



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série:.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Systemes de reaction-diffusion et formation de motifs

Réalisé par : **LAOUADI Besma**

Dirigé par : **M. ZAIDI Messaoud**

Présenté le **13/09/2020**

Membres de jury :

M. NASRALLAH Ilham

M.A.A

Président

M. MANSOURI Djamel

M.A.A

Examineur

2019-2020



Remerciements

Nous remercions avant tous ALLAH de nous avoir donné la force et le courage pour réaliser ce travail.

Prière et salut sur notre prophète MOHAMED.

Nous tenons à remercier très fort respectable enseignant et encadreur Monsieur Messaoud ZAIDI pour son soutien et encouragement.

Nous remercions M. Ilham NASRALLAH et M. Djamel MANSOURI d'accepter avec gentilles d'examiner notre travail. Aussi nous remercions par cette occasion toutes les enseignants du département des mathématiques et informatique.

Et à tout ce qui nous a encouragés d'un simple mot, sourire ou une prière de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



Dédicaces

Je dédie se travail

A mes chers parents,

A mon cher frère,

A mes chères sœurs,

A mes chères amies,

A toute ma promotion 2019/2020,

A tous ceux qui me sont chers.



Résumé

Le but de ce mémoire est de donner une introduction sur les systèmes de réaction diffusion inclus le mécanisme de Turing de la formation de motifs. Nous avons choisi le système de Schnakenberg comme exemple d'application pour trouver les conditions qui forment des motifs.

mots clés : Système de réaction-diffusion - Formation de motifs - Existence globale - Fonction de Lyapunov - Alan Turing.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو إعطاء مقدمة لأنظمة الانتشار و رد الفعل بما في ذلك آلية تورينج لتشكيل النمط. لقد اخترنا نظام شناكمبرج كمثال للتطبيق لإيجاد الظروف التي تشكل الأنماط.

الكلمات المفتاحية نظام الانتشار و رد الفعل - تشكيل النمط - الوجود الكلي - دالة ليابونوف - آلان تورينج.

Abstract

The aim of this memory is to give an introduction to the reaction diffusion systems including the Turing mechanism of pattern formation. We have chosen the Schnakenberg system as an example of application to find the conditions which form patterns.

keywords : Reaction-diffusion systems - Pattern formation - Global existence - Lyapunov function - Alan Turing.

ACRONYMES ET NOTATION

- Ω : Domaine de \mathbb{R}^N .
- $\bar{\Omega}$: La fermeture de Ω .
- $\partial\Omega$: La frontière du Ω .
- t : Variable de temps.
- x : Variable de l'espace.
- Δ : Laplacien.
- ∇ : Le gradient.
- div : La divergence.
- M : Une matrice carrée.
- λ_i : Une valeur propre associée à une matrice.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: Ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans le corps \mathbb{K} .
- \cdot^t : Transposé de matrice \cdot .
- \cdot_t : Dérivée partielle de \cdot par rapport au variable t .
- $0_{\mathbb{R}^N}$: Le vecteur nul.
- $L^p(\Omega)$: Espace de Lebegue.
- $L^\infty(\Omega)$: Espace de Lebegue.
- $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$: L'ensemble des fonctions différentiables sur $\bar{\Omega}$ à valeur dans \mathbb{R}^3 et ses dérivées partielles sont continue.
- $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$: L'ensemble des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$.
- $\|\cdot\|_p$: La norme associée à l'espace de Lebegue $L^p(\Omega)$.
- $|\cdot|$: Valeur absolue.
- η : Vecteur unité normal extérieur à $\partial\Omega$.
- $\frac{\partial}{\partial\eta}$, ∂_η : La dérivée normale extérieure à $\partial\Omega$.
- dx : Mesure volumique.
- $d\sigma$: Mesure surfacique.
- \cdot : Produit scalaire usuelle de \mathbb{R}^N .
- J_i : Le vecteur densité du courant de la $i^{\text{ème}}$ particules.
- J : Matrice jacobienne.
- \det : Déterminant d'une matrice.
- Tr : Trace d'une matrice.
- \dot{Z} : Dérivée de la fonction Z .
- \approx : Approximation au voisinage précisée.
- EDO : Équation différentielle ordinaire.
- EDP : Équation aux dérivées partielles.

Table des matières

Introduction Générale	1
1 NOTIONS FONDAMENTALES	3
1.1 Un peu d'algèbre linéaire	3
1.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres	3
1.1.2 Diagonalisation d'une matrice	3
1.1.3 Formes quadratiques	4
1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle	4
1.2.1 Espaces fonctionnelles	4
1.2.2 Quelques opérateurs différentiables	5
1.2.3 Inégalités fondamentales	6
1.3 Formule de Green	6
1.4 Théorème de divergence	7
1.5 Fonctionnelle de Lyapunov	8
1.6 Régions invariantes	8
2 SYSTÈMES DE RÉACTION DIFFUSION	13
2.1 Modélisation de systèmes de réaction diffusion	13
2.1.1 Lois de Fick	14
2.1.2 La modélisation	14
2.2 Exemples biologiques de réaction diffusion	17
2.3 Phénomène d'explosion en temps fini	19
2.3.1 Notion de phénomène	19

TABLE DES MATIÈRES

2.3.2	Exemple élémentaire	19
2.3.3	Exemple de réaction diffusion	19
2.4	Existence locale et globale des solutions d'un système de réaction diffusion	22
2.4.1	Existence locale	22
2.4.2	Existence globale	23
2.5	Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine	24
2.5.1	Transformation de la matrice de diffusion à une matrice diagonale	25
2.5.2	Existence locale et régions invariantes	28
2.5.3	L'existence global	30
3	RÉACTION DIFFUSION ET FORMATION DE MOTIFS	35
3.1	Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces	36
3.1.1	Condition de nos dimensionnalisation	36
3.1.2	Analyse de stabilité	39
3.1.3	Stabilité sans diffusion	39
3.1.4	Instabilité induite par diffusion	40
3.1.5	Les coefficients critiques	42
3.1.6	Les conditions suffisantes pour la formation de motifs	42
3.2	Application sur le système de Schnakenberg	44
3.2.1	Le système de Schnakenberg	44
3.2.2	Les points d'équilibres	44
3.2.3	Instabilité induite par la diffusion pour le système de Schnakenberg	44
3.3	Motifs de poisson zèbre	47
	Conclusion générale et perspectives	49
	Bibliographie	50

Introduction Générale

Un système de réaction diffusion est modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations de deux ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus.

On trouve les systèmes de réaction diffusion dans plusieurs domaines, tels que la biologie, la biomathématique, chimie et l'écologie,.....

Ces systèmes de réaction diffusion sont de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - D\Delta u(t, x) = f(u(t, x)), & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

où D est une matrice carrée diagonalisable définie positive appelée matrice de diffusion, Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction régulière localement Lipschitzienne et généralement non linéaire, appelée terme réactif, $u : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ est l'inconnu et u_0 est la donnée initiale.

notre but dans ce travail est de faire une introduction sur les systèmes de réaction diffusion inclus la modélisation des systèmes de réaction diffusion en utilisant les deux lois de comportement de Fick (la première et la deuxième loi de Fick), nous rappelons quelques résultats classiques de ce domaine, puis l'étude de l'existence globale de solutions d'un système de réaction diffusion du matrice associé pleine de type 2×2 avec certaines conditions aux limites, en utilisant la méthode de la fonctionnelle de Lyapunov. Pour appliquer cette méthode, nous transformons la matrice pleine en une matrice diagonale, puis en appliquant la méthode.

les systèmes de réaction diffusion vient dans de nombreux domaines d'application, nous serons donc intéressés à l'appliquer uniquement dans la façon dont les motifs sont formés. À cette fin, nous étudions la formation de motifs de système de Schnakenberg qui est un système de deux espèces, selon le mécanisme de Turing.

Notre mémoire contient trois chapitres. Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions générales et certaines définitions préliminaires.

Dans le deuxième chapitre on présente les origines d'un système de réaction diffusion et quelques exemples. Ainsi que l'existence local et global du solution d'un système à deux composantes.

Le troisième chapitre présente une introduction sur la formation des motifs obtenue par l'interaction de deux espèces.

