الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY

Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Existence des solutions d'un problème intégro –différentielle non linéaire avec des conditions locales

Réalisé par : **Sahraoui Imen**
Bouyaala Rayen

Dirigé par : **Mr. A.Bragdi**

Membres de jury :

Mr. A. Guemmaz **Président**

Mr.F.Tebessi **Examinateur**

2020-2021

Remerciement

On *remercie mon* ***D****ieu qui nous a donné*

la patience et la

volonté à terminer ce modeste travail.

Nous adressons un grand remerciement à

notre encadreur ***Mr. A****hmed.* ***B****ragdi.*

Nossincères remerciements aux membres de

jury qui ont accepté de juger notre travail.

On n'oublie pas de remercier nos familles

d'être avec nous dans tous les moments

Dédicace

Je dédie cet couvage

A ma maman et mon papa qui m'ont soutenu et encouragé pendant ces années scolaires

Qu'ils trouve ici témoignage de ma profonde reconnaissance.

A mes fréres, et ceux ont paratage avec moi tous les moment d'émotion lors de la réalisation de ce travail .**Il**s m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A ma famille,mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

A tous amis qui m'ont toujours encouragé,et àqui je souhaite plus de sucés.

Bouyaala **R**ayen

Avec mes sentiments de gratitudes les plus profonds,

Je dédie ce modeste travail aux deux êtres qui me sont les

Plus chers,

A mon père et ma mère

A tous mes frères, à toutes mes sœurs

A toute la famille

A tous mes amis,

A tous ceux qui ont contribué à ma formation

Sahraoui Imen

ملخص

في هذه المذكرة ندرس وجود الحلول الموجبة لمعادلة تكاملية –تفاضلية غير خطية ذات رتبة كسرية α عندما $1<\alpha<2$ مع شروط محلية عن طريق بعض نظريات النقطة الثابتة.

الكلمات المفتاحية:

معادلة تكاملية ــ تفاضلية ذات رتب كسرية، مشتق كسري بمعنى ريمان، مشتق كسري بمعنى كابيتو، نظرية النقطة الثابتة، مبدأ الانكماش لباناخ، دالة قرين، حلول إيجابية.

Résume

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence et des solutions positives pour d'équations integro- différentielle fractionnaire d'ordre α non linéaire avec des conditions local pour $1 < \alpha < 2$ au moyen de quelques théorèmes du point fixe.

Mots –clés : équation integro – différentielle fractionnaire, dérivée fractionnaire au sens de Riemann –Liouville, dérivée fractionnaire au sens de Caputo, théorème de point fixe, principe de l'application contractante, fonction de Green, la solution positive.

Abstract

In this paper , weinvestigate the existence of positive solution for non linear fractional differential equation boundary value probleme d orderα ,Where$1 < \alpha < 2$. By means of somefixed –point theoremes.

Keywords : local condition non linear fractional differential equation ,Riemann –Liouville fractional derivative ,Caputo fractional derivative, fixed –point theorem , the Banch contraction principle ,Green's function ,positive solution.

Table des matières

LISTE DES NOTATIONS

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.

Ω : Domaine bornée dans$\mathbb{R}$.

L^1 : Espace des fonctions absolument intégrables.

$[a, b]$: Intervalle fermé de$\mathbb{R}$ d'extrémité a et b

$C([a, b])$: Espace des fonctions continues sur [a, b]

$C^n([a, b])$: Espace des fonctions $f[a, b] \to \mathbb{R}$ dérivables n fois f^n continues.

$AC([a, b])$: Espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$

$AC^n([a, b])$: Espace des fonctions f dérivables a l'ordre $n - 1$et telle que

$$f^{n-1} \in AC([a, b])$$

$\Gamma(.)$: La fonction Gamma.

$\beta(.,.)$: La fonction Beta.

$I^\alpha f$: Intégrale fractionnaire au sens de Riemann –Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

$D^\alpha f$: Dérivée fractionnaire au sens de Riemann –Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

${}^cD^\alpha f$: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

$\| \quad \|$: La norme.

$[\quad]$: La partie entière d'un nombre réel

ABREVIATIONS

EDF : Equation différentielle fractionnaire

EDIF : Equation différentielle integro –fractionnaire

R. L : Riemann-Liouville

Introduction :

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{eme} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$pour désigner la n^{eme} dérivé d'une fonction$f$. Quand il a annoncé dans une lettre à l'hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que$n \in \mathbb{N}$) L'hôpital a répondu :

$$\ll Que\ signifie \frac{d^n f}{dt^n} sin = \frac{1}{2}\ ?\ \gg$$

cette lettre de L'hôpital, écrite en 1695 est aujourd 'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire , et le fait que l'hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est –à-dire une fraction (nombre rationnel)a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématique

Les équations différentielles fractionnaires ont été d'un grand intérêt récemment. Cela est causé à la fois par la théorie du développement intensif du calcul fractionnaire lui-même et par les applications de telles constructions dans diverses sciences telles que la physique, la mécanique, la chimie, l'ingénierie, etc. voir[1][2][3][4][5]il contient.

il convient de noter que la plupart des articles et des livres sur le calcul fractionnaire sont consacrés à l'autonomie des équations différentielles fractionnaires initiales linéaires en termes de fonctions spéciales[6][5][7] récemment, certains articles traitent de l'existence et de la multiplicité de solution (ou solution positive) d'équation différentielle fractionnaire initiale non linéaire par l'utilisation de techniques d'analyse non linéaire (théorèmes du point fixe, théorie de Leray-Shauder, etc.), voir[8][9][10][11]

Cependant, il y a peu d'articles qui considèrent le problème de type Dirichlet pour les équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre fractionnaire, voir [12][3]

Aucune contribution n'existe, à notre connaissance, concernant l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème suivant :

$$D_{0_+}^{\alpha} u(t) + f\big(t, u(t)\big) = 0 \qquad 0 < t < 1 \tag{1.1}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{1.2}$$

Où $1 < \alpha < 2$ est un nombre réel, $D_{0_+}^{\alpha}$ est la différenciation standard de Riemann-Liouville et $f\colon [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$est le continu.

Dans cet article, nous dérivons d'abord la fonction de Green correspondante. par conséquent le problème (1.1),(1.2) est déduit à une équation intégrale de Fredholm équivalente du second type.

Enfin, au moyen de quelques théorèmes du point fixe, l'existence et la multiplicité des solutions positives sont obtenues.

I ‘objectif principal de ce mémoire est l’étude l’existence et unicité de la solution d’un problème intègro-différentiel non linéaire avec des conditions locales

Ce mémoire se compose en trois chapitres :

Le premier chapitre: dans ce chapitre on présente quelques définitions et propriétés :

La fonction gamma et Beta, l’intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville et Caputo et leurs propriétés.

La deuxième chapitre: dans ce chapitre on parle des théorèmes du point fixe les plus connus a savoir : le théorème de point fixe de Banach et schauder et krasnoselskii.

Le troisième chapitre: est consacré a l’étude de l’existence et l’unicité de la solution du problème suivant :

$$D_{0_+}^{\alpha}u(t) + f\big(t, u(t)\big) = 0 \qquad 0 < t < 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous donnons quelque concepts de base du calcul intégral fractionnaire. Nous commençons par les fonctions spéciales : la fonction Gamma et la fonction Béta qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et nous terminons par présenter deux approches des dérivées fractionnaires :

Celle Riemann –Liouville et celle de Caputo.

