UNIVERSITE ABBES LAGHROUR KHENCHELA
FACULTE DE SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE
Master 1 Génie des matériaux (GM) — ***2024/ 2025***
Matière : Comportement mécanique des matériaux composites et multi-matériaux — ***Le 21/05/2025***
Semestre 2

Examen Final

-Aucun document n'est autorisé - Les calculatrices sont autorisées   Durée :1h30   par Dr .BREK .S

Partie n°1 est obligatoire et choisissez une partie parmi 2 ,3 (une seule partie)
Les trois parties de l'examen sont indépendantes

Partie 01 (13pts)

Exercice 01:

On considère un composite unidirectionnel constitué de fibres de verre et d'une matrice époxyde avec teneur en volume des fibres $V_f = 0.7$ et en négligeant les vides ($Vv = 0$). Le composite est soumis à une contrainte longitudinale de traction σ_L

1-Déterminer le module d'élasticité longitudinal E_L du composite en utilisant la loi des mélanges (approches simplifiées)

2- Déterminer le module d'élasticité transversal E_T du composite en utilisant le modèle de Halpin -Tsai

3- Déterminer le module de cisaillement G_{LT} du composite en utilisant la loi des mélanges (approches simplifiées)

4-Déterminer la déformation longitudinale dans le composite unidirectionnel

5-Déterminer les contraintes supportées respectivement par les fibres et la matrice dans la direction longitudinale

6-On considère une charge de traction F_L suivant la direction des fibres .Déterminer le rapport de la charge de traction dans la direction (L) supportée par les fibres (F_f) à celle du composite(F_L)

7-Déterminer la déformation transversale dans le composite

8-Déterminer la contrainte transversale induite dans le composite (contrainte provoquée par la contrainte longitudinale de traction σ_L).

On donne : E_{fL}=76 GPa, E_{fT}=76 GPa ,E_m=3.6 GPa , ν_f=0.2 , ν_m=0.3 , G_m =1.4 GPa , G_{fLT}=35 GPa et la contrainte appliquée $\sigma_L = 150\ MPa$.

Exercice 02:

Choisissez les bonnes réponses à ces questions **:**

Q1. Pour un matériau composite avec un comportement orthotrope le coefficient S_{55} de la matrice de souplesse [S] :

☐ a. $S_{55} = \frac{1}{G_{12}}$ ☐ b. $S_{55} = \frac{1}{G_{23}}$ ☐ c. $S_{55} = \frac{1}{G_{13}}$ ☐ d. *Autres ……………*

Q2. Pour un matériau composite avec un comportement orthotrope on a :

☐ a. $\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$ ☐ b. $\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}$ ☐ c. $\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}$ ☐ d. *Autres ……………*

Q3. Pour un matériau composite avec un comportement orthotrope (état plan de contrainte) le coefficient C_{11} de la matrice de rigidité [C] :

☐ a. $C_{11} = \frac{E_1}{1+\nu_{12}\nu_{21}}$ ☐ b. $C_{11} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$ ☐ c. $C_{11} = \frac{E_2}{1+\nu_{12}\nu_{21}}$ ☐ d. *Autres ……………*

Q4. Quelle hypothèse est utilisée pour déterminer le module d'élasticité transversal E_T par la loi des mélanges en traction transverse :

☐ a. contraintes égales dans les deux phases (fibres et matrice)
☐ b. déformations égales dans les deux phases (fibres et matrice)
☐ c. l'allongement d'une cellule résulte des allongements cumulés dans la fibre et la matrice
☐ d. *Autres……*

Q5. Pour le passage de la teneur en volume à la teneur en masse de la matrice, on a :

☐ a. $M_m = \frac{V_m\rho_m}{V_f\rho_f}$ ☐ b. $M_m = \frac{V_m\rho_c}{\rho_m}$ ☐ c $M_m = 1 - \frac{V_f\rho_c}{\rho_f}$ ☐ d. *Autres ……………*

Partie 02 (07 pts)

