الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY

Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**

Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

EXISTENCE ET UNICITE DES SOLUTIONS D'UN PROBLEME AUX LIMITES NON-LINEAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRES

Réalisé par :**BOUCHAREB Bouthaina**

MAAROUF Rayen

Dirigé par : **M.NASRALLAH Ilham**

Membres de jury :

M.ACHICHI Ahlam **Président**

Dr.AOUAFI Rabiaa **Examinateur**

2020-2021

Dédicace

A mon très cher père

Tu as toujours été pour moi un exemple du père respectueux, honnête, de la personne méticuleuse, je tiens à honorer l'homme que tu es. Grâce à toi papa j'ai appris le sens du travail et de la responsabilité.
Je voudrais te remercier pour ton amour, ta générosité, ta compréhension... Ton soutien fut une lumière dans tout mon parcours. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour l'estime et le respect que j'ai toujours eu pour toi.
Ce modeste travail est le fruit de tous les sacrifices que tu as déployés pour mon éducation et ma formation. Je t'aime papa et j'implore le tout-puissant pour qu'il t'accorde une bonne santé et une vie longue et heureuse.

A ma très chère mère

Qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.
Que Dieu vous protège et vous prête bonne santé et longue vie.
Grace à mes parents que j'ai pu faire mes études et gravir les pentes qui me semblaient infranchissables.

A mes très cher frères **Hamza , hana et Ouissal**
J'ai beaucoup apprécié l'estime et l'amour fréternel que vous me portez.
A mon très cher petit frère : **Abderrahman** .
Que Dieu vous protège et vous prête bonne santé et longue vie.
A ma binôme Ma chère amie : **Rayen**.
A toute ma famille, Surtout ma grand-mère.
À toutes mes collègues et mes amies.
A tous.

Bouchareb Bouthaina .

Dédicace

A mon très cher père : **Dr. Maarouf Lemnouar**
Tout l'encre du monde ne pourrait suffire pour exprimer mes sentiments envers un être très cher. Vous avez toujours été mon école de patience, de confiance et surtout d'espoir et d'amour. Vous êtes et vous resterez pour moi ma référence, la lumière qui illumine mon chemin.Ce travail est le résultat de l'esprit de sacrifice dont vous avez fait preuve, de l'encouragement et le soutien que vous ne cessez de manifester.
J'implore Dieu, tout puissant, de vous accorder une bonne santé, une longue vie et beaucoup de bonheur.

A ma très chère mère.
Aucune dédicace très chère maman, ne pourrait exprimer la profondeur des sentiments que j'éprouve pour vous, vos sacrifices innombrables et votre dévouement firent pour moi un encouragement. Vous avez guetté mes pas, et m'avez couvé de tendresse, ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Vous m'avez aidé et soutenu pendant de nombreuses années avec à chaque fois une attention renouvelée. Puisse Dieu, tout puissant vous combler de santé, de bonheur et vous procurer une longue vie.
Grace à mes parents que j'ai pu faire mes études et gravir les pentes qui me semblaient infranchissables.
A mes très chers frères biens aimés : **Anis, Rostom, Rachad** à qui je souhaite une vie pleine de joie, de bonheur et de succès.
A ma binôme que je considère comme une soeur : **Bouthaina**
A tous mes collègues et mes amis surtout : **Zineb, Besma** avec qui j'ai passé de très bon moment, je leurs souhaite plein de bonheur et beaucoup de succès.
A toute ma famille.
A tous.

Maarouf Rayen

Remerciement

Avant tout nous remercions **"Allah"** tout puissant de nous avoir accordé la force, la patience, la volonté et l'énergie pour réaliser ce travail.

Nous remercions notre encadreur **Nasrallah Ilham** pour nous avoir accordé sa confiance pour la réalisation de ce projet à distance les unes des autres, et pour nous avoir guidées tout au long de cette étude.

Un merci particulier au docteur **Aouafi Rabiaa** qui a dirigé notre travail ; ses conseils et ses commentaires précieux nous ont permis de surmonter les difficultés et de progresser dans ce travail.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche. Un grand merci à **Abdelouahab** et **Morad** pour ses conseils concernant le style de mon mémoire.

Tout notre respect et nos remerciements vont vers les membres du jury qui vont pleinement consacrer leur temps et leur attention afin d'évaluer notre travail, qui espérons le sera à la hauteur de leur attente.

Enfin, nos remerciements les plus sincères sont adressés à tous les professeurs qui ont contribué à forger nos connaissances et à assister notre formation, et à toute personne qui a participé de prés ou de loin à la réalisation de ce modeste mémoire.

Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'étudier l'existence de solutions d'un problème aux limites d'ordre fractionnaire aux sens de Riemann-Liouville.
En premier lieu, avons présenté les outils fondamentaux de la construction de la théorie de la dérivée fractionnaire. Ensuite nous avons appliqué le théorèmes du point fixe de Krasnoselskii pour établir l'existence des solutions des équations différentielles fractionnaires, où on a transformé un problème de Cauchy fractionnaire en un problème du point fixe.

Mots clés : Dérivées d'ordre fractionnaire, intégrale d'ordre fractionnaire, théorèmes du point fixe, problème aux limites.

Abstract

The main objective of this work is to study the existence of solutions of a fractional boundary problem in the Riemann-Liouville senses.
First, we presented the fundamental tools of the construction of the theory of fractional derivative. Then we applied Krasnoselskii's fixed point theorems to establish the existence of solutions of fractional differential equations, where we transformed a fractional Cauchy problem into a fixed point problem.

Keywords : Fractional order derivatives, fractional order integral, fixed point theorems, boundary problem.

الملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة وجود حلول لمشكلة حدية ذات مشتقات الكسرية لريمان ليوفيل اولا قدمنا الادوات الاساسية لبناء نظرية المشتق الكسري لاثبات وجود حلول المعادلات التفاضلية الكسرية ثم طبقنا نظريات النقطة الثابتة.. كراستو سيلسكي حيث قمنا بتحويل مشكلة كوشي الكسرية الى مشكلة نقطة ثابتة.
الكلمات المفتاحية : المشتقات ذات الرواتب الكسرية، التكاملات ذات الرواتب الكسرية نظريات النقطة الثابتة مشكلة الحدود.

Table des matières

NOTATIONS

- $\mathbb{R}_*^+$:Ensemble des nombres réels positifs non nuls .
- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$: Ensemble des nombres réels (resp. complexes).
- $\mathbb{N}$: Ensemble des nombres naturels.
- $[a, b)$:Intervalle semi-ouvert d'extrémité a et b .
- $Re(.)$: Partie réelle d'un nombre complexe.
- $Im(.)$: Partie imaginaire d'un nombre complexe.
- $[Re(\alpha)]$: Partie entière de $Re(\alpha)$.
- $L^p([a, b]))$: L'espace des fonctions P-intégrable sur $[a, b]$.
- L^∞ : L'espace des fonctions essentiellement bornées.
- $C([a, b])$: Espace des fonctions continues sur $[a, b]$.
- $C^n([a, b])$: Espace des fonctions n-fois continument dérivables sur $[a, b]$.
- $AC([a, b])$: L'espace des fonctions absolument continue sur $[a, b]$.

- $AC^n([a,b])$: Espace des fonctions $(n-1)$-fois continûment dérivable sur $[a,b]$ telle que $x^{(n-1)} \in AC([a,b])$.
- $C(J,\mathbb{R})$: L'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$.
- $I_{a^+}^{\alpha}$: Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α.
- $I_{b^-}^{\alpha}$: Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α.
- $D_{a^+}^{\alpha}$: Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α.
- $D_{b^-}^{\alpha}$: Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α.
- ${}^{C}D_{a^-}^{\alpha}$: Dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α.

INTRODUCTION

Les mathématiques sont l'art de donner des choses trompantes des noms. La belle et mystérieuse appellation (à première vue) "le calcul fractionnaire " est juste un de ces termes mal appropriés qui sont l'essence des mathématiques.

Le calcul fractionnaire est un domaine de l'analyse mathématique qui traite la notion d'intégration et dérivation d'ordre fractionnaire et ses applications. Le terme fractionnaire est un terme impropre, mais il est conservé à la suite de l'usage courant Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et pour tant il est actuel. C'est un vieux sujet ,qui a apparia à partir de quelques spéculations de G.W. Leibniz (1695,1697) et L.Euler (1730),il a été développé jusqu'à nos jours. Nous mentionnons quelques-uns des mathématiciens qui ont apporté des contributions importantes, comprend P . S. Laplace(1812) , J.Liouville (1832-1873), B .Riemann (1847),M . Riesz (1949).

Les calculs fractionnaires sont des outils précieux dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines de l'ingénierie, de la physique et de l'économie.