1.1 Fonction spéciale :

Cette section contient les définitions est quelques propriétés de la fonction Gamma et la fonction Beta

1.1.1 La fonction Gamma :

Définition 1.1 :[13][14] Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$ et la fonction Gamma est définie par l'intégrale suivant

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt \tag{1.1}$$

Proposition 1.2. Pour tout $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{1.2}$$

Démonstration :

On peut démontrer (1.2) par intégration par partie on a

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^{(x+1)-1}\, \mathrm{e}^{-t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{x}\, \mathrm{e}^{-t} dt$$

$$= [-t^x \mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

$$= x\Gamma(x)$$

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

En effet $\Gamma(1) = 1$, alors d'après (1.2) on obtient

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3!$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n)$$

$$= n(n-1)!$$

$$= n!$$

On a

$$\Gamma(0_+) = +\infty$$

Démonstration :

On peut démontrer, d'après (1.2) on a

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$$

Exemple. On a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

En effet : D'après (1.1) nous avons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

On pose que $t = y^2$, alors$dt = 2ydy$ alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\, dy$$

Donc

$$[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

L'équation est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir

$$[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\, d\theta = \pi$$

Donc

$$\Gamma\left(\frac{1}{0}\right) = \pi$$

1.1.2 La fonction Béta

Définition 1.3 :[13][15] soit$x, y > 0$, la fonction Béta est définie par :

$$\beta(x,y) = \int_0^1 \mathrm{e}^{x-1}\,(1-t)^{y-1} dt \tag{1.3}$$

Remarque. La fonction Béta est symétrique $i.e$

$$\beta(x,y) = \beta(y,x)$$

Proposition 1.4 :[14]on peut définie la fonction Béta par des termes de la fonction Gamma

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad x,y \in \mathbb{R}_+ \tag{1.4}$$

Démonstration :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, t'^{y-1} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-t'} dt dt'$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(\int_0^{+\infty} t'^{y-1}\mathrm{e}^{-|t+t'|}\, dt'\right) dt$$

En effectuant le changement de variables

$$\tau = t + t'$$

On trouve

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, dt \int_t^{+\infty} (\tau - t)^{y-1}\mathrm{e}^{-\tau}\, d\tau$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau} d\tau \int_0^t (\tau - t)^{y-1}\, t^{x-1} dt$$

On pose $\theta = \frac{t}{\tau}$, on arrive à

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau}\, d\tau \left(\int_0^1 (\tau - \theta\tau)^{y-1}(\theta\tau)^{x-1}\tau\, d\theta\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau}\, d\tau \left(\int_0^1 (\tau(1-\theta))^{y-1}\theta^{x-1}\,\tau^x d\theta\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau}\, d\tau \left(\int_0^1 (1-\theta)^{y-1}\theta^{x-1}\,\tau^{x+y-1} d\theta\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \tau^{x+y-1}\,\mathrm{e}^{-\tau} d\tau \left(\int_0^1 (1-\theta)^{y-1}\theta^{x-1}\, d\theta\right)$$

$$= \beta(x,y)\int_0^{+\infty} \tau^{x+y-1}\,\mathrm{e}^{-\tau} d\tau$$

$$= \beta(x,y)\Gamma(x+y)$$

Donc

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires

L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a,b]$:

Définition 1. 5. [16][17][18]Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, on considéré l'intégrale suivant :

$$I^{(1)}f(t) = \int_a^b f(x)dx$$

$$I^{(2)}f(t) = \int_a^t dt \int_a^x f(u)du$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I^{(2)}f(t) = \int_a^t (t-\tau)f(t)dt$$

Plus généralement le $n^{iéme}$ itéré

$$I^{(n)}f(t) = \int_a^{t_1} dt_1 \int_a^{t_2} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$I^{(n)}f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(t)dt \tag{1.5}$$

Pour tout entier n

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et d'après la propriété de Gamma

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

on a :

$$I^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)} f(\tau)d\tau \tag{1.6}$$

Telle que $\alpha > 0$.

Remarque :

Si $\alpha = n$ est un entier, alorsI_{a+}^{n} correspond à la définition usuelle de l'intégrale d'ordre entier.

1.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann –Liouville

Cette parte contient les définitions et quelques propriétés des intégrales et dérivée fractionnaires au sens Riemann- Liouville

Définition 1.6 :[15][19]soient $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville d'ordre $\alpha > 0$ définie par :

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{1.7}$$

Est appelle intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α.

$$I_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \qquad \mathrm{b} \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

Est appelée intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre α .

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Dans tout ce que suivra on note $I_{a+}^{\alpha} f(t) = I^{\alpha} f(t)$

Proposition1.7 :[16]

1. $I^0 f(t) = f(t)$

2.$I^{\alpha}(f+ag)(t) = I^{\alpha} f(t) + aI^{\alpha} g(t)$

3.$I^{\alpha} I^{\beta} f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$

Démonstration :

On peut démontrer (1) :

Soient $\alpha > 0$ f une fonction de class $C([a,b])$,alors :

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α est

$$I^{\alpha}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Si $\alpha = 0$

$$I^0[f(t)] = I[f(t)] = f(t)$$

On peut démontrer (2) :

Ona

$$I^{\alpha}(f+ag)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (f+ag)(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau) d\tau + \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau) g(\tau) d\tau$$

$$= I^{\alpha} f(t) + a I^{\beta} g(t)$$

On peut démontrer que la propriété (3)

Soit $\alpha, \beta > 0$

$$I_{a+}^{\alpha}\left[I_{a+}^{\beta} f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{d\tau}{(s-\tau)^{\alpha-1}} \int_a^t \frac{f(u)}{(\tau-u)^{1-\beta}} du$$

Or $f \in C[a,b]$, d'après le théoréme de Fubini on et par le changement $\tau = u + s(t-u)$

On obtient

$$I_{a+}^{\alpha}\left[I_{a+}^{\beta} f(t)\right] = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(u)}{(\tau-u)^{1-\beta}} du$$

$$= I_{a+}^{(\alpha+\beta)} f(t)$$

1.2.2 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :

Il existe plusieurs définitions de dérivée fractionnaires. Dans cette partie on va présenter la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo , qu'est plus utilisée

Définition 1.8 :[20]Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre α avec ($n = [\alpha] + 1$) au sens de Riemann-Liouville est définie par

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(I^{n-\alpha} f(t)\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \qquad (1.9)$$

Propriétés 1.9 :[**13**][**20**]

1- $D_{a+}^{0} f(t) = f(t)$

2- $\forall\ 0 < \alpha < 1 \quad D^{\alpha} f(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} f(t)$

3- Soit f et g deux fonction dans $L^1[a,b]$ et λ a valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$D^{\alpha}(\lambda f + g)(t) = \lambda D^{\alpha} f(t) + D^{\alpha} g(t)$$

4- Si $f \in L^1[a,b]$ alors $D^{\alpha} I^{\alpha} f(t) = f(t)$

5- Si $f \in L^1[a,b]$ et $I^{n-\alpha} f(t) \in AC^m[a,b]$

$$I^{\alpha}D^{\alpha}f(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{t\to a^+}\left[(\frac{d}{dt})^{j} I^{n-\alpha} f\right]$$

Donc

$$I^{\alpha}D^{\alpha}f(t) = f(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_N t^{\alpha-N} \ pour\ C_I \in \mathbb{R}\,, i = 1 \ldots \ldots N$$

$$I^{\alpha}D^{\alpha}f(t) = f(x) + \sum_{I=1}^{N} C_N t^{\alpha-N} \qquad (1.10)$$

