



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH  
جامعة عباس لغرور خنشلة  
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série : .....

## Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**  
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

### La stabilité de type Ulam d'une équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire

Réalisé par : **LAICHE Amira**  
**BENACHI Khadidja**

Dirigé par : **Dr. AOUAFI Rabiaa**

Présenté le **13/09/2020**

Membres de jury :

<b>Mme. LAOUAR Chafia</b>	<b>Grade</b>	<b>Président</b>
<b>Mme. HAKKAR Naaima</b>	<b>Grade</b>	<b>Examineur</b>

2019-2020

# Dédicaces

*Nous dédions ce modeste travail :*

*A le père cher.*

*A la mère chère.*

*A les frères et sœurs.*

*A tous la famille.*

*A tous les amis.*

# Remerciements

*On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination. Ces cinq années de formation nous ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple. Ce parcours, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent de longues heures de travail. En premier lieu, nous remercions **Allah** qui nous avoir donné le courage et la volonté afin d'accomplir ce modeste travail.*

*Nos plus vifs remerciements vont aussi à l'encadreur en ce travail Dr. **AOUAFI Rabiaa** pour son aide continue, ses précieux conseils et être patient avec nous .Nous remercions aussi les membres du jury Mme. **Ch. LAOUAR** et Mme. **N. HAKKAR** pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.*

*Nous remercions à tous les enseignants du département mathématique pour toute l'aide apportée à nous durant notre trajet scolaire. Nous remercions les parents généreux, les frères et les sœurs pour leur soutien et leur encouragement à atteindre les plus hauts rangs. Enfin, nous adressons nos remerciements à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.*

## Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'étudier certaines structures de stabilité d'équations différentielles non linéaires de grades fractionnaires.

**Mots clés :** Stabilité de la solution, Dérivée fractionnaire

## Abstract

The main objective of this work is to study some of the stability patterns of nonlinear differential equations of fractional grade.

**Key Words :** Stability of the solution, Fractional derivative

## المخلص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو دراسة بعض اشكال الاستقرار من نوع Ulam

لمعادلات تفاضلية ذات مشتقات كسرية غير خطية

الكلمات المفتاحية: استقرار الحل ، مشتق كسري

# Table des matières

Introduction générale	6
<b>1 Préliminaires</b>	<b>11</b>
1.1 Notions de base . . . . .	11
1.2 Fonctions spéciales . . . . .	12
1.2.1 La fonction de Gamma . . . . .	12
1.2.2 La fonction Bêta . . . . .	15
1.2.3 La fonction Mittag-Leffler . . . . .	16
1.3 Lemme de Gronwall . . . . .	18
1.4 Théorème de point fixe de Banach . . . . .	19
<b>2 Calcul Fractionnaire et Stabilité de type Ulam</b>	<b>20</b>
2.1 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville . . . . .	20
2.2 Dérivées fractionnaire . . . . .	22
2.2.1 Dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .	22
2.2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo . . . . .	27
2.2.3 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Rieman-Liouville . . . . .	30
2.3 Stabilité de type Ulam . . . . .	31
2.3.1 Stabilité au sens de Ulam-Hyers . . . . .	32
2.3.2 Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée . . . . .	32

2.3.3	Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias . . . . .	32
2.3.4	Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Existence et Stabilité de type Ulam d'un problème aux limites fractionnaire</b>	<b>34</b>
3.1	Résultats d'existence . . . . .	34
3.2	Stabilité de type Ulam d'une equation fractionnaire . . . . .	40
3.3	Résultats de stabilité de type Ulam . . . . .	42
3.4	Exemples . . . . .	44
<b>A</b>	<b>Certains mathématiciens intéressés</b>	
	<b>par l'analyse fractionnaire</b>	<b>47</b>
A.1	Georg Friedrich Bernhard Riemann . . . . .	47
A.2	Donald Holmes Hyers . . . . .	48
A.3	Stanisław Marcin Ulam . . . . .	49
A.4	Themistocles M. Rassias . . . . .	50
	<b>Bibliographie</b>	<b>51</b>

# Notation

$\mathbb{R}_+^*$  : Ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{N}$  : Ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{C}$  : Ensemble des nombres complexes

$R(\alpha)$  : La partie réelle du nombre complexe  $\alpha$ .

$Im(\alpha)$  : La partie imaginaire du nombre complexe  $\alpha$ .

$(a, b)$  : l'intervalle ouvert.

$C([a, b])$  : Espace de fonctions continues sur  $[a, b]$ .

$C^n([a, b], R)$  : Espace des fonctions  $n$  fois continument différentiables.

$AC([a, b])$  : Espace de fonctions absolument continues sur  $[a, b]$ .

$AC^n([a, b])$  : Espace de fonctions  $(n - 1)$ -fois continument dérivables sur  $[a, b]$  telles que  $x^{(n-1)} \in$

$AC([a, b])$ .

$L^p([a, b])$  : L'espace des fonctions de puissance  $p$ -ième intégrable sur  $[a, b]$ .

$[.]$  : Partie entière d'un nombre réel.

$\Gamma(\alpha)$  : Fonction Gamma.

$B(\alpha, \beta)$  : Fonction Beta.

$E_{\alpha, \beta}(t)$  : Fonction de Mittag-Leffler.

$I_{a+}^{\alpha}$  : Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha$ .

$I_{b-}^{\alpha}$  : Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha$ .

$D_{a+}^{\alpha}$  : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha$ .

$D_{b+}^{\alpha}$  : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha$ .

${}^C D_{a+}^{\alpha}$  : Dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre  $\alpha$ .

${}^C D_{b-}^{\alpha}$  : Dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre  $\alpha$ .

# Introduction

**L**e calcul fractionnaire généralise la dérivée et l'intégrale d'une fonction à l'ordre non-entier. Plusieurs définitions ont été introduites par Caputo, Riemann-Liouville et d'autres. Pour plus de détails, les auteurs intéressés ont conseillé de consulter par exemple [12, 21, 29].

Dans ce travail, nous avons concentrés sur la fonction Mittag-Leffler, l'un des plus importants fonctions spéciales utilisées en calcul fractionnaire. Son importance est réalisée lors des quinze dernières années en raison de son implication directe dans les problèmes de la physique, biologie, ingénierie et sciences appliquées. Diverses propriétés des fonctions de Mittag-Leffler sont décrites dans [2, 6, 15, 17].

Récemment, le calcul fractionnaire a été introduit dans l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaire, (voir par exemple [24, 28] ) et de nombreux problèmes ont été étudiés à ce sujet. Voir [7, 19, 18, 31], où certains résultats fondamentaux ont été obtenus. La stabilité des systèmes non linéaires a fait l'objet d'une attention accrue en raison de son importance rôle dans les domaines de la science et de l'ingénierie. Un grand nombre de monographies et d'articles sont consacrés aux systèmes non linéaires fractionnaires [4, 22, 23, 30].

La stabilité des équations fonctionnelles a été soulevée par Ulam en 1940 dans un discours prononcé à l'Université du Wisconsin ([2], [27]). Le problème posé par Ulam était le suivant :

Soit  $G_1$  un groupe et soit  $G_2$  un groupe métrique muni de la distance  $d(.,.)$ . Pour  $\varepsilon > 0$  donné, existe-t-il un  $\delta > 0$  tel que si une fonction  $h : G_1 \rightarrow G_2$  satisfait l'intégrale :

$$d(h(ts), h(t)h(s)) < \delta$$

pour tout  $t, s \in G_1$ , alors il existe un homomorphisme  $H : G_1 \rightarrow G_2$  tel que :

$$d(h(t), H(t)) < \varepsilon, \quad \forall t \in G_1?$$

La première réponse à la question d'Ulam a été donnée par Hyers en 1941 pour le cas où  $G_1$  et  $G_2$  sont des espaces de Banach, voir [6].

Par la suite, ce type de stabilité est appelée la stabilité au sens d'Ulam-Hyers. En 1978, Rassias a fourni une généralisation remarquable de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers. Une attention considérable a été accordée à l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et au sens d'Ulam-Hyers-Rassias d'équations différentielles, pour plus de détails voir ([7], [8]).

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on introduit les outils nécessaires à la compréhension de ce manuscrit.

Puis dans le deuxième chapitre, on commence par une introduction générale à la théorie du calcul fractionnaire.

Le dernier chapitre est consacré à la notion de base de ce mémoire qui est la stabilité. Ainsi, dans ce chapitre on donne quatre types de stabilité d'Ulam-Hyers suivi d'une étude concernant la stabilité de problème suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \text{ pour tout } t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha < 1, \\ x(0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

cette étude contient des exemples illustratifs.

Enfin, une conclusion qui résume les principaux résultats obtenus dans ce travail.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Ce chapitre regroupe les outils mathématiques utilisés dans les autres chapitres, à savoir, les notions de bases, fonctions spéciales, lemme de Gronwall et enfin le fameux théorème de point fixe de Banach.

### 1.1 Notions de base

Dans cette partie, on donne quelques définitions essentielles dans ce mémoire.

**Définition 1.1.1** *On dit qu'un espace vectoriel normé et complet si toute suite de Cauchy est convergente dans cet espace.*

**Définition 1.1.2** *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.*

**Exemple 1.1.1** *L'espace des fonctions continues  $C([a, b], \mathbb{R})$  est un espace de Banach.*

**Définition 1.1.3** *Soit  $X$  un espace de Banach et  $F : X \rightarrow X$ . On dit que  $x \in X$  est un point fixe de  $F$  si :*

$$F(x) = x.$$

#### Solution $\varepsilon$ -approchée

Soit l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

où  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie et continue sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $J = [0, T]$ .

Soit  $y = (y_1, \dots, y_n)$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ , la norme euclidienne de  $y$  est définie par :

$$\|y\| = \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Définition 1.1.4** *On appelle solution  $\varepsilon$ -approchée de l'équation différentielle précédente, une application  $x \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$  continue par morceaux et telle que :*

*Pour tout  $t \in J$ ,  $(t, x(t))$  appartient au domaine de définition de  $f$ .*

$$\|x'(t) - f(t, x(t))\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in J.$$

**Exemple 1.1.2** *Construire une solution consiste à partir d'un point avec un vecteur tangent et puis à suivre le champ de vecteurs en construisant une courbe constamment tangente à ce champ ; si dans cette construction on tolère une "différence" de  $\varepsilon$  entre le vecteur tangent et le vecteur du champ on obtient une solution  $\varepsilon$ -approchée.*

## 1.2 Fonctions spéciales

On a besoin de présenter des fonctions qui jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire et qui permettent en général de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma d'Euler, la fonction Bêta et de la fonction de Mittag-Leffler.