1 NOTIONS FONDAMENTALES

Le but de ce chapitre est de rappeler les notions et les résultats classiques fondamentaux d'algèbre linéaire et d'analyse fonctionnelle utiles pour aborder les autres chapitres.

1.1 Un peu d'algèbre linéaire

1.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Nous étudions les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice donnée M . Ceux-ci peuvent être utilisés pour transformer la matrice M en une forme plus simple qui est utile pour résoudre des autres problèmes plus difficile.

Définition 1.1.

On dit que λ est une valeur propre d'une matrice carrée M avec le vecteur propre associé v si

$$Mv = \lambda v.$$

1.1.2 Diagonalisation d'une matrice

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si elle est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D à coefficients dans \mathbb{K} telles que

$$M = PDP^{-1},$$

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = [V_1, V_2, \dots, V_n].$$

Les colonnes de P doivent être des vecteurs propres linéairement indépendants de M et les éléments diagonales de D doivent être leurs valeurs propres associées.

1.1.3 Formes quadratiques

Définition 1.2.

Une forme quadratique est un polynôme homogène du second degré de n variables u_1, u_2, \dots, u_n , peut être représentée par la forme suivante

$$Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j,$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice symétrique. Si nous désignons la matrice-colonne $(u_1, u_2, \dots, u_n)^t$ par u et la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j$ par $A(u, u)$, nous pouvons écrire

$$A(u, u) = u^t A u = A u \cdot u. \quad (1.1)$$

Définition 1.3.

Une forme quadratique $A(u, u)$ est dite définie positive si

$$A(u, u) > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad u \neq 0_{\mathbb{R}^n}. \quad (1.2)$$

Théorème 1.1.

Une forme quadratique $A(u, u)$ est définie positive si, et seulement si, tous les déterminants principaux successifs de sa matrice des coefficients sont strictement positifs.

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Espaces fonctionnelles

Soit p un entier naturel non nul et Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N .

$L^p(\Omega)$ désigne l'espace de Banach des fonctions mesurables et p -intégrables au sens de Lebesgue sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Si $p = +\infty$, on définit :

$L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions u mesurables et vérifiant $|u| \leq C$, presque partout sur Ω où C est un constant. Ce espace muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C, |u| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

est un espace de Banach.

Soit X un espace de Banach $t \rightarrow u(t) : [0, T] \rightarrow X$.

On définit les espaces $L^p(0, T, X)$ pour $p \in [p, \infty[$ et $L^\infty(0, T, X)$ comme suit :

$$L^p(0, T, X) = \{u \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0, T, X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$L^\infty(0, T, X) = \{u \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \sup_{t \in (0, T)} \|u\|_X < \infty\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0, T, X)} = \sup_{t \in (0, T)} \|u\|_X.$$

1.2.2 Quelques opérateurs différentiables

Soit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Le gradient de la fonction u est définie sous la forme

$$\text{grad } u = \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)^t.$$

On appelle Laplacien de la fonction u , la fonction définie par

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Pour une fonction vectorielle $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on appelle divergence de U , la fonction définie par

$$\text{div } U(x) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial U_n}{\partial x_n}.$$

Remarque 1.2.1.

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\Delta u = \text{div}(\nabla u).$$

Pour une fonction vectorielle $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on a

$$\text{div } U = \nabla \cdot U.$$

1.3 Formule de Green

1.2.3 Inégalités fondamentales

Inégalité de Young

Soient a et b deux réels positifs, et p et q des réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (1.3)$$

Inégalité de Hölder

Pour $1 < p, q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et pour f, g deux fonctions de $L^p(\Omega)$ et $L^q(\Omega)$ respectivement, on a l'inégalité

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.4)$$

Remarque 1.2.2.

Pour $p = q = 2$, l'inégalité s'appelle inégalité de Cauchy-Schwartz.

1.3 Formule de Green

Dans toute cette section Ω est un ouvert de l'espace \mathbb{R}^N (borné ou non). Nous supposons aussi que Ω est un ouvert régulier de classe \mathcal{C}^1 (un ouvert régulier est un ouvert dont le bord est une hypersurface (une variété de dimension $N - 1$) régulière, et que cet ouvert est localement situé d'un seul coté de sa frontière). On définit alors la normale extérieure au bord $\partial\Omega$ comme étant le vecteur unité $\eta = (\eta_i)_{1 \leq i \leq N}$ normal en tout point au plan tangent de Ω et pointant vers l'extérieur de Ω . Dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ on note dx la mesure volumique, ou mesure de Lebesgue de dimension N . Sur $\partial\Omega$, on note $d\sigma$ la mesure surfacique, ou mesure de Lebesgue de dimension $N - 1$ sur la variété $\partial\Omega$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 1.2.

Soit Ω un ouvert régulier de classe \mathcal{C}^1 . Soit w une fonction de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x) \eta_i(x) d\sigma, \quad (1.5)$$

où η_i est la i -ème composante de la normale extérieure unité de Ω .

1.4 Théorème de divergence

Le Théorème 1.2 a de nombreux corollaires qui sont tous des conséquences immédiates de la formule de Green (1.5).

Corollaire 1.1. (*Formule d'intégration par parties*)

Soit Ω un ouvert régulier de classe \mathcal{C}^1 . Soit u et v deux fonctions de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\eta_i(x) d\sigma. \quad (1.6)$$

Démonstration.

Il suffit de prendre $w = uv$ dans le Théorème 1.2. □

Corollaire 1.2.

Soit Ω un ouvert régulier de classe \mathcal{C}^1 . Soit u une fonction de $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ et v une fonction de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, toutes deux à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x) d\sigma, \quad (1.7)$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq N}^t$ est le vecteur gradient de u , et $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$.

Démonstration.

On applique le Corollaire 1.1 à v et $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et on somme en i . □

1.4 Théorème de divergence

Théorème 1.3.

Ce théorème [25] énonce que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et η une normale extérieure unitaire à Ω .

Soit $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, alors

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} F \cdot \eta d\sigma. \quad (1.8)$$

Remarque 1.4.1.

Ce théorème est appelé aussi le théorème de Green-Ostrogradski.

1.5 Fonctionnelle de Lyapunov

Définition 1.4.

On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée au système de réaction-diffusion formé de m équations, toute fonction

$$L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

telle que

$$\frac{d}{dt}(L(u_1(t, \cdot), \dots, u_m(t, \cdot))) \leq 0,$$

pour tout $t > 0$ et toute solution $u(\cdot, x) = (u_1(\cdot, x), u_2(\cdot, x), \dots, u_m(\cdot, x))$ du système.

1.6 Régions invariantes

Définition 1.5.

Les régions invariantes sont essentielles pour prouver l'existence de la solution pour tout $t > 0$ que l'on définit au suivante.

Un sous-ensemble fermé $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ est appelé une région invariante pour un système de réaction diffusion, si, toute solution $u(t, x)$ ayant ses valeurs initiales dans Σ , reste dans Σ pour tout $(t, x) \in [0, T_{\max}) \times \Omega$.

Exemple 1.6.1.

Considérons le système de réaction-diffusion suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u - b\Delta v = f(u, v) \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - a\Delta v = g(u, v) \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (1.10)$$

avec les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} \lambda_1 u + (1 - \lambda_1)\partial_\eta u &= \beta_1, & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ \lambda_2 v + (1 - \lambda_2)\partial_\eta v &= \beta_2, & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.11)$$

et les condition initiales :

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) \quad x \in \Omega. \quad (1.12)$$

Où Ω est un domaine borné de classe C^1 dans \mathbb{R}^N , à frontière $\partial\Omega$, ∂_η désigne la dérivée normale extérieure à $\partial\Omega$.

1.6 Régions invariantes

a, b, c sont des constantes positives vérifiant $2a > (b + c)$ (la condition de parabolicité du système).

Les données initiales sont supposées être dans la région :

$$\Sigma = \begin{cases} \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } v \geq \mu|u|\} & \text{si } \beta_2 \geq \mu|\beta_1|, \\ \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \mu u \geq |v|\} & \text{si } \beta_1 \geq \mu|\beta_2|. \end{cases}$$

Où $\mu = \sqrt{\frac{c}{b}}$.