6- Si $\alpha > \beta > 0$ alors pour $f \in L^1[a,b]$

$$D^{\beta}D^{\alpha}f(t) = I^{\alpha-\beta}f(t)$$

Démonstration :

On va montrer que la propriété (1) est vraie

Soit $\alpha > 0\,, f$ de class C et $t > 0$ alors nous définissons la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α:

$$D^{\alpha}[f(t)] = \frac{d^n}{dt^n}[I_a^{\alpha}[f(t)]$$

OÙ $\alpha = n$, et $n = [\alpha] + 1$, si $\alpha = 0$

$$D_{a+}^{0}[f(t)] = I[f(t)] = f(t)$$

On va montrer que la propriété (2) est vraie

Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre α tell que $(n - 1 \leq \alpha < n)$ au sens de Riemann- Liouville définie par :

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau$$

On va montrer que la propriété (3) est vraie

La linéarité :

Soient $f, g \in L^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a $D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}I^{n-\alpha}$

$$D^{\alpha}(\lambda f + g)(t) = D^{n}I^{n-\alpha}[\lambda f(t) + g(t)]$$

Comme la dérivée n^{ieme} et l'intégrale sont linéaire alors :

$$D^{\alpha}[\lambda f(t) + g(t)] = \lambda D^{n}I^{n-\alpha}f(t) + D^{n}I^{n-\alpha}g(t)$$

$$= \lambda D^{\alpha}f(t) + D^{\alpha}g(t)$$

$$= \lambda D^n I^{n-\alpha}[f(t) + g(t)]$$

On va montrer que la propriété (4) est vraie

Si $f \in L^1[a,b]$ alors $D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t)$

On a

$$D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t) - \frac{(t-\alpha)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\lim_{t\to a}(I^{1-\alpha}f)(t)\right]$$

Comme f est continue et d'après

$$\lim_{t\to a}[I^{1-\alpha}f](t) = 0$$

On a la limite tend vers 0 donc

$$D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t)$$

Remarque. Si $0 < \alpha < 1$ et $n = 1$ la derivee fractionnaire au sens de Riemann – Liouville est donnée par :

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\left(I^{-\alpha} f(t)\right)$$

Exemple

1-La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens Riemann- Liouville

La dérive d'une fonction constante au sens de Riemann- Liouville n'est pas nulle ni constante mais on a :

$$D^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1+a)}(t-a)^{-\alpha} \text{ ?}$$

Démonstration :

$$D^\alpha c = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha}(c) = \frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\, c d\tau$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{(n-a)(-1)}\Bigg|_a^t$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left[0 + \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right]$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{n-\alpha}$$

$$= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)(n-a)}\left(\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha}\right)$$

On a

$$\Gamma(1+t) = t\Gamma(t)$$

Et

$$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1} \Rightarrow y'' = \frac{n!}{(n-2)!}x^{n-2}$$

Et

$$y^m = \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}$$

Donc

$$D^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(n+1-\alpha)}\frac{(n-\alpha)!}{(n-\alpha-n)!}(t-a)^{n-\alpha-m}$$

$$= \frac{c}{\Gamma(n+1-\alpha)}$$

Et

$$\Gamma(n+a) = n!$$

Donc

$$= \frac{c}{\Gamma(n+1-\alpha)}\frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{(-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

$$= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

$$= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha} \neq 0$$

2. La dérivée fractionnaire de $f(t) = (t-\alpha)^\beta$au sens Riemann –Louville

Soit$f(t) = (t-\alpha)^\beta$ telle que $\beta > -1$ soit α un nombre non entier telle que $\alpha = [n] + 1$ on a

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(t-\alpha)^\beta d\tau$$

On fait changement de variable suivant $\tau = a + s(t-a)$

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^1 (t-a-s(t-a)^{n-\alpha-1}\, s\big(t-a)^{\beta}\big)(t-a)ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta}\int_0^1 s^{\beta}\,(1-s)^{n-\beta-1}ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta+n-\alpha-1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta}$$

Sachant que

$$\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta} = (\beta-\alpha+n)(\beta-\alpha+n-1)\ldots(\beta-\alpha+2)(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

Remplaçant cette dernière relation

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta}$$

On aura

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta-\alpha+n+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

Donc

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

1.2.3 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo :

Définition.1.11 : [20] Soient $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ telle que $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha < n$ et $f \in C^m[a,b]$ la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α notée par ${}^{c}D^{\alpha}f(t)$ est définie par

$${}^{c}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)d\tau \qquad (1.11)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau$$

$$= I^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t)$$

Avec $\alpha = [n] + 1$

Remarque. Si $0 < \alpha < 1$ alors $n = 1$ la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par :

$$^{c}D^{\alpha} f(t) \ = I^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f^{(1)}(\tau) d\tau = I^{1-\alpha} f'(t)$$

Exemple

i. La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo

La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante $f = c$ est nulle $^{c}D^{\alpha} C = 0$

Démonstration

$$^{c}D^{\alpha} f(t) = I^{n-\alpha} \left[\frac{d^n}{dt^n} c \right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left[\frac{d^n}{dt^n} c \right] d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}$$

Car

$$\frac{d^n}{dt^n} c = 0$$

Donc

$$^{c}D^{\alpha} c = 0$$

ii. La dérivée fractionnaire d'une fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ au sens caputo

Soit $f(t) = (t-a)^{\beta}$ avec $\beta > 0$ pour $0 < \alpha < 1$

On a

$$^{c}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{n}(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} [(\tau-a)^{\beta}]^{n} d\tau$$

Sachant que $\beta \geq n$

$$\frac{d^n}{dt^n}(\tau-a)^{\beta}=(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n+1)(\tau-a)^{\beta-n}$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(\tau-a)^{\beta-n}$$

Remplacent cette dernier relation dans

$$^{c}D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{n}(\tau)d\tau$$

On aura

$$^{c}D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(\tau-a)^{\beta-n}\,d\tau$$

Faisant le changement de variable $\tau=a+s(t-a)$

$$^{c}D^{\alpha}f(t)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1(t-a)^{n-1-\alpha}\,(1-s)^{n-1-\alpha}ds$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-a)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$^{c}D^{\alpha}f(t)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

Propriétés1.12[17]

1. $^{c}D^{\alpha}I^{\alpha}f(t)=f(t)$
2. $^{c}D^{\alpha}f(t)=\frac{d^n}{dt^n}f(t)$ α entier
3. Si $f\in AC^{m}[a,b]$ et $\alpha>0$ alors por tout $x\in[a,b]$

$$I^{\alpha}\,{}^{c}D^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k}(t)}{k!}(x-a)^{k}$$

4. $^{c}D^{\alpha}\,{}^{C}D^{\beta}f(t)=\,{}^{c}D^{\alpha+\beta}f(t)$

Démonstration

On peut démontrer que la propriété(1) est vraie

On a

$$^{c}D^{\alpha}I^{\alpha}f(t)=I^{n-\alpha}D^{n}f(t)$$

$$=I^{n-\alpha}D^{n}I^{n}I^{\alpha}f(t)$$

$$=I^{n-\alpha}I^{\alpha-n}f(t)$$

$$^{c}D^{\alpha}I^{\alpha}f(t) \;= f(t)$$

On peut démontrer que la propriété(2) est vraie

-Suppose que $D^{k}f(t) = 0$ pour tout $k \in \{0,1,2, \dots, n-1\}$ et soient $\alpha > 0$ si $^{c}D^{\alpha}f$ et $D^{\alpha}f$ existent

$$^{c}D^{\alpha}f(t) = \frac{d^{n}}{dt^{n}}f(t)$$

On a

$$\frac{d^{n}}{dt^{n}}f(t) = D^{\alpha}f(t) - I^{n-\alpha}\frac{d^{n}}{dt^{n}}f(t)$$