### 1.2.1 La fonction de Gamma

Au cours des années 1729 et 1730, Euler introduit une fonction analytique qui a la propriété d'interpoler la factorielle lorsque l'argument de la fonction est un entier. Dans une lettre du 8 janvier 1730 à Christian Goldbach, il proposa la définition suivante :

**Définition 1.2.1** *La fonction de Gamma est définie sur le demi-plan  $\{\alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que } R(\alpha) > 0\}$*

*par*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (1.1)$$

L'allure de la fonction gamma est donnée par la figure (1.1)

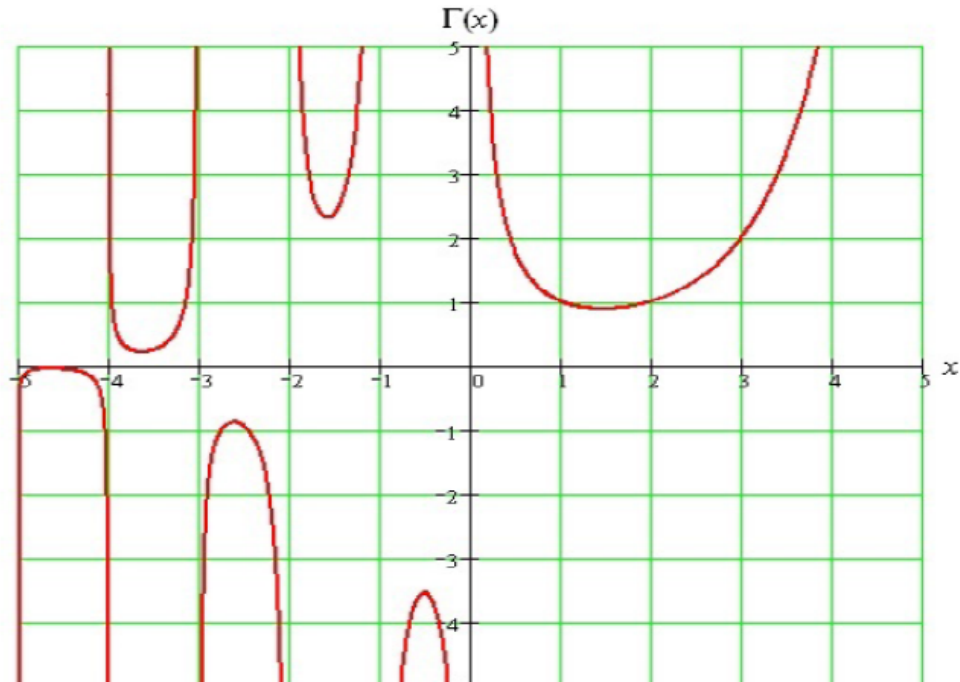


FIGURE 1.1 – La fonction Gamma

**Lemme 1.2.1** *La fonction  $\Gamma$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  (respectivement holomorphe sur le demi-plan  $\{\alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que } R(\alpha) > 0\}$ ) et  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$  (resp.  $\mathbb{C}$  tel que  $R(\alpha) > 0$ ),*

$$\Gamma^{(k)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (1.2)$$

### Propriétés de la fonction gamma

L'une des propriétés de base de la fonction gamma est qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle suivante [22] :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad (1.3)$$

ce qui peut être facilement prouvé en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \\ &= \left[ -t^\alpha e^{-t} \right]_{t=0}^{t=\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= \alpha \Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

Évidemment,  $\Gamma(1) = 1$ , et en utilisant (1.3) on obtient pour  $z = 1, 2, 3, \dots$  :

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ &\dots \dots \dots \dots, \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.\end{aligned}$$

Une autre propriété important de la fonction gamma est qu'elle a des pôles simples aux points  $\alpha = -n, (n = 0, 1, 2, \dots)$ . Nous pouvons écrire la définition (1.1) sous la forme

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \quad (1.4)$$

On donne quelques valeurs particulières de  $\Gamma(\alpha)$ . Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , le changement de variables  $t = u^2$  donne :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \quad (1.5)$$

L'équation fonctionnelle (1.3) entraîne pour les entiers relatifs positifs  $n$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \\ \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right). \\ \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9\dots(4n-3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

Et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5.7\dots(2n-1)} \sqrt{\pi}.$$

Aucune expression de base est connue pour  $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$  ou  $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ , mais il a été prouvé que ces chiffres sont transcendantales (respectivement par Liouville en 1840 et Chudnovsky en 1984).

Jusqu'à 50 chiffres, les valeurs numériques de certaines de ces constantes sont :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 1; 77245385090551602729816748334114518279754945612238\dots \\ \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) &= 2; 67893853470774763365569294097467764412868937795730\dots \\ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) &= 3; 62560990822190831193068515586767200299516768288006\dots\end{aligned}$$

### 1.2.2 La fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction dite bêta au lieu d'une certaine combinaison de valeurs de la fonction gamma. La fonction bêta est généralement définie par

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau, \quad (R(\alpha) > 0, R(\beta) > 0). \quad (1.6)$$

Pour établir la relation entre la fonction Gamma définie par (1.1) et la fonction bêta (1.6), nous utilisons la transformée de Laplace.

Considérons l'intégrale suivante :

$$h_{\alpha, \beta}(t) = \int_0^t \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau, \quad (1.7)$$

De toute évidence,  $h_{\alpha, \beta}(t)$  est une convolution des fonctions  $t^{\alpha-1}$  et  $t^{\beta-1}$  et

$$h_{\alpha, \beta}(1) = B(\alpha, \beta).$$

Parce que la transformée de Laplace d'une convolution de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Laplace, on obtient :

$$H_{\alpha, \beta}(s) = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{s^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{s^{\alpha+\beta}}, \quad (1.8)$$

où  $H_{\alpha, \beta}(s)$  est la transformée de Laplace de la fonction  $h_{\alpha, \beta}(t)$ . D'autre part, puisque  $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$  est une constante, il est possible de restaurer fonction originale  $h_{\alpha, \beta}(t)$  par la transformée inverse

de Laplace du côté droit de (1.8). En raison de l'unicité de la transformation de Laplace, nous obtenons donc :

$$h_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1}, \quad (1.9)$$

et en prenant  $t = 1$  on obtient l'expression suivante pour la fonction bêta :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (1.10)$$

d'où il suit que

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha). \quad (1.11)$$

La définition de la fonction bêta (1.6) n'est valide que pour ( $R(\alpha) > 0$ ,  $R(\beta) > 0$ ). La relation (1.10) fournit la continuation analytique de la fonction bêta pour l'ensemble du plan complexe, si nous avons fonction gamma continuellement analytique.

Avec l'aide de la fonction bêta, nous pouvons établir la relation importante suivante pour la fonction gamma, cette relation est :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}. \quad (1.12)$$

### 1.2.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler joue un rôle très important. Cette importance est réalisée au cours des dix-huit dernières années en raison de son implication directe dans les problèmes de la physique, de la biologie, de l'ingénierie et des sciences appliquées. La fonction de Mittag-Leffler se produit naturellement comme la solution des équations différentielles d'ordre fractionnaire et des équations intégrales d'ordre fractionnaire.

#### Définition et relation avec d'autres fonctions

La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 (voir [14]) et désignée par la fonction suivante :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (z \in \mathbb{C}, \quad R(\alpha) > 0). \quad (1.13)$$

La fonction à deux paramètres du type Mittag-Leffler a en effet été introduite par Agarwal, elle est définie par un développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (z \in \mathbb{C}, \quad R(\alpha) > 0). \quad (1.14)$$

Quand  $\beta = 1$ ,  $E_{\alpha,\beta}(z)$  coïncide avec la fonction de Mittag-Leffler (1.13) :

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z), \quad (z \in \mathbb{C}, \quad R(\alpha) > 0).$$

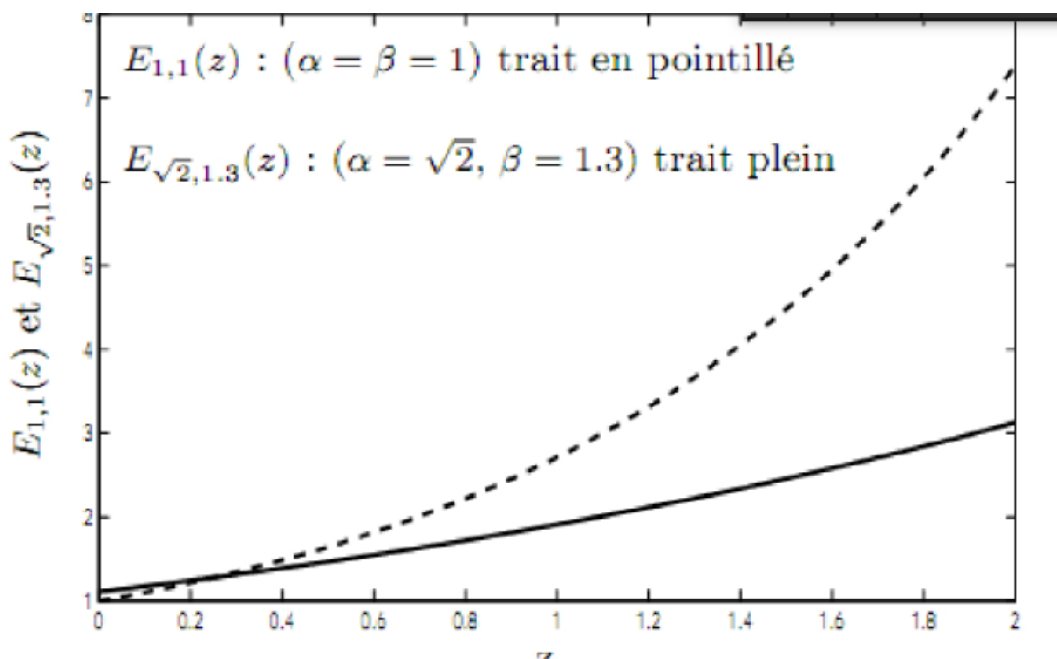


FIGURE 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

Il résulte de la définition (1.14) que :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (1.15)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}. \quad (1.16)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad (1.17)$$

et en général

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right\}. \quad (1.18)$$

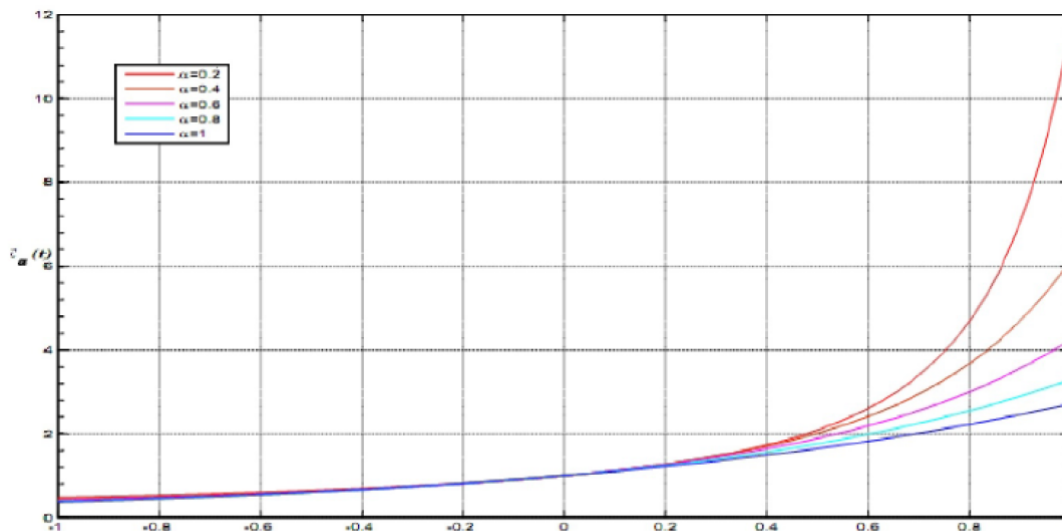


FIGURE 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

### Dérivées de la fonction de Mittag-Leffler

Quand  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , les formules de différenciation suivantes sont valables pour la fonction