Exercice :

Un stratifié $[0/\overline{90}]$s est constitué de couches de mêmes caractéristiques mécaniques :
E_1= 181 GPa ,E_2=10.3 GPa , G_{12}=7.17 GPa et ν_{12}=0.28
Sachant que : la couche (0°) de 8 mm d'épaisseur et la couche (90°) de 4 mm d'épaisseur
-Déterminer les coefficients de la matrice de rigidité du stratifié A_{11} et D_{11}

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$Q'_{11} = Q_{11}(\cos\theta)^4 + Q_{22}(\sin\theta)^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2$$

$$Q'_{22} = Q_{11}(\sin\theta)^4 + Q_{22}(\cos\theta)^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2$$

$$Q'_{12} = Q_{12}[(\sin\theta)^4 + (\cos\theta)^4] + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2$$

$$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})(\cos\theta)^3\sin\theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})(\sin\theta)^3\cos\theta$$

$$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})(\sin\theta)^3\cos\theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})(\cos\theta)^3\sin\theta$$

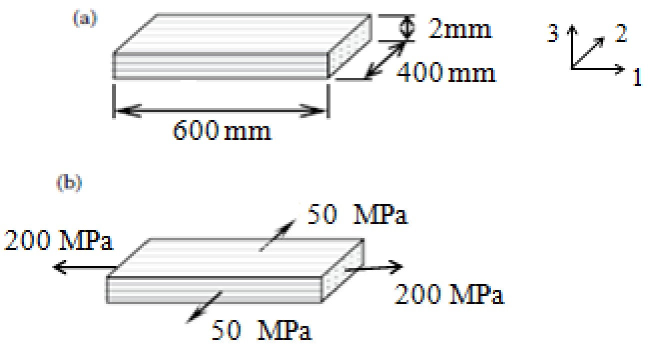
$$Q'_{66} = (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{12} - 2Q_{66})(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2 + Q_{66}[(\sin\theta)^4 + (\cos\theta)^4]$$

$$\begin{Bmatrix} Q'_{11} \\ Q'_{16} \\ Q'_{12} \\ Q'_{66} \\ Q'_{26} \\ Q'_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^4 & 2S^2C^2 & 4S^2C^2 & S^4 \\ C^3S & S^3C - C^3S & 2(S^3C - C^3S) & -S^3C \\ S^2C^2 & C^4 + S^4 & -4S^2C^2 & S^2C^2 \\ S^2C^2 & -2S^2C^2 & C^4 + S^4 - 2S^2C^2 & S^2C^2 \\ S^3C & C^3S - S^3C & 2(C^3S - S^3C) & -C^3S \\ S^4 & 2S^2C^2 & 4S^2C^2 & C^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{22} \end{Bmatrix}$$

Partie 03 (07 pts)

Exercice :

Considérons une couche composite unidirectionnelle (avec fibres longues) réalisée comme le montre la figure (a). Les caractéristiques de la couche sont les suivantes: E_1=40 GPa, E_2= 8 GPa, E_3= 8 GPa ,
G_{12}=4 GPa , G_{23}=3.2 GPa , G_{31}=4 GPa , $\nu_{12} = 0.25$, $\nu_{13} = 0.25$ et $\nu_{23} = 0.3$
-Déterminer les déformations et les allongements pour le cas de chargement :
traction suivant les deux directions 1 et 2 de la couche (figure b).



Bon courage

UNIVERSITE ABBES LAGHROUR KHENCHELA
FACULTE DE SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE
Master 1 Génie des matériaux (GM) ***2024/ 2025***
Matière : Comportement mécanique des matériaux composites et multi-matériaux ***Semestre 2***

Correction (Examen Final) Par Dr .BREK.S

-Aucun document n'est autorisé - Les calculatrices sont autorisées Le 21 /05/2025 Durée :1h30

Partie n°1 est obligatoire et choisissez une partie parmi 2 ,3 (une seule partie)
Les trois parties de l'examen sont indépendantes

Partie 01 (13pts)

Correction Exercice 01:

On donne : E_{fL}=76 GPa, E_{fT}=76 GPa ,E_m=3.6 GPa , ν_f=0.2 , ν_m=0.3 , G_m =1.4 GPa , G_{fLT}=35 GPa et la contrainte appliquée $\sigma_L = 150\ MPa$.