Donc

$$^{c}D^{\alpha}f(t) = \frac{d^{n}}{dt^{n}}f(t)$$

-Si $f \in AC^{m}[a,b]$ et $\alpha > 0$ alors por tout $x \in [a,b]$

$$I^{\alpha}\ {}^{c}D^{\alpha}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k}(t)}{k!}(x-a)^{k}$$

On a

$$^{c}D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k}}{k!}f^{k}(x-a)^{k}$$

$$[I^{\alpha}(\ {}^{c}D^{\alpha}f)](t) = \left[I^{\alpha}(D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k}}{k!}f^{k}(x-a)\right]$$

$$= I^{\alpha}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}I^{n-\alpha}\right)f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k}}{k!}f^{k}(x-a)$$

$$= \frac{d^{n}}{dt^{n}}I^{n}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k}}{k!}f^{k}(x-a)\right)$$

$$= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k}}{k!}f^{k}(x-a)$$

-Si $0 < \alpha\ ,\beta < 1$ avec $\alpha + \beta \leq 1$et$f \in C^{1}[a,b]$ alors

$^{c}D^{\alpha}\ {}^{C}D^{\beta}f(t) = \ {}^{c}D^{\alpha+\beta}f(t)$.

D'apes la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, On a

$$
\begin{aligned}
{}^{c}D^{\alpha}\left({}^{c}D^{\beta}f(t)\right) &= {}^{c}D^{\alpha}\left(I^{n-\beta}D^{n}f(t)\right)\\
&= I^{n-\alpha}D^{n}\,(I^{n-\beta}D^{n}f(t))\\
&= I^{n-(\alpha+\beta)}D^{n}\,I^{n}D^{n}f(t)\\
&= I^{n-(\alpha+\beta)}D^{n}\;f(t)\\
&= {}^{c}D^{\alpha+\beta}f(t)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
{}^{c}D^{\alpha}\,{}^{C}D^{\beta}f(t) = {}^{c}D^{\alpha+\beta}f(t)
$$

1.2.2 La relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo :

Le théorème suivants établie la relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Théorème 1.13 :[13] ,[20]

Soit $n-1<\alpha<n(n\in\mathbb{N}) et\ \alpha>0$, supposons que f est une fonction telle que la dérivée fractionnaire d'ordre α de caputo et Riemann-Liouville existe alors on a les formules suivantes:

$$
{}^{c}D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(a) \qquad (1.12)
$$

$$
{}^{c}D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k}(a)}{k!}f^{(k)}(x-a)\right] \qquad (1.13)
$$

Démonstration

A. La série de Taylor f au voisinage de 0 est

$$
f(\mathrm{t}) = f(0) + \frac{tf^{1}\,(0)}{1!} + \frac{\mathrm{t}^{2}}{2!}f^{2}(0) + \frac{\mathrm{t}^{3}}{3!}f^{3}(0) + \cdots + \frac{t^{n}-1}{(n-1)!}f^{n-1} + R_{n-1}
$$

$$
= \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}-1}\frac{\mathrm{t}^{\mathrm{k}}}{\Gamma(k+1)}f^{k}(0) + R_{n-1}
$$

En utilisant les propriétés intégration d'ordre n, on a

$$
R_{n-1} = \int_{0}^{t}\frac{f^{n}(\tau)(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}d\tau = I^{n}f^{n}(t)
$$

D'où en utilisant la linéarité d'opérateur de Riemann-Liouville on a

$$D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}f^k(0) + R_{n-1}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{D^{\alpha}t^k}{\Gamma(k+1)}f^k(0) + D^{\alpha}R_{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(k+1)t^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\alpha+1)}f^k(0) + (D^{\alpha}I^n f^n(t))$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^k(0) + I^{n-\alpha}f^n D^{\alpha}f(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^k(0) + {}^{c}D^{\alpha}f(t)$$

$$D^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^k(0) + {}^{c}D^{\alpha}f(t)$$

Donc :

$${}^{c}D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^k(0)\ {}^{c}D^{\alpha}f(t)$$

B. Pour démonter la formule

$${}^{c}D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^k(a)}{k!}f^k(x-a)\right]$$

On utilise la relation de dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville et la propriété de linéarité de l'operateur de Riemann- Liouville

$${}^{c}D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^k(a)$$

$$= D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(k+1)t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\alpha+1)}f^k(0)$$

$$= D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{D^{\alpha}t^k}{\Gamma(k+1)}f^k(0)$$

$$= D^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^k(a)}{k!}f^k(x-a)\right]$$

Donc on voit que la dérivée de Riemann-Liouville est différente de celle de Caputo, cependant il existe un cas particulier ou les deux dérivées sont égales.

Cas particulaire : Si$f^k(a) = 0\ pour\ (k = 0,1,2, \dots, n-1)$, alors on a

$$^cD^\alpha f(t) = D^\alpha f(t)$$

Proposition1.14. Supposons que $0 < \alpha < n$, $\beta = \alpha - (n-1)$, $(0 < \beta < 1) n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction f telle que $^cD^\alpha f(t)$ existe, alors

$^cD^\alpha f(t) = {}^cD^\beta\ {}^cD^{n-1} f(t).$

Démonstration

On remplace β parα, et $n-1$ par n dans $^cD^\alpha\ {}^cD^\beta = {}^cD^{\alpha+\beta} f(t) \neq D^\beta\ {}^cD^\alpha f(t)$

Alors

$$^cD^\beta D^{n-1} f(t) = {}^cD^{\beta+n-1} f(t)$$

$$= {}^cD^{\alpha-(n-1)+n-1} f(t) = {}^cD^\alpha f(t)$$

Voici un résumé de ce que on a vue :

Proposition	Riemann_ Louville	Caputo
Représentation	$D^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha}$	$^cD^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f^n(t)$
Linéarité	$D^\alpha(\beta f + g)(t)$ $= \beta D^\alpha f(t) + D^\alpha g(t)$	$^cD^\alpha\ (\beta\ f + g)(t)$ $= \beta\ {}^cD^\alpha f(t) + {}^cD^\alpha\ f(t)$
Interpolation	$\lim\limits_{\alpha \to n-1} D^\alpha f(t) = f^n(t)$ $\operatorname{Lim}\limits_{\alpha \to n-1} D^\alpha(t) = f^{n-1}(t)$	$\lim\limits_{\alpha \to n-1} {}^cDf(t) = f^n\ (t)$ $\lim\limits_{\alpha \to n-1} {}^cDf(t) = f^{n-1}(t) - f^{n-1}(0)$
Non comitative	$\frac{d^n}{dt^n}(D^\alpha\ f(t)) = D^{\alpha+n} f(t)$ $\neq D^\alpha(\frac{d^n}{dt^n} f))(x)$	$(\ {}^cD^\alpha(\frac{d^n}{dx^n} f))(t)$ $= (\ {}^cD^{\alpha+n} f)(t)$ $\neq \frac{d^n}{dt^n}(\ {}^cD^\alpha f)(t)$
$f(t) = c, c$ constante	$D^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1+a)}(t-a)^{-\alpha}$	$^c\mathrm{D}^\alpha \mathrm{C} = 0$

QUELQUES THEOREMES DE POINT FIXE

Le but de ce chapitre est de donner quelques théorèmes du point fixe qu'on a utilisé dans ce mémoire. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes qui assure l'existence de l'unicité. On verra ensuite les théorèmes de point fixe de Schauder et de krasnoselskii.