On suppose que les termes de réactions f et g sont des fonctions polynomiales continument différentiables non négatives sur Σ , $(f(r, s), g(r, s)) \in \Sigma$, pour tout $(r, s) \in \partial\Sigma$, vérifiant :

$$g(s, \mu s) \geq \mu f(s, \mu s) \quad g(-s, \mu s) \geq -\mu f(-s, \mu s), \text{ pour tout } s \geq 0, \quad (1.13)$$

et pour une constante $C < \mu$, on a :

$$Cf(u, v) + g(u, v) \leq C_1(u + v + 1), \quad (u, v) \in \Sigma, \quad (1.14)$$

où C_1 est une constante positive.

Les composantes $u(t, x)$ et $v(t, x)$ représentent soit des concentrations chimiques, soit des densités biologiques, et le système (1.9)-(1.10) est un modèle mathématique qui décrit plusieurs phénomènes chimiques et biologiques.

Proposition 1.1.

Supposons que (f, g) sont non négatives sur la région Σ , pour un $(u_0, v_0) \in \Sigma$, la solution $(u(t, x), v(t, x))$ du problème (1.9)-(1.12) reste dans Σ , pour tout $t \in [0, T^]$.*

Démonstration.

On commence par le cas où : $\beta_2 \geq \mu|\beta_1|$:

En multipliant l'équation (1.9) par \sqrt{c} , et l'équation (1.10) par \sqrt{b} , on obtient :

$$\sqrt{c} \frac{\partial u}{\partial t} - a\sqrt{c}\Delta u - b\sqrt{c}\Delta v = \sqrt{c}f(u, v), \quad (1.15)$$

$$\sqrt{b} \frac{\partial v}{\partial t} - c\sqrt{b}\Delta u - a\sqrt{b}\Delta v = \sqrt{b}g(u, v). \quad (1.16)$$

Puis, en additionnant les deux équations (1.15) et (1.16) membre à membre, puis retranchant (1.15) de (1.16), on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{b} \frac{\partial v}{\partial t} - a(\sqrt{c}\Delta u + \sqrt{b}\Delta v) - \sqrt{bc}(\sqrt{c}\Delta u + \sqrt{b}\Delta v) &= \sqrt{c}f + \sqrt{b}g, \\ -\sqrt{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{b} \frac{\partial v}{\partial t} - a(-\sqrt{c}\Delta u + \sqrt{b}\Delta v) - \sqrt{bc}(-\sqrt{c}\Delta u + \sqrt{b}\Delta v) &= -\sqrt{c}f + \sqrt{b}g. \end{aligned}$$

1.6 Régions invariantes

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{c}u + \sqrt{b}v) - (a + \sqrt{ab})(\sqrt{c}\Delta u + \sqrt{b}\Delta v) &= \sqrt{c}f + \sqrt{b}g, \\ \frac{\partial}{\partial t}(-\sqrt{c}u + \sqrt{b}v) - (a - \sqrt{ab})(-\sqrt{c}\Delta u + \sqrt{b}\Delta v) &= -\sqrt{c}f + \sqrt{b}g.\end{aligned}$$

On faire le changement des variables suivant :

$$\begin{aligned}w(t, x) &= \sqrt{c}u + \sqrt{b}v \quad (t, x) \in]0, T^*[\times \Omega, \\ z(t, x) &= -\sqrt{c}u + \sqrt{b}v \quad (t, x) \in]0, T^*[\times \Omega.\end{aligned}$$

Donc, le système précédent devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} - (a + \sqrt{bc})\Delta w &= F(w, z), & \text{dans }]0, T^*[\times \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial t} - (a - \sqrt{bc})\Delta z &= G(w, z), & \text{dans }]0, T^*[\times \Omega.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Avec les conditions aux bords :

$$\lambda w + (1 - \lambda)\frac{\partial w}{\partial \eta} = \rho_1 \quad \text{et} \quad \lambda z + (1 - \lambda)\frac{\partial z}{\partial \eta} = \rho_2, \quad \text{sur }]0, T^*[\times \partial\Omega.\tag{1.18}$$

Et les conditions initiales :

$$w(0, x) = w_0(x), \quad z(0, x) = z_0(x), \quad x \in \Omega.\tag{1.19}$$

Où

$$F(w, z) = (\sqrt{c}f + \sqrt{b}g)(u, v) \text{ et } G(w, z) = (\sqrt{b}g - \sqrt{c}f)(u, v), \quad \forall (u, v) \in \Sigma,\tag{1.20}$$

et

$$w_0 = \sqrt{c}u_0(x) + \sqrt{b}v_0(x), \quad z_0(x) = -\sqrt{c}u_0(x) + \sqrt{b}v_0(x), \quad x \in \Omega,$$

et

$$\rho_1 = \sqrt{c}\beta_1 + \sqrt{b}\beta_2, \quad \rho_2 = -\sqrt{c}\beta_1 + \sqrt{b}\beta_2.\tag{1.21}$$

Remarquons que la condition de parabolicité du système (1.9)-(1.10) implique celle du système (1.17) i.e

$$2a > b + c \Rightarrow a - \sqrt{bc} > 0 \quad (\text{on peut le montrer par l'absurde}).$$

Maintenant, il suffit de prouver que la région :

$$\{(w, z) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } w \geq 0, z \geq 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

1.6 Régions invariantes

est invariante pour le système (1.17).

D'après l'inégalité (1.13) on a :

$$F(0, z) = \sqrt{b}g(-v, \mu v) + \sqrt{c}f(-v, \mu v) \geq 0, \quad \forall z \geq 0 \quad \forall v \geq 0,$$

alors $w(t, x) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in]0, T^*[\times\Omega$.

Grâce à la méthode des régions invariantes (voir J. Smoller [18]), et puisque :

$$G(w, 0) = \sqrt{b}g(v, \mu v) - \sqrt{c}f(v, \mu v) \geq 0, \quad \forall w \geq 0 \quad \forall v \geq 0.$$

Alors : $z(t, x) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in]0, T^*[\times\Omega$.

Donc $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est une région invariante pour le système (1.17).

Donc, Σ est une région invariante pour le système (1.9) - (1.12).

Pour le deuxième cas où : $\beta_1 \geq \mu|\beta_2|$ tous les résultats précédents restent valables pour la région :

$$\Sigma = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } \mu u \geq |v|\}.$$

Le système (1.17) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - (a - \sqrt{ab})\Delta w &= F(w, z), \quad \text{dans }]0, T^*[\times\Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial t} - (a + \sqrt{ab})\Delta z &= G(w, z), \quad \text{dans }]0, T^*[\times\Omega. \end{aligned}$$

Avec les conditions aux bords (1.18) et les conditions initiales (1.19), et

$$w = \sqrt{c}u - \sqrt{b}v \quad \text{et} \quad z = \sqrt{c}u + \sqrt{b}v, \quad \forall (t, x) \in]0, T^*[\times\Omega, \quad (1.22)$$

et

$$F(w, z) = (\sqrt{c}f - \sqrt{b}g)(u, v) \quad \text{et} \quad G(w, z) = (\sqrt{b}g + \sqrt{c}f)(u, v), \quad \forall (u, v) \in \Sigma, \quad (1.23)$$

et

$$w_0 = \sqrt{c}u_0(x) - \sqrt{b}v_0(x), \quad z_0(x) = \sqrt{c}u_0(x) + \sqrt{b}v_0(x), \quad x \in \Omega,$$

et

$$\rho_1 = \sqrt{c}\beta_1 - \sqrt{b}\beta_2, \quad \rho_2 = \sqrt{c}\beta_1 + \sqrt{b}\beta_2. \quad (1.24)$$

Les conditions (1.13) et (1.14) revient

$$\mu f(s, \mu s) \geq g(s, \mu s) \quad \mu f(s, -\mu s) \geq -g(s, -\mu s), \quad \text{pour tout } s \geq 0, \quad (1.25)$$

1.6 Régions invariantes

et

$$Cf(u, v) + g(u, v) \leq C'(u + v + 1), \quad (u, v) \in \Sigma, \quad (1.26)$$

pour un constante $C > \mu$, C' est un constante positive.

De même principe on trouve :

Σ est une région invariante pour le système (1.9)-(1.12). □

2 SYSTÈMES DE RÉACTION DIFFUSION

Introduction

Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles, paraboliques, donnés sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) - D\Delta u(t, x) = F(u(t, x)) \quad t \geq 0, x \in \Omega.$$

Ces systèmes servent de modèles dans de nombreux domaines en constituant un excellent laboratoire théorique pour la compréhension de certains processus naturels.