$E_n(\lambda z^n)$  :

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_n(\lambda z^n) = \lambda E_n(\lambda z^n), \quad (n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}) \quad (1.19)$$

et

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[ z^{n-1} E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right) \right] = \frac{(-1)^n \lambda}{z^{n+1}} E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right), \quad (z \neq 0, n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}). \quad (1.20)$$

Comme la fonction  $E_\alpha(z)$  de Mittag-Leffler,  $E_{\alpha,\beta}(z)$  est une fonction entière de  $z$  et satisfait les formules de différenciation suivantes généralisant celles de (1.19) et (1.20) :

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[ z^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda z^n) \right] = z^{\beta-n-1} E_{n,\beta-n}(\lambda z^n), \quad (n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}) \quad (1.21)$$

et

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[ z^{n-\beta} E_{n,\beta}\left(\frac{\lambda}{z^n}\right) \right] = \frac{(-1)^n \lambda}{z^{n+\beta}} E_{n,\beta}\left(\frac{\lambda}{z^n}\right), \quad (z \neq 0, n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}). \quad (1.22)$$

### 1.3 Lemme de Gronwall

Dans cette section, on présente une généralisation du lemme de Gronwall. Ce lemme nous sera d'une aide précieuse dans l'étude de stabilité.

**Lemme 1.3.1** Soient  $v : [0, T] \rightarrow [0, +\infty)$  une fonction réelle et  $w(t)$  une fonction non négative, localement intégrable sur  $[0, T]$ . Supposons qu'ils existent des constantes  $a > 0$  et  $0 < \alpha \leq 1$  telles que :

$$v(t) \leq w(t) + a \int_0^t (t-s)^{-\alpha} v(s) ds.$$

Alors, il existe une constante  $K = K(\alpha)$  telle que :

$$v(t) \leq w(t) + Ka \int_0^t (t-s)^{-\alpha} v(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

## 1.4 Théorème de point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de Banach, ou théorème de contraction de Banach, a une grande importance dans ce mémoire, il est utilisé pour démontrer l'existence et l'unicité de solution d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire sous certaines conditions, mais il est aussi primordial dans la notion de stabilité qu'on présentera dans le dernier chapitre.

**Théorème 1.4.1** Soient  $X$  un espace de Banach et  $F : X \rightarrow X$  une contraction, c'est-à-dire, il existe  $0 \leq k < 1$  tel que :

$$\forall x, y \in X : \|F(x) - F(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

## Chapitre 2

# Calcul Fractionnaire et Stabilité de type Ulam

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaire pour le développement des chapitres qui suivent, tout en rappelant les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire, et d'établir quelques type de stabilité d'Ulam.

### 2.1 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

Le calcul fractionnaire est un nom pour la théorie des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire, qui unifie et généralise les notions de différenciation d'ordre entier et d'intégration  $n$  fois. Dans cette section, plusieurs approches de la généralisation de la notion de différenciation et d'intégration sont considérées. Le choix a été réduit à ces définitions qui sont liées aux applications.

**Définition 2.1.1** Soit  $\Omega = [a, b]$  ( $-\infty < a < b < +\infty$ ). Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville  $I_{a+}^{\alpha}x$  et  $I_{b-}^{\alpha}x$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $R(\alpha) > 0$ ) sont définies par :

$$(I_{a+}^{\alpha}x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad (t > a; \quad R(\alpha) > 0) \quad (2.1)$$

et

$$(I_{b-}^{\alpha}x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad (t < b; \quad R(\alpha) > 0), \quad (2.2)$$

respectivement. Ici,  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma (1.1). Ces intégrales sont appelées intégrales fractionnaires à gauche et à droite.

Lorsque  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , les définitions (2.1) et (2.2) coïncident avec les  $n$ -ièmes intégrales de la forme :

$$\begin{aligned} \left(I_{a+}^{(n)}x\right)(t) &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} ds_3 \dots \int_a^{s_{n-1}} x(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} x(s) ds, \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

et

$$\begin{aligned} \left(I_{b-}^{(n)}x\right)(t) &= \int_t^b ds_1 \int_{s_1}^b ds_2 \int_{s_2}^b ds_3 \dots \int_{s_{n-1}}^b x(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (s-t)^{n-1} x(s) ds, \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

### L'intégrale fractionnaire de la fonction $(t-a)^{\beta-1}$

On peut vérifier directement que les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville (2.1) et (2.2) des fonctions de puissance  $(t-a)^{\beta-1}$  et  $(b-t)^{\beta-1}$  donnent des fonctions de puissance de même forme.

**Propriété 2.1.1** Si  $R(\alpha) > 0$  et  $\beta \in \mathbb{C}$ ,  $R(\beta) > 0$ , alors :

$$\left(I_{a+}^{\alpha} (s-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} \quad (2.5)$$

et

$$\left(I_{b-}^{\alpha} (b-s)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}. \quad (2.6)$$

La propriété de semi-groupe des opérateurs d'intégration fractionnaires  $I_{a+}^{\alpha}$  et  $I_{b-}^{\alpha}$  est donnée par le résultat suivant.

**Lemme 2.1.1** Si  $R(\alpha) > 0$  et  $R(\beta) > 0$  alors les équations

$$\left(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} x\right)(t) = \left(I_{a+}^{\alpha+\beta} x\right)(t), \quad \text{et} \quad \left(I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} x\right)(t) = \left(I_{b-}^{\alpha+\beta} x\right)(t), \quad (2.7)$$

sont satisfaites pour presque tous les points  $t \in [a, b]$  pour  $x(t) \in L^p([a, b])$ , ( $1 \leq p \leq \infty$ ). Si  $\alpha + \beta > 1$ , alors les relations dans (2.7) sont valables pour tout point de  $[a, b]$ .

### Intégrales fractionnaires de la fonction de Mittag-Leffler

En intégrant (1.14) terme à terme, on obtient :

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha), \quad \beta > 0. \quad (2.8)$$

La relation (2.8) est un cas particulier de la relation plus générale suivante obtenue par l'intégration fractionnaire terme à terme de la série (1.14) :

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^z (z-t)^v E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = z^{\beta+v-1} E_{\alpha,\beta+v}(\lambda z^\alpha), \quad (\beta > 0, v > 0). \quad (2.9)$$

De (2.9) et les formules (1.15), (1.19) et (1.20), on obtient :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^\alpha e^{\lambda t} dt = z^\alpha E_{1,\alpha+1}(\lambda z), \quad (\alpha > 0). \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^\alpha \cosh(\sqrt{\lambda t}) dt = z^\alpha E_{2,\alpha+1}(\lambda z^2), \quad (\alpha > 0). \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^\alpha \frac{(\sqrt{\lambda t})}{\sqrt{\lambda t}} dt = z^{\alpha+1} E_{2,\alpha+2}(\lambda z^2), \quad (\alpha > 0). \quad (2.12)$$

## 2.2 Dérivées fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

### 2.2.1 Dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville

**Définition 2.2.1** Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville gauche  $(D_{a+}^\alpha x)$  et à droite  $(D_{b-}^\alpha x)$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $R(\alpha) > 0$ ) d'une fonction intégrable  $x$  sont définies par :

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha x)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[ (I_{a+}^{n-\alpha} x)(t) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} x(s) ds, \end{aligned} \quad (2.13)$$

et

$$(D_{b-}^\alpha x)(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \left[ (I_{b-}^{n-\alpha} x)(t) \right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} x(s) ds, \quad (2.14)$$

où  $n = [R(\alpha) + 1]$ ,  $[R(\alpha)]$  désigne la partie entière du nombre réel  $R(\alpha)$ .

En particulier, quand  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\left( D_{a+}^0 x \right) (t) = \left( D_{b-}^0 x \right) (t) = x(t), \quad \left( D_{a+}^n x \right) (t) = x^{(n)}(t) \quad \text{et} \quad \left( D_{b-}^n x \right) (t) = (-1)^n x^{(n)}(t), \quad (2.15)$$

où  $x^{(n)}(t)$  est la dérivée habituelle de  $x(t)$  d'ordre  $n$ . Si  $R(\alpha) = 0$  ( $\alpha \neq 0$ ), alors (2.16) et (2.17)

donnent les dérivées fractionnaires d'ordre purement imaginaire :

$$\left( D_{a+}^{i\theta} x \right) (t) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^{i\theta}} \quad (\theta \in \mathbb{R}, \quad t > a), \quad (2.16)$$

$$\left( D_{b-}^{i\theta} x \right) (t) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{x(s) ds}{(s-t)^{i\theta}} \quad (\theta \in \mathbb{R}, \quad t < b). \quad (2.17)$$

### Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

On peut vérifier directement que les opérateurs de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville (2.13) et (2.14) des fonctions de puissance  $(t-a)^{\beta-1}$  et  $(b-t)^{\beta-1}$  donnent des fonctions de puissance de même forme.

**Propriété 2.2.1** Si  $R(\alpha) \geq 0$  et  $\beta \in \mathbb{C}$  ( $R(\beta) > 0$ ), alors

$$\left( D_{a+}^\alpha (s-a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (2.18)$$

et

$$\left( D_{b-}^\alpha (b-s)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}. \quad (2.19)$$

En particulier, si  $\beta = 1$  et  $R(\alpha) \geq 0$ , alors les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'une constante ne sont général pas égal à zéro :

$$\left( D_{a+}^\alpha 1 \right) (t) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \left( D_{b-}^\alpha 1 \right) (t) = \frac{(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (0 < R(\alpha) < 1). \quad (2.20)$$

D'autre part, pour  $j = 1, 2, \dots, [R(\alpha)] + 1$ ,

$$\left( D_{a+}^\alpha (s-a)^{\alpha-j} \right) (t) = 0, \quad \left( D_{b-}^\alpha (b-s)^{\alpha-j} \right) (t) = 0. \quad (2.21)$$

De (2.21) nous déduisons le résultat suivant.