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Dans cette section, nous présentons des théorèmes de point fixe qui seront utiles dans notre travaille pour l'existence et l'unicité de solution d'un problème integro – différentielle non linéaire a condition local

2.1.1 Théorème de l'application contractante

Définition 2.1:[21](point fixe)

Soit Y une espace de Banach et $T: Y \to Y$.une application continue, on appelle point fixe de T tout point u tel que

$$T(u) = u. \tag{2.1}$$

Définition 2.2 :[19][21](Application Lipchitziennes)

Soit Y une espace de Banach, muni de la norme $\|.\|_Y$ et $T: Y \to Y$une application continue,T est lipchitzienne, s'il existe une constante positive K telle que $K > 0$ et

$$\forall x, y \in E, \|T(x) - T(y)\|_E \leq K\|x - y\|_E \tag{2.2}$$

Théorème 2.3 :[19](Application contractante)

Soit Y une espace de Banach et $T: Y \to Y$ une application continue, on dit que T est Contractante si T est lipchitzienne de rapport $0 < K < 1$:

$$\exists\ 0 < K < 1 : \ \forall x, y \in E : \quad \|T(x) - T(y)\|_E \leq K\|x - y\|_E \tag{2.3}$$

2.1.2 Principe de l'application contractante

Théorème 2.4 :[19] (le théorème de point fixe de Banach)

Soit T un opérateur contractante dans un espace de Banach E alors T admet une point fixe unique u dans E

$$\exists! \, u \in E : T(u) = u \tag{2.4}$$

2.2. Théorème du pont fixe de Schauder :

Définition 2.5 : soit$T: Y \to F$un opérateur telle que

- T est compact si l'image par T de tout borné de Y est relativement compact (c'est-à-dire que son adhérence est compact) dans$F$
- T est dit complètement continue s'il est continu et compact.

Théorème2.6. (théorème de point fixe de Schauder)

Soit C un sous ensemble fermé et convexe d'un espace de Banach E et$f: C \to C$ une application continue telle que $f(C)$ est relativement compact. Alors$f$ possède un point fixe plus généralement, si$C$ est un compact convexe alors toute fonction continue de C sur C possède un point fixe.

2 .3 Théorème du point fixe de krasnoselskii

Théorème 2.7.[22](Arzela-Ascoli)

Soit $\Omega \subset C([0,b],\mathbb{R}^n)$ A est relativement compact si :

1- Ω est uniformément bornée, si : il existe $M > 0$ telle que :

$$\|f(t)\| \leq M, \forall t \in [0,b] \; et \; f \in \Omega \tag{2.5}$$

2- A est équicontinu c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$

$$\forall t_1, t_2 \in [0,b], |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| < \varepsilon, \forall f \in \Omega \tag{2.6}$$

Théorème 2.8 :[23](krasnoselskii)

Soient$C$ une sous-ensemble d'un espace E et$f, g: C \to E$:

- C:fermé, convexe.
- E:espace de Banach.
- $f et\ g$ sont continue, f contraction et$f(x) + g(y) \in C\ \forall x, y \in C.$

Alors $f + g$ admet un point fixe u dans C tel que $f(u) + g(u) = u$.

Définition 2.9. Soit Pun cône et une partie$P$ de$E$

Qui est stable pour la multiplication par tout réel positive

$$P = \{x \ / \ \forall t > 0 tn \in P\} \tag{2.7}$$

Proposition 2.10.$P: E \to F$est compact si P est continue

$\forall\ M$ Bornée de $E \Longrightarrow\ P(M)$est relativement compact

Operateur compact $\Longrightarrow$operateur complètement continue

2.3.1 Théorème de Krasnoselskii d'expansion et de compression d'un cône

Théorème 2.10.[24]

Soit E un espace de Banach $P \subseteq E$un cône et Ω_1, Ω_2deux boules ouvertes bornées de E centrées àl'origine avec $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$supposons que $A: P \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to$ P est un operateur complètement continue de sorte que

$$(i)\|Ax\| \leq \|x\| \quad , x \in P \cap \partial\Omega_1 \text{Et} \|Ax\| \geq \|x\| \quad , x \in P \cap \partial\Omega_2 \tag{2.8}$$

$$(ii)\|Ax\| \geq \|x\| \quad , x \in P \cap \partial\Omega_1 \text{Et} \|Ax\| \leq \|x\| \quad , x \in P \cap \partial\Omega_2 \tag{2.9}$$

Alors Aa un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$

Théorème 2.11.[25](Une autre version)

Soit P un cône dans un espace de Banach réel E,$P_c = \{x \in P|\ \|x\| \leq c\}$ et θ une fonction concave continue non négative sur P telle que $\theta(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in \bar{P}_c$et $P(\theta, b, d) = \{x \in P|\theta(x), \|x\| \leq d\}$ Supposons que $A: \bar{P}_c \to \bar{P}_c$ est complètement continu et il existe des constantes $0 \leq a \leq b \leq d \leq c$ telle que :

$(C_1)\{x \in P(\theta, b, d)|\theta(x) > b\} \neq \emptyset$ et $\theta(Ax) > b$ pour $x \in P(\theta, b, d)$; (2.10)

$(C_2)\|Ax\| < a$ Pour $x \leq a$; (2.11)

(C_3) $\theta(Ax) > b$ Pour $x \in P(\theta, b, d)$ avec $\|Ax\| > d$ (2.12)

Alors A à au moins trois points fixe x_1, x_2, x_3avec

$$\|x_1\| < a \quad ; \quad b < \theta(x_2)\,;\ avec \quad \theta(x_3) < b\,.$$

Remarque 2.12 : Si d=c, alors la condition (C_1) du théorème (2.10) implique (C_3) du même théorème.

PROBLEME INTEGRO –DIFFERENTIEL NON LINEAIRE AVEC DES CONDITIONS LOCALES

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions d'un problème integro-différentiel non linéaire avec des conditions locales.

3.1 Présentation du problème

On s'intéresse dans ce chapitre à un problème fractionnaire P engendrée par l'équation suivante :

$$D_{0_+}^{\alpha} u(t) + f\big(t, u(t)\big) = 0 \qquad 0 < t < 1 \tag{3.1}$$

Où $1 < \alpha < 2$ est un nombre réel

Avec les conditions locales

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{3.2}$$

$D_{0_+}^{\alpha}$ Est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α et

$f: [0,1] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ Une fonction continue

Lemme3. 1 : [6] supposons que $u \in C(0,1) \cap L(0.1)$ et α>0, alors l'équation la différentielle fractionnaire

$$D^{\alpha} u(t) = y(t)$$

a une solution unique donnée par :

$$u(t) = I^{\alpha} y(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_N t^{\alpha-N} \ pour\ C_I \in \mathbb{R}\,, i = 1 \ldots \ldots N$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer l'operateur d'intégration fractionnaire et d'appliquer les propriétés de la dérivée fractionnaire de R.L.