Ici le temps t varie dans un intervalle $[0, T]$; x dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^N , l'inconnue u est une fonction définie sur $[0, T] \times \Omega$ à valeurs dans \mathbb{R}^p , qui dans les applications correspond à un p -vecteurs de concentrations d'espèces chimiques, de températures, de densités de populations, etc. D est une $p \times p$ matrice qui sera le plus souvent diagonale, Δ désigne le laplacien et $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction non-linéaire modélisant les phénomènes de réaction mis en jeu (Réaction chimique par exemple).

2.1 Modélisation de systèmes de réaction diffusion

Dans cette section nous allons présenter les étapes à suivre pour établir le système de réaction-diffusion, ainsi que des certaines lois de la chimie dont nous avons besoin.

2.1 Modélisation de systèmes de réaction diffusion

2.1.1 Lois de Fick

2.1.1.1 Première loi de Fick

La première loi de Fick énonce que le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration. Cette loi est inspirée de la loi de "Fourier" sur la conduction de la chaleur. Elle peut être vue comme une définition du vecteur densité du courant J_i .

Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante :

$$J_i = -d\nabla C_i \quad \text{tel que } d > 0. \quad (2.1)$$

2.1.1.2 Seconde loi de Fick

La loi de conservation des espèces indique que la variation par unité de temps de la quantité de particules i , $\iiint_V C_i dx$ dans un volume donné V est égale au flux sortant $\iint_S J_i d\sigma$ du vecteur densité de courant J_i de particules i à travers la surface fermée S délimitant le volume V .

En utilisant le théorème de la divergence, et en identifiant les deux intégrants ci-dessous, on obtient la deuxième loi de Fick suivante

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V C_i dx = \iint_S J_i \cdot \eta d\sigma = \iiint_V \nabla \cdot J_i dx. \quad (2.2)$$

Le signe moins provient du fait que la concentration diminue quand le flux sortant augmente.

On a donc

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla \cdot J_i = 0. \quad (2.3)$$

2.1.2 La modélisation

Les systèmes de réaction-diffusion peuvent être obtenus à partir d'équations de conservation de la masse.

Supposons qu'on étudie un système contenant p quantités C_1, C_2, \dots, C_p , qui peuvent représenter des densités, des concentrations de réactifs chimiques, de population, etc.

Les densités des espèces sont représentées par un vecteur

$$C(t, x) = (C_1(t, x), C_2(t, x), \dots, C_p(t, x)), \quad t \geq 0, x \in \Omega$$

où Ω est un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^N . On note J_i le flux de l'espèce C_i et f_i son taux de création volumique horaire. Pour tout $A \subset \Omega$ borné, régulier, la conservation de la masse

2.1 Modélisation de systèmes de réaction diffusion

pour C_i à l'intérieur de A s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A C_i + \int_{\partial A} J_i \cdot \eta = \int_A f_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad (2.4)$$

où η est la dérivée normale extérieure sur la frontière ∂A .

D'après le théorème de Green-Ostrogradski,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A C_i + \int_A \operatorname{div} J_i = \int_A f_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

Comme A est quelconque, on obtient l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \operatorname{div} J_i = f_i, \quad i = 1, \dots, p. \quad (2.5)$$

D'après la loi de Fick 1, J_i est proportionnel au gradient de la concentration des espèces, ce qui donne,

$$J_i = -d_{ii} \nabla C_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (2.6)$$

où les d_{ii} sont les coefficients de diffusion, $D = (d_{ii})_{1 \leq i \leq p}$ est une matrice diagonale avec $d_{ii} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, p$.

On retrouve finalement le système de réaction-diffusion

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial t} \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial C_p}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta C_1 \\ \Delta C_2 \\ \vdots \\ \Delta C_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t, x, C) \\ f_2(t, x, C) \\ \vdots \\ f_p(t, x, C) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Le système de réaction-diffusion s'accompagne souvent de certaines conditions initiales et d'autres aux bords selon l'origine et la nature du problème étudié.

S'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière de Ω sur lequel le problème est posé, nous choisissons les conditions aux bords de Neumann. Et s'il n'y a pas d'individus sur la frontière, nous prenons les conditions aux bords homogènes de Dirichlet.

Lorsque les données initiales sont suffisamment régulières, l'existence locale de solutions pour les systèmes de la forme (2.7) est bien connue.

L'existence globale est un problème ouvert en général, et on sait qu'elle ne peut avoir lieu sans hypothèses supplémentaires sur les f_i , termes de réaction cinétique.

Laissez-nous faire quelques commentaires sur la structure des non-linéarités f_i . Tout d'abord, on supposera toujours que le modèle préserve la positivité des solutions. Il est bien connu

2.1 Modélisation de systèmes de réaction diffusion

que cela revient à supposer que $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ est quasi-positive, ce qui signifie

$$(\mathbf{H}_1) \forall i \in \{1, \dots, p\}, f(t, x, C) \geq 0 \quad \forall (t, x, C) \in (0, +\infty) \times \Omega \times [0, +\infty)^p \text{ tel que } C_i = 0.$$

Ensuite, pour espérer l'existence de solutions globales en temps, f doit satisfaire des hypothèses supplémentaires. Ces hypothèses viennent souvent du modèle qu'on étudie.

Par exemple, la conservation de la masse correspond à supposer $\sum_{i=1}^p f_i = 0$. Plus généralement, la masse totale décroît si

$$(\mathbf{H}_2) \quad \sum_{i=1}^p f_i \leq 0.$$

On vérifie facilement que les hypothèses (\mathbf{H}_1) et (\mathbf{H}_2) , avec des conditions de Neumann homogène au bord, garantissent que les solutions de (2.7) sont uniformément bornées dans $L^1(\Omega)$ étant donné que pour tout $t > 0$,

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^p C_i(t, x) dx \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^p C_i(0, x) dx, \quad (2.8)$$

et $\|C_i(t)\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} C_i(t, x) dx$ puisque C_i est positive. Dans le cas homogène, où les fonctions C_i ne dépendent pas de x , on peut remarquer qu'elles sont aussi solutions du système d'équations différentielle ordinaires associé

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial t} \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial C_p}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x, C) \\ f_2(t, x, C) \\ \vdots \\ f_p(t, x, C) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Pour des données initiales positives, les solutions restent positives. Étant donné que

$$\sum_{i=1}^p C_i(t) \leq \sum_{i=1}^p C_i(0), \quad (2.10)$$

elles sont uniformément bornées sur leur intervalle maximal de définition. Par conséquent, dans ce cas particulier, les solutions maximales sont globales.

Il est alors naturel de se demander si les hypothèses (\mathbf{H}_1) et (\mathbf{H}_2) sont suffisantes pour assurer l'existence de solutions globales fortes pour le système de réaction diffusion (2.7).

La réponse est non : des solutions explicites d'un système du type (2.7) avec les propriétés (\mathbf{H}_1) et (\mathbf{H}_2) ont été construites dans [6], et ces solutions explosent en norme $L^\infty(\Omega)$ en temps fini. Dans ce dernier exemple, les coefficients de diffusion sont pourtant constants, et

2.2 Exemples biologiques de réaction diffusion

les non linéarités sont bornées par des expressions polynomiales.

L'explosion peut même avoir lieu en dimension $N = 1$, à condition que la croissance des non linéarités soit assez rapide. Ceci prouve que lorsqu'on s'intéresse à l'existence globale de solutions fortes, on doit faire des hypothèses supplémentaires sur $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Il existe de nombreuses références sur les problèmes d'existence globale pour ces systèmes, où diverses hypothèses sur les fonctions (f_1, f_2, \dots, f_p) sont examinées [8] [9] [23]. Pour une vue d'ensemble, voir [7].