**Corollaire 2.2.1** Soit  $R(\alpha) > 0$  et  $n = [R(\alpha)] + 1$ .

a) L'égalité  $D_{a+}^{\alpha} x(t) = 0$  est valide si et seulement si,

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i (t-a)^{\alpha-i}, \quad (2.22)$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$  sont des constantes arbitraires.

b) L'égalité  $D_{b-}^{\alpha} x(t) = 0$  est valide si et seulement si,

$$x(t) = \sum_{i=1}^n d_i (b-t)^{\alpha-i}, \quad (2.23)$$

où  $d_i \in \mathbb{R}$  sont des constantes arbitraires.

### Composition avec les intégrales fractionnaires

**Lemme 2.2.1** Si  $R(\alpha) > 0$  et  $x(t) \in L^p([a, b])$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), alors :

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} x)(t) = x(t) \quad \text{et} \quad (D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} x)(t) = x(t), \quad (2.24)$$

presque partout dans  $[a, b]$ . Ce qui signifie que l'opérateur de différenciation fractionnaire de Riemann-Liouville est à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville du même ordre  $\alpha$ .

**Propriété 2.2.2** Si  $R(\alpha) > R(\beta) > 0$ , alors, pour  $x(t) \in L^p([a, b])$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ),

$$\left( D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} x \right) (t) = \left( I_{a+}^{\alpha-\beta} x \right) (t) \quad \text{et} \quad \left( D_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} x \right) (t) = \left( I_{b-}^{\alpha-\beta} x \right) (t). \quad (2.25)$$

En particulier, quand  $\beta = k \in \mathbb{N}$  et  $R(\alpha) > k$ , alors :

$$\left( D^k I_{a+}^{\alpha} x \right) (t) = \left( I_{a+}^{\alpha-k} x \right) (t) \quad \text{et} \quad \left( D^k I_{b-}^{\alpha} x \right) (t) = (-1)^k \left( I_{b-}^{\alpha-k} x \right) (t). \quad (2.26)$$

Pour présenter la propriété suivante, nous utilisons les espaces de fonctions  $I_{a+}^{\alpha}(L^p)$  et  $I_{b-}^{\alpha}(L^p)$  définis pour  $R(\alpha) > 0$  et  $1 \leq p \leq \infty$  par :

$$I_{a+}^{\alpha}(L^p) := \{x : x = I_{a+}^{\alpha} \varphi, \quad \varphi \in L^p(a, b)\} \quad (2.27)$$

et

$$I_{b-}^{\alpha}(L^p) := \{x : x = I_{b-}^{\alpha} \phi, \quad \phi \in L^p(a, b)\}, \quad (2.28)$$

respectivement. La comparaison d'opérateur d'intégration fractionnaire  $I_{a+}^{\alpha}$  avec l'opérateur de différenciation fractionnaire  $D_{a+}^{\alpha}$  est donnée par le résultat suivant.

**Lemme 2.2.2** *Soient  $R(\alpha) > 0$ ,  $n = [R(\alpha)] + 1$  et soit  $(I_{a+}^{n-\alpha}x)(t)$  l'intégrale fractionnaire d'ordre  $n - \alpha$ .*

a) *Si  $1 \leq p \leq \infty$  et  $x(t) \in I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ , alors*

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}x)(t) = x(t). \quad (2.29)$$

b) *Si  $x(t) \in L^1(a, b)$  et  $(I_{a+}^{n-\alpha}x)(t) \in AC^n[a, b]$ , alors l'égalité*

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}x)(t) = x(t) - \sum_{j=1}^n \frac{(I_{a+}^{n-\alpha}x)^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (t - a)^{\alpha-j}, \quad (2.30)$$

*est vérifiée presque partout dans  $[a, b]$ .*

En particulier, si  $0 < R(\alpha) < 1$ , alors :

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}x)(t) = x(t) - \frac{(I_{a+}^{1-\alpha}x)(a)}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha-1}. \quad (2.31)$$

La propriété (2.30) est un cas particulier d'une propriété plus générale :

$$I_{a+}^{\alpha} \left( D_{a+}^{\beta}x(t) \right) = D_{a+}^{\beta-\alpha}x(t) - \sum_{j=1}^m \left[ D^{\beta-j}x(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}, \quad (0 \leq k-1 \leq \beta < k). \quad (2.32)$$

**Lemme 2.2.3** [5] *Pour  $\alpha > 0$ , soit  $x$ ,  $D^{\alpha}x \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$ , alors :*

$$I^{\alpha}D^{\alpha}x(t) = x(t) + c_1t^{\alpha-1} + c_2t^{\alpha-2} + \dots + c_nt^{\alpha-n}, \quad (2.33)$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  est le plus petit entier tel que  $n \geq \alpha$ ).

### Comparaison avec des dérivées d'ordre entier

La composition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec des dérivées d'ordre entier apparaît dans plusieurs problèmes appliqués.

**Propriété 2.2.3** *Soit  $R(\alpha) \geq 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $D = \frac{d}{dt}$ .*

a) Si les dérivées fractionnaires  $(D_{a+}^\alpha x)(t)$  et  $(D_{a+}^{\alpha+m} x)(t)$  existent, alors

$$(D^m D_{a+}^\alpha x)(t) = (D_{a+}^{\alpha+m} x)(t). \quad (2.34)$$

b) Si les dérivées fractionnaires  $(D_{b-}^\alpha x)(t)$  et  $(D_{b-}^{\alpha+m} x)(t)$  existent, alors

$$(D^m D_{b-}^\alpha x)(t) = (-1)^m (D_{b-}^{\alpha+m} x)(t) \quad (2.35)$$

et

$$D_{a+}^\alpha (D^m x(t)) = D_{a+}^{\alpha+m} x(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{x^{(j)}(a) (t-a)^{j-\alpha-k}}{\Gamma(j-\alpha-k+1)}. \quad (2.36)$$

### Comparaison avec des dérivées fractionnaires

**Propriété 2.2.4** soit  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tel que :  $n-1 < \alpha < n$ ,  $m-1 < \beta < m$  ( $n, m \in \mathbb{N}$ ) et  $\alpha + \beta < n$ , et soit  $x \in L^1(a, b)$  et  $I_{a+}^{m-\alpha} x \in AC^m([a, b])$ . Alors nous avons :

$$(D_{a+}^\alpha D_{a+}^\beta x)(t) = (D_{a+}^{\alpha+\beta} x)(t) - \sum_{j=1}^m (D_{a+}^{\beta-j} x)(a) \frac{(t-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}. \quad (2.37)$$

**Remarque 2.2.1** En permutant  $\alpha$  et  $\beta$  (et donc  $m$  et  $n$ ), nous pouvons écrire :

$$D_{a+}^\beta (D_{a+}^\alpha x(t)) = D_{a+}^{\alpha+\beta} x(t) - \sum_{j=1}^n [D_{a+}^{\alpha-j} x(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)}. \quad (2.38)$$

Une comparaison des relations (2.37) et (2.38), montre que les des opérateurs de dérivations fractionnaires  $D_{a+}^\beta$ ,  $D_{a+}^\alpha$  ne commutent que si  $\alpha = \beta$  ou si les conditions suivantes sont vérifiées simultanément

$$[D_{a+}^{\alpha-j} x(t)]_{t=a} = 0, \quad (\forall j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.39)$$

et

$$[D_{a+}^{\beta-j} x(t)]_{t=a} = 0, \quad (\forall j = 1, 2, \dots, m). \quad (2.40)$$

### Dérivées fractionnaires de la fonction de Mittag-Leffler

Par la différenciation d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville  $D_{a+}^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{C}$ ) de la représentation en série (1.14) nous obtenons :

$$(D_{a+}^\alpha (s-a)^{\beta-1} E_{\mu,\beta}[\lambda(s-a)^\mu])(t) = (t-a)^{\beta-\alpha-1} E_{\mu,\beta-\alpha}[\lambda(t-a)^\mu], \quad (2.41)$$

avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $R(\alpha) > 0$ ,  $R(\beta) > 0$ , et  $R(\mu) > 0$ . Quand  $\beta = 1$ , et  $\mu = \alpha$ , alors :

$$(D_{a+}^{\alpha} E_{\alpha} [\lambda (s-a)^{\alpha}]) (t) = \lambda E_{\alpha} [\lambda (t-a)^{\alpha}], \quad (R(\alpha) > 0; \alpha \in \mathbb{C}). \quad (2.42)$$

### 2.2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

**Définition 2.2.2** Les dérivées fractionnaires  $({}^C D_{a+}^{\alpha} x)(t)$  et  $({}^C D_{b-}^{\alpha} x)(t)$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $R(\alpha) \geq 0$ ) sur  $[a, b]$  sont définies via les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (2.13) et (2.14) par :

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} x)(t) := \left( D_{a+}^{\alpha} \left[ x(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k \right] \right) (t) \quad (2.43)$$

et

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} x)(t) := \left( D_{b-}^{\alpha} \left[ x(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(b)}{k!} (b-s)^k \right] \right) (t), \quad (2.44)$$

respectivement, où

$$n = \alpha \text{ si } \alpha \in \mathbb{N} \text{ et } n = [R(\alpha)] + 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N}. \quad (2.45)$$

Ces dérivées sont appelées dérivées fractionnaires de Caputo à gauche et à droite d'ordre  $\alpha$ .

**Définition 2.2.3** Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$  et  $x(t)$  est une fonction pour laquelle existent les dérivées fractionnaires de Caputo  $({}^C D_{a+}^{\alpha} x)(t)$  et  $({}^C D_{b-}^{\alpha} x)(t)$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $R(\alpha) \geq 0$ ) ainsi que les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville  $(D_{a+}^{\alpha} x)(t)$  et  $(D_{b-}^{\alpha} x)(t)$ , alors :

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} x)(t) = (D_{a+}^{\alpha} x)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} \quad (n = [R(\alpha)] + 1) \quad (2.46)$$

et

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} x)(t) = (D_{b-}^{\alpha} x)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-t)^{k-\alpha} \quad (n = [R(\alpha)] + 1). \quad (2.47)$$

En particulier, lorsque  $0 < R(\alpha) < 1$ , les relations (2.44) et (2.45) prennent les formes suivantes :

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} x)(t) = (D_{a+}^{\alpha} x)(t) - \frac{x(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}, \quad (2.48)$$

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} x)(t) = (D_{b-}^{\alpha} x)(t) - \frac{x(b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-t)^{-\alpha}. \quad (2.49)$$

**Propriété 2.2.5** Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , alors les dérivées fractionnaires (2.43) et (2.44) coïncident avec les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (2.13) et (2.14) dans les cas suivants :

$$\left({}^C D_{a+}^\alpha x\right)(t) = (D_{a+}^\alpha x)(t), \quad (2.50)$$

si  $x(a) = x'(a) = \dots = x^{(n-1)}(a) = 0$  ( $n = [R(\alpha)] + 1$ ); et

$$\left({}^C D_{b-}^\alpha x\right)(t) = (D_{b-}^\alpha x)(t), \quad (2.51)$$

si  $x(b) = x'(b) = \dots = x^{(n-1)}(b) = 0$  ( $n = [R(\alpha)] + 1$ ).

Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  et la dérivée usuel  $x^{(n)}(t)$  d'ordre  $n$  existe, alors  $\left({}^C D_{a+}^\alpha x\right)(t)$  coïncide avec  $x^{(n)}(t)$ , tandis que  $\left({}^C D_{b-}^\alpha x\right)(t)$  coïncide avec  $x^{(n)}(t)$  avec l'exactitude au multiplicateur constant  $(-1)^n$  :

$$\left({}^C D_{a+}^n x\right)(t) = x^{(n)}(t), \quad \left({}^C D_{b-}^n x\right)(t) = (-1)^n x^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2.52)$$

Les dérivée fractionnaires de Caputo  $\left({}^C D_{a+}^\alpha x\right)(t)$  et  $\left({}^C D_{b-}^\alpha x\right)(t)$  sont définies pour les fonctions  $x(t)$  pour lesquelles les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville des côtés droit de (2.44) et (2.45) existent. En particulier, elles sont définies pour  $x(t)$  appartenant à l'espace  $AC^n([a, b])$  des fonctions absolument continues.

**Théorème 2.2.1** Soit  $R(\alpha) \geq 0$  et soit  $n$  donnée par (2.46). Si  $x \in AC^n([a, b])$ , alors les dérivées fractionnaires de Caputo  $\left({}^C D_{a+}^\alpha x\right)(t)$  et  $\left({}^C D_{b-}^\alpha x\right)(t)$  existent presque par tout sur  $[a, b]$ .

**a)** Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $\left({}^C D_{a+}^\alpha x\right)(t)$  et  $\left({}^C D_{b-}^\alpha x\right)(t)$  sont représentés par :

$$\left({}^C D_{a+}^\alpha x\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{x^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds = I_{a+}^{n-\alpha} D^n x(t) \quad (2.53)$$

et

$$\left({}^C D_{b-}^\alpha x\right)(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{x^{(n)}(s)}{(s-t)^{\alpha-n+1}} ds = (-1)^n I_{b-}^{n-\alpha} D^n x(t), \quad (2.54)$$

respectivement, où  $D = \frac{d}{dx}$  et  $n = [R(\alpha)] + 1$ . En particulier, quand  $0 < R(\alpha) < 1$  et  $x(t) \in AC([a, b])$ ,

$$\left({}^C D_{a+}^\alpha x\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{x'(s)}{(t-s)^\alpha} ds = \left(I_{a+}^{1-\alpha} x\right)(t) \quad (2.55)$$

et

$$\left({}^C D_{b-}^{\alpha} x\right)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^b \frac{x'(s)}{(s-t)^{\alpha}} ds = -\left(I_{b-}^{1-\alpha} x\right)(t). \quad (2.56)$$

b) Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors  $\left({}^C D_{a+}^{\alpha} x\right)(t)$  et  $\left({}^C D_{b+}^{\alpha} x\right)(t)$  sont représentés par (2.53). En particulier,

$$\left({}^C D_{a+}^0 x\right)(t) = \left({}^C D_{b-}^0 x\right)(t) = x(t). \quad (2.57)$$

**Remarque 2.2.2** La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \in ]m-1, m[$  s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre  $m$  suivit d'une dérivation classique d'ordre  $m$ , alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

### fractionnaires au sens de Caputo de quelques fonctions usuelles

**Propriété 2.2.6** Soit  $R(\alpha) > 0$ ,  $R(\beta) > 0$  et soit  $n$  donnée par (2.46). Alors :

$${}^C D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (R(\beta) > n), \quad (2.58)$$

$${}^C D_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1} \quad (R(\beta) > n) \quad (2.59)$$

et

$${}^C D_{a+}^{\alpha} (t-a)^k = 0 \text{ et } {}^C D_{b-}^{\alpha} (b-t)^k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2.60)$$

En particulier,

$${}^C D_{a+}^{\alpha} 1 = 0 \text{ et } {}^C D_{b-}^{\alpha} 1 = 0. \quad (2.61)$$

### Composition avec l'intégrale fractionnaire

**Lemme 2.2.4** [1] Soit  $R(\alpha) > 0$  et soit  $x(t) \in L^{\infty}(a, b)$  ou  $x(t) \in C(a, b)$ .

a) si  $R(\alpha) \notin \mathbb{N}$  ou  $\alpha \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} x\right)(t) = x(t) \quad \text{et} \quad \left({}^C D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} x\right)(t) = x(t). \quad (2.62)$$

b) Si  $R(\alpha) \in \mathbb{N}$  et  $Im(\alpha) \neq 0$ , alors :

$$\left({}^C D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha x\right)(t) = x(t) - \frac{\left(I_{a+}^\alpha\right)(a)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{n-\alpha}, \quad (2.63)$$

$$\left({}^C D_{b-}^\alpha I_{b-}^\alpha x\right)(t) = x(t) - \frac{\left(I_{b-}^\alpha\right)(b)}{\Gamma(n-\alpha)}(b-t)^{n-\alpha}. \quad (2.64)$$

**Lemme 2.2.5** [1] Soit  $R(\alpha) > 0$ , et soit  $n$  donnée par (2.46), si  $x(t) \in AC^n([a, b])$  ou  $x(t) \in C^n([a, b])$  alors :

$$\left(I_{a+}^{\alpha C} D_{a+}^\alpha x\right)(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \quad (2.65)$$

et

$$\left(I_{b-}^{\alpha C} D_{b-}^\alpha x\right)(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k. \quad (2.66)$$

En particulier, si  $0 < R(\alpha) \leq 1$  et  $x(t) \in AC([a, b])$  ou  $x(t) \in C([a, b])$ , alors :

$$\left(I_{a+}^{\alpha C} D_{a+}^\alpha x\right)(t) = x(t) - x(a), \quad \text{et} \quad \left(I_{b-}^{\alpha C} D_{b-}^\alpha x\right)(t) = x(t) - x(b). \quad (2.67)$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est l'inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

### Dérivée fractionnaire de la fonction de Mittag-Leffler

**Lemme 2.2.6** Si  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors

$${}^C D_{a+}^\alpha E_\alpha[\lambda(s-a)^\alpha](t) = \lambda E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha]. \quad (2.68)$$

### 2.2.3 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Rieman-Liouville

1\* L'avantage principale de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équation différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est-à-dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure  $x = a$ .

2\* Une autre différence entre la définition de Rieman celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Rieman-Liouville elle est

$$\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

3\* Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann- Liouville), c'est-à-dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  où  $m - 1 \leq \alpha \leq m$  par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre  $(m - \alpha)$  pour la fonction  $f(x)$  et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier  $m$ , mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  où  $m - 1 \leq \alpha \leq m$  par l'approche de Caputo commence par la dérivée d'ordre entier  $m$  de la fonction  $f(x)$  et puis on intègre d'ordre fractionnaire  $(m - \alpha)$ .

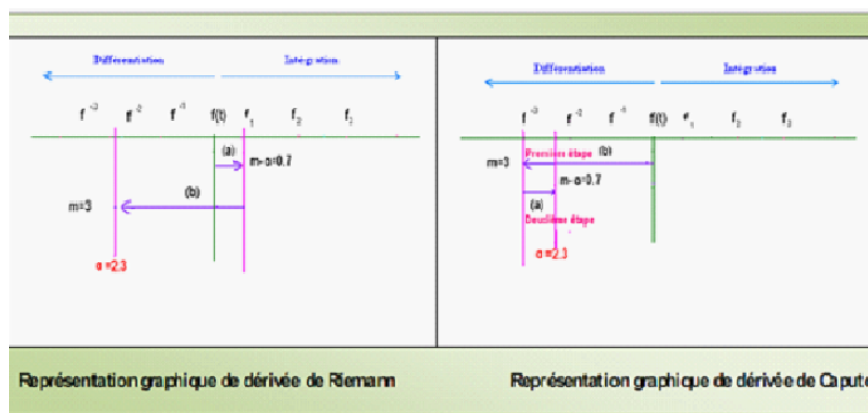


FIGURE 2.1 – Comparaison entre la dérivée fractionnaire de Caputo et Rieman-Liouville

### 2.3 Stabilité de type Ulam

La stabilité des équations différentielles fractionnaire de Ulam a quatre type, stabilité de Ulam-Hyers, stabilité de Ulam-Hyers généralisé, stabilité de Ulam-Hyers-Rassias et stabilité de Ulam-Hyers-Rassias généralisé.

### 2.3.1 Stabilité au sens de Ulam-Hyers

**Définition 2.3.1** *L'équation (1) est stable au sens de Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel  $c_f > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour chaque solution  $x \in C^1(J, \mathbb{R})$  de l'inégalité :*

$$\left| {}^C D^\alpha x(t) - f(t, x(t)) \right| \leq \varepsilon, \quad t \in J, \quad (2.69)$$

*il existe une solution  $y \in C^1(J, \mathbb{R})$  de l'équation (1) avec*

$$|x(t) - y(t)| \leq c_f \varepsilon, \quad t \in J. \quad (2.70)$$

### 2.3.2 Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée

**Définition 2.3.2** *L'équation (1) est stable au sens de Ulam-Hyers généralisée s'il existe une fonction  $\theta_f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ,  $\theta_f(0) = 0$ , tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour chaque solution  $x \in C^1(J, \mathbb{R})$  de l'inégalité (2.69) il existe une solution  $y \in C^1(J, \mathbb{R})$  de l'équation (1) avec*

$$|x(t) - y(t)| \leq \theta_f(\varepsilon), \quad t \in J. \quad (2.71)$$

### 2.3.3 Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias

**Définition 2.3.3** *L'équation (1) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias par rapport à  $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$  s'il existe un nombre réel  $c_{f,\varphi} > 0$  tel que  $\varepsilon > 0$  et pour chaque solution  $x \in C^1(J, \mathbb{R})$  de l'inégalité :*

$$\left| {}^C D^\alpha x(t) - f(t, x(t)) \right| \leq \varepsilon \varphi(t), \quad t \in J, \quad (2.72)$$

*il existe une solution  $y \in C^1(J, \mathbb{R})$  de l'équation (1)*

$$|x(t) - y(t)| \leq c_{f,\varphi} \varepsilon \varphi(t), \quad t \in J. \quad (2.73)$$

### 2.3.4 Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée

**Définition 2.3.4** *L'équation (1) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée par rapport à  $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$  s'il existe un nombre réel  $c_{f,\varphi} > 0$  tel que pour chaque solution  $x \in C^1(J, \mathbb{R})$  de l'inégalité :*

$$\left| {}^C D^\alpha x(t) - f(t, x(t)) \right| \leq \varphi(t), \quad t \in J, \quad (2.74)$$

il existe une solution  $y \in C^1(J, \mathbb{R})$  de l'équation (1)

$$|x(t) - y(t)| \leq c_{f,\varphi} \varphi(t), \quad t \in J. \quad (2.75)$$

**Remarque 2.3.1** *Il est clair que : (i) Définition 2.3.1  $\Rightarrow$  Définition 2.3.2 ; (ii) Définition 2.3.3  $\Rightarrow$  Définition 2.3.4 ; (iii) Définition 2.3.3  $\Rightarrow$  Définition 2.3.1.*

**Remarque 2.3.2** *Une fonction  $x \in C^1(J, \mathbb{R})$  est dite solution de l'inégalité (2.69) si est seulement s'il existe une fonction  $g \in C^1(J, \mathbb{R})$  (qui dépend de la solution  $y$ ) tel que :*

**i)**  $|g(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in J.$

**ii)**  ${}^C D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) + g(t), \quad t \in J.$

## Chapitre 3

# Existence et Stabilité de type Ulam d'un problème aux limites fractionnaire

Ce chapitre, consacré à l'étude de l'existence et la stabilité de type Ulam de l'équation différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo (1).

