض أصغر من الطلب (الطلب أكبر من العرض) في هذه الحالة يتم إستحداث عارض وهمي بمقدار الفرق بين العرض والطلب، وتمنح له تكاليف وفق ما تم الإشارة إليه سابقا.

مثال تطبيقي:

مؤسسة لها ثلاثة مصانع مكلفة بتموين ثلاثة مخازن في مناطق مختلفة، فإذا علمت كميات انتاج كل مصنع وطاقات استيعاب كل مخزن بالإضافة لتكاليف نقل الوحدة الواحدة تتلخص في الجدول التالي:

العرض \ الطلب	المخازن			مجموع العرض
	مخزن1	مخزن2	مخزن3	
المصنع 01	1	2	3	**60**
المصنع 02	5	6	7	**20**
المصنع 03	9	8	4	**30**
مجموع الطلب	**70**	**35**	**25**	**110** / **130**

المطلوب:

1- ماذا تلاحظ في الجدول وماذا تقترح؟

2- أوجد الحل الأولي باستخدام طريقة أقل تكلفة؟

3- تأكد من أن الحل الأولي هو الحل الأمثل؟

الحل:

- ماذا تلاحظ وماذا تقترح:

نلاحظ أن مجموع العرض يساوي 110، ومجموع الطلب 130، وهنا سنكون بصدد حالة عدم التساوي بين العرض والطلب، وضعية العرض أقل من الطلب. نقترح إضافة منبع وهمي (مصدر أو مصنع وهمي) وسيكون المصنع رقم 4، بقيمة الفارق وهو 20، وبتكاليف نقل صفرية، وعليه سيكون جدول مشكلة النقل كما يلي:

العرض \ الطلب	مراكز التخزين			مجموع العرض
	المخزن01	المخزن02	المخزن03	
المصنع 01	1	2	3	**60**
المصنع 02	5	6	7	**20**
المصنع 03	9	8	4	**30**
المصنع 04	0	0	0	**20**
مجموع الطلب	**70**	**35**	**25**	**130**

- سنحاول إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة أقل تكلفة:

العرض \ الطلب	مراكز التخزين			مجموع العرض	الباقي1	الباقي2
	المخزن01	المخزن02	المخزن03			
المصنع 01	1 60	2	3	~~**60**~~	**0**	
المصنع 02	5 10	6 10	7	~~**20**~~	~~**10**~~	**0**
المصنع 03	9	8 5	4 25	~~**30**~~	~~**5**~~	**0**
المصنع 04	0	0 20	0	~~**20**~~	**0**	
مجموع الطلب	~~**70**~~	~~**35**~~	**25**	**130**		
الباقي1	~~**10**~~	~~**25**~~	**0**			
الباقي2	**0**	~~**20**~~				
الباقي3		**0**				

- نلاحظ أن الحل الأولي هو حل مقبول لأن مجموع الأسطر والأعمدة مطروح منهم العدد 1 أي (m+n-1) تساوي عدد الخلايا المشغولة وهي 06 خلايا .

- تكلفة الحل الأولي هي:

$$\text{Min } C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} = 1X_{11} + 2X_{12} + \cdots + 8X_{32} + 4X_{33} + \cdots + 0X_{42} + 0X_{43}$$

$$= 1(60) + 2(0) + 3(0) + \cdots + 8(5) + 4(25) + \cdots + 0(20) + 0(0)$$

$$= 310 \text{ وحدة نقدية}$$

- التأكد من الحل (تحسين الحل إن أمكن):

نقوم أولا بحساب التكاليف الحدية للخلايا الشاغرة (الفارغة) وفق طريقة الحجر المتدرج وتعطينا النتائج التالية:

$$\delta_{1.2} = 2 - 1 + 5 - 6 = 0$$

$$\delta_{1.3} = 3 - 1 + 5 - 6 + 8 - 4 = +5$$

$$\delta_{1.3} = 7 - 6 + 8 - 4 = +5$$

$$\delta_{3.1} = 9 - 8 + 6 - 5 = +2$$

$$\delta_{4.1} = 0 - 5 + 6 - 0 = +1$$

$$\delta_{4.3} = 0 - 4 + 8 - 0 = +4$$

بما أن جميع التكاليف الحدية للخلايا الشاغرة (الفارغة) غير سالبة، فإن الحل الذي المتوصل إليه هو حل أمثل، لكنه غير وحيد لكون التكلفة الحدية للخلية $\delta_{1.2}$ مساوية للصفر.