En appliquant le lemme (3.1) on a :

Lemme 3.2: Soit $y \in C[a, b]\ et\ 1 < \alpha \leq 2$, la solution unique de

$$D^{\alpha} u(t) + y(t) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{3,4}$$
$$u(0) = u(1) = 0, \tag{3.5}$$

Est donnée par :

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) y(s) ds$$

Où

$$G(t.s) = \begin{cases} \dfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \dfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \tag{3,6}$$

Démonstration

Puisque $y \in C[a,b]$ et $1 < \alpha \leq 2$, Nous prouvons applique le lemme (3.1) :

On a

$$u(t) = -I^{\alpha}y(t) + C_1t^{\alpha-1} + C_2t^{\alpha-2} \; pour \; C_I \in \mathbb{R} \, , i = 1, 2$$

En appliquant la définition de la dérivée au sens de Riemann Liouville

$$I^{\alpha}y(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)ds$$

on obtient les constantes$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Supposons que$C_2 = 0$,les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$ alors

$$u(1) = -\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)ds \; + C_1t^{\alpha-1} = 0$$

Donc

$$C_1 = \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)ds$$

Alors$C_2 = 0$, $C_1 = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \, y(s)ds/\Gamma(\alpha)$. Donc la solution unique de problème (3.4).(3.5) est :

$$u(t) = -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)ds \; + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)ds$$

D'âpres la relation de châle, on a :

$$u(t) = -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)ds \; + \int_0^t \frac{(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)ds \; + \int_t^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)ds$$

$$= \int_0^t \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)ds + \int_t^1 \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)ds$$

$$= \int_0^1 G(t,s)y(s)ds$$

La démonstration est complète.

Lemme 3.3 : la fonction $G(t,s)$définie par l'équation (3.6)satisfait aux conditions suivantes :

1. $G(t,s) > 0 \qquad pour \qquad t,s \in]0,1[$
2. Il existe une fonction positive$\gamma \in C]0,1[$telle que :

$$\min_{1/4\leq t\leq 3/4} G(t,s) \geq \gamma(s) \max_{0<t\leq 1} G(t,s) = \gamma(s)G(s,s) \qquad pour \qquad 0 < s < 1 \qquad (3,7)$$

Démonstration : en observons l'expression de(t,s) , il est claire que $G(t,s) >$ 0pour $s\,,t \in (0,1)$.

Dans ce qui suit nous montrons l'existence de $\gamma(s)$.

Premièrement pour $s \in (0,1)$, $G(t,s)$ décroit par rapport à t pour $s \leq t$ et croissante par rapport à t pour $t \leq s$, par conséquence, en notant par

$$g_1(t,s) = \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad g_2(t,s) = \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

On a

$$\min_{\frac{1}{4}\leq t\leq 1-1/n} G(t,s) = \begin{cases} g_1(1-1/n,s) & s \in]0,1/n]\,, \\ \min\left\{g_1(1-1/n,s), g_2\left(\frac{1}{n},s\right)\right\}, & s \in [1/n, 1-1/n], \\ g_2\left(\frac{1}{n},s\right) & s \in [1-1/n, 1[\,, \end{cases}$$

Pour $n = 4$ alors

$$\min_{1/4\leq t\leq 3/4} G(t,s) = \begin{cases} g_1\left(\frac{3}{4},s\right) & s \in]0,1/4]\,, \\ \min\left\{g_1\left(\frac{3}{4},s\right), g_2\left(\frac{1}{4},s\right)\right\}, & s \in [\,1/4,3/4], \\ g_2\left(\frac{1}{4},s\right) & s \in [3/4,1[\,, \end{cases}$$

Donc

$$\min_{1/4\leq t\leq 3/4} G(t,s) = \begin{cases} g_1\left(\frac{3}{4},s\right) & s \in]0,r], \\ g_2\left(\frac{1}{4},s\right) & s \in [r,1[\,, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\left[\frac{3}{4}(1-s)\right]^{\alpha-1} - \left(\frac{3}{4}-s\right)^{\alpha-1}\right\}, & s \in]0,r], \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{4^{\alpha-1}}(1-s)^{\alpha-1}, & s \in [r,1[, \end{cases}$$

Où$1/4 < r < 3/4$ est la solution unique de l'équation

$$\left[\frac{3}{4}(1-r)\right]^{\alpha-1} - \left(\frac{3}{4}-r\right)^{\alpha-1} = \frac{1}{4^{\alpha-1}}(1-r)^{\alpha-1}$$

Deuxièmement, en utilisant la monotonie de $G(t,s)$ on a

$$\max_{0\le t\le 1} G(t,s) = G(s,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[s(1-s)]^{\alpha-1} \quad ,s \in (0.1)$$

Ainsi

$$\gamma(s) = \begin{cases} \dfrac{\left[\frac{3}{4}(1-s)\right]^{\alpha-1} - \left(\frac{3}{4}-s\right)^{\alpha-1}}{[s(1-s)]^{\alpha-1}}, & s \in \,]0,r] \qquad (3.8) \\ \dfrac{1}{(4s)^{\alpha-1}}, & s \in [r,1[\qquad (3.9) \end{cases}$$

La démonstration est complète

Définition 3.6 : on dit qu'une fonctionnelleθ continue non négative sur un cône P d'uneespace de Banach réel E est concave si :

$$\theta(tx + (1-t)y) \ge t\theta(x) + (1-t)\theta(y) \qquad (3.10)$$

Pour toute $x, y \in P \; et \;\; 0 \le t \le 1$

3.2 Résultats d'existence des solutions

Dans cette section, nous imposons des conditions de croissance sur $f$qui nous permettent d'appliquer les théorèmes (2.10) et(2.11) pourétablir des résultats d'existence d'une solution positive pour problème (3.1) ;(3.2).

Soit $E = C[0,1]$ muni de la relation d'ordre :

$$u \le v \text{Si} u(t) \le v(t) \text{pour tout} t \in [0,1].$$

Et de la norme

$$|u| = \max_{0\le t\le 1} |u(t)|.$$

On définit le cône$P \subset E$par$P = \{u \in E | u(t) \ge 0\}$.

Soit la fonctionnelle concave continue non négative θ sur le cone P définie par

$$\theta(u) = \min_{1/4\le t\le 3/4} |u(t)|$$

Lemme 3.4.Soit $T: P \to E$ l'operateur défini par

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s) f\big(s,u(s)\big) ds \qquad (3.11)$$

Alors $T: P \to P$est complètement continue

Démonstration :

L'opérateur$T: P \to P$est évidemment continue comme conséquence immédiate de la non négative et la continuité de $G(t,s)$et$f(t,u)$.

Soit $\Omega \subset P$ bornée $i,e,$ Il existe une constante$M > 0$ telle que $\|u\| \le M$pour tout$u \in \Omega$.

SoitL $= \max\limits_{\substack{0<t\le 1 \\ 0\le u\le M}} |f(t,u)|$alors pour$u \in \Omega$on a

$$|Tu(t)| = \left|\int_0^1 G(t,s)f\big(s,u(s)\big)ds\right|$$
$$\leq \int_0^1 \left|G(t,s)f\big(s,u(s)\big)\right|ds \ \leq \int_0^1 \max_{\substack{0<t\leq 1\\ 0\leq u\leq M}} \left|G(t,s)f\big(s,u(s)\big)\right|ds$$
$$\leq \ L\int_0^1 G(s,s)ds$$

Donc $T(\Omega)$est uniformément bornée
D'autre part, étant donné $\epsilon > 0$, supposons que

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma(\alpha)\epsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Alors, pour chaque

$$u \in \Omega \ , t_1, t_2 \in [0,1] \ , t_1 < t_2 \ , \text{et} \quad t_2 - t_1 < \delta \ ,$$