L'existence de solutions globales faibles est plus facile à obtenir dans le cas de coefficients de diffusion constants et pour des non linéarités a priori bornées pour tout $T > 0$ dans $L^1((0, T), \Omega)$. L'existence de solutions globales faibles est prouvée dans [7]. Ce résultat implique que si la croissance de f_i par-rapport à C est au plus quadratique, on a l'existence de solutions globales faibles sous les hypothèses (\mathbf{H}_1) et (\mathbf{H}_2) . Ce résultat repose de façon essentielle sur une estimation L^2 , pour les coefficients de diffusion d_{ii} constants, cette estimation garantit que sous les hypothèses (\mathbf{H}_1) et (\mathbf{H}_2) , les solutions de (2.7) satisfont les estimations a priori

$$\forall T > 0, \exists K = K(T, \|C(0)\|_{L^2(\Omega)^p}, d_{ii}) > 0 \text{ tel que } \|C\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^p} \leq K.$$

2.2 Exemples biologiques de réaction diffusion

Modèle de glycolyse

Le processus appelé glycolyse est une voie métabolique composée d'un ensemble de dix réactions chimiques catalysées par des enzymes. Ce processus se produit dans le cytosol de la cellule. Une molécule de glucose a six atomes de carbone et lorsqu'elle est brisée, deux molécules se forment, chacune avec 3 atomes de carbone. Ces molécules sont appelées pyruvate ou acide. Les produits finaux de ce processus sont deux molécules d'ATP, deux molécules de pyruvate et deux molécules de $NADH^+$.

Le NAD (nicotinamide adénine dinucléotide) est une coenzyme, c'est-à-dire une substance organique non protéique nécessaire au fonctionnement de certaines enzymes.

La forme sans dimension du modèle de glycolyse est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + i - ku - uv^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + ku + uv^2 - v. \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2 Exemples biologiques de réaction diffusion

L'interprétation biologique est la suivante : u représente la concentration de glucose, v la concentration de produit pyruvate, $d = \frac{D_v}{D_u}$, où D_u et D_v sont les coefficients de diffusion. Le terme uv^2 représente la consommation non linéaire de u pour la première équation et l'activation de v pour la deuxième équation. Le paramètre positif i représente une quantité initiale de glucose. Le paramètre k , également positif, est lié dans la première équation à la consommation naturelle de glucose et dans la seconde à la production de pyruvate.

Modèle de coagulation du sang

Lorsqu'un vaisseau sanguin est blessé, le corps commence un processus pour arrêter le saignement, appelé hémostasie. La coagulation du sang est une partie importante de l'hémostasie et se compose d'une voie complexe d'événements moléculaires et cellulaires qui aboutit à la formation d'un caillot de fibrine. Ce caillot de fibrine recouvre la paroi du vaisseau sanguin blessé pour arrêter la perte de sang et pour commencer la réparation des tissus endommagés. Trois étapes principales peuvent être utilisées pour illustrer de manière simplifiée le processus de formation de caillots. Dans la première étape, après la rupture d'un vaisseau sanguin, un complexe de substances, appelé activateur de la prothrombine, se forme. Dans la deuxième étape se produit la conversion de la prothrombine en thrombine par l'action de l'activateur de la prothrombine. Dans la troisième et dernière étape, la thrombine agit comme une enzyme pour catalyser la conversion du fibrinogène en filaments de fibrine, qui retiendront les érythrocytes, les plaquettes et le plasma, formant le caillot de fibrine. Les équations qui modélisent la coagulation sanguine sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \delta - ku - uv^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + \beta + ku + uv^2 - v. \end{cases} \quad (2.12)$$

Le système ci-dessus est écrit sous la forme sans dimension, où u est la concentration de thrombine, v est la concentration de fibrinogène, δ est la quantité initiale de thrombine, k est la consommation initiale de thrombine, d est le coefficient de diffusion et β est la quantité initiale de granules libérés par les plaquettes.

2.3 Phénomène d'explosion en temps fini

2.3.1 Notion de phénomène

Le phénomène d'explosion se produit dans divers types d'équations d'évolution non linéaires. Dans ce travail, nous ne traiterons que quelques exemples des équations paraboliques.

2.3.2 Exemple élémentaire

L'exemple le plus simple d'apparition du phénomène d'explosion est le problème des EDO.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^2, & t > 0, \\ u(0) = a > 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

La solution unique est définie uniquement dans l'intervalle fini $[0, T)$, où $T = \frac{1}{a}$. La solution est explicité comme suit

$$u(t) = \frac{1}{T - t},$$

et satisfait $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = +\infty$. Nous considérons la variable t comme un temps et nous disons que la solution explose en temps fini $t = T$. Par cet exemple, le concept d'explosion peut être décrit comme un phénomène pour lequel la solution n'est pas définie globalement car elle tend à l'infini dans un temps infini.

2.3.3 Exemple de réaction diffusion

Nous considérons l'exemple suivant [16]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - u + u^2, \quad t > 0, 0 < x < \pi, \quad (2.14)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t > 0. \quad (2.15)$$

Nous définissons (comme fonction auxiliaire)

$$\psi(t) = \int_0^\pi u(t, x) \sin x dx.$$

Nous pouvons donc multiplier l'EDP (2.14) par $\sin(x)$ et une intégration sur $[0, \pi]$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial t} \sin x dx, \\ &= \int_0^\pi \Delta u \sin x dx - \psi + \int_0^\pi u^2 \sin x dx. \end{aligned}$$

2.3 Phénomène d'explosion en temps fini

Une intégration par parties pour l'intégrale $\int_0^\pi \Delta u \sin x dx$ donne

$$\int_0^\pi \Delta u \sin x dx = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \cos x dx.$$

D'après les conditions aux limites (2.15) et une autre intégration par parties pour $\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \cos x dx$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \Delta u \sin x dx &= - \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \cos x dx, \\ &= - \int_0^\pi u \sin x dx, \\ &= -\psi. \end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2\psi + \int_0^\pi u^2 \sin x dx,$$

de l'inégalité de Cauchy-Schwartz et on choisit $f = u(\sin x)^{\frac{1}{2}}$ et $g = (\sin x)^{\frac{1}{2}}$, avec une intégration sur l'intervalle $[0, \pi]$, alors nous obtenons

$$\int_0^\pi u \sin x dx \leq \left[\int_0^\pi u^2 \sin x dx \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\int_0^\pi \sin x dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

ce qui équivaut à

$$\left(\int_0^\pi u \sin x dx \right)^2 \leq \left[\int_0^\pi u^2 \sin x dx \right] \left[\int_0^\pi \sin x dx \right].$$

Cette inéquation nous conduit à

$$\psi^2 \leq 2 \int_0^\pi u^2 \sin x dx,$$

ce qui donne

$$\int_0^\pi u^2 \sin x dx \geq \frac{\psi^2}{2},$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2\psi + \int_0^\pi u^2 \sin x dx \geq -2\psi + \frac{\psi^2}{2}.$$

Par conséquent, si nous partons d'une valeur initiale satisfaisante

$$\psi(0) = \int_0^\pi u_0(x) \sin x dx > 4,$$

alors nous obtenons

$$\frac{\partial \psi(0)}{\partial t} \geq -2\psi(0) + \frac{\psi^2(0)}{2} = \psi(0) \left[\frac{\psi(0)}{2} - 2 \right] > 0,$$

2.3 Phénomène d'explosion en temps fini

une fonction croissante monotone.

On montre que la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = -2\psi + \frac{\psi^2}{2}, \\ \psi(0) = \psi_0. \end{cases}$$

est

$$\psi(t) = \left[\frac{1}{4} + e^{2t} \left(\psi_0^{-1} - \frac{1}{4} \right) \right]^{-1}.$$

On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2e^{2t} \left(\psi_0^{-1} - \frac{1}{4} \right) \left[\frac{1}{4} + e^{2t} \left(\psi_0^{-1} - \frac{1}{4} \right) \right]^{-2}. \quad (2.16)$$

D'autre part

$$\psi(t) = \left[\frac{1}{4} + e^{2t} \left(\psi_0^{-1} - \frac{1}{4} \right) \right]^{-1}.$$

Alors

$$\psi^{-1} = \frac{1}{4} + e^{2t} \left(\psi_0^{-1} - \frac{1}{4} \right),$$

par suite

$$e^{2t} \left(\psi_0^{-1} - \frac{1}{4} \right) = \psi^{-1} - \frac{1}{4}.$$

Remplaçant dans (2.16)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2\psi^2 \left[\psi^{-1} - \frac{1}{4} \right].$$

Finalement on trouve l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -2\psi + \frac{\psi^2}{2}, \\ \psi(0) &= \left[\frac{1}{4} + \left(\psi_0^{-1} - \frac{1}{4} \right) \right]^{-1} = \psi_0. \end{aligned}$$

La solution tend à l'infini, comme

$$\psi^{-1} = \frac{1}{4} + e^{2t^*} \left(\psi_0^{-1} - \frac{1}{4} \right) = 0 \iff t^* = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{1 - 4\psi_0^{-1}} \right],$$

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \psi(t) = +\infty, \quad t^* = T_{\max} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{1 - 4\psi_0^{-1}} \right] < +\infty.$$

C'est-à-dire temps fini.