1- le module d'élasticité longitudinal E_L du composite en utilisant la loi des mélanges (approches simplifiées)

$V_f + V_m + V_v = 1$ avec $V_v = 0$, $V_m = 0.3$

Corrigé type de l'examen

$$E_L = E_f V_f + E_m\left(1 - V_f\right)$$ **(0.5)**

$\boxed{E_L = 54.28\ \text{GPa}}$ **(0.5)**

2- le module d'élasticité transversal E_T du composite en utilisant le modèle de Halpin –Tsai

$$E_2 = E_m\left(\frac{1+\xi\eta V_f}{1-\eta V_f}\right)\ ou\ \eta = \frac{\frac{E_{fT}}{E_m}-1}{\frac{E_{fT}}{E_m}+\xi}$$ **(0.5 + 0.5)**

$$\xi = 2 + 40V_f^{10}$$ **(0.5)**

$\xi = 3.129$ **(0.5)**

$\eta = 0.8296$ **(0.5)**

$\boxed{E_T = 24.187\ \text{GPa}}$ **(0.5)**

3- le module de cisaillement G_{LT} du composite en utilisant la loi des mélanges (approches simplifiées)

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_{fLT}} + \frac{V_m}{G_m}\ ,\quad G_{LT} = \frac{G_{fLT}\,G_m}{G_m V_f + G_{fLT} V_m}$$ **(0.5)**

$\boxed{G_{LT} = 4.26829\ \text{GPa}}$ **(0.5)**

4-la déformation longitudinale dans le composite unidirectionnel

$$\sigma_L = E_L.\varepsilon_L \quad \boxed{\varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{E_L} = (2.7634).10^{-3}}$$ **(0.5)**

5- les contraintes supportées respectivement par les fibres et la matrice dans la direction longitudinale

$\sigma_f = E_{fL}.\varepsilon_f \quad \sigma_m = E_m.\varepsilon_m$ Avec $\varepsilon_L = \varepsilon_f = \varepsilon_m$ **(0.5 + 0.5)**

$\boxed{\sigma_f = 210.0184\ MPa}$ $\boxed{\sigma_m = 9.9482\ MPa}$

(0.5) **(0.5)**

6-On considère une charge de traction F_L suivant la direction des fibres .Déterminer le rapport de la charge de traction dans la direction (L) supportée par les fibres (F_f) à celle du composite(F_L)

$$\frac{F_f}{F_L} = \frac{\sigma_{fL}.S_f}{\sigma_L.S} = \frac{E_f.\varepsilon_f.S_f}{E_L.\varepsilon_L.S} = \frac{E_f}{E_L} V_f$$ **(1.0)**

$$\boxed{\frac{F_f}{F_L} = 0.9801}$$ **(0.25)**

7- la déformation transversale dans le composite

$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$ donc $\varepsilon_T = -\nu_{LT}\varepsilon_L$ **(0.5)**

$\nu_{LT} = \nu_f.V_f + \nu_m.V_m$

$\nu_{LT} = 0.23$ **(0.5)**

$$\boxed{\varepsilon_T = -0.6355.10^{-3}}$$ **(0.5)**

8-la contrainte transversale induite dans le composite (contrainte provoquée par la contrainte longitudinale de traction σ_L).