Nous allons montrer que

$$|Tu(t_2) - Tu(t_1)| < \epsilon.$$

Ce que prouve l'équicontinuité de$T(\Omega)$.
Alors

$$|Tu(t_2) - Tu(t_1)| = \left|\int_0^1 G(t_2,s)f(s,u(s))ds \ - \int_0^1 G(t_1,s)f(s,u(s))ds\right|$$

Par la relation de châle on a :

$$|Tu(t_2) - Tu(t_1)| =$$
$$\int_0^{t_1}[G(t_2,s) - G(t_1,s)]\,f\big(s,u(s)\big)ds + \int_{t_1}^{t_2}[G(t_2,s) - G(t_1,s)]\,f\big(s,u(s)\big)ds$$
$$+ \int_{t_2}^{1}[G(t_2,s) - G(t_1,s)]\,f\big(s,u(s)\big)ds$$
$$< \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{t_1}(1-s)^{\alpha-1}(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})\,ds + \int_{t_1}^{t_2}(1-s)^{\alpha-1}(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})\,ds\right.$$
$$\left. + \int_{t_2}^{1}(1-s)^{\alpha-1}(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})\,ds\right]$$
$$< \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\left[(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})\int_0^{t_1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds + (t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})\int_{t_1}^{t_2}(1-s)^{\alpha-1}\,ds\right.$$
$$\left. + (t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})\int_{t_2}^{1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds\right]$$
$$< \frac{L}{\Gamma(\alpha)}(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} < \frac{L}{\Gamma(\alpha)}(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})$$

Dans ce qui suit, nous divisons la démonstration en deux cas

Cas1. $\delta \le t_1 < t_2 < 1$:

$$\begin{aligned}|Tu(t_2) - Tu(t_1)| &< \frac{L}{\Gamma(\alpha)}(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) \\ &\le \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\frac{\alpha-1}{\delta^{2-\alpha}}(t_2 - t_1) \\ &\le \frac{L}{\Gamma(\alpha)}(\alpha-1)\delta^{\alpha-2}\delta \\ &\le \frac{L}{\Gamma(\alpha)}(\alpha-1)\delta^{\alpha-1} \le \epsilon\end{aligned}$$

Cas2. $0 \le t_1 < \delta, t_2 < 2\delta$

$$\begin{aligned}|Tu(t_2) - Tu(t_1)| &< \frac{L}{\Gamma(\alpha)}(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) \\ &\le \frac{L}{\Gamma(\alpha)}t_2^{\alpha-1} \\ &< \frac{L}{\Gamma(\alpha)}(2\delta)^{\alpha-1} \le \epsilon\end{aligned}$$

Du Théorème d'Ascoli- Arzela, on en déduit que$T: P \to P$est complètement continue.
La démonstration est complète

Théorème3.9.soit$f(t,u)$est continue $[0,1] \times [0,\infty[$ supposons qu'il existe deux constantes positives $r_2 > r_1 > 0$telles que

(H_1) $f(t,u) \le Mr_2$Pour$(t,u) \in [0,1] \times (0, r_2)$; (3.12)

(H_2) $f(t,u) \le Nr_1$Pour$(t,u) \in [0,1] \times (0, r_1)$; (3.13)

Alors le Problème$(3,1)$, $(3,2)$a au moins une solution positive u telle que

$$r_1 \le \|u\| \le r_2$$

Démonstration : par les lemmes (2.3) et (3.4) on sait que$T: P \to P$ est complètement continue et que le problème (3.1),(3.2) a une solution$u = u(t)$si et seulement si u résout l'équation i.e. $u = Tu$pourappliquer théorème (2.10)nous séparons la démonstration en deux étapes

Etape 1. Soit$\Omega_2 = \{u \in P / \|u\| < r_2\}$.

Pour$u \in \partial\Omega_2$, on a$0 \le u(t) \le r_2$pourtout $t \in [0,10]$.

Il découle de (H_1) que pour$t \in [0,1]$,

$$\|Tu\| = \max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds \le Mr_2\int_0^1 G(s,s)ds = r_2 = \|u\|$$

Etape 2. Soit $\Omega_1 = \{u \in P | \|u\| < r_1\}$.

Pour $u \in \partial\Omega_1$on a $0 \le u(t) \le r_1$pour tout $t \in [0,1]$.

Par l'hypothèse (H_2)on a :

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s)f\big(s,u(s)\big)ds \geq \int_0^1 \gamma(s)G(s,s)f\big(s,u(s)\big)ds$$

$$\geq N\mathrm{r}_1 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \gamma(s)G(s,s)\,ds = \mathrm{r}_1 = \|u\|.$$

Pour $t \in [1/4,3/4]$.

Donc

$$\|Tu\| \geq \|u\| \quad \text{pour touty} \quad u \in \partial\Omega_1$$

Par conséquent, par(ii) du théorème (2.10) ,nous complétons la démonstration

Exemple 3.10.Considéré le problème suivante

$$D_{0+}^{3/2}u(t) + u^2 + \frac{\sin t}{4} + 1 = 0, \qquad 0 < t < 1 \qquad (3.14)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \qquad (3.15)$$

On obtient $M = 4/\sqrt{\pi} \approx 2.25676$, $N \approx 13.6649$. Si on choisit $\mathrm{r}_1 = 1/14$, $\mathrm{r}_2 = 1$ on a

$$f(t,u) = 1 + \frac{\sin t}{4} + u^2 \leq 2.2107 \leq M\mathrm{r}_2 \quad \text{pour} \quad (\mathrm{t,u}) \in [0,1] \times [0,1],$$

$$f(t,u) = 1 + \frac{\sin t}{4} + u^2 \geq 1 \geq N\mathrm{r}_1 \quad \text{pour} \quad (\mathrm{t,u}) \in [0,1] \times [0,1/14],$$

Avec l'utilisation du Théorème(3.9), le problème(3.14), (3.15) a au moins une solution u telle que$1/14 \leq \|\mathrm{u}\| \leq 1$.

Théorème 3.10:

Supposons que$f(t,u)$est continue sur$[0,1] \times [0,\infty[$et qu'il existedes constantes$0 < a < b < c$ telles que les hypothèses suivantes sont valables

(A_1) $\quad f(t,u) < Ma \quad pour \quad (t,u) \in [0,1] \times [0,\mathrm{a}];$ (3.16)

(A_2) $\quad f(t,u) < Nb \quad pour \quad (t,u) \in [1/4,3/4] \times [\mathrm{b,c}]$ (3.17)

(A_3) $\quad f(t,u) < Mc \quad pour \quad (t,u) \in [0,1] \times [0,\mathrm{c}];$ (3.18)

Alors, le problème(3.1), (3.2)a au moins trois solutions positives u_1, u_2et $u_3$avec

$$\max_{0\leq t\leq 1}|u_1(t)| < a \quad , \quad b < \min_{1/4\leq t\leq 3/4}|u_2(t)| < \max_{0\leq t\leq 1}|u_2(t)| \leq c$$

$$a < \max_{0\leq t\leq 1}|u_3(t)| \leq c \quad , \quad \min_{1/4\leq t\leq 3/4}|u_3(t)| < b$$

Démonstration :

Nous montrons d'abord que toutes les conditions du lemme (3.2) sont satisfaites.

Si$u \in \bar{P}_c$, alors $\|u\| \leq c$. L'hypothèse$(A3)$implique :

$$f\big(t, u(t)\big) < Mc \;\; pour \;\; 0 \leq t \leq 1.$$

Par conséquence

$$\|Tu\| \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 G(t,s) f(s, u(s) ds \right| \leq \int_0^1 G(s,s) f\big(s, u(s)\big) ds \quad \leq \int_0^1 G(s,s) M c ds \leq c,$$

d'où : $\bar{P}_c \rightarrow \bar{P}_{\dot{c}}$.