De nombreux livres et articles sur le fractionnaire calcul, équations différentielles fractionnaires et équations intégrales fractionnaires sont apparus Récemment, la théorie sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles fractionnaires ont été étudiés par de nombreux auteurs Les équations différentielles fractionnaires avec conditions intégrales aux limites constituent un très intéressant et une classe importante de problèmes. Plusieurs applications de conditions intégrales aux limites ont souvent été rencontré ([13],[18],[3],[26],[21],[12],[4],[11],[24],[5],[25],[9],[7],[6],[16]).

L'objectif principal de cette thèse est l'étude de l'existence de solutions d'un problème aux limites d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0^+}u(t) + f(t;u(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = ...u^{(n-2)}(0) = D^{\beta}_{0^+}u(1), \end{cases} \tag{1}$$

où $D^{\alpha}_{0^+}, D^{\beta}_{0^+}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ,

$n-1 < \alpha \leq n$, $n-2 \leq \beta \leq n-1$, $\quad f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction continue.

et l'espace $C(0,1)$ est une espace de Banach.

Notre travail est composé de trois chapitres :

Nous commençons par rappeler, dans le premier chapitre nous présentons des notions préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit.

Le chapitre deuxième, contient plusieurs définitions et propriétés de l'intégration et la dérivation de différents types d'ordre fractionnaire, nécessaires dans le chapitre suivants dans ce travail.

Dans le troisième chapitre on présente quelques résultats d'existences des solutions du problème aux limites d'ordre fractionnaire.

CHAPITRE

1

PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre regroupe les outils mathématiques utilisés dans les autres chapitres, à savoir, les notions de bases, fonctions spéciales, lemme de Gronwall et enfin le fameux théorème de point fixe de Banach. Dans ce chapitre, on trouve toutes les définitions, propositions et théorèmes utiles dans notre étude ([15],[10],[8] ,[14],[19]).

1.1 Utiles de base

Dans cette section, on trouve les espaces, quelques ensembles et applications utiles dans notre étude.

Définition 1.1.1 *Soit X un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}\,(\mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{C})$ et d une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$. On dit que d est une distance si d vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $\forall (x,y) \in X^2 : d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

2. $\forall (x,y) \in X^2$: $d(x,y) = d(y,x)$,

3. $\forall (x,y,z) \in X^3$: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Le couple (X,d) est appelé espace métrique.

Exemple $(C\,[a,b]\,,\mathbb{R}(d_\infty))$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ muni de la distance

$$d_\infty(f,g) = sup_{a\leq x\leq b}|f(x) - g(x)|,$$

est un espace métrique.

Définition 1.1.2 *Soit (X,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite des éléments dans X. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}, \text{ telle que } \quad \forall p,q \geq N_0, \quad d(x_p, x_q) \leq \epsilon.$$

Définition 1.1.3 *Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X converge dans X.*

Définition 1.1.4 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}\,(\mathbb{C} \quad ou \quad \mathbb{R})$, une norme $\|.\|$ sur X est une application de X dans $[0,+\infty[$, vérifiant :*

1. $\forall (x,y) \in X^2 : \quad \|x\| = \|0\| \Leftrightarrow x = 0$,

2. $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{k} : \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

3. $\forall (x,y) \in X^2 : \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Le couple $(X,\|.\|)$ est appelé espace vectoriel normé.

Proposition 1.1.1 *Soit X un espace vectoriel, l'application définie par :*

$$(x,y) \to d(x,y) = \|x-y\|, \qquad \forall (x,y) \in X \times X,$$

est une distance.

Remarque 1.1.1 *Tout espace vectoriel normé est un espace métrique par rapport a la distance associé a la norme.*

Définition 1.1.5 *Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

Définition 1.1.6 (Ensemble convexe) *Soit X un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C} \quad ou \quad \mathbb{R}$) et $K \subset X$, on dit que K est convexe si :*

$$\forall x, y \in K, \quad \forall \lambda \in [0,1]\,, \quad \lambda x + (1-\lambda)\, y \in K.$$

Définition 1.1.7 (Ensemble compact) *Soit X un espace vectoriel normé et $K \subset X$, on dit que K est compact si toute suite d'élément de K admet une sous-suite convergente vers un point dans $\overline{K}$.*

Définition 1.1.8 (Ensemble borné) *Soit X un espace vectoriel normé et $K \subset X$, on dit que K est borné s'il existe $r > 0$, telle que $K \subset B(0,r)$.*

Définition 1.1.9 (Ensemble relativement compact) *Soit X espace topologique, et K un sous espace de X, on dit que K est relativement compact si $\overline{K}$ est compact.*

Définition 1.1.10 (Ensemble uniformément borné) *Soit K un ensemble relativement compact, $C\,(K,\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$, soit $M \subset K$ on dit que M est uniformément borné si :*

$$\exists c > 0, \forall x \in M : |x(t)| \leq c, \quad \forall t \in K.$$

Définition 1.1.11 (Ensemble équicontinue) *Soit $M \subset C\,(K,\mathbb{R})$, on dit que M est équicontinues si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall t_1, t_2 \in K : |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |x\,(t_1) - x\,(t_2)\,| \leq \epsilon, \quad \forall x \in M.$$

Définition 1.1.12 *Soit U une application d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y. On dit que U est borné s'il est borné sur la boule unité fermé $B(0,1)$ de X.*

Proposition 1.1.2 *Soit U une application d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y les deux insertions suivant sont équivalentes :*

- *U est borné sur la boule unité fermé $B(0,1)$.*
- *$\exists c > 0,$ telle que :*

$$\|U(x)\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Définition 1.1.13 (Application continue) *Soit $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces vectoriels normé, U une application de X dans Y, on dit que U est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \|x - x_0\|_X \leq \delta \Rightarrow \|U(x) - U(x_0)\| \leq \epsilon.$$

L'application U est dite continue en tout $x \in X$.

Définition 1.1.14 (Application contractante) *Soit U une application d'un espace normé X dans lui-même. On dit que U est contraction (application contractante) s'il existe une constante k, $0 \leq k < 1$ telle que pour tout x et y de X on ait :*

$$\|U(x) - U(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

1.2 Quelques résultats sur la théorie du point fixe

Le but de cette partie est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach, pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Schauder. Enfin nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Définition 1.2.1 (Point fixe) *Soit X un espace de Banach et $U : D(U) \subset X \to R(U) \subset X$, une application non linéaire, un point $x^* \in D(U)$ est appelé point fixe de U si :*

$$U(x^*) = x^*.$$

1.2.1 Théorème du point fixe de type Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante.

Théorème 1.2.1 (Théorème de Point fixe de Banach) *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, $U : X \to X$ une contraction. Alors U admet un point fixe unique dans X, c-a-d*

$$\exists! x^* \in X \quad \textit{telle que} \quad Ux^* = x^*.$$

En autre, ce point peut-être obtenu comme limite de la suite engendrée par l'itération

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

Avec x_0 un élément arbitraire dans X et

$$\|x_n - u\| \leq k^n(1-k)^{-1}\|x_1 - x_0\|.$$

1.2.2 Théorème du point fixe de type Schauder

Le théorème de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.2.2 (Théorème de point fixe de Schauder) *Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach X et supposons $U : K \to K$ une application continue. Alors U admet un point fixe.*

1.2.3 Théorème de point fixe de type Krasnoselskii

Théorème 1.2.3 (Théorème de point fixe de Krasnoselskii) [17] *Soit Q un cône d'un espace de Banach E , et* Ω, Ω' *sont sous-ensembles ouverts de E avec* $0 \in \Omega \subset \bar{\Omega} \subset \Omega'$*. Supposons que* $A : Q \to Q$ *est un opérateur complet continue tel que les conditions suivantes soit satisfaite :*

(i) $\|Ax\| \leqslant \|x\|$ *pour* $x \in Q \cap \partial\Omega$ *et* $\|Ax\| \geqslant \|x\|$ *pour* $x \in Q \cap \partial\Omega'$ *.*

(ii) $\|Ax\| \geqslant \|x\|$ *pour* $x \in Q \cap \partial\Omega$ *et* $\|Ax\| \leqslant \|x\|$ *pour* $x \in Q \cap \partial\Omega'$ *.*

Alors, A a un point fixe $x \in Q \cap \partial\bar{\Omega}'\backslash\Omega$.