يمكن وضع الحل النهائي بعد إهمال المصنع الوهمي (مصنع رقم 04) بإعتباره مصنع مساعد لإيجاد الحل الأمثل فقط، كما يلي:

العرض \ الطلب	مراكز التخزين			مجموع العرض
	المخزن01	**المخزن02**	**المخزن03**	
المصنع 01	1 60	2	3	**60**
المصنع 02	5 10	6 10	7	**20**
المصنع 03	9	8 5	4 25	**30**
مجموع الطلب	**70**	**35**	**25**	**110** **130**

ومن الواضح أن المخزن 02 يبقى غير ممتلء بفارق الكمية بين العرض والطلب وهي 20.

المحاضرة الثالثة عشر: برمجة الأعداد الصحيحة (حالات خاصة لمشكلة النقل)– 2–

تمهيد:

هنالك حالة خاصة أخرى لمشكلة النقل و هي حالة التفسخ و حالة تعظيم الربح سنتطرق إليهما بالتفصيل من خلال المحاضرة الثالثة عشر .

1– حالة التفسخ:

نقصد بحالة التفسخ، عدم حصولنا في الحل الأولي المتحصل عليه على تساوي الخلايا المملوءة بـ (m+n-1) لذلك نضطر إلى إضافة كمية صغيرة جدا يرمز لها بإبسيلون ε في الخلايا غير الشاغرة حتى تتحقق المعادلة (m+n-1) .

تمرين: إليك جدول مشكلة النقل التالي، والمطلوب القيام بعملية التوزيع التي تضمن أقل تكلفة.

الطلب / العرض	مراكز التخزين			مجموع العرض
	المخزن01	المخزن02	المخزن03	
المصنع 01	1	9	6	40
المصنع 02	5	7	4	50
المصنع 03	2	8	5	60
مجموع الطلب	40	45	65	150

الحل:

نقوم أولا بإيجاد الحل الأولي:

العرض \ الطلب	مراكز التخزين			مجموع العرض	الباقي1	الباقي2
	المخزن01	المخزن02	المخزن03			
المصنع 01	(1) 40	(9)	(6)	~~40~~	0	
المصنع 02	(5)	(7)	(4) 50	~~50~~	0	
المصنع 03	(2)	(8) 45	(5) 15	~~60~~	~~45~~	0
مجموع الطلب	~~40~~	~~45~~	~~65~~	150		
الباقي1	0	0	~~15~~			
الباقي2			0			

- نلاحظ أن عدد الخلايا المملوءة يساوي 4 وهوأقل من مجموع الأسطر والأعمدة ناقص1 أي أقل من (m+n-1) التي تساوي 5، وعليه لابد من إضافة كمية صغيرة جدا ε في أحد الخلايا الشاغرة لكل من السطر الأول أو العمود الأول مسبب الحل المتفسخ نظرا لإستهلاك الكميات المنتجة من المخزن دفعة واحدة) . وعليه سيكون الحل الأولي كما يلي:

العرض \ الطلب	مراكز التخزين			مجموع العرض	الباقي1	الباقي2
	المخزن01	المخزن02	المخزن03			
المصنع 01	1 40	9	6	~~40~~	0	
المصنع 02	5	7	4 50	~~50~~	0	
المصنع 03	2 ε	8 45	5 15	~~60~~	~~45~~	0
مجموع الطلب	~~40~~	~~45~~	~~65~~	150		
الباقي1	0	0	~~15~~			
الباقي2			0			