$\sigma_T = E_T.\varepsilon_T$

$$\boxed{\sigma_T = -15.3708\ MPa}$$ **(0.75)**

<u>Correction Exercice 02:</u>

R1. Pour un matériau composite avec un comportement orthotrope le coefficient S_{55} de la matrice de souplesse [S] :

☐ a. $S_{55} = \frac{1}{G_{12}}$ ☐ b. $S_{55} = \frac{1}{G_{23}}$ ■ c. $S_{55} = \frac{1}{G_{13}}$ ☐ d. $Autres\ldots\ldots\ldots\ldots$ **(0.25)**

R2. Pour un matériau composite avec un comportement orthotrope on a :

■ a. $\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$ ☐ b. $\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}$ ■ c. $\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}$ ☐ d. $Autres\ldots\ldots\ldots\ldots$ **(0.25)**

R3. Pour un matériau composite avec un comportement orthotrope (état plan de contrainte) le coefficient C_{11} de la matrice de rigidité [C] :

☐ a. $C_{11} = \frac{E_1}{1+\nu_{12}\nu_{21}}$ ☐ b. $C_{11} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$ ☐ c. $C_{11} = \frac{E_2}{1+\nu_{12}\nu_{21}}$ ■ d. $Autres$: $C_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$ **(0.5)**

R4. Quelle hypothèse est utilisée pour déterminer le module d'élasticité transversal E_T par la loi des mélanges en traction transverse :

■ a. contraintes égales dans les deux phases (fibres et matrice) **(0.5)**
☐ b. déformations égales dans les deux phases (fibres et matrice)
■ c. l'allongement d'une cellule résulte des allongements cumulés dans la fibre et la matrice
☐ d. *Autres*……

R5. Pour le passage de la teneur en volume à la teneur en masse de la matrice, on a :

☐ a. $M_m = \frac{V_m\rho_m}{V_f\rho_f}$ ☐ b. $M_m = \frac{V_m\rho_c}{\rho_m}$ ☐ c $M_m = 1 - \frac{V_f\rho_c}{\rho_f}$ **(0.5)**

■ d. $Autres$: $M_m = \frac{V_m\rho_m}{\rho_c}$ ou $M_m = 1 - \frac{V_f\rho_f}{\rho_c}$

Partie 02 (07 pts)

<u>Correction Exercice :</u>

Un stratifié $[0/\overline{90}]s$

E_1= 181 GPa ,E_2=10.3 GPa , G_{12}=7.17 GPa et ν_{12}=0.28

la couche (0°) de 8 mm d'épaisseur et la couche (90°) de 4 mm d'épaisseur

- les coefficients de la matrice de rigidité du stratifié A_{11} et D_{11}

Corrigé type de l'examen

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$A = \sum_{k=1}^{n} Q_k(\theta_k)(Z_k - Z_{k-1}) \qquad \textbf{(0.5)}$$

$$D = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} Q_k(\theta_k)(Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \qquad \textbf{(0.5)}$$

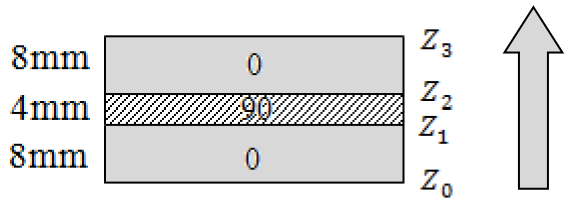
$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad donc \ \ \nu_{21} = \frac{E_2\nu_{12}}{E_1} = 0.0159 \qquad \textbf{(0.25)}$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\ Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\ Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad et \quad Q_{66} = G_{12}$$

$Q_{11} = 181.8$ GPa $\quad Q_{22} = 10.35$ GPa $\quad Q_{12} = 2.897$ GPa $\quad Q_{66} = 7.17$ GPa **(0.5 +0.5+0.5+0.25)**

$Q_{11} = 10.35$ GPa Pour la couche 90° **(0.5)**

$$[\bar{Q}]_0 = \begin{bmatrix} 181.8 & 2.897 & 0 \\ 2.897 & 10.35 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{GPa} \qquad [\bar{Q}]_{90} = \begin{bmatrix} 10.35 & 2.897 & 0 \\ 2.897 & 181.8 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{GPa}$$