De l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous trouvons

$$|\psi| = \left| \int_0^\pi u \sin x dx \right| \leq \int_0^\pi |u| |\sin x| dx \leq \|u\|_{L^2(0,\pi)} \times \|\sin x\|_{L^2(0,\pi)}.$$

2.4 Existence locale et globale des solutions d'un système de réaction diffusion

Nous savons déjà que $\psi \xrightarrow[t \rightarrow T_{\max}]{} +\infty$, donc il en résulte directement que $\|u\|_{L^2_{(0,\pi)}} \xrightarrow[t \rightarrow T_{\max}]{} +\infty$, en cas de $\psi(0) > 4$

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_{\infty} = +\infty,$$

et donc explosion en temps fini des solutions.

2.4 Existence locale et globale des solutions d'un système de réaction diffusion

Introduction

Pour démontrer l'existence des solutions des systèmes de réaction diffusion, il y a plusieurs méthodes telles que la méthode des régions invariantes, méthode de l'effet régularisant, méthodes fonctionnelles basées sur des estimations a priori ou sur des fonctionnelles de Lyapunov.

2.4.1 Existence locale

Soit Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N de frontière $\partial\Omega$ régulière. Considérons le système de réaction-diffusion à deux composante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(u, v) & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u, v) & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x) & \text{sur } \Omega, \\ \lambda_1 u + (1 - \lambda_1)\partial_{\eta} u = \beta_1, & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ \lambda_2 v + (1 - \lambda_2)\partial_{\eta} v = \beta_2, & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.17)$$

Où les propriétés suivantes sont supposées vérifiées

(H₁) a, b sont des constantes strictement positives, $\beta_i \geq 0$ et soit $0 < \lambda_i < 1$, $\lambda_i = 1$ ou $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2$.

(H₂) Les non linéarités f et g sont deux fonctions continûment différentiables de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} avec

$$f(0, v) \geq 0, \quad g(u, 0) \geq 0 \quad \text{pour tout } u, v \geq 0,$$

ce qui assure que le système (2.17) préserve la positivité.

(H₃) $(u_0, v_0) \in L^{\infty}(\Omega) \times L^{\infty}(\Omega)$ avec $u_0(x), v_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

2.4 Existence locale et globale des solutions d'un système de réaction diffusion

Théorème 2.1.

Sous les hypothèses (\mathbf{H}_1) , (\mathbf{H}_2) et (\mathbf{H}_3) [23], le système (2.17) admet une unique solution locale (u, v) sur $[0, T_{\max}) \times \Omega$, et il existe deux fonctions $N_1, N_2 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ continues telles que $0 \leq u(t, x) \leq N_1(t)$ et $0 \leq v(t, x) \leq N_2(t)$ pour tout $(t, x) \in [0, T_{\max}) \times \Omega$. De plus le temps maximal d'existence T_{\max} est caractérisé par

$$\text{si } T_{\max} < +\infty, \quad \text{alors } \lim_{t \rightarrow T_{\max}} (\|u(t)\|_{\infty} + \|v(t)\|_{\infty}) = +\infty. \quad (2.18)$$

2.4.2 Existence globale

Il n'existe pas de solutions générales des systèmes de réaction diffusion.

On passe maintenant à l'existence globale de la solution du système (2.17), c'est-à-dire déterminer si $T_{\max} = +\infty$, nous utilisons la contra-posée de la caractérisation (2.18) du temps maximal d'existence.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{s'il existe une fonction } M : [0; +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \text{ continue telle que} \\ \quad \|u(t)\|_{\infty} + \|v(t)\|_{\infty} \leq M(t) \text{ pour tout } t \in [0, T_{\max}) \\ \quad \text{alors } T_{\max} = +\infty. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

C'est-à-dire, si les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ sont bornées pour tout $t \in [0, T]$, $T < T_{\max}$, alors, $T_{\max} = +\infty$.

Abdelmalek et Kouachi [12], a généralisé le système d'une matrice diagonale à m composants, et utiliser une seule inégalité pour la condition de croissance polynomiale des termes de réaction.

Proposition 2.1.

On considère des problèmes paraboliques semi-linéaires de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u), \quad x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , D est une matrice diagonale définie positive, dite la matrice de diffusion. $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction localement Lipchitzienne.

Soit X un espace de Banach des fonctions définies dans Ω . On suppose que le problème (2.20) possède pour tout $u_0 \in X$ une solution unique u dans l'intervalle $[0, T]$; où $T = T(u_0)$. Alors il existe $T_{\max} = T_{\max}(u_0) \in (T, +\infty]$ avec les propriétés suivantes :

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

i) La solution u est continue dans l'intervalle $[0, T_{\max})$,

ii) Si $T_{\max} < \infty$, alors u ne peut être continue dans $[0, \tau)$ pour tout $\tau \gg T_{\max}$

On appelle u la solution maximale et T_{\max} est son temps maximal d'existence,

iii) D'autre côté on considère que $T = T(\|u_0\|_X)$. Alors l'un des deux :

$T_{\max} = +\infty$ ou $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_X = +\infty$ est satisfait.

Le principe de prolongement de la solution nous conduit à l'alternative suivante :

a) ou bien $T_{\max} = +\infty$ et la solution est dite globale,

b) ou bien $T_{\max} < +\infty$ et la solution explose en temps fini c'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty.$$

Ainsi pour étudier l'existence globale des solutions, il suffit d'avoir des estimations uniformes sur ces solutions.

Par conséquent, pour montrer l'existence globale de solutions classiques, il suffit de montrer que celles-ci restent uniformément bornées sur leur temps d'existence.

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

Nous considérons le système de réaction-diffusion suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_{11}\Delta u - a_{12}\Delta v = f(u, v) \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a_{21}\Delta u - a_{22}\Delta v = g(u, v) \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (2.22)$$

avec des conditions aux limites

$$\lambda u + (1 - \lambda) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \beta_1 \quad \text{et} \quad \lambda v + (1 - \lambda) \frac{\partial v}{\partial \eta} = \beta_2 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \quad (2.23)$$

et les données initiales

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.24)$$

où

$$0 < \lambda < 1 \quad \text{et} \quad \beta_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad (2.25)$$

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

(Conditions aux limites non homogènes de Robin), ou

$$\lambda = \beta_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.26)$$

(Conditions aux limites homogènes de Neumann), ou

$$1 - \lambda = \beta_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.27)$$

(Conditions aux limites homogènes de Dirichlet).

Ω est un domaine ouvert borné de la classe \mathcal{C}^1 dans \mathbb{R}^N , les constantes a_{ij} ($i, j = 1, 2$) sont supposés être positifs et vérifient l'inégalité

$$(a_{12} + a_{21})^2 < 4a_{11}a_{22},$$

qui reflète la parabolicity du système et implique en même temps que la matrice de diffusion

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

est définie positive. Les valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) de la matrice A sont positives.

2.5.1 Transformation de la matrice de diffusion à une matrice diagonale

Lemme 2.1.

Le système de réaction-diffusion avec une matrice 2×2 pleine est équivalente à un problème similaire mais avec une matrice diagonale que l'on précisé au dessous.

Démonstration.

