Abbes Laghror University Khenchela

L2 GM-GC-TP-2ING

2025/2026

Exam: Rational Mechanics
Duration: 1 hour 30 minutes

Exercise 01: (12 pts)

A homogeneous triangular plate ***ABC*** of weight ***P*** is attached to a fixed support via a spherical joint at point ***A*** and a cylindrical joint at point ***C***.

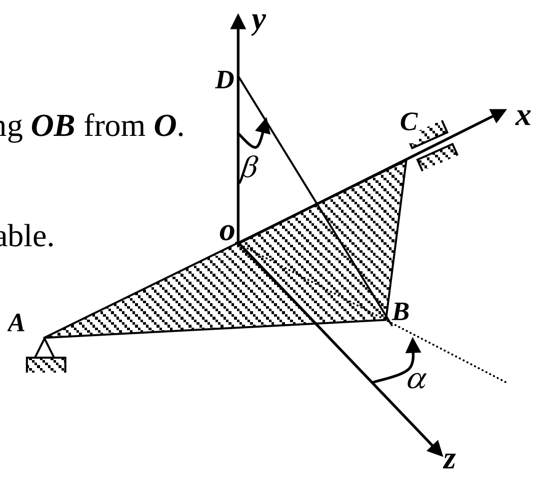
Given ***OA* = *OC* = *OB* = *a***. The plate is held in an inclined position at an angle $\alpha = 30°$ to the horizontal plane ***(xoz)*** by an inextensible cable ***BD***, attached at point ***D*** to a vertical wall. The cable makes an angle $\beta = 60°$ of with the vertical.

A load of weight ***Q* = *2P*** is suspended at point ***B (yoz).***

The center of gravity ***G*** of the plate is located **1/3** of the way along ***OB*** from ***O***.

1. Write the static equilibrium equations;

2. Determine the reactions at points ***A*** and ***C*** and the tension in the cable.



Exercise 02: (6 pts)

Consider the following vectors:

$\boldsymbol{U = 2i + 6k}$, $\quad \boldsymbol{V = 8i + yj + kz}$, $\quad \boldsymbol{P = 3i - 4j + 2k}$, $\quad \boldsymbol{Q = -2i + yj + 12k}$.

1. Determine ***y*** and ***z*** such that vectors ***U*** and ***V*** are collinear;

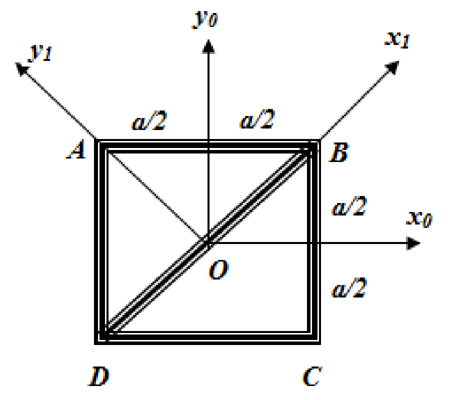
2. Determine the value of ***y*** such that vectors ***P*** and ***Q*** are perpendicular;

Exercise 03 : (02 pts)

A body is formed by assembling five (5) homogeneous bars. The bars form a square ***ABCD*** with side length ***a***, equipped with diagonal ***BD***.

We are given two coordinate systems: $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ and $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$

- Give the change-of-basis matrix from the coordinate system $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$ **to the coordinate system** $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$;



Good luck

F. KHADRAOUI

Université
Abbes LAGHROR
Khenchela

2GM-2GC-2TP-2ING

2025/2026

Examen : Mécanique Rationnelle
Durée : 01h30mn

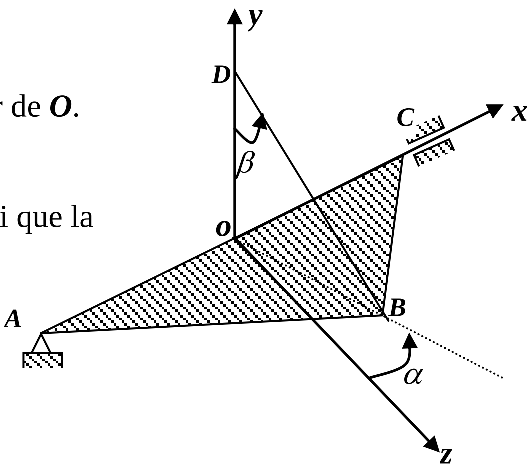
Exercice01: (12 pts)

Une plaque triangulaire homogène ***ABC*** de poids ***P*** est lié à un support fixe par l'intermédiaire d'une articulation sphérique au point ***A*** et cylindrique au point ***C***. On donne ***OA=OC=OB = a***. La plaque est maintenue en position inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport au plan horizontal ***(xoz)*** par un câble inextensible ***BD***, accroché au point ***D*** à un mur vertical. La corde fait un angle de $\beta = 60°$ avec la verticale.

Une charge de poids ***Q = 2P*** est suspendue au point ***B(yoz)***.

Le centre de gravité ***G*** de la plaque est situé ***1/3*** de ***OB*** à partir de ***O***.

1. Ecrire les équations d'équilibre statique ;
2. Déterminer les réactions des liaisons aux points ***A*** et ***C*** ainsi que la tension du câble.