$Z_0 = -10\ mm \quad Z_1 = -2\ mm \quad Z_2 = 2\ mm \quad Z_3 = 10\ mm$ **(0.25+0.25+0.25+0.25)**

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{3}[\bar{Q}_{ij}]_k(h_k - h_{k-1}) \qquad \textbf{(0.5)}$$

A_{11}=[(181.8)(z1-z0)+ (10.35)(z2-z1)+ (181.8)(z3-z2)].10^3 **(0.75)**

A_{11}=[(181.8)(-2+10)+ (10.35)(2+2)+ (181.8)(10-2)].10^3 = $\boxed{2950,2\ \ .10^3\ \text{MPa.mm}}$

$$D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}[\bar{Q}_{ij}]_k(h_k^3 - h_{k-1}^3) \qquad \textbf{(0.5)}$$

(0.75)

$D_{11} = \frac{1}{3}$ [(181.8)(z_1^3-z_0^3)+ (10.35)(z_2^3-z_1^3)+ (181.8)(z_3^3-z_2^3)].10^3 = $\boxed{120285,6\ \ .10^3\ \ \text{MPa.mm}^3}$

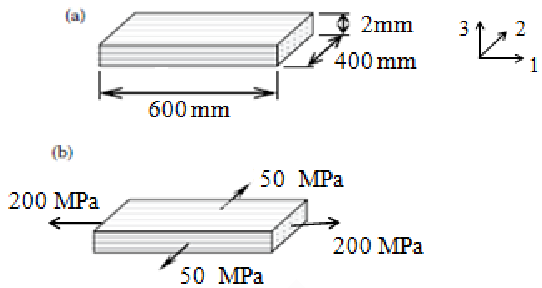
Partie 03 (07 pts)

Correction Exercice :

Considérons une couche composite unidirectionnelle (avec fibres longues) réalisée comme le montre la figure (a). Les caractéristiques de la couche sont les suivantes: E_1=40 GPa, E_2= 8 GPa, E_3= 8 GPa , G_{12}=4 GPa , G_{23}=3.2 GPa , G_{31}=4 GPa , $\nu_{12} = 0.25$, $\nu_{13} = 0.25$ et $\nu_{23} = 0.3$

-les déformations et les allongements pour le cas de chargement :

traction suivant les deux directions 1 et 2 de la couche (figure b).



$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

(2.0)

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & -\frac{0.25}{40} & -\frac{0.25}{40} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{0.25}{40} & \frac{1}{8} & -\frac{0.3}{8} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{0.25}{40} & -\frac{0.3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3.2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}200\\ 50\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ \phi_{23}\\ \phi_{31}\\ \phi_{12}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_{11} \times 600\\ \varepsilon_{22} \times 400\\ \varepsilon_{33} \times 2\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$\varepsilon_{11} = 4.6875\ 10^{-3}$

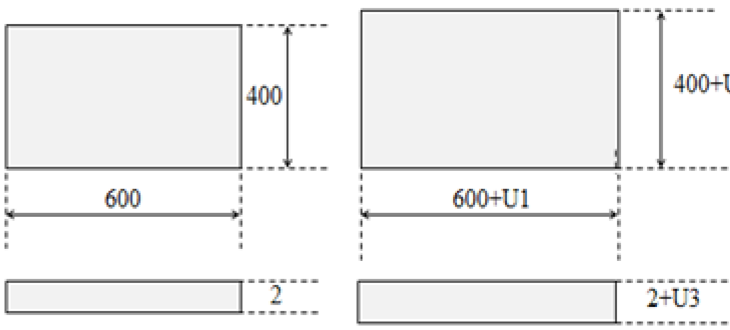
$\varepsilon_{22} = 5\ 10^{-3}$ **(2.25)**

$\varepsilon_{33} = -3.1250\ 10^{-3}$

$U_1 = 2.8125\ mm$

$U_2 = 2\ mm$ **(2.0)**

$U_3 = -0.00625$ mm



(0.75)

sans allongements

avec les allongements