- تكلفة الحل الأولي هي:

$$\text{Min C} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} = 1X_{11} + 6X_{12} + 6X_{13} + \cdots + 5X_{33}$$

$$= 1(40) + 6(0) + 3(0) + 5(0) + 7(0) + 4(50) + 2(\varepsilon) + 8(45) + 5(15)$$

$$= 675 \text{ وحدة نقدية}$$

- التأكد من الحل (تحسين الحل إن أمكن):

نقوم أولا بحساب التكاليف الحدية للخلايا الشاغرة (الفارغة) وفق طريقة الحجر المتدرج وتعطينا النتائج التالية:

$$\delta_{1.2} = 9 - 1 + 2 - 8 = +2$$

$$\delta_{1.3} = 6 - 5 + 2 - 1 = +2$$

$$\delta_{2.1} = 5 - 2 + 5 - 4 = +4$$

$$\delta_{2.2} = 7 - 8 + 5 - 4 = +0$$

بما أن جميع القيم الحدية موجبة فإننا بصدد حل أمثل، إلا أنه هناك حل أمثل آخر بنفس قيمة تكلفة هذا الحل، والشكل النهائي للحل هو:

العرض \ الطلب	مراكز التخزين			مجموع العرض
	المخزن01	المخزن02	المخزن03	
المصنع 01	1 40	9	6	40
المصنع 02	5	7	4 50	50
المصنع 03	2	8 45	5 15	60
مجموع الطلب	40	45	65	150

2- حالة تعظيم الأرباح:

في حالة البحث عن تعظيم أرباح النقل، نستخدم نفس المنهجية المرتبطة بتدنية التكاليف، مع مراعاة ما يلي:[1]

- التوزيع من المصادر نحو المراكز يخضع لمبدأ التوزيع من أعلى ربح إلى أدناه.

- عند تحسين الحل والتأكد من أنه حل أمثل أولا، لابد أن نحسب التكاليف الحدية للخلايا الشاغرة، ونتحصل على الحل الأمثل إذا كانت جميع التكاليف الحدية سالبة.

مثال تطبيقي:

مؤسسة أجنبية « X » لصناعة الهواتف المحمولة لديها ثلاث وحدات متشابهة في الجزائر وهي: وحدة البليدة، وحدة سيدي بلعباس ووحدة تيزي وزو، كما أن هذه الوحدات مكلفة بتموين ثلاث مخازن رئيسية متواجدة في ثلاث ولايات وهي: الجزائر،

[1] للمزيد راجع: **محمد راتول، بحوث العمليات**، الطبعة الرابعة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2011، ص ص 145-150.

وهران، قسنطينة، بحيث تضمن هذه المخازن تموين السوق الوطنية . فإذا علمت أن الكميات التي تكو ن الوحدات قادرة على انتاجها وتسويقها وكذلك الكميات التي تطلبها المخازن الرئيسية أسبوعيا، والربح المحصل عليه من كل جهاز مرسل من كل وحدة إلى كل مخزن بألاف الدينارات 10^3 معروض في الجدول التالي:

الطلب / العرض	مخزن الجزائر	مخزن قسنطينة	مخزن وهران	مجموع العرض
وحدة البليدة	9	3	1	**200**
وحدة تيزي وزو	6	3	0.5	**150**
وحدة سيدي بلعباس	4	0.5	8	**250**
مجموع الطلب	**280**	**220**	**100**	**600**

المطلوب:

أوجد شبكة النقل التي يجب على المؤسسة تبنيها بما يسمح لها الحصول على أعلى ربح ممكن باستخدام طريقة أعظم ربح ممكن؟

الحل:

- الصياغة الرياضية لمشكلة النقل: تعظيم الربح

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}X_{ij} = 9X_{11} + 3X_{12} + 1X_{13} + \cdots + 8X_{33}$$