CHAPITRE

2

ASPECTS FONDAMENTAUX DE L'ANALYSE FRACTIONNAIRE

2.1 Fonctions de base

2.1.1 La fonction Gamma

Au cours des années 1729 et 1730, Euler introduit une fonction analytique qui a la propriété d'interpoler la factorielle lorsque l'argument de la fonction est un entier. Dans une lettre du 8 janvier 1730 à Christian Goldbach, il proposa la définition suivante ([1],[2],[12],[20],[22]) :

Définition 2.1.1 *La fonction de Gamma est définie sur le demi-plan* $\{\alpha \in C$

tel que $R(\alpha) > 0\}$ *par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \tag{2.1}$$

L'allure de la fonction gamma est donnée par la figure (1.1)

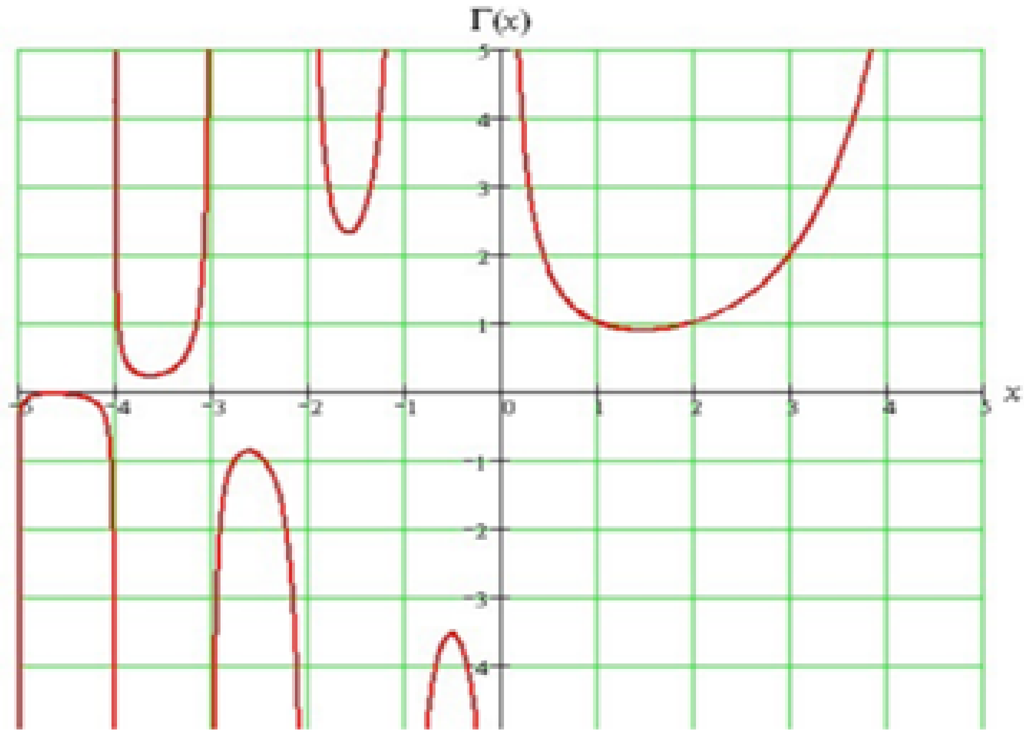

FIGURE 2.1 – La fonction Gamma

Lemme 2.1.1 *La fonction* Γ *est une fonction de classe* C^∞ *sur* $]0, +\infty[$ *(respectivement holomorphe sur le demi-plan* $\{\alpha \in C$ *tel que* $R(\alpha) > 0\}$*) et* $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *(resp.*$\mathbb{C}$ *tel que* $R(\alpha) > 0$*),*

$$\Gamma^{(k)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \tag{2.2}$$

2.1.1.1 Propriétés de la fonction gamma

L'une des propriétés de base de la fonction gamma est qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \tag{2.3}$$

ce qui peut être facilement prouvé en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt \\
&= \left[-t^{\alpha} e^{-t}\right]_{t=0}^{t=\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\
&= \alpha\Gamma(\alpha).
\end{aligned}$$

Évidement, $\Gamma(1) = 1$, et en utilisant (2.3) on obtient pour $z = 1, 2, 3, ...$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1!, \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\
& \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots, \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.
\end{aligned}$$

Une autre propriété important de la fonction gamma est qu'elle a des pôles simples aux points $\alpha = -n, (n = 0, 1, 2, ...)$. Nous pouvons écrire la dé finition (2.1) sous la forme :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \tag{2.4}$$

On donne quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, le changement de variables $t = u^2$ donne :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \tag{2.5}$$

L'équation fonctionnelle (2.3) entraine pour les entiers relatifs positifs n

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \\
\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7....(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right). \\
\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9....(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

Et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^n\,2^n}{1.3.5.7...\,(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

Aucune expression de base est connue pour $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ ou $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, mais il a été prouvé que ces chiffres sont transcendantales (respectivement par Lionnais en 1983 et Chudnovsky en 1984).

Jusqu'à 50 chiffres, les valeurs numériques de certaines de ces constantes sont :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 1;77245385090551602729816748334114518279754945612238...\\
\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) &= 2;67893853470774763365569294097467764412868937795730...\\
\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) &= 3;62560990822190831193068515586767200299516768288006...
\end{aligned}$$

2.1.2 La fonction Bêta

En mathématiques, la fonction bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives.

Définition 2.1.2 *Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction dite bêta au lieu d'une certaine combinaison de valeurs de la fonction gamma.*

La fonction bêta est généralement définie par :

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau, \qquad (Re(\alpha)>0, \quad Re(\beta)>0). \tag{2.6}$$

Pour établir la relation entre la fonction Gamma définie par (2.1) *et la fonction bêta* (2.6)*, nous utiliserons la transformée de Laplace.*

Considérons l'intégrale suivante :

$$h_{\alpha,\beta}(t)=\int_0^t \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau. \tag{2.7}$$

De toute évidence, $h_{\alpha,\beta}(t)$ *est une convolution des fonctions* $t^{\alpha-1}$ *et* $t^{\beta-1}$ *et*

$$h_{\alpha,\beta}(1) = B(\alpha,\beta).$$

Parce que la transformée de Laplace d'une convolution de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Laplace, on obtient :

$$H_{\alpha,\beta}(s) = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}.\frac{\Gamma(\beta)}{s^{\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{s^{\alpha+\beta}}, \tag{2.8}$$

où $H_{\alpha,\beta}(s)$ *est la transformée de Laplace de la fonction* $h_{\alpha,\beta}(t)$.

D'autre part, puisque $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ *est une constante, il est possible de restaurer la fonction originale* $h_{\alpha,\beta}(t)$ *par la transformée inverse de Laplace du côté droit de* (2.4). *En raison de l'unicité de la transformation de Laplace, nous obtenons donc :*

$$h_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1}, \tag{2.9}$$

et en prenant $t = 1$ *on obtient l'expression suivante pour la fonction bêta :*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{2.10}$$

d'où il suit que

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha). \tag{2.11}$$

La définition de la fonction bêta (2.6) *n'est valide que pour* $(Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0)$. *La relation* (2.8) *fournit la continuation analytique de la fonction bêta pour l'ensemble du plan complexe, si nous avons fonction gamma continuellement analytique.*

Avec l'aide de la fonction bêta, nous pouvons établir la relation importante suivante pour la fonction gamma, cette relation est :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}. \tag{2.12}$$

2.2 Calcule fractionnaire

On introduit dans ce chapitre les éléments de bases théoriques sur les opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui vont suivre.

2.2.1 L'intégrale de Riemann-Liouville :

Fonctions définies sur $[a, b]$ *Soit* f *une fonction continue sur l'intervalle* $[a, b]$. *On considère l'intégrale*

$$I^{(1)}f(t) = \int_a^t f(s)ds,$$

$$I^{(2)}f(t) = \int_a^t ds \int_a^s f(x)dx.$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^{(2)}f(t) = \int_a^t (t-s)f(s)ds.$$

Plus généralement le $n^{\text{ième}}$ *itéré de l'opérateur* I *s'écrire à l'aide de la formule intégrale de Liouville :*

$$I^{(n)}f(t) = \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} ds_3 ... \int_a^{s_{n-1}} f(s_n)\,ds_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1}f(s)ds. \tag{2.13}$$

pour tout entier n *cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma :* $(n-1)! = \Gamma(n)$, *Riemann rendu compte que le second membre de (2.13) pourrait avoir un sens même quand* n *prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :*

Définition 2.2.1 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre* α *telle que,* $a \in \,]-\infty; +\infty[$.

$$I^{\alpha}_{a^+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds, \tag{2.14}$$

Définition 2.2.2 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α telle que,*

$b \in]-\infty, +\infty[$.

$$I_{b^-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \tag{2.15}$$

Remarque 2.2.1 *Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).*

Exemple 2.2.1 *soit $f(t) = t^{\beta}$ avec $\beta > -1$ on a*

$$I_a^{\alpha} f(t) = \quad I_a^{\alpha} t^{\beta} = \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{\beta} (t-s)^{\alpha-1} ds \tag{2.16}$$