Soient $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ les vecteurs propres de la matrice A^t associée à ses valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$). Pour $i = 1, 2$ fixée, on multiplions l'équation (2.21) par x_{i1} et l'équation (2.22) par x_{i2} , on trouve

$$\begin{cases} x_{11} \frac{\partial u}{\partial t} - a_{11}x_{11}\Delta u - a_{12}x_{11}\Delta v = x_{11}f(u, v), \\ x_{12} \frac{\partial v}{\partial t} - a_{21}x_{12}\Delta u - a_{22}x_{12}\Delta v = x_{12}g(u, v). \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} x_{21} \frac{\partial u}{\partial t} - a_{11}x_{21}\Delta u - a_{12}x_{21}\Delta v = x_{21}f(u, v), \\ x_{22} \frac{\partial v}{\partial t} - a_{21}x_{22}\Delta u - a_{22}x_{22}\Delta v = x_{22}g(u, v). \end{cases}$$

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

Puis, on ajoutons les equations résultantes, on trouve

$$\frac{\partial(x_{11}u + x_{12}v)}{\partial t} - (a_{11}x_{11} + a_{21}x_{12})\Delta u - (a_{12}x_{11} + a_{22}x_{12})\Delta v = x_{11}f(u, v) + x_{12}g(u, v), \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial(x_{21}u + x_{22}v)}{\partial t} - (a_{11}x_{21} + a_{21}x_{22})\Delta u - (a_{12}x_{21} + a_{22}x_{22})\Delta v = x_{21}f(u, v) + x_{22}g(u, v). \quad (2.29)$$

D'autre part, on a

$$A^t X = \lambda X,$$

alors

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} \\ \lambda_1 x_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{12} = \lambda_1 x_{11}, \\ a_{12}x_{11} + a_{22}x_{12} = \lambda_1 x_{12}. \end{cases}$$

Et

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 x_{21} \\ \lambda_2 x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_{21} + a_{21}x_{22} = \lambda_2 x_{21}, \\ a_{12}x_{21} + a_{22}x_{22} = \lambda_2 x_{22}. \end{cases}$$

Donc, les equations (2.28)-(2.29) revient

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_{11}u + x_{12}v)}{\partial t} - \lambda_1 x_{11} \Delta u - \lambda_1 x_{12} \Delta v &= x_{11}f(u, v) + x_{12}g(u, v), \\ \frac{\partial(x_{21}u + x_{22}v)}{\partial t} - \lambda_2 x_{21} \Delta u - \lambda_2 x_{22} \Delta v &= x_{21}f(u, v) + x_{22}g(u, v). \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_{11}u + x_{12}v)}{\partial t} - \lambda_1 \Delta(x_{11}u + x_{12}v) &= x_{11}f(u, v) + x_{12}g(u, v), \\ \frac{\partial(x_{21}u + x_{22}v)}{\partial t} - \lambda_2 \Delta(x_{21}u + x_{22}v) &= x_{21}f(u, v) + x_{22}g(u, v). \end{aligned}$$

On pose

$$w_i(t, x) = (x_{i1}u + x_{i2}v)(t, x), \quad i = 1, 2, \quad \text{dans }]0, T^*[\times\Omega, \quad (2.30)$$

et

$$F_i(w_1, w_2) = x_{i1}f + x_{i2}g, \quad i = 1, 2. \quad (2.31)$$

Alors le système (2.21)-(2.24) devient

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \lambda_1 \Delta w_1 = F_1(w_1, w_2) \quad \text{dans }]0, T^*[\times\Omega, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \lambda_2 \Delta w_2 = F_2(w_1, w_2) \quad \text{dans }]0, T^*[\times\Omega. \quad (2.33)$$

avec des conditions aux limites

$$\lambda w_i + (1 - \lambda) \frac{\partial w_i}{\partial \eta} = \rho_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{sur }]0, T^*[\times\partial\Omega, \quad (2.34)$$

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

et les données initiales

$$w_i(0, x) = w_i^0(x), \quad i = 1, 2, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.35)$$

où

$$\rho_i = x_{i1}\beta_1 + x_{i2}\beta_2, \quad i = 1, 2, \quad (2.36)$$

et

$$w_i^0(x) = x_{i1}u_0(x) + x_{i2}v_0(x) \quad x \in \Omega \quad i = 1, 2. \quad (2.37)$$

Réciproquement, soit (w_1, w_2) vérifiée (2.32)-(2.35) et d'après (2.30) et (2.31)

$$\begin{cases} \frac{\partial(x_{11}u + x_{12}v)}{\partial t} - \lambda_1 \Delta(x_{11}u + x_{12}v) = x_{11}f + x_{12}g, \\ \frac{\partial(x_{21}u + x_{22}v)}{\partial t} - \lambda_2 \Delta(x_{21}u + x_{22}v) = x_{21}f + x_{22}g. \end{cases}$$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ une matrice tel que λ_1, λ_2 sont ses valeurs propres et $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ sont les valeurs propres de sa transposée A^t . Alors

$$\begin{cases} x_{11} \frac{\partial u}{\partial t} + x_{12} \frac{\partial v}{\partial t} - a_{11}x_{11}\Delta u - a_{21}x_{12}\Delta u - a_{12}x_{11}\Delta v - a_{22}x_{12}\Delta v = x_{11}f + x_{12}g, \\ x_{21} \frac{\partial u}{\partial t} + x_{22} \frac{\partial v}{\partial t} - a_{11}x_{21}\Delta u - a_{21}x_{22}\Delta u - a_{12}x_{21}\Delta v - a_{22}x_{22}\Delta v = x_{11}f + x_{12}g. \end{cases}$$

On multiplions la première équation par $-x_{22}$ et la deuxième par x_{12} puis en faire l'addition entre les equations résultantes, on trouve

$$(x_{12}x_{21} - x_{22}x_{11}) \frac{\partial u}{\partial t} - a_{11}(x_{12}x_{21} - x_{22}x_{11})\Delta u - a_{12}(x_{12}x_{21} - x_{22}x_{11})\Delta v = (x_{12}x_{21} - x_{22}x_{11})f(u, v),$$

et comme la matrice A^t a deux valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable, et la matrice constituée les vecteurs propre c'est une matrice de passage, donc elle est forcément inversible, donc sa determinant n'est pas nul, c à d $x_{12}x_{21} - x_{22}x_{11} \neq 0$. alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_{11}\Delta u - a_{12}\Delta v = f(u, v).$$

De même principe on trouve la deuxième equation

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a_{21}\Delta u - a_{22}\Delta v = g(u, v).$$

Tout d'abord, la condition de la parabolicity du système (2.21)-(2.22) implique celle du système (2.32)-(2.33); à cause de

$$(a_{12} + a_{21})^2 < 4a_{11}a_{22} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

Étant donné que λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) sont les valeurs propres de la matrice A^t , problème (2.21)-(2.24) est équivalent au problème (2.32) - (2.35). \square

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

Si on pose

$$\underline{a} = \min\{a_{11}, a_{22}\} \quad \text{et} \quad \bar{a} = \max\{a_{11}, a_{22}\}.$$

Alors la positivité des coefficients de diffusion implique que

$$\lambda_1 < \underline{a} \leq \bar{a} < \lambda_2. \quad (2.38)$$

Les données initiales sont supposées être dans la région

$$\Sigma = \begin{cases} \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \mu_2 v \leq u \leq \mu_1 v\} & \text{si } \mu_2 \beta_2 \leq \beta_1 \leq \mu_1 \beta_2, \\ \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \frac{1}{\mu_2} u \leq v \leq \frac{1}{\mu_1} u\} & \text{si } \frac{1}{\mu_2} \beta_1 \leq \beta_2 \leq \frac{1}{\mu_1} \beta_1. \end{cases}$$

Où

$$\mu_1 \equiv \frac{\underline{a} - \lambda_1}{a_{21}} > 0 > \mu_2 \equiv \frac{\underline{a} - \lambda_2}{a_{21}}. \quad (2.39)$$

On traitera le premier cas.

Nous supposons que les termes de réaction f et g sont continûment différentiables, polynomialement bornée sur Σ , $(f(r, s), g(r, s))$ est dans Σ pour tout (r, s) dans $\partial\Sigma$ (nous disons que (f, g) pointe en Σ sur $\partial\Sigma$); c'est-à-dire,

$$\mu_2 g(\mu_2 s, s) \leq f(\mu_2 s, s) \quad \text{et} \quad f(\mu_1 s, s) \leq \mu_1 g(\mu_1 s, s), \quad \forall s \geq 0, \quad (2.40)$$

et pour les constantes positives C et $\alpha > -\mu_2$ suffisamment proche de $-\mu_2$, nous avons

$$f(u, v) + Cg(u, v) \leq C_1(u + \alpha v + 1) \quad \forall (u, v) \in \Sigma, \quad (2.41)$$

où C_1 est une constante positive.