### 3.1 Résultats d'existence

Dans cette section, on donne les conditions de l'existence et l'unicité de la solution du problème (1) dans l'espace  $C_\gamma [0, T]$  défini pour  $0 < \alpha < 1$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$  ( $0 \leq \gamma \leq \alpha$ ) par

$$C_\gamma = \left\{ f(t) : t^\gamma f(t) \in C [0, T], \|f\|_{C_\gamma} = \|t^\gamma f(t)\|_C \right\}, \quad (3.1)$$

$$C_\gamma^\alpha [0, T] = \left\{ f(t) \in C [0, T] : {}^C D_{0+}^\alpha f \in C [0, T] \right\}. \quad (3.2)$$

Notre approche est basé sur la réduction du problème considéré en une équation intégrale de Volterra

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.3)$$

**Lemme 3.1.1** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  ( $0 < \alpha < 1$ ), et soit  $x_{1-\alpha}(t) = (I_{0+}^{1-\alpha} f)(t)$ . Si  $f(t) \in C_\gamma [0, T]$  et  $f_{1-\alpha}(t) \in C_\gamma^1 [0, T]$ , alors :*

$$(I^\alpha D^\alpha f)(t) = f(t) - \frac{f_{1-\alpha}(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, \quad t \in [0, T]. \quad (3.4)$$

**Lemme 3.1.2** Si  $\gamma \in \mathbb{R}$ , ( $0 \leq \gamma < 1$ ), alors l'opérateur d'intégration  $I_{0+}^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  est borné dans  $C_\gamma [0, T]$

$$\|I^\alpha g\|_{C_\gamma} \leq T^\alpha \cdot \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} \|g\|_{C_\gamma}. \quad (3.5)$$

Tout d'abord, nous établissons une équivalence entre le problème (1) et l'équation intégrale (3.3) dans l'espace  $C_\gamma [0, T]$  des fonctions continues.

**Lemme 3.1.3** Soit  $0 < \alpha < 1$  et soit  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Une fonction  $x$  est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \quad (3.6)$$

si et seulement si  $x$  est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = h(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

**Preuve.** Soit  $x$  la solution de l'équation intégrale (3.6). On commence par la vérification de la condition initiale, on a d'après (3.6)

$$|x(t) - x_0| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right|,$$

alors

$$\begin{aligned} |x(t) - x_0| &\leq \frac{\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} t^\alpha. \end{aligned}$$

On prend la limites quand  $t \rightarrow 0$ , et on obtient

$$x(0) = x_0.$$

Donc (3.6) vérifie la condition initiale dans (3.7). Il reste à montrer qu'elle vérifie l'équation du problème (3.7). On a,

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= I^\alpha h(t). \end{aligned}$$

On appliquant l'opérateur  $D^\alpha$  aux deux membres de l'égalité, on aura

$$D^\alpha (x(s) - x_0) (t) = h(t),$$

de plus, on a

$$D^\alpha (x(s) - x_0) (t) = {}^C D^\alpha x(t),$$

par suite

$${}^C D^\alpha x(t) = h(t), \quad t \in [0, T].$$

Inversement on a

$${}^C D^\alpha x(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} [x(s) - x_0] (t).$$

Comme  $h(t)$  est continue, il s'ensuit que  ${}^C D^\alpha x(t)$  est continu, et par suite  $I^{1-\alpha} [x(s) - x_0]$  est continu. En appliquant l'opérateur  $I^\alpha$  aux deux membres de l'égalité précédente, on aura

$$I^{\alpha C} D^\alpha x(t) = x(t) - x_0 - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I^{1-\alpha} [x(s) - x_0] (t),$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \left| I^{1-\alpha} [x(s) - x_0] (t) \right| &\leq \frac{\sup_{t \in [0, T]} |x(t) - x_0|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds \\ &= \frac{\|x - x_0\|_\infty}{(1-\alpha) \Gamma(1-\alpha)} t^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

par suite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| I^{1-\alpha} [x(s) - x_0] (t) \right| = 0,$$

par conséquent

$$I^{\alpha C} D^\alpha x(t) = x(t) - x_0.$$

On a  $h \in C([0, T], \mathbb{R})$ , et par conséquent  $eI^\alpha h$  est continu. Appliquons  $I^\alpha$  aux deux membres de l'équation (3.7)

$$I^{\alpha C} D^\alpha x(t) = I^\alpha h(t).$$

D'après le calcul précédent, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + I^\alpha h(t) \\ &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

c'est à dire  $x(t) \in C[0, T]$  est la solution de l'équation intégrale (3.6).  $\square$

Maintenant, on va établir l'existence et l'unicité de la solution pour le problème de Cauchy (1)

dans l'espace  $C_\gamma[0, T]$  Pour cela on a besoin du résultat auxiliaire suivant :

**Lemme 3.1.4** Soit  $J = [0, T]$ ,  $0 < c < T$ ,  $g \in C[0, c]$  et  $g \in C[c, T]$  alors  $g \in C[0, T]$  et

$$\|g\|_{C[0, T]} \leq \sup \left[ \|g\|_{C[0, c]}, \|g\|_{C[c, T]} \right] \quad (3.8)$$

**Théorème 3.1.1** Soit  $0 < \alpha < 1$ , et  $0 \leq \gamma \leq \alpha$ . Soit  $G$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ , et soit  $f : (0, T] \times G \rightarrow$

$\mathbb{R}$ , une fonction telle que, pour chaque  $x \in G$ ,  $f(t, x) \in C_\gamma[0, T]$  et vérifie la condition de

Lipschitz suivante (H1) Il existe une constante  $A > 0$  telle que :

$$|f(t, x) - f(t, x^*)| \leq A|x - x^*|, \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \text{ et tout } x, x^* \in G. \quad (3.9)$$

Alors il existe une solution unique  $x(t)$  pour le problème de Cauchy (1) dans l'espace  $C_\gamma[0, T]$ .

**Preuve.** On commence par montrer l'existence d'une solution unique  $x(t) \in C[0, t_1]$ . D'après

le lemme 3.1.3, il suffit de montrer l'équation intégrale de Volterra (3.3) possède une solution

unique  $x(t) \in C[0, t_1]$ . On montre le résultat en premier temps sur une partie de l'intervalle

$[0, T]$  l'équation intégrale (3.3) a un sens sur chaque intervalle  $[0, t_1] \subset [0, T]$ . Choisissons  $t_1$  tel

que l'inégalité,

$$A \frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1, \quad (3.10)$$

soit vérifiée, ensuite on montre l'existence d'une solution unique  $x(t) \in C[0, t_1]$  pour l'équation

intégrale de Volterra (3.3) sur  $[0, t_1]$ . Pour cela on utilise le théorème du point fixe de Banach

pour l'espace  $C[0, T]$  qui est un espace métrique complet avec la distance donnée par

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_{C[0, 1]} = \sup_{t \in [0, t_1]} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

On réécrit l'équation intégrale (3.3) sous la forme suivante :

$$x(t) = (Tx)(t).$$

Où

$$(Tx)(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds. \quad (3.11)$$

Pour appliquer le théorème de Banach, il faut montrer :

1. Si  $x(t) \in C[0, t_1]$  alors  $(Tx)(t) \in C[0, t_1]$ .
2. Pour chaque  $x_1, x_2 \in C[0, t_1]$

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_{C[0, t_1]} \leq w \|x_1 - x_2\|_{C[0, t_1]} \quad \text{avec } (0 < w < 1). \quad (3.12)$$

Comme  $f(t, y) \in C[0, t_1]$ , on tenant compte du lemme 3.1.2, on a

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s, x(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right\|_{C[0, t_1]} \leq \frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(t, x(t))\|_{C[0, t_1]},$$

alors  $(Tx)(t) \in C[0, t_1]$ . Montrons maintenant (3.12). En vertu de (3.1), du lemme 3.1.2, et en utilisant la condition de Lipschitz, on obtient

$$\begin{aligned} \|Tx_1 - Tx_2\|_{C[0, t_1]} &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))) (t-s)^{\alpha-1} ds \right\|_{C[0, t_1]} \\ &\leq \frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|_{C[0, t_1]} \\ &\leq \frac{At_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x_1 - x_2\|_{C[0, t_1]}, \end{aligned}$$

à l'aide de (3.10), on obtient (3.12), avec  $w = \frac{At_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ , et alors par le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique  $x(t) \in C[0, t_1]$  de l'équation intégrale (3.3) sur  $[0, t_1]$ . Par le théorème de Banach, la solution  $x^*(t)$  est une limite de la suite convergente  $(T^n x_0)(t)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n x_0 - x\|_{C[0, t_1]} = 0. \quad (3.13)$$

On prend

$$x_0^* = x_0.$$

Tenant compte de l'équation intégrale (3.3), la suite  $(T^n x_0^*)(t)$  est définie par la formules de récurrence

$$(T^n x_0^*)(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f\left(s, (T^{n-1} x_0^*)(s)\right) (t-s)^{\alpha-1} ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

Si on note,  $x_n(t) = (T^n x_0^*)(t)$ , alors la relation précédente prend la forme suivante :

$$(x_n)(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f\left(s, (x_{n-1})(s)\right) (t-s)^{\alpha-1} ds, \quad (n \in \mathbb{N})$$

et (3.13) devient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_{C[0, t_1]} = 0.$$

Après, on considère l'intervalle  $[t_1, t_2]$ , où  $t_2 = t_1 + h_1$  et  $h_1 > 0$ , avec  $t_2 < T$ . Réécrivons l'équation intégrale (3.15) sous la forme