En posant $s = tu$, (2.16) devient

$$I_a^{\alpha} f(t) = \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (tu)^{\beta} (t-(tu))^{\alpha-1} t du$$

En utilisant la définition de fonction Béta (2.6) puis la relation entre alpha et Béta on arrive à :

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f(t) = & \quad \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (u)^{\beta} (t-u)^{\alpha-1} t du \\ = & \quad \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\beta+1, \alpha) \\ = & \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \end{aligned}$$

Proposition 2.2.1 *Si f une fonction intégrable et bornée, et α et α_1 deux nombres réels strictement positifs. Alors*

$$I_a^{\alpha}[I_a^{\alpha_1} f(t)] = I_a^{\alpha+\alpha_1} f(t)$$

Proposition 2.2.2 *Soient f, g deux fonction continue et intégrable sur $[a; b]$, I_a^{α} est linéaire cet-à-dire :*

$$\forall \gamma, \lambda \in \mathbb{R} \qquad ona \qquad I_a^{\alpha}[\lambda f(t) + \gamma g(t)] = \lambda I_a^{\alpha} f(t) + \gamma I_a^{\alpha} g(t)$$

2.2.2 dérivées fractionnaires :

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires. Nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville et Caputo qui sont les plus utilisées.

2.2.3 La dérivée de Riemann-Liouville :

Définition 2.2.3 *Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$*

$$\begin{aligned} {}^{R}D_{a^+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I_{a^+}^{n-\alpha} f(t)). \end{aligned} \tag{2.17}$$

la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α (avec $n-1 \leq \alpha \leq n$) .

Proposition 2.2.3 *si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$D_a^0 f(t) = f(t) \quad , \quad D_a^2 f(t) = f^{(2)}, ..., \quad D_a^n f(t) = f^{(n)}(t)$$

Remarque 2.2.2 *La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante mais on a :*

$$D_a^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}$$

on note $\frac{d^n}{dt^n}$ par D^n .

- ***Composition avec l'intégrale fractionnaire :***

Proposition 2.2.4 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ on a :*

$$D_a^{\alpha} f(t) = D_a^m (I^{m-\alpha} f(t)) \quad , \qquad m > \alpha$$

Lemme 2.2.1 *Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a, b]$, alors l'égalité :*

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t) \tag{2.18}$$

est vraie pour presque tout $t \in [a, b]$

En général on a :

$$D_{a^+}^\alpha \left(I^\beta f(t)\right) = D^{\alpha-\beta} f(t),$$

Et si $\alpha - \beta \leq 0$,

$$D_{a^+}^{\alpha-\beta} f(t) = I^{\beta-\alpha} f(t).$$

- ***Composition avec les dérivées d'ordre entier :***

Proposition 2.2.5 *soient $\alpha, \beta > 0$ et $n - 1 \leqslant \alpha < n, m - 1 \leqslant \alpha < m$ tel que $(n, m \in \mathbb{N})$ alors : Pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $D_a^\alpha f$ et $D_a^{k+\alpha} f$, existes, alors :*

$$D_a^k(D_a^\alpha f(t)) = D_a^{k+\alpha} f(t),$$

Proposition 2.2.6 *Pour $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $D_a^{n+\alpha} f$ et $D^k f$, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n - 1$ existes, alors*

$$D_a^\alpha(D^n f(t)) = D_a^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}.$$

Remarque 2.2.3 *La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout*

$k = 0, 1, 2, ..., n - 1.$

- ***Composition avec les dérivées fractionnaires :***

Proposition 2.2.7 *Soit $n - 1 \leq \alpha \leq n$ et $m - 1 \leq \beta \leq m$, alors*

$$D_{a^+}^\alpha(D_{a^+}^\beta f(t)) = D_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^{m} \left[D_{a^+}^{\beta-k}\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

Et

$$D_{a^+}^{\beta}(D_{a^+}^{\alpha}f(t)) = D_{a^+}^{\beta+\alpha}f(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[D_{a^+}^{\alpha-k}\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)}.$$

2.2.4 Approche de Riemann-Liouville

Définition 2.2.4 *Soit une fonction $f \in [a,b)$, la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds \qquad n-1 \leq \alpha \leq n \\ &= D_a^n(I_a^{n-\alpha}f(t)). \end{aligned}$$

Exemple 2.2.2 *La dérivée de $f(t) = (t-a)^p$ au sens de Riemann-Liouville. Soit α non entier et $0 \leqslant n-1 < \alpha < n$ et $p > -1$ alors on a :*

$$D_a^{\alpha}f(t) = D_a^{\alpha}(t-a)^p \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{dt}{dt^n}\int_a^t \frac{(\tau-a)^p}{(t-\tau)^{\alpha}-n+1}d\tau$$

En changement de variable $\beta = a + s(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}(t-a)^p = &\quad \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{dt^n}{dt^n}(t-a)^n + p - \alpha\int_0^1 (1-s)^{\alpha} - n + 1s^p ds \\ &= \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)\beta(n-\alpha,p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)\beta(n-\alpha,p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n+p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha} \end{aligned}$$

Si on pose $\alpha = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{3}{2}$

$$D_a^{\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)}(t-a)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(t-a)$$

Et pour $\alpha > 0$ et $p = 0$,on aura le résultat suivant :

$$D_a^{\alpha}(t-a)^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

C'est-a-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

2.2.5 Dérivée de Caputo

Dans cette section, nous présentons les définitions et certaines propriétés des dérivés fractionnaires de Caputo.

Définition 2.2.5 *Soit* f *une fonction intégrable, la dérivée fractionnaire d'ordre* α *(avec* $n-1 \leq \alpha \leq n$ *) au sens de Caputo est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds \\ &= I^{n-\alpha}_{a^+}(\frac{d^n}{dt^n}f(t)). \end{aligned}$$

2.2.6 Approche de Caputo

On introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 2.2.6 *Soit* f *une fonction, la dérivée fractionnaire d'ordre* α *au sens de Caputo est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds \qquad n-1 \leq \alpha \leq n \\ &= I^{n-\alpha}_{a^+}(D^n{}_{a^+}f(t)). \end{aligned}$$

Exemple 2.2.3 (La dérivée de la fonction constante au sens de Caputo) *:*

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle,

$${}^{C}D^{\alpha}_{a^+}C = 0.$$

Exemple 2.2.4 *La dérivée de* $f(t) = (t-a)^p$ *au sens de Caputo est,*

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha}.$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}\left[(s-a)^p\right]^{(n)} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(s-a)^{p-n} ds, \end{aligned}$$

D'où :

$${}^{C}D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{p-n} ds.$$

A l'aide de changement de variable $s = a + x\,(t-a)$ *on trouve :*

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{p-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-\alpha}\int_0^1 (1-x)^{n-\alpha-1}\, x^{p-n} dx \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\, B(p-n+1, n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha}. \end{aligned}$$

• ***Compositions avec l'intégrale fractionnaire :***

Théorème 2.2.1 *Soit* $\alpha > 0$ *et* f *est une fonction continue on a :*

$$I_{a^+}^{\alpha}\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha}f(t)\right) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)\,(t-a)^k}{k!},$$

Et

$${}^{c}D_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\alpha}f(t)] = f(t),$$

Remarque 2.2.4 *L'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.*

• ***Relations avec la dérivée de Riemann-Liouville :*** *Le théorème suivants établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.*

Théorème 2.2.2 *Soit* $\alpha > 0$ *avec* $n-1 \leq \alpha \leq n, (n \in \mathbb{N})$, *supposons que* f *est une fonction telle que* ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f(t)$ *et* $D_{a^+}^{\alpha} f(t)$ *existent alors :Pour presque tout* $t \in [a, +\infty)$:

$$
{}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f(t) = \ D_{a^+}^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)},
$$

Corollaire 2.2.1 *on déduit que si* $f^{(k)}(a) = 0$ *pour* $k = 0, 1, 2, ...n-1$, *on aura :*

$$
D_{a^+}^{\alpha} f(t) =^{C} D_{a^+}^{\alpha} f(t).
$$

2.2.7 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et de Riemann-Liouville

L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme les équations différentielles d'ordre entiers, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $t = a$.