قيد العرض: قيود الوحدات $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = O_i$

$$i = 1 \Leftrightarrow X_{11} + X_{12} + X_{13} = 200$$

$$i = 2 \Leftrightarrow X_{21} + X_{22} + X_{23} = 150$$

$$i = 3 \Leftrightarrow X_{31} + X_{32} + X_{33} = 250$$

قيد الطلب: قيود المخازن $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = D_j$

$$j = 1 \Leftrightarrow X_{11} + X_{21} + X_{31} = 280$$

$$j = 2 \Leftrightarrow X_{12} + X_{22} + X_{32} = 220$$

$$j = 3 \Leftrightarrow X_{13} + X_{23} + X_{33} = 100$$

شرط عدم السلبية: $X_{ij} \geq 0 \ \ / \ \ i = 1,2,3 \ ; \ j = 1,2,3,$

ونلاحظ أن العرض يساوي الطلب أي $\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{j=1}^{n} D_j = 600$

بعد الصياغة الرياضية لمشكلة التعظيم سنحاول إيجاد الحل الأولي.

- إيجاد الحل الأولي بطريقة تعظيم الربح:

بما أن طريقة أعظم ربح تقابل طريقة أدنى تكلفة في حالة التدنية، ومن هذا المنطلق سنقوم بما يلي:

* أعلى ربح في الجدول هو 9 ، الخلية (1.1) العرض 200 والطلب 280، أكبر كمية يمكن توجيهها هي 200، فيستنفذ العرض ويبقى الطلب بـ 80.

* الربح الموالي من حيث الكبر هو 8، الخلية (3.3) العرض 250 والطلب 100، أكبر كمية يمكن توجيهها هي 100، يلبى كل الطلب ويبقى العرض بـ 150 .

* الربح الموالي من حيث الكبر 6، خلية (1.2) العرض 150 والطلب المتبقي سابقا هو 80، ومنه الكمية التي يمكن توجيهها هي 80، يلبى كل الطلب ويبقى العرض بـ 70 .

وبإتباع نفس الأسلوب والمنهج، نكمل الجدول ونتحصل على ما يلي:

الطلب / العرض	مخزن الجزائر	مخزن قسنطينة	مخزن وهران	مجموع العرض	الباقي1	الباقي2
وحدة البليدة	9 200	3	1	~~200~~	0	
وحدة تيزي وزو	6 80	3 70	0.5	~~150~~	~~70~~	0
وحدة سيدي بلعباس	4	0.5 150	8 100	~~250~~	~~150~~	0
مجموع الطلب	~~280~~	~~220~~	~~100~~	600		
الباقي1	~~80~~	~~150~~	0			
الباقي2	0	0				

ملاحظات: من خلال الجدول نلاحظ أن العرض = الطلب.

نلاحظ أن عدد الخلايا المملوءة يساوي عدد الأسطر زائد عدد الأعمدة ناقص 1 أي يعادل (m+n-1) .

كما نلاحظ أن الربح المحصل عليه (الوحدة بالألف دينار) هو:

$$\text{Max } Z = 9(200) + 6(80) + \ldots + 8(100) = 3365\ (10^3\ \text{دج})$$

– إختبار الحل الأولي:

سنقوم فيما يلي بإختبار الحل الأولي إذا كان أمثلا أم لا. وهذا بإختبار عوائد الوحدة الواحدة (العائد الهامشي) للخلايا الشاغرة، وذلك كما يلي:

$$\delta_{1.2} = 3 - 3 + 6 - 9 = -2$$

$$\delta_{1.3} = 1 - 8 + 0.5 - 3 + 6 - 9 = -12.5$$

$$\delta_{2.3} = 0.5 - 8 + 0.5 - 3 = -10$$

$$\delta_{3.1} = 4 - 6 + 3 - 0.5 = +0.5$$

نلاحظ أن العائد الهامشي $\delta_{3.1}$ موجب وهو للخلية المتواجدة في السطر الثالث والعمود الأول، ومعناه أن كل وحدة منقولة تزيد الربح بمقدار 0.5 مضروب في 10^3، بحيث أن أكبر كمية يمكن تحويلها هي 80 جهاز، وبإجراء التحويلات داخل المسار الحرج المتعلق بها (نختار أصغر كمية في الخلايات التي أخذت إشارة سالبة أثناء المسار الحرج)، فنتحصل على الجدول التالي:

الطلب / العرض	مخزن الجزائر	مخزن قسنطينة	مخزن وهران	مجموع العرض
وحدة البليدة	9 200	3	1	**200**
وحدة تيزي وزو	6	3 150	0.5	**150**
وحدة سيدي بلعباس	4 80	0.5 70	8 100	**250**
مجموع الطلب	**280**	**220**	**100**	**600**

الربح الذي نتحصل عليه هو:

Max Z = 9(200) + 3(150) + …+ 8(100) = 3405 (10^3دج)

نلاحظ أن الربح تحسن بمقدار التحويل (80)*(0.5) = 40 10^3

– إختبار الحل الثاني:

سنقوم فيما يلي بإختبار الحل الثاني إذا كان أمثلا أم لا. وهذا بإختبار عوائد الوحدة الواحدة (العائد الهامشي) للخلايا الشاغرة في الجدول، وذلك كما يلي:

$$\delta_{1.2} = 3 - 9 + 4 - 0.5 = -2.5$$

$$\delta_{1.3} = 1 - 8 + 4 - 9 = -12$$

$$\delta_{2.1} = 6 - 3 + 0.5 - 4 = -0.5$$

$$\delta_{2.3} = 0.5 - 8 + 0.5 - 3 = -10$$

نلاحظ أن جميع الأرباح الحدية أو العوائد الهامشية سالبة، وبالتالي فإن الحل الذي توصلنا إليه هو حل أمثل ونهائي (لا توجد حلول مثلى أخرى) ونتحصل على ربح مقداره 3405000دج = 3405 (10^3) .

المراجع المستخدمة:

1. **أحمد محمد الهزاع الصامدي، أساسيات بحوث العمليات**، دار قنديل للنشر و التوزيع، الأردن، 2007.
2. **السعدي رجال، بحوث العمليات: البرمجة الخطية**، دار رجزو، قسنطينة، الجزائر، 2004.
3. **حسن ياسين طعمة، مروان محمد النسور، إيمان حسين حنوش، بحوث العمليات، نماذج وتطبيقات**، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2009.
4. **حمودي حاج صحراوي، بحوث العمليات كمدخل إلى التقنيات الكمية**، دار جيطلي للنشر، الجزائر، 2014.
5. **دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، بحوث العمليات**، دار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2008.
6. **سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات**، الجامعة المفتوحة، طرابلس، ليبيا، 2002.
7. **سهيلة عبد الله سعيد، الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات**، دار الحامد، الأردن، 2007.
8. **شفيق العتوم، بحوث العمليات**، دار المناهج، الأردن، 2006.
9. **عاصم عبد الرحمن الشيخ، بحوث العمليات و استخدام البرمجيات (برمجية الخوارزمية)**، دار المناهج، الأردن، 1999.
10. **عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات**، الطبعة الثانية، دار وائل للنشر، الأردن، 2006.
11. **عبد النور هبال ، رياضيات المؤسسة**، دار الهدى للطبع والتوزيع، الجزائر، 2018.
12. **فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، مقدمة في بحوث العمليات**، دار وائل للنشر والتوزيع، الأردن، 2004.
13. **فتحي رزق السوافيري، مدخل معاصر في بحوث العمليات تطبيقات بإستخدام الحاسب**، الدار الجامعية، مصر، 2004.
14. **لحسن عبد الله باشيوة، بحوث العمليات**، دار اليازوري، الأردن، 2011.
15. **محمد أحمد الطراونة، سليمان خالد عبيدات، مقدمة في بحوث العمليات**، الطبعة الثانية، دار المسيرة، الأردن، 2010.
16. **محمد الطراونة ، سليمان عبيدات، مقدمة في بحوث العمليات**، دار الميسرة، الأردن، 2009.
17. **محمد راتول، بحوث العمليات**، الطبعة الرابعة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2011.
18. **مراد كمال عوض، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، دار البداية للنشر والتوزيع، الأردن، 2010.
19. **كريم زرمان، نبيلة باديس، رياضات المؤسسة**، دار الهدى، الجزائر، 2022.
20. **يزن ابراهيم مقبل، مقدمة في بحوث العمليات**، دار الصفاء العربية، الأردن، 2005.