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t f(s, x(s)) (t-s)^{\alpha-1} ds + x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} f(s, x(s)) (t-s)^{\alpha-1} ds,$$

puisque la fonction  $x(s)$  est définie uniquement sur  $[0, t_1]$ , nous obtenons

$$x(t) = x_{01} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t f(s, x(s)) (t-s)^{\alpha-1} ds,$$

où

$$x_{01} = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} f(s, x(s)) (t-s)^{\alpha-1} ds.$$

Par une technique similaire pour avoir l'existence et l'unicité de la solution sur  $[0, t_1]$ , on peut déduire qu'il existe une solution unique  $x_1^*(t) \in C[t_1, t_2]$  de l'équation intégrale (3.3) sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$ . On prend l'intervalle suivant  $[t_2, t_3]$ , où  $t_3 = t_2 + h_2$  et  $h_2 > 0$ , sont tel que  $t_3 < T$ . En répétant ce processus, on trouve qu'il existe une solution unique  $x(t)$  de l'équation (3.3), telle que

$$x(t) = x_k(t)$$

et

$$x_k \in C[t_{k-1}, t_k], \quad (k = 1, \dots, L)$$

où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_L = T$ . Par le lemme 3.1.3, il s'ensuit qu'il existe une solution unique  $x(t) \in C[0, T]$  sur l'intervalle  $[0, T]$  tout entier. Par conséquent, il existe une solution unique  $x(t) = x(t) \in C[0, T]$  de l'équation intégrale de Volterra (3.3) et alors du problème de Cauchy (1). Pour compléter la démonstration, il reste à montrer que cette solution  $x(t) \in C[0, T]$ , appartienne à l'espace  $C_\gamma^\alpha[0, T]$ . Par la définition, il faut montrer que  ${}^C D^\alpha x(t) \in C_\gamma[0, T]$ . D'après ce qui précède  $x(t) \in C[0, T]$  est une limite de la suite  $x_n(t) = (T^n x_0)(t) \in C[0, T]$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_{C[0, t_1]} = 0. \quad (3.14)$$

En utilisant ensuite (1) est la condition de Lipschitz, on a

$$\begin{aligned} \left\| {}^C D^\alpha x_n - {}^C D^\alpha x \right\|_{C[0, t_1]} &\leq \|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\|_{C_\gamma[0, T]} \\ &\leq A \|x_n - x\|_{C_\gamma[0, T]} \\ &\leq AT^\gamma \|x_n - x\|_{C[0, T]} \\ &\leq A \|x_n - x\|_{C[0, t_1]}, \end{aligned}$$

de plus (3.14) permet d'obtenir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| {}^C D^\alpha x_n - {}^C D^\alpha x \right\|_{C[0, t_1]} = 0,$$

alors  ${}^C D^\alpha x(t) \in C_\gamma[0, T]$ , et donc  $x \in C_\gamma^\alpha[0, T]$ . Ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 3.2 Stabilité de type Ulam d'une equation fractionnaire

Les propriétés de stabilité de toutes sortes d'équations ont attiré l'attention de nombreux mathématiciens. Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de stabilité Ulam-Hyers des problèmes aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$${}^C D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J = [0, T], \quad T > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.15)$$

où  $f : J \times \mathbb{R}$  une fonction continue.

**Lemme 3.2.1** Soit  $0 < \alpha < 1$ , si  $x \in C^1([0, T], \mathbb{R})$  une solution de l'inégalité (2.69) alors  $x$  est une solution de l'inégalité intégrale suivante :

$$\left| x(t) - x(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right| \leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \varepsilon, \quad t \in J = [0, T].$$

En effet, par remarque 2.3.2 nous avons que :

$${}^C D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) + g(t), \quad \forall t \in J.$$

Puis

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds, \quad t \in J.$$

Cela implique que

$$x(t) - x(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds, \quad t \in J,$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} \left| x(t) - x(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |g(s)| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Nous avons les mêmes remarques pour la solution des inégalités (2.72) et (2.74).

Dans ce qui suit, nous collectons l'inégalité de Henry-Gronwall (voir Lemme 7.1.1, [7]), qui peut être utilisée dans des équations différentielles fractionnaires.

**Lemme 3.2.2** Soit  $z, w : [0, T) \rightarrow [0, +\infty)$  deux fonctions continues tel que  $T \leq \infty$ . si  $w$  est croissante et il existe  $k \geq 0$  et  $\alpha > 0$  tel que

$$z(t) \leq w(t) + k \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds, \quad t \in [0, T),$$

alors

$$z(t) \leq w(t) + \int_0^t \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} (t-s)^{n\alpha-1} w(s) \right] ds, \quad t \in [0, T].$$

Si  $w(t) = q$  constant sur  $0 \leq t < T$ , alors l'inégalité ci-dessus est réduite à

$$z(t) \leq qE_\alpha(k\Gamma(\alpha)t^\alpha), \quad 0 \leq t < T,$$

où  $E_\alpha$  est la fonction de Mittag-Leffler.

### Remarque 3.2.1

i) Il y a un constant  $M_k^* > 0$  indépendant de  $q$  tel que

$$z(t) \leq M_k^* q \text{ pour tout } 0 \leq t < T.$$

ii) Pour les inégalités de Henry-Gronwall plus généralisées voir [10].

## 3.3 Résultats de stabilité de type Ulam

Dans cette section on donne pour quelle conditions le problème (1) est stable aux sens de Ulam.

**Hypothèses** Soit  $0 < \alpha < 1$ . Sans perte de généralité, nous considérons l'équation (3.15) et l'inégalité (2.74), on suppose que :

**(H1)**  $f \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$  ;

**(H2)** Il existe  $m_f > 0$  tel que

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq m_f |u_1 - u_2|, \text{ pour chaque } t \in [0, +\infty), \text{ et tout } u_1, u_2 \in \mathbb{R};$$

**(H3)** Soit  $\varphi \in C([0, +\infty), \mathbb{R}_+)$  une fonction croissante. Il existe  $\lambda_\varphi > 0$  tel que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \leq \lambda_\varphi \varphi(t), \text{ pour tout } t \in [0, +\infty).$$

Nous obtenons les résultats stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisé suivants.

**Théorème 3.3.1** Dans les conditions (H1), (H2) et (H3) l'équation (3.15) ( $T = +\infty$ ) est stable au sens Ulam-Hyers-Rassias généralisée.

**Preuve.** Soit  $x \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R})$  une solution de l'inégalité (2.74) ( $T = +\infty$ ). Désignons par  $y$  la solution unique du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & 0 < \alpha < 1, \quad t \in [0, +\infty), \\ x(0) = y(0). \end{cases} \quad (3.16)$$

alors nous avons

$$x(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, +\infty).$$

Par l'inégalité différentielle (2.74), nous avons

$$\begin{aligned} & \left| x(t) - x(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \\ & \leq \lambda_\varphi \varphi(t), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

De ces relations il découle

$$\begin{aligned} & |x(t) - y(t)| \\ & \leq \left| x(t) - y(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right| \\ & \leq \left| \begin{aligned} & x(t) - y(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \end{aligned} \right| \\ & \leq \left| x(t) - y(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right| \\ & \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s)) - f(s, x(s))| ds \\ & \leq \lambda_\varphi \varphi(t) + \frac{m_f}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y(s) - x(s)| ds. \end{aligned}$$

Par le Lemme 3.2.2 et la Remarque 3.2.1, il existe un constant  $M_f^* > 0$  indépendant de  $\lambda_\varphi \varphi(t)$

tel que

$$|x(t) - y(t)| \leq M_f^* \lambda_\varphi \varphi(t) := c_{f,\varphi} \varphi(t), \quad t \in [0, +\infty).$$

Donc, l'équation (3.15) ( $T = +\infty$ ) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée.

**Corollaire 3.3.1**

- i) D'après les hypothèses de Théorème 3.3.1, on considère l'équation (3.15) ( $T = +\infty$ ) et l'inégalité (2.72). On peut répéter le même processus pour vérifier que l'équation (3.15) ( $T = +\infty$ ) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias.
- ii) D'après les hypothèses (H1) et (H2), on considère l'équation (3.15) ( $t = +\infty$ ) et l'inégalité (2.69). On peut répéter le même processus pour vérifier que l'équation (3.15) ( $t = +\infty$ ) est stable au sens de Ulam-Hyers.

**3.4 Exemples**

**Exemple 3.4.1** Soit  $0 < \alpha < 1$ , on considère l'équation

$${}^C D^\alpha x(t) = 0, \quad t \in [a, b], \quad (3.17)$$

et l'inégalité

$$\left| {}^C D^\alpha y(t) \right| \leq \varepsilon, \quad t \in [a, b]. \quad (3.18)$$

Soit  $y \in C^1[a, b]$  une solution de inégalité (3.18). alors il existe  $g \in C[a, b]$  tel que

$$|g(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [a, b],$$

$${}^C D^\alpha y(t) = g(t), \quad t \in [a, b]. \quad (3.19)$$

Intégrons (3.19) de  $a$  à  $b$  en vertu de la définition 2.3.1, on a

$$y(t) = y(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

On a pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |y(t) - c| &= \left| y(a) - c + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| \\ &\leq |y(a) - c| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} |g(s)| ds \\ &\leq |y(a) - c| + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq |y(a) - c| + \frac{(t-s)^\alpha \varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Si on prend  $c := y(a)$ , alors

$$|y(t) - y(a)| \leq \frac{(t-a)^\alpha \varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad t \in [a, b].$$

Si  $b < +\infty$ , alors

$$|y(t) - y(a)| \leq \frac{(b-a)^\alpha \varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad t \in [a, b].$$

Donc, l'équation (3.17) est stable au sens de Ulam-Hyers.

Soit  $b = +\infty$ , la fonction

$$y(t) = \frac{(t-a)^\alpha \varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}$$

est une solution de inégalité (3.18) et

$$|y(t) - c| = \frac{(t-a)^\alpha \varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)} \rightarrow +\infty, \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Donc l'équation (3.17) n'est pas stable au sens de Ulam-Hyers sur l'intervalle  $[a, +\infty)$ .

**Exemple 3.4.2** Considérons l'inégalité

$$|{}^C D^\alpha y(t)| \leq \varphi(t), \quad t \in [a, +\infty). \quad (3.20)$$

Soit  $y$  une solution de (3.20) et  $x(t) = y(a)$ ,  $t \in [a, +\infty)$  une solution de l'équation (3.17). On a que

$$|y(t) - x(t)| = |y(t) - y(a)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds, \quad t \in [a, +\infty).$$

S'il existe  $c_\varphi > 0$  tel que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \leq c_\varphi \varphi(t), \quad t \in [a, +\infty),$$

donc l'équation (3.17) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias sur  $[a, +\infty)$  par rapport à  $\varphi$ .