Une autre différence entre Riemann-Liouville et Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo par contre Riemann-Liouville elle est :

$$
{}^{R}D^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.
$$

CHAPITRE

3

EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS

*Ce chapitre, consacré à l'étude de l'existence des solutions d'un problème aux limites d'ordre fractionnaires au sens de **Riemann-Liouville** .*

3.1 Présentation du problème

On s'intéresse dans ce chapitre à un problème aux limite de équation différentielle fractionnaire non linéaire suivante :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} u(t) + f(t; u(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = \ldots u^{(n-2)}(0) = D_{0^+}^{\beta} u(1), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $D_{0^+}^{\alpha}, D_{0^+}^{\beta}$ *est la dérivée fractionnaire au sens de* Riemann-Liouville ,

$n - 1 < \alpha \leq n$, $n - 2 \leq \beta \leq n - 1$, $\quad f : [0, 1] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ *une fonction continue.*

Lemme 3.1.1 *Supposons que* $u \in C(0,1) \cap L^1(0,1)$ *avec une dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha > 0$ *qui appartient à* $C(0,1) \cap L^1(0,1)$*.Alors*

$$I_{0^+}^{\alpha} D_{0^+}^{\alpha} u(t) = u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_N t^{\alpha-N}$$

pour certains $C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., N$ *, où* N *est le plus petit entier supérieur ou égal* α*.*

Lemme 3.1.2 *Supposons que* $g(t) \in L[0,1]$ *et* α, β *soient deux constantes telles que* $\alpha > n-1 \geqslant \beta \geqslant n-2, \quad n \geqslant 3$*. Alors*

$$D_{0^+}^{\beta} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} g(s) ds$$

Lemme 3.1.3 [23] *Soit* $g(t) \in L[0,1]$ *et* $n-1 < \alpha \leq n$, $n-2 \leq \beta \leq n-1, n \geqslant 3$ *, le solution unique de*

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} u(t) + g(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = ...u^{(n-2)}(0) = D_{0^+}^{\beta} u(1) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

Avec

$$u(t) = \int_0^t G(t,s) g(s) ds,$$

Où

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Preuve. *En appliquant le lemme (3.1.1) et l'équation(3.2) équivaut à l'équation intégrale on a :*

$$u(t) = -I_{0^+}^{\alpha} g(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_n t^{\alpha-n}$$

pour certains $C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$*. Par conséquent, la solution générale de l'équation (3.2) est*

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_n t^{\alpha-n}$$

De $u(0) = u'(0) = ...u^{(n-2)}(0) = D^{\beta}_{0^+}u(1)$,

On obtient $\quad C_2 = ... = C_n$

Ainsi

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds + C_1 t^{\alpha-1}$$

Du lemme(3.1.2), on obtient :

$$D^{\beta}_{0^+}u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}g(s)ds + C_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)}t^{\alpha-\beta-1}$$

D'après de la condition aux limites $D^{\beta}_{0^+}u(1) = 0$, *nous concluons que*

$$C_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1}g(s)ds$$

Par conséquent, la solution unique de (3.2) est

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1}g(s)ds \\ &= \int\limits_0^1 G(t,s)g(s)ds. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.4 *La fonction* $G(t,s)$ *satisfait les conditions suivantes ;*

(i) $G(t,s)$ *est continue sur* $[0,1] \times [0,1]$.

(ii) $G(t,s) > 0$ *pour toute* $s,t \in [0,1]$.

(iii) *pour toute* $s,t \in [0,1]$, $\frac{t^{\alpha-1}w(s)}{\Gamma(\alpha)} \leqslant G(t,s) \leqslant \frac{w(s)}{\Gamma(\alpha)}$,

où $w(s) = (1-s)^{\alpha-\beta-1} - (1-s)^{\alpha-1}$.

Preuve.

(i) *est vérifié. Nous allons donc prouver que* (ii) *et* (iii)

Si $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$

Soit

$$h(t,s) = (1-s)^{\alpha-\beta-1} - (1-\frac{s}{t})^{\alpha-1}$$

Puis

$$G(t,s) = \frac{t^{(\alpha-1)}h(t,s)}{\Gamma(\alpha)}$$

Ensuite

$$\frac{\partial h(t,s)}{\partial t} = -(\alpha-1)(1-\frac{s}{t})^{\alpha-2}\frac{s}{t^2} \leqslant 0$$

Donc $h(t,s)$ *est décroissant sur* $[s,1]$ *par rapport à* t*.*

Alors

$$h(t,s) \geqslant h(1,s) = (1-s)^{\alpha-\beta-1} - (1-s)^{\alpha-1} > 0$$

Ce qui implique (ii) *vérifié. De plus, on a* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{t^{(\alpha-1)}h(t,s)}{\Gamma(\alpha)} \\ &\geqslant \frac{t^{(\alpha-1)}h(1,s)}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{t^{\alpha-1}[(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (1-s)^{\alpha-1}]}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{t^{\alpha-1}w(s)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Si $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$*. Il est facile de voir que*

$$G(t,s) \geqslant \frac{t^{\alpha-1}[(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (1-s)^{\alpha-1}]}{\Gamma(\alpha)}$$

D'autre part, si $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$*, on obtient*

$$\begin{aligned} \frac{dG(t,s)}{dt} &= \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}[(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (t-s)^{\alpha-2}]}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{(\alpha-1)[\frac{(t-ts)^{\alpha-2}}{(1-s)^{\beta-1}} - (t-s)^{\alpha-2}]}{\Gamma(\alpha)} \\ &\geqslant \frac{(\alpha-1)[\frac{(t-s)^{\alpha-2}}{(1-s)^{\beta-1}} - (t-s)^{\alpha-2}]}{\Gamma(\alpha)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Alors $G(t,s)$ *est croissant par rapport à* t *pour* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$. *Donc*

$$G(t,s) \leqslant G(1,s) \leqslant \frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1}-(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{w(s)}{\Gamma(\alpha)}$$

Si $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$, *on obtient aussi*

$$\begin{aligned} G(t,s) &\leqslant \frac{s(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{[1-(1-s)](1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &\leqslant \frac{[1-(1-s)^{\beta-1}](1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1}-(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Alore (iii) *est vérifié* □

3.2 Résultat d'existence et d'unicité de la solution

Nous avons besoin les hypothèses suivants :

(H_1) $\quad 0 \leqslant \lim\limits_{U \to 0^+} \sup\limits_{t\in[0,1]} \dfrac{f(t,u)}{u} \leqslant M_1$, *où* $M_1 = [\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \displaystyle\int_0^1 G(t,s)ds]^{-1}$.

(H_2) $\quad$ *Il existe* $\gamma \in [0, \frac{2\alpha-2}{3\alpha-\beta-2}]$ *tel que* $\lim\limits_{U\to+\infty} \inf\limits_{t\in[\gamma,1]} \dfrac{f(t,u)}{u} \leqslant \dfrac{\Gamma(\alpha)(\alpha-\beta)}{M(\alpha,\beta)}$

où

$$M(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha-2)^{2\alpha-2}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}}{(3\alpha-\beta-2)^{3\alpha-\beta-2}};$$

(H_3) *Il existe* $\gamma \in [0, \frac{2\alpha-2}{3\alpha-\beta-2}]$ *tel que*

$$\lim_{U\to 0+} \inf_{t\in[\gamma,1]} \frac{f(t,u)}{u} \leqslant \frac{\Gamma(\alpha)(\alpha-\beta)}{M(\alpha,\beta)}$$

(H_4) *Il existe* $r > 0$ *et* $h(t) \in C(0,1)$ *tel que pour* $t \in [0,1]$,

$0 < u \leqslant r, f(t,u) \leqslant h(t)$, *et* $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \displaystyle\int_0^1 G(t,s)h(s)ds \leqslant r$.

(H_5) $0 \leqslant \lim\limits_{U\to+\infty} \sup\limits_{t\in[0,1]} \dfrac{f(t,u)}{u} \leqslant M_1$.

(H_6) *Il existe* $\gamma \in [0, \frac{2\alpha-2}{3\alpha-\beta-2}]$ *tel que* $t \in [\gamma, 1]$,

$\gamma^{\alpha-1}v \leqslant u \leqslant v, f(t,u) \geqslant \frac{\Gamma(\alpha)(\alpha-\beta)v}{M(\alpha,\beta)}$.

Soit l'espace de Banach $E = C[0,1]$ *donnée par la norme* $u = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |u(t)|$*.Pour* $\forall c > 0$*,*

$\Omega_c = \{u \in E : \|u\| \leqslant c\}$.