Exercice 02 : (06 pts)

Soient les vecteurs :

U = 2 i + 6k, ***V = 8 i + y j + k z,*** ***P = 3 i − 4 j + 2 k,*** ***Q = − 2 i + y j + 12 k.***

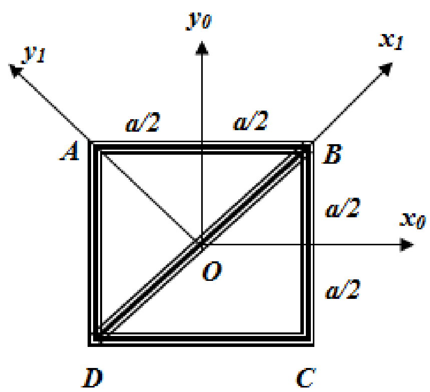
1. Déterminer ***y*** et ***z*** pour que les vecteurs ***U*** et ***V*** soient colinéaires ;
2. Déterminer la valeur de ***y*** pour que les vecteurs ***P*** et ***Q*** soient perpendiculaires;

Exercice 03: (02 pts)

Un corps est constitué par l'assemblage de cinq (05) barres homogènes. Les barres forment un carré ***ABCD*** de côté ***a***, muni de la diagonale ***BD***.

On se donne deux repères : $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ et $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$

- **Donner la matrice de passage du repère** $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$ **vers le repère** $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$;



Bon courage

F. KHADRAOUI

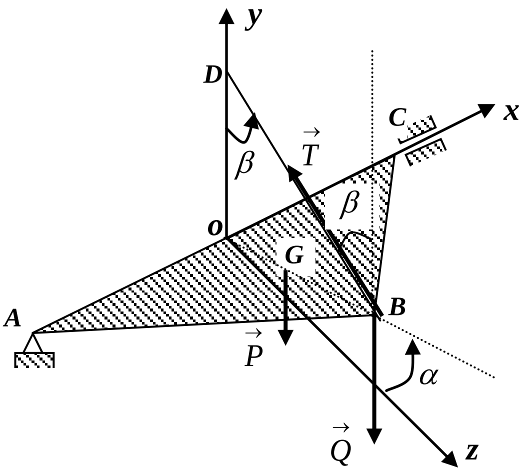
Solutions

Exercice 01: (12 pts)

Nous avons $OA = OB = OC = a$; $OG = \frac{a}{3}$; $Q = 2P$; $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$

Le point $B \in (yoz)$; $\vec{R}_A \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix}$; $\vec{R}_C \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Cy} \\ R_{Cz} \end{pmatrix}$; $\vec{T} \begin{pmatrix} 0 \\ T\cos\beta \\ -T\sin\beta \end{pmatrix}$; $\vec{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ -2P \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A\begin{cases} -a \\ 0 \\ 0 \end{cases} ; \; C\begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases} ; \; B\begin{cases} 0 \\ a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \end{cases} ; \; G\begin{cases} 0 \\ (a/3)\sin\alpha \\ (a/3)\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\begin{cases} 2a \\ 0 \\ 0 \end{cases} ; \; \overrightarrow{AB}\begin{cases} a \\ a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \end{cases} ; \; \overrightarrow{AG}\begin{cases} a \\ (a/3)\sin\alpha \\ (a/3)\cos\alpha \end{cases}$$



Le système est en équilibre statique, nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_C + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}_C + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{Q} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{\textit{(2)}}$$

La projection de l'équation ***(1)*** sur les axes donne trois équations scalaires :

$R_{Ax} = 0$ ***(3)***

$R_{Ay} + R_{Cy} + T\cos\beta - 2P - P = 0$ ***(4)***

$R_{Az} + R_{Cz} - T\sin\beta = 0$ ***(5)***

En développant l'équation vectorielle ***(2),*** nous obtenons trois autres équations scalaires :

$$\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Cy} \\ R_{Cz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ T\cos\beta \\ -T\sin\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -2P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ (a/3)\sin\alpha \\ (a/3)\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-aT\sin\alpha\sin\beta - aT\cos\alpha\cos\beta + 2aP\cos\alpha + \frac{aP}{3}\cos\alpha = 0 \qquad \textbf{\textit{(6)}}$$

$$-2aR_{Cz} + aT\sin\beta = 0 \qquad \textit{(7)}$$

$$2aR_{Cy} + aT\cos\beta - 2aP - aP = 0 \qquad \textit{(8)}$$

Les six équations permettent de trouver toutes les inconnues :

(3) $\Rightarrow$ $R_{Ax} = 0$ ***(6)*** $\Rightarrow$ $T = 2{,}32P$; ***(7)*** $\Rightarrow$ $R_{Cz} = P$

(8) $\Rightarrow$ $R_{Cy} = 0{,}92P$; ***(5)*** $\Rightarrow$ $R_{Az} = P$; ***(4)*** $\Rightarrow$ $R_{Ay} = 0{,}92P$

d'où : $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = 1{,}358P$; $R_C = \sqrt{R_{Cx}^2 + R_{Cy}^2 + R_{Cz}^2} = 1{,}358P$

Exercice 02: (06 pts)

1) Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires alors: $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 6 \end{cases} \wedge \begin{cases} 8 \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} -6y \\ -2z+48 \\ 2y \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 24 \end{cases}$

2) Si $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ sont perpendiculaires alors : $\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \\ -4 \\ 2 \end{cases} \bullet \begin{cases} -2 \\ y \\ 12 \end{cases} = 0 \Leftrightarrow -6 - 4y + 24 = 0 \quad y = \frac{9}{2}$$

Exercice 03: (02 pts)

1) Matrice de passage de R_1 *vers* R_0

$$\vec{i}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}_0 + 0.\vec{k}_0$$

$$\vec{j}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}_0 + 0.\vec{k}_0$$

$$\vec{i}_1 = 0.\vec{i}_0 + 0.\vec{j}_0 + \vec{k}_0$$

$$[P]R_1 --> R_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bon courage

F. KHADRAOUI