# Conclusion

Généralement, les théorèmes du point fixe sont employés pour prouver l'existence et l'unicité de solution d'un problème précis. Dans ce mémoire, on a réussi à avoir plus que cela, par le principe de contraction de Banach, on a pu avoir des résultats concernant la stabilité de type Ulam.

## Annexe A

# Certains mathématiciens intéressés par l'analyse fractionnaire

### A.1 Georg Friedrich Bernhard Riemann



FIGURE A.1 – Georg Friedrich Bernhard Riemann

**Riemann** est né le 17 septembre 1826 à Breselenz, Royaume de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à la topologie, l'analyse, la géométrie différentielle et le calcul. Dans sa thèse, présentée en 1851, Riemann met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe, introduisant notamment le concept des surfaces qui portent son nom, notamment la sphère de Riemann. On lui doit également

d'importants travaux sur les intégrales, poursuivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann. Intéressé par la dynamique des fluides, il jette les bases de l'analyse des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et résout un cas particulier de ce qu'on appelle maintenant le problème de Riemann en introduisant les invariants de Riemann. En 1859, Riemann, qui vient juste d'être nommé professeur à Göttingen et à l'Académie des Sciences de Berlin, publie un article, « Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une taille donnée ». Riemann est par ses travaux, à plusieurs égards, un successeur de Leonhard Euler.

## A.2 Donald Holmes Hyers

Hyers est né à Los Angeles le 1er avril 1913 de Charles et Faith Holmes Hyers. 84 ans, professeur retraité de mathématiques à l'USC. Président du département de mathématiques de 1945 à 1950, Hyers a enseigné à l'université de 1944 jusqu'à sa retraite en 1978. Il était originaire de Los Angeles et a obtenu un baccalauréat et une maîtrise de l'UCLA et un doctorat de Caltech. Il a enseigné à l'Université du Wisconsin et à Caltech avant de passer à l'USC. Hyers était un expert en analyse fonctionnelle et en mathématiques appliquées et a fait des recherches sur les équations intégrales non linéaires et une théorie mathématique des vagues d'eau. Son article scientifique écrit avec KO Friedrichs, «On the Existence of Solitary Waves», a été considéré comme un travail fondateur dans le domaine. Hyers a également rédigé des critiques de livres pour la revue Mathematics Reviews. Le 13 avril à Eugene, Ore., De la leucémie.

### A.3 Stanisław Marcin Ulam



FIGURE A.2 – Stanisław Marcin Ulam (13 avril 1909 - 13 mai 1984)

**Ulam** est un mathématicien américain d'origine juive polonaise. Il aida à développer la théorie qui permit la bombe à hydrogène. Ulam a étudié à l'Institut Polytechnique de Lwów, où l'un de ses professeurs fut Stefan Banach. Il a obtenu en 1933 le doctorat en mathématiques sous la direction de Kazimierz Kuratowski. Ulam entra aux USA en 1938 comme Harvard Junior Fellow (boursier à l'université Harvard). Au terme de sa bourse, il trouva du travail à la faculté de l'université du Wisconsin-Madison, et aida son frère, Adam, qui s'était enfui de Pologne à la veille de la Seconde Guerre mondiale. Il suggéra d'employer la méthode de Monte-Carlo pour évaluer les intégrales mathématiques difficiles qui apparaissent en modélisant les réactions nucléaires en chaîne (ne sachant pas que Fermi et d'autres avaient découvert la méthode plus tôt). Cette suggestion conduisit au développement de la méthode de Monte-Carlo par Von Neumann, Metropolis, et d'autres. En mathématiques pures, il travailla à la théorie des ensembles (incluant les cardinaux mesurables et les mesures abstraites), la topologie, la théorie ergodique, et d'autres domaines. Il a collaboré avec Paul Erdős pendant plus d'un demi-siècle. Après la Seconde Guerre

mondiale, il se détourna largement des mathématiques pures rigoureuses pour un travail plus spéculatif et imaginatif, en posant des problèmes et en faisant des conjectures, ce qui a toujours été une de ses spécialités. Elles concernaient souvent l'application des mathématiques à la physique et à la biologie.

#### A.4 Themistocles M. Rassias

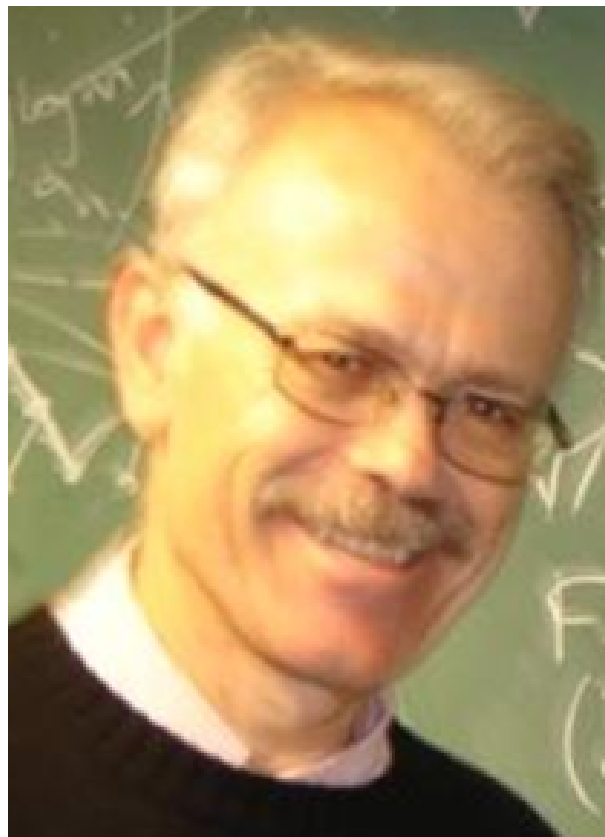


FIGURE A.3 – Themistocles M. Rassias

Rassias est né le 2 avril 1951, est un mathématicien grec et professeur à l' Université technique nationale d'Athènes. Il a obtenu son doctorat. en mathématiques de l' Université de Californie à Berkeley en juin 1976. Le professeur Stephen Smale et le professeur Shiing-Shen Chern ont été respectivement sa thèse et ses conseillers académiques. Son travail s'étend sur plusieurs domaines de l'analyse mathématique. Il comprend l'analyse fonctionnelle non linéaire , les équations fonctionnelles , la théorie de l'approximation , l' analyse sur les collecteurs , le calcul des variations , les inégalités , la géométrie métrique et leurs applications. Il a contribué un certain nombre de

résultats dans la stabilité des sous - variétés minimales , dans la solution du problème d'Ulam pour les homomorphismes approchés dans les espaces de Banach , dans la théorie des mappages isométriques dans les espaces métriques et dans l' analyse complexe ( inégalité de Poincaré et mappages harmoniques ). Il a publié plus de 300 articles, 10 livres de recherche et 45 volumes édités en mathématiques de recherche ainsi que 4 manuels de mathématiques (en grec) pour les étudiants universitaires.

# Bibliographie

- [1] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amsterdam, (2006).
- [2] A. A. Kilbas, M. Saigo and R. K. Saxena, Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators. In Integral Transforms and Special Functions, 2004, 15, 31-49.
- [3] A.A.Kilbas, O.I.Marichev, S.G. Samko, Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications), Gorodon and Breach,(1993).
- [4] A. Souahi, A. B. Makhoulf, M. A. Hammami, Stability analysis of conformable fractional order nonlinear systems. Indag. Math. 2017, 28, 1265-1274.
- [5] Bashir Ahmad, Sotiris K, Ntouyas and Ahmed Alsaedi, New existence results for nonlinear fractional differential equations with three-point integral Boundary Conditions, Hindawi Publishing Corporation Advances in Difference Equations. 1-11, (2011).
- [6] B. K. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. Academic Press, New York (1973).
- [7] D. Henry, Geometric theory of semilinear parabolic equations, LNM 840, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
- [8] D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equations, Proc. Nat. Acad. Sci., 27, 1941, pp. 222-224.

- [9] GAVRUTA, P, A generalization of the Ulam-Hyers-Rassias stability of approximately additive mappings. *Journal of mathematical analysis and applications* 184 (1994), 431-436.
- [10] H. Ye, J. Gao, Y. Ding, A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, *J. Math. Appl.*, 278(2007), 1075-1081.
- [11] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals. Series*, Academic Press, New York, (2007).
- [12] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/London/Toronto, 1999.
- [13] J. Wang, L. Lv, Y. Zhou, Ulam stability and data dependence for fractional differential equations with Caputo derivative. *Electron. J. Qualit. Diff. Equat.* 63( 2011) 1-10.
- [14] K.B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order*. Academic Press, Inc (1974).
- [15] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction of the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley, New York (1993).
- [16] R. Aouafi, *Existence et unicité des solutions de certains problèmes aux limites non linéaires*, Oum Bouaghi, 2019.
- [17] R. (Ed.). Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore.
- [18] R. W. Ibrahim, Generalized Ulam-Hyers stability for fractional differential equations, *Int.J.*
- [19] R. W. Ibrahim, On generalized Hyers-Ulam stability of admissible functions, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012, Article ID 749084, 10 pages doi :10.1155/2012/749084. *Math.*, Vol. 23, No. 5 (2012) 1250056 (9 pages).
- [20] S. Das, *Functional Fractional Calculus for System Identification and Control*, Springer – *Verlag, Berlin*, (2008).
- [21] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications )*. Gordon and Breach, Switzerland, 1993.

- [22] S. Huang, B. Wang, Stability and stabilization of a class of fractional-order nonlinear systems for  $0 < \alpha < 2$  : Nonlinear Dyn. 2016, 2, 973-984.
- [23] S. Liu, W. Jiang, X. Li, X.F. Zhou, Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems. Appl. Math. Lett. 2016, 51, 13-19.
- [24] S. Momani, S. Hadid, Lyapunov stability solutions of fractional integrodifferential equations. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 47 (2004) 2503-2507.
- [25] S. M. Jung, Ulam-Hyers-Rassias stability of functional equations in mathematical analysis, Hadronic Press, Palm Harbor, 2001.
- [26] S. M. Ulam, A Collection Of Mathematical Problems, Interscience Publishers., New York, 1968.
- [27] S. M. Ulam, Problems in modern mathematics. Courier Corporation, 2004.
- [28] V.E.Tarasov, Fractional stability, 2007. Available online :<http://arxiv.org/abs/0711.2117v1>.
- [29] V. Lakshmikantham, S. Leela, J. Vasundhara Devi : Theory of Fractional Dynamic Systems. Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2009.
- [30] W. S. Chung, Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative. J. Comput. Appl. Math. 2015, 290, 150-158.
- [31] Y. Li, Y. Chen Y, I. Podlubny, Mittag-Leffler stability of Fractional order nonlinear dynamic Systems. Automatica 45( 2009) 196.