Soit P_γ *le cône*$P_\gamma = u \in E : u(t) \geqslant 0, t \in [0,1], \min\limits_{\gamma\leqslant t\leqslant 1} u(t) \geqslant \gamma^{\alpha-1}\|u\|$ *où* $\gamma \in [0, \frac{2\alpha-2}{3\alpha-\beta-2}]$

Supposons que u *soit une solution de (3.1), alors*

$$u(t) = \int_0^t G(t,s)f(t,u(t))ds, 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Défini un opérateur $A : P_\gamma \to E$ *comme suit*

$$(Au)(t) = \int_0^t G(t,s)f(s,u(s))ds$$

En clair, les points fixes de l'opérateur A *sont les solutions du (3.1).*

Lemme 3.2.1 *L'opérateur A est défini par (3.2.1). Alors* $A(P_\gamma) \subset P_\gamma$ *et A est complet continue.*

Preuve. *Il résulte du lemme (3.1.4) que*

$$\|Au\| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 w(s)f(s,u(s))ds.$$

$$(Au)(t) \geqslant \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 w(s)f(s,u(s))ds.$$

Alors

$$\min_{\gamma\leqslant t\leqslant 1}(Au)(t) \geqslant \gamma^{\alpha-1}\|Au\|$$

On a donc $A(P_\gamma) \subset P_\gamma$ *. Ensuite En raison* $G(t,s)$ *non-négative de* $G(t,s), f(t,u)$ *et de la continuité de* $f(t,u)$ *par rapport à* u*, on voit que* $A : P_\gamma \to P_\gamma$ *est continue.*

Soit $\Omega \in P_\gamma$*. Il est facile de montrer que* $A(\Omega)$ *est uniformément délimité et est équicontinuité. Ainsi, l'opérateur* A *est complètement continue.* □

Théorème 3.2.1 *Supposer que (*H_1*) et (*H_2*) vérifié. Alors problème (3.1) il y a au moins une solution positive.*

Preuve. *Nous prouvons d'abord qu'il existe*$\gamma_0 \in [0,1]$ *et* $R_{\gamma_0} > 0$ *tel que pour* $u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_{R_{\gamma_0}}$

$$\|Au\| \geqslant \|u\|.$$

Depuis condition (H_2) vérifié, il existe $\varepsilon > 0$ *et* $N > 0$ *telle que pour* $t \in [\gamma, 1]$ *et* $u \geqslant N$

$$f(t,u) \geqslant \left(\frac{\Gamma(\alpha)(\alpha-\beta)}{M(\alpha,\beta)}\right)u. \tag{3.4}$$

Choisir $R_\gamma \geqslant \frac{N}{\gamma^{\alpha-1}}$. *Pour* $u \in P_\gamma \cap \partial\Omega_{R_\gamma}$*, on obtient :*

$$\min_{\gamma \leqslant t \leqslant 1}(Au)(t) \geqslant \gamma^{\alpha-1}\|u\| = \gamma^{\alpha-1}R_\gamma \geqslant N. \tag{3.5}$$

Ensuite, il résulte de (3.2) et (3.3) que pour $u \in P_\gamma \cap \partial\Omega R_\gamma$

$$\begin{aligned}(Au)(\gamma) &= \int_0^t G(\gamma,s)f(s,u(s))ds \geqslant \int_\gamma^t G(\gamma,s)f(s,u(s))ds \\ &\geqslant \left(\frac{\Gamma(\alpha)(\alpha-\beta)}{M(\alpha,\beta)} + \varepsilon\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\gamma^{\alpha-1}\|u\|\int_\gamma^t (1-s)^{\alpha-\beta-1}ds \\ &\geqslant \frac{1}{M(\alpha,\beta)}\gamma^{2\alpha-2}(1-\gamma)^{\alpha-\beta}\|u\|, u \in P_\gamma \cap \partial\Omega R_\gamma\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|Au\| \geqslant \frac{1}{M(\alpha,\beta)}\gamma^{2\alpha-2}(1-\gamma)^{\alpha-\beta}\|u\|, u \in P_\gamma \cap \partial\Omega R_\gamma \tag{3.6}$$

Soit $\varphi(\gamma) = \gamma^{2\alpha-2}(1-\gamma)^{\alpha-\beta}$. *Ça suit quand* $\gamma = \gamma_0 = \frac{2\alpha-2}{3\alpha-\beta-2}$,

$$\varphi(\gamma_0) = \max_{0 \leqslant \gamma \leqslant 1}\varphi(\gamma) = M(\alpha,\beta)$$

Prenant alors $\gamma = \gamma_0$*, on a :*

$$\|Au\| \geqslant \|u\|, u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_{R_{\gamma_0}}.$$

En raison de (H_1), nous savons qu'il existe $\varepsilon \in (0, M_1)$ *et* $0 < r_1 < R_{\gamma_0}$*, tel que pour* $t \in [0,1], 0 \leqslant u \leqslant r_1$

$$f(t,u) \leqslant (M_1 - \varepsilon)u,$$

Alors pour $u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_{r_1}$

$$\begin{aligned}(Au)(t) &= \int_0^t G(\gamma, s) f(s, u(s)) ds \\ &\leqslant (M_1 - \varepsilon) r_1 \int_0^t G(t, s) ds \leqslant (M_1 - \varepsilon) \frac{r_1}{M_1} \leqslant r_1 = \|u\| .\end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\|Au\| \leqslant \|u\| , u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_{r_1}.$$

Par conséquent, d'après théorème de Krasnoselskii, problème (3.1) a au moins une solution positive dans $P_{\gamma_0} \cap (\bar{\Omega}_{\gamma_0} \backslash \Omega_{r_1})$. □

Théorème 3.2.2 *Supposer que* (H_3) *et* (H_4) *vérifié. Alors problème (3.1) il y a au moins une solution positive.*

Preuve. *Similaire à la preuve de Théorème (3.2.1), nous montrons maintenant*

Qu'il existe $\gamma_0 \in [0, 1]$ *et* $\gamma_0 < r_{\gamma_0} < r$ *telle que pour* $u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_{r_{\gamma_0}}$

$$\|Au\| \geqslant \|u\| .$$

En effet, depuis condition (H_3) *vérifié, il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $L > 0$ *telle que*

$$f(t, u) \geqslant \left(\frac{\Gamma(\alpha)(\alpha - \beta)}{M(\alpha, \beta)} + \varepsilon \right) u, 0 < u \leqslant L.$$

Il en résulte que choisir $r_\gamma = \min \left\{ \frac{r}{2}, L \right\}$, *pour* $u \in P_\gamma \cap \partial\Omega_{r_\gamma}$*,on a :*

$$\min_{\gamma \leqslant t \leqslant 1} u(t) \geqslant \gamma^{\alpha - 1} r_\gamma, u(t) \leqslant r_\gamma \leqslant L.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}(Au)(\gamma) &= \int_0^1 G(\gamma, s) f(s, u(s)) ds \geqslant \int_\gamma^1 G(\gamma, s) f(s, u(s)) ds \\ &\geqslant \left(\frac{\Gamma(\alpha)(\alpha - \beta)}{M(\alpha, \beta)} + \varepsilon \right) \frac{r_\gamma \gamma^{2\alpha - 2}}{\Gamma(\alpha)} \int_\gamma^t (1 - s)^{\alpha - \beta - 1} ds \\ &\geqslant \frac{1}{M(\alpha, \beta)} \gamma^{2\alpha - 2} (1 - \gamma)^{\alpha - \beta} r_\gamma\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|Au\| \geqslant \frac{1}{M(\alpha,\beta)}\gamma^{2\alpha-2}(1-\gamma)^{\alpha-\beta}\|u\|, \quad u \in P_\gamma \cap \partial\Omega_{r_\gamma}.$$

On prend $\gamma_0 = \frac{2\alpha-2}{3\alpha-\beta-2}$, *on a*

$$\|Au\| \geqslant \|u\|, u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_{r_{\gamma_0}}.$$

Pour $u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_{r_\gamma}$, *on a* $0 \leqslant u \leqslant r$. *Il résulte de la condition* (H_4) *que*

$$\begin{aligned}(Au)(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds \\ &\leqslant \min_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)h_n ds \leqslant r = \|u\|.\end{aligned}$$

C'est pour $u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_r$

$$\|Au\| \leqslant \|u\|.$$

Alors, par le théorème de Krasnoselskii , problème (3.1) a au moins une solution positive dans $P_{\gamma_0} \cap \left(\bar{\Omega}_{r_{\gamma_0}} \backslash \Omega_r\right)$. □

Théorème 3.2.3 *Supposer que* (H_5) *et* (H_6) *vérifié. Alors problème (3.1) il y a au moins une solution positive.*