De la même manière si $\in \bar{P}_c$, alors l'hypothèse$(A1)$ implique :

$$f\big(t, u(t)\big) < Ma \,, 0 \leq t \leq 1.$$

Alors la condition $(C2)$du théorème (2.11) est satisfaite.

Pour vérifier la condition(C_1) duthéorème (2.11), on choisit

$$u(t) = (b+c)/2 \,, \; 0 \leq t \leq 1 \,.$$

C'est facile de voir que

$$u(t) = (b+c)/2 \in P(\theta, b, c), \quad \theta(u) = \theta(b+c)/2 > b,$$

par conséquent,$\{u \in P(\theta, b, c) | \theta(u) > d\} \neq \emptyset$.

Donc, si$u \in P(\theta, b, c)$,alors

$b \leq u(t) \leq c \;\; pour \;\; 1 \,/\, 4 \leq t \leq 3 \,/\, 4.$

A partir de l'hypothèse(A_2)ona

$$f\big(t, u(t)\big) \geq Nb \quad pour \;\; 1/4 \leq t \leq 3/4.$$

Donc

$$\theta(Tu) = \min_{1/4 \leq t \leq 3/4} |(Tu)(t)| \geq \int_0^1 \gamma(s) G(s,s) f\big(s, u(s)\big) ds$$

$$> \int_{1/4}^{3/4} \gamma(s) G(s,s) \, Nbds = b$$

$$i.e. \theta(Tu) > b \quad pour \quad u \in P(\theta, b, c)$$

Ceci montre que la condition (C_1)du théorème (2.11) est également satisfaite.

D'après le théorème (2.11) et la remarque (2.1) le problème (3.1),(3.2) a au moins trois solutions positive u_1, u_2et $u_3$satisfaisant

$$\max_{0\le t\le 1}|u_1(t)| < a \ , \qquad b < \min_{1/4\le t\le 3/4}|u_2(t)|$$
$$a < \max_{0\le t\le 1}|u_3(t)| \quad , \quad \min_{1/4\le t\le 3/4}|u_3(t)| < b$$

La démonstration est complète

exemple 3.12:

Considéré le problème suivant :

$$D_{0+}^{3/2}u(t) + f(t,u) = 0, \qquad 0 < t < 1 \qquad (3.19)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \qquad (3.20)$$

Ou

$$f(t,u) = \begin{cases} \dfrac{t}{20} + 14u^2 & pour \ \ u \le 1 \\ 13 + \dfrac{t}{20} + u & pour \ \ u > 1 \end{cases}$$

On a $M = 4/\sqrt{\pi} \approx 2.25676$, $N \approx 13.6649$.

En choisissant $a = 1/10$, $b = 1$, $c = 12$, alors on a :

$$f(t,u) = \frac{t}{20} + 14u^2 \le 0.19 \le Ma \approx 0.225 \quad pour \ \ (t,u) \in [0,1] \times [0,1/10]$$

$$f(t,u) = 13 + \frac{t}{20} + u \ge 14.05 \ge Nb \approx 13.7 \quad pour \ \ (t,u) \in [1/4, 3/4] \times [1,12]$$

$$f(t,u) = 13 + \frac{t}{20} + u \le 25.05 \le Mc \approx 27.1 \quad pour \ \ (t,u) \in [0,1] \times [0,12]$$

Avec l'utilisation du théorème(3.10), le problème(3.19), (3.20)a au moins trois solutions positives $u_1, u_2 \, et \, u_3$ avec

$$\max_{0\le t\le 1}|u_1(t)| < 1/10 \quad , \qquad 1 < \min_{1/4\le t\le 3/4}|u_2(t)| \le \max_{0\le t\le 1}|u_2(t)| \le 12$$

$$1/10 < \max_{0\le t\le 1}|u_3(t)| \le 12 \qquad , \quad \min_{1/4\le t\le 3/4}|u_3(t)| < 1$$

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et de la solution positive d'un problème integro – différentiel non linéaire avec des conditions locales par les différents théorèmes du point surtout le théorème du point fixe de Krasnoselski et ses dérivés.

Bibliographe

[1]A .M .A.El-Sayed,Non linear functional differential equations of arbitrary orders ,Non linear Anal.33(1998)181–186.

[2]A.A. Kilbas S.G. Samko et O.I. Marichev .Fractional Integrals and derivatives : theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers , 1993

[3]A.A.Kilbas,J.J.Trujillo,Differential quations of fractional order :methods ,results and problems II,Appl.Anal.81 (2002) 435–493

[4]K.S.Miller,B.Ross,An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,Wi-ley,NewYork,1993.

[5]Ipodlubny .Fractional Differential Equation calculus ,Academic Press .San Diego , 1999.

[6]K.S.Miller,Fractional differential equations,J.Fract.Calc.3(1993)49–57.

[7]I.Podlubny,The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order ,Inst .Expe .Phys.,Slov.Acad.Sci.,UEF-02-94,Kosice,1994.

[8]A.Babakhani,V.D.Gejji,Existence of positive solutions of non linear fractional differential equations,J.Math.Anal.Appl.278 (2003) 434–442.

[9]D. Delbosco, L. Rodino, Existence and uniqueness for a non linear fractional differential equation, J. Math.Anal.Appl. 204 (1996) 609–625.

[10]V.D.Gejji,A.Babakhani,Analysis of asystem of fractional differential equations,J.Math.Anal.Appl.293(2004)511–522.

[11]S.Q.Zhang,The existence of a positive solution for a non linear fractional differential equation,J.Math.Anal.Appl. 252 (2000) 804–812.

[12]S.Q.Zhang,Existence of positive solution for someclass of non linear fractional differential equations,J.Math.Anal.Appl.278 (2003) 136–148.

[13]B.Ross K.S. Miller an introduction to the fractional calculus and fractional differential equation .Wiley, New York. 1993

[14]Oberhettinger F ErdelyiA,Magnus W et tricomi F . Highertranscendetal functions . Krieger Pub , melbourne ,florida ,1981

[15]A.A. Kilbas S.G. Samko et O.I. Marichev .Fractional Integrals and derivatives : theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers.1993.

[16] I Podlubny. Fractionaldifferentialequations .academicPress ,San Diego ,1999.

[17]I Podlubny .fractional differential eaquations : an introduction to fractional derivatives ,fractional differential equations , to methods of their solution and some of their applications vol 198.Elsevier 1998.

[18] F. Huang B Guo, X .Pu. fractional partial differential equations and theirnumerical solutions China ,2015.

[19] K B Oidham J.Spanier .the fractional calculus ,academic Press. New York1974.

[20] J.J. Trujillo. A .Kilbas ,H. M .Sriivastava Theory and application of fractional differentail equations .Elsevier, North-Holland ,2006

[21] D.R Smart fixed point theory . Cambridge Uni. Press Cambridge , 1974

[22]E .Zeidler, non linear functionnal analysis of epidemics , of Epidemics , World Scientifi cpublishing Co. Pte Ltd. 2009

[23] T. Stuckless. Brouwer's fixed point theorem : Methods of proof Generalizations . 2003.
[24]]M.A.Krasnosel'skii, Positive Solutions of Operator Equations ,Noordhoff ,Groningen ,1964
[25]R.W.Leggett, L.R.Williams,Multiple positive fixed points of non linear operatoson ordere d Banach spaces, Indiana Univ. Math.J. 28(1979) 673–688