Preuve. *Supposer que* (H_6) *vérifié, comme la preuve du théorème (3.2.1),*

on prend $\gamma_0 = \frac{2\alpha-2}{3\alpha-\beta-2}$, *on a* $u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_v$

$$\|Au\| \geqslant \|u\|.$$

Depuis condition (H_5) *vérifié, il existe* $\varepsilon \in (0, M_1)$ *et* $N_1 > 0$ *tel que pour* $u \geqslant N_1$ *et* $t \in [0,1]$

$$f(t,u) \leqslant (M_1 - \varepsilon)\, u. \tag{3.7}$$

Si $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} f(t,u)$ *est bornée pour* $u \in [0,+\infty)$, *c'est-à-dire que pour tous* $u \in [0,+\infty)$ *et* $t \in [0,1]$

$$f(t,u) \leqslant L_1.$$

Soit $v_1 = \max\left\{N_1, v, \frac{L_1}{M_1}\right\}$*. Pour* $u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_{v_1}$*, de l'inégalité ci-dessus, nous avons*

$$\begin{aligned} (Au)(t) &= \int_0^t G(t,s) f(s,u(s)) ds \\ &\leqslant L_1 \int_0^t G(\gamma,s) ds \leqslant \frac{L_1}{M_1} \leqslant v_1 = \|u\| . \end{aligned}$$

Si $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} f(t,s)$ *est sans limite pour* $u \in [0,+\infty)$*, alors il existe* $v_2 > \max\{N_1, v\}$ *tel que pour* $u \in [0, v_2]$ *et* $t \in [0,1]$

$$f(t,u) \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} f(t,v_2). \tag{3.8}$$

Il résulte de (3.5) et (3.6) que

$$\begin{aligned} (Au)(t) = \int_0^1 G(\gamma,s) f(s,u(s)) ds &\leqslant \int_0^1 G(t,s) \max_{0\leqslant t\leqslant 1} f(t,v_2) ds \\ &\leqslant (M_1-\varepsilon) v_2 \int_0^1 \leqslant (M_1-\varepsilon)\frac{v_2}{M_1} \leqslant v_2 = \|u\| . \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons voir qu'il existe $\bar{v} \geqslant v$ *tel que pour* $u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_{\bar{v}}$

$$\|Au\| \leqslant \|u\| .$$

Appliquer le théorème de Krasnoselskii , problème (3.1) a au moins une solution positive dans $P_{\gamma_0} \cap \left(\bar{\Omega}_{\bar{v}} \backslash \Omega_v\right)$. □

Théorème 3.2.4 *Supposer que* (H_1) *et* (H_3) *vérifié. Alors problème (3.1) il y a au moins une solution positive.*

Théorème 3.2.5 *supposer que* (H_2) *et* (H_4) *vérifié. Alors problème (3.1) il y a au moins une solution positive.*

Théorème 3.2.6 *supposer que* (H_1) *et* (H_6) *vérifié. Alors problème (3.1) Il y a au moins une solution positive.*

Théorème 3.2.7 *supposer que (H_3) et (H_5) vérifié. Alors problème (3.1) Il y a au moins une solution positive.*

Théorème 3.2.8 *supposer que (H_4) et (H_6) vérifié. Alors problème (3.1) Il y a au moins une solution positive.*

En plus,des théorèmes (3.2.1)-(3.2.8), nous avons les résultats de multiplicité pour problème (3.1) comme suit :

Théorème 3.2.9 *supposer que (H_2), (H_3) et (H_4) vérifié. Alors problème (3.1) il y a au moins deux solution positive.*

Preuve.

supposer que (H_3) et (H_4) vérifié,by théorème (3.2.2), on voit que problème (3.1) il y a au moins une solution positive dans $P_{\gamma_0} \cap \bar{\Omega}_{r_{\gamma_0}} \backslash \Omega_r$. *Comme ($H_2$), ($H_4$) vérifié, selon la preuve de théorème (3.2.1) et théorème (3.2.2), on concluons que problème (3.1) il y a au moins une solution positive dans* $P_{\gamma_0} \cap \bar{\Omega}_{R_{\gamma_0}} \backslash \Omega_{r_{\gamma_0}}$. *Ainsi problème (3.1) il y a au moins deux solution positive dans* $P_{\gamma_0} \cap \bar{\Omega}_{R_{\gamma_0}} \backslash \Omega_{r_{\gamma_0}} \cap \bar{\Omega}_{r_{\gamma_0}}$. □

Théorème 3.2.10 *supposer que (H_3), (H_4) et (H_5) vérifié. Alors problème (3.1) il y a au moins deux solution positive.*

Théorème 3.2.11 *supposer que (H_4), (H_5) et (H_6) vérifié, et* $\gamma^{\alpha-1}R > r$. *Alors problème (3.1) il y a au moins deux solution positive.*

Théorème 3.2.12 *supposer que (H_2), (H_3) et (H_4) vérifié, et* $\gamma^{\alpha-1}R > r$. *Alors problème (3.1) il y a au moins deux solution positive.*

Remarque 3.2.1 *Si nous remplaçons la condition* (H_2), (H_3) *avec*

$$H_2^{'} \lim_{u\to+\infty} \inf_{t\in[\gamma,1]} \frac{f(t,u)}{u} = \infty, \quad H_3^{'} \lim_{u\to 0^+} \inf_{t\in[\gamma,1]} \frac{f(t,u)}{u} = \infty,$$

puis les conclusions des théorèmes ci-dessus (3.2.2)-(3.2.5),(3.2.7),(3.2.9)-(3.2.10),(3.2.12) sont valables.

Remarque 3.2.2 *Généralement on prend* $\gamma = \gamma_0 = \frac{2\alpha-2}{3\alpha-\beta-2}$ *pour montrer l'effet des théorèmes ci- dessus en pratique.*

Enfin, nous obtenons les deux théorèmes suivants d'infiniment nombreuses solutions positives pour problème (3.1).

Théorème 3.2.13 *Supposons qu'il existe des suites* $r_n, R_n > 0$ *telle que*

$$0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < ... < r_n < R_n < ...,$$

Et $\frac{1}{\gamma_0^{\alpha-1}} r_n < R_n < r_{n+1}\gamma_0^{\alpha_1}, n = 1, 2, ...$ *satisfaire*

(H_7) $f(t,u) > \frac{\Gamma(\alpha)(\alpha-\beta)}{M(\alpha,\beta)}$ *pour* $t \in [\gamma_0, 1]$ *et* $\gamma_0^{\alpha_1} R_n \leqslant u \leqslant R_n$.

(H_8) *il existe* $h_n, \bar{h}_n \in C[0,1]$ *telle que*

$$f(t,u) \leqslant h_n(t), pour t \in [0, \gamma_0], 0 \leqslant u \leqslant r_n,$$

$$f(t,u) \leqslant \bar{h_n}(t), pour t \in [\gamma_0, 1], 0 \leqslant \gamma_0 u \leqslant r_n,$$

Et

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\gamma_0} \int_0^1 G(t,s)h_n(s)ds + \max_{0\leqslant t\leqslant\gamma_0} \int_0^1 G(t,s)\bar{h}_n(s)ds \leqslant r_n,$$

Où $\quad \gamma_0 = \frac{2\alpha-2}{3\alpha-\beta-2}$.

Alors problème (3.1) il y a nombreuses solutions positives sans fin.

Preuve. *Supposer que* H_7 *vérifié, de la preuve des théorèmes ci-dessus, nous avons pour* $u\in$ $P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_{R_n}$

$$\|Au\| \geqslant \|u\|$$

Depuis H_8 vérifiée pour $u \in P_{\gamma_0} \cap \partial\Omega_{r_n}$

$$\begin{aligned}(Au)(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds \\ &= \int_0^{\gamma_0} G(t,s)f(s,u(s))ds + \int_{\gamma_0}^1 G(t,s)f(s,u(s))ds \\ &\leqslant \int_0^{\gamma_0} G(t,s)h_s ds + \int_{\gamma_0}^1 G(t,s)\bar{h}_n(s)ds \\ &\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant\gamma_0}\int_0^{\gamma_0} G(t,s)h_s ds + \max_{\gamma_0\leqslant t\leqslant 1}\int_{\gamma_0}^1 G(t,s)\bar{h}_n(s)ds \leqslant r_n = \|u\|.\end{aligned}$$

□

D'où, par le théorème de Krasnoselskii, on voit que problème (3.1) il y a nombreuses solutions positives sans fin.

Théorème 3.2.14 *Supposons qu'il existe des suites $r_n, R_n > 0$ telle que*

$$0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < ... < r_n < R_n < ...,$$

Et $\frac{1}{\gamma_0^{\alpha-1}} r_n < R_n < r_{n+1}\gamma_0^{\alpha_1}, \quad n = 1, 2, ...$ *satisfaire*

(H_9) $f(t,u) > \frac{\Gamma(\alpha)(\alpha-\beta)}{M(\alpha,\beta)} r_n$ *pour $t \in [\gamma_0, 1]$ t $\gamma_0^{\alpha_1} r_n \leqslant u \leqslant r_n$.*

(H_{10}) *il existe h_n,$\bar{h}_n'$ $\in C[0,1]$ telle que*

$$f(t,u) \leqslant h_n'(t), \text{ pour } t \in [0, \gamma_0], 0 \leqslant u \leqslant r_n,$$

$$f(t,u) \leqslant \bar{h_n'}(t), \text{ pour } t \in [\gamma_0, 1], 0 \leqslant \gamma_0 u \leqslant r_n,$$

Et

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\gamma_0}\int_0^1 G(t,s)h_n'(s)ds + \max_{0\leqslant t\leqslant\gamma_0}\int_0^1 G(t,s)\bar{h}_n'(s)ds \leqslant r_n,$$

où $\gamma_0 = \frac{2\alpha-2}{3\alpha-\beta-2}$. Alors problème (3.1) il y a nombreuses solutions positives sans fin.

3.3 Applications

Exemple 3.3.1 [Considérer le problème]

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{5}{2}} + u^2\left(\frac{1}{2}\sin t + 1\right) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = D_{0^+}^{\frac{3}{2}} u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Où $\alpha = \frac{5}{2}, \beta = \frac{3}{2}$,

$$f(t,u) = u^2\left(\frac{1}{2}\sin t + 1\right), \limsup_{u \to 0^+} \frac{f(t,u)}{u} = 0, \liminf_{u \to +\infty} \frac{f(t,u)}{u} = \infty$$

Pour $t \in [0,1]$ *.On voit cette condition* (H_1) *et la condition* (H_2) *sont vérifié. En appliquant le théorème (3.2.1), on conclut que le problème (3.9) a au moins une solution.*

Exemple 3.3.2 [considérer le problème]

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{7}{2}} + f(t,u) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = D_{0^+}^{\frac{5}{2}} u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Où $\alpha = \frac{7}{2}, \beta = \frac{5}{2}$,

$$f(t,u) = \begin{cases} \frac{t}{5} + 4u^2, (t,u) \in [0,1] \times [0,1], \\ \frac{t}{5} + u^2 + u + 2, (t,u) \in [0,1] \times (0,+\infty). \end{cases}$$

Prend $\gamma_0 = \frac{5}{6}$*, pour* $t \in \left[\frac{5}{6}, 1\right]$*, il est facile de voir que* (H_2) *et* (H_3) *vérifié. On Choisir* $R = \frac{1}{5}, v = 60$*, on peut vérifier que* $\gamma^{\alpha-1} v > R$ *et* (H_4)*,* (H_6) *sont vérifiés.Par Théorème (3.2.12), le problème (3.10) possède au moins trois solutions positives.*

Exemple 3.3.3 [Examiner le problème]

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{5}{2}} + a(t)g(u) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = D_{0^+}^{\frac{5}{2}} u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

$$a(t) = \begin{cases} \frac{t}{300}, t \in \left[0, \frac{5}{6}, \right] \\ \frac{719t}{60} - \frac{599}{60}, t \in \left[\frac{5}{6}, 1\right], \end{cases}$$

$$g(u) = \begin{cases} \frac{u}{6}, u \in \left[0, 8\gamma_0^{\frac{3}{2}}\right], \\ \frac{6}{u}, u \in \left[8_n\gamma_0^{\frac{3}{2}}, 8^n\right], \\ \frac{1080\gamma_0^{\frac{3}{2}}}{6(3\gamma_0^{\frac{3}{2}}-1)}(u - 8^n) + \frac{1}{6} \times 8^n, u \in \left[8^n, 3 \times 8^n\gamma_0^{\frac{3}{2}}\right], \\ 60u, u \in \left[3 \times 8^n\gamma_0^{\frac{3}{2}}, 3 \times 8^n\right], \\ \frac{540-4\gamma_0^{\frac{3}{2}}}{3(8\gamma_0^{\frac{3}{2}}-3)}(3 \times 8^n - u) + 180 \times 8^n, u \in \left[3 \times 8^n, \times 8^{n+1}\gamma_0^{\frac{3}{2}}\right], n = 1, 2, 3, ..., \end{cases}$$

$\gamma_0 = \frac{5}{6}, f(t, u) = a(t)g(t)$.

Ensemble $r_n = 8^n, R_n = 3 \times 8^n, n = 1, 2, ...$ *Alors*

$$0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < ... < r_n < R_n < ...,$$

Et $\frac{1}{\gamma_0^{\alpha-1}} r_n < R_n < r_{n+1}\gamma_0^{\alpha_1}$*,* $n = 1, 2, ...$ *Il est évident que (*H_7*) et (*H_8*) sont vérifiés. Ainsi par le théorème (3.2.13). le problème (3.10) a une infinité de solutions positives.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] *A. A. KILBAS, H. M. SRIVASTAVA, J. J. TRUJILLO, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, in : North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006.*

[2] *A.A.Kilbas and S.A.Marzan,Nonlinear di erential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuosly di erentiable functions, Di er .Equ. 41 ;8489(2005).*

[3] *A. BABAKHANI, V. D. GEJJI, Existence of positive solutions of nonlinear fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 278 (2003) 434–442.*

[4] *B. AHMAD, S. SIVASUNDARAM, Existence and uniqueness results for nonlinear boundary value problems of fractional differential equations with separated boundary conditions, Commun. Appl. Anal. 13 (2009) 121–228.*

[5] *C. BAI, J. FANG, The existence of a positive solution for a singular coupled system of nonlinear fractional dierential equations, Appl. Math. Comput. 150 (2004) 611–621.*

[6] *C. F. LI, X. N. LUO, Y. ZHOU, Existence of positive solution of the boundary value problem for nonlinear fractional differential equations, Comput and Math Appl. 59 (2010) 1363–1375.*

[7] *D. JIANG, C. YUAN, The properties of the Green function for Dirichlet-type boundary value problem of a nonlinear fractional differential equations and its application, Nonlinear Anal. 72 (2010) 710–719.*

[8] *Dugundji and A. Granas : Fixed Point Theory, Springer, New York, (2003).*

[9] *E. KAUFMANN, E. MBOUMI, Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2008 (2008), No. 3, 1–11.*

[10] *Haïm Brezis. Analyse fonctionnelle. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].*

[11] *H. M. SRIVASTAVA, S. OWA, K. NISHIMOTO, Some fractional differintegral equations, J. Math. Anal. Appl. 106 (1985) 360–366.*

[12] *H. M. SRIVASTAVA,R. K. SAXENA, Operators of fractional integration and their applications, Appl. Math. Comput. 118 (2001) 1–52.*

[13] *I. PODLUBNY, Fractional Differential Equations, in : Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, New Tork, London, Toronto, 1999.*

[14] *J. Weissinger. Zur theorie und anwendung des iterations verfahrens. Math. Nachr 8,193–212 (1952).*

[15] *K. Yosida, Functional Analysis, Spring-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.*

[16] *Laurent Schwartz.Topologier générale et analyse fonctionnelle (Analyse), 1993*

[17] *M. A. KRASNOSELSKII, Positive Solutions of Operator Equations, Groningen, Netherlands, 1964.*

[18] *O. P. AGRAWAL, Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems, J. Math. Anal. Appl. 272 (2002) 368–379.*

[19] *R. R. Akhmerov, M. I. Kamenski, A. S. Patapov, A. E. Rodkina and B. N. Sadovski, Measure of noncompactness and condensing operators, (Translated from the 1986 Russian original by A. Iacop), Operator theory : advances and applications 55, BirhhauserVerlag, Basel, 1992.*

[20] *R .Goreno and F .Mainardi : Fractional Calculus :Integral and Di erential Equations of Fractional Order , Springer verlag, Wien,1997, pp.223-276.*

[21] *R. P. AGARWAL, M. BENCHOHRA, S. HAMANI, Boundary value problem for fractional differential equations, Adv. Stud. Contemp. Math. 16 (2) (2008) 181–196.*

[22] *S. G. SAMKO, A. A. KILBAS, O. I. MARICHEV, Fractional Integral And Derivatives (Theory and Applications), Gordon and Breach, Switzerland, 1993.*

[23] *S. H. LIANG, J. H. ZHANG, Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, Nonlinear Anal. 71 (2009) 5545–5550.*

[24] V. LAKSHMIKANTHAM, A. S. VATSALA, *General uniqueness and monotone iterative or fractional differential equations, Appl. Math. Lett. 21 (2008) 828–834.*

[25] V. LAKSHMIKANTHAM, A. S. VATSALA, *Basic theory of fractional dierential equations, Nonlinear Anal. TMA. 69 (2008) 2677–2682.*

[26] Z. B. BAI, H. S. LU, *Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005) 495–505.*