2.5.2 Existence locale et régions invariantes

Dans cette sous-section, nous prouvons que si (f, g) pointe dans Σ sur $\partial\Sigma$, alors Σ est un région invariante pour le problème (2.21) - (2.24), c'est-à-dire que la solution reste dans Σ pour tout données initiales en Σ . Une fois les régions invariantes construites, les deux problèmes de l'existence locale et globale deviennent plus faciles à établir : pour le premier problème nous avons démontré dans la sous-section précédent que le système (2.21) - (2.22) avec les conditions aux limites (2.23) et les données initiales en Σ est équivalente à un problème pour lequel l'existence local tout au long de l'intervalle de temps $[0, T_{\max}[$ peut être obtenu par une procédure connu et pour le second, puisque nous utilisons des techniques habituelles basées sur les fonctionnels de Lyapunov qui ne sont pas applicables directement au problème (2.21) - (2.24) et besoin de régions invariantes.

Le résultat principal de ce paragraphe est

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

Proposition 2.2.

Supposons que (f, g) point dans Σ sur $\partial\Sigma$, alors pour tout (u_0, v_0) dans Σ la solution $(u(t, \cdot), v(t, \cdot))$ du problème (2.21) - (2.24) reste en Σ pour tout t dans $[0, T^*]$.

Démonstration.

D'après le lemme précédent et pour prouver que Σ est une région invariante pour le système (2.21)–(2.22), il suffit de prouver que la région

$$\{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } w_i \geq 0, i = 1, 2\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad (2.42)$$

est invariante pour le système (2.32)–(2.33) et que

$$\Sigma = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } w_i = (x_{i1}u + x_{i2}v) \geq 0, \quad i = 1, 2\}. \quad (2.43)$$

Comme $\begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A^t associée à la valeur propre λ_i , $i = 1, 2$, ensuite, si nous supposons sans perte de généralité que $a_{11} \leq a_{22}$ nous avons

$$(a_{11} - \lambda_i)x_{i1} + a_{21}x_{i2} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Si on choisi $x_{12} = \frac{1}{\mu_1}$ et $x_{22} = -\frac{1}{\mu_2}$, alors

$$\begin{aligned} x_{i1}u + x_{i2}v \geq 0, \quad i = 1, 2, & \iff \frac{1}{\mu_1} \left(-\frac{1}{\mu_1}u + v \right) \geq 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\mu_2} \left(-\frac{1}{\mu_2}u + v \right) \geq 0 \\ & \iff u \leq \mu_1 v \quad \text{et} \quad u \geq \mu_2 v, \end{aligned}$$

car $\mu_2 < 0 < \mu_1$.

Alors (2.43) est prouvé et le système (2.32)–(2.35) peut être écrit avec

$$w_1 = -u + \mu_1 v \quad \text{et} \quad w_2 = u - \mu_2 v. \quad (2.44)$$

Et

$$F_1(w_1, w_2) = -f + \mu_1 g \quad \text{et} \quad F_2(w_1, w_2) = f - \mu_2 g. \quad (2.45)$$

Maintenant, pour prouver que la région $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est invariant pour le système (2.32)–(2.33), il suffit à montrer que $F_1(w_1, w_2) \geq 0$ pour tout (w_1, w_2) tels que $w_1 = 0$ et $w_2 \geq 0$ et $F_2(w_1, w_2) \geq 0$ pour tout (w_1, w_2) tels que $w_1 \geq 0$ et $w_2 = 0$, grâce à la méthode de la région invariante (Smoller [18]).

Suivant ce raisonnement et en tenant compte du fait que $v \geq 0$ dans Σ , Nous arrivons à la condition (2.40).

Alors $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est une région invariante pour le système (2.32)–(2.33).

Donc Σ est une région invariante pour le système (2.21) - (2.23). \square

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

Puis système (2.21)–(2.22) avec les conditions aux limites (2.23) et les données initiales dans Σ est équivalent au système (2.32)–(2.33) avec les conditions aux limites (2.34) et données initiales positives (2.35). Comme ρ_1 et ρ_2 donnée par

$$\rho_1 = -\beta_1 + \mu_1\beta_2 \quad \text{et} \quad \rho_2 = \beta_1 - \mu_2\beta_2,$$

sont positifs (parce que on choisir le premier cas de Σ), nous avons pour toutes données initiales dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ ou $L^p(\Omega)$, $p \in (1, +\infty)$, L'existence et unicité de solution local au problème (2.32) - (2.35) et par conséquent ceux du problème (2.21) - (2.24) découlent de la théorie de l'existence fondamentale pour les équations différentielles semi-linéaires abstraites. Les solutions sont classiques sur $]0, T^*[$, où T^* désigne le temps d'explosion éventuel en $L^\infty(\Omega)$. La solution locale est continuée globalement par un estimations à priori.

Une fois les régions invariantes construites, on peut appliquer la technique de Lyapunov et établir l'existence et l'unicité de solution globale pour (2.21) - (2.24).

2.5.3 L'existence global

Comme déterminant du système algébrique linéaire (2.30), par rapport à variables u et v , est différent de zéro, pour prouver l'existence globale de solutions de problème (2.21)–(2.24), on doit le prouver pour le problème (2.32)–(2.35). Pour ce fin, il est bien connu que (Henry [17]), il suffit de dériver une estimation uniforme de $\|F_1(w_1, w_2)\|_p$ et $\|F_2(w_1, w_2)\|_p$ sur $[0, T^*[$ pour certains $p > \frac{N}{2}$. Définissons, pour tout entier positif n , la suite finie

$$\theta_i = \theta^{(n-i)^2}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.46)$$

où θ est une constante positive suffisamment grand tels que

$$\theta > \frac{\text{Tr } A}{2\sqrt{\det A}} \equiv \frac{a_{11} + a_{22}}{2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}. \quad (2.47)$$

Le résultat principal de cette sous-section est

Théorème 2.2.

Soit $(w_1(t, \cdot), w_2(t, \cdot))$ une solution positive de problème (2.32) - (2.35). Introduire la fonctionnelle

$$t \longrightarrow L(t) = \int_{\Omega} H_n(w_1(t, x), w_2(t, x)) dx, \quad (2.48)$$

où

$$H_n(w_1, w_2) = \sum_{i=0}^n C_n^i \theta_i w_1^i w_2^{n-i}. \quad (2.49)$$

Alors la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^]$, $T^* < T_{\max}$.*

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

Démonstration.

La preuve est similaire à celle de [14]. Dérivons L par rapport à t on trouve

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial H_n}{\partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial H_n}{\partial w_2} \frac{\partial w_2}{\partial t} \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\lambda_1 \frac{\partial H_n}{\partial w_1} \Delta w_1 + \lambda_2 \frac{\partial H_n}{\partial w_2} \Delta w_2 \right) dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial H_n}{\partial w_1} F_1 + \frac{\partial H_n}{\partial w_2} F_2 \right) dx \\ &= I + J.\end{aligned}$$

Par simple utilisation de la formule de Green nous avons

$$I = I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \left(\lambda_1 \frac{\partial H_n}{\partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial H_n}{\partial w_2} \frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right) d\sigma, \quad (2.50)$$

et

$$I_2 = - \int_{\Omega} \left(\lambda_1 \frac{\partial^2 H_n}{\partial w_1^2} |\nabla w_1|^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 H_n}{\partial w_1 \partial w_2} \nabla w_1 \nabla w_2 + \lambda_2 \frac{\partial^2 H_n}{\partial w_2^2} |\nabla w_2|^2 \right) dx. \quad (2.51)$$

Tout d'abord, calculons les première et deuxième dérivées partielles de H_n par rapport à w_1 et w_2 . On trouve

$$\frac{\partial H_n}{\partial w_1} = \sum_{i=1}^n i C_n^i \theta_i w_1^{i-1} w_2^{n-i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H_n}{\partial w_2} = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) C_n^i \theta_i w_1^i w_2^{n-i-1}.$$

À l'aide de la formule

$$i C_n^i = n C_{n-1}^{i-1} \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (2.52)$$

et en remplaçant l'indice i par $i-1$, nous obtenons

$$\frac{\partial H_n}{\partial w_1} = n \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \theta_{i+1} w_1^i w_2^{n-1-i}. \quad (2.53)$$

Pour $\frac{\partial H_n}{\partial w_2}$, à l'aide de (2.52) et le fait que

$$C_n^i = C_n^{n-i} \quad \forall i = 0, \dots, n, \quad (2.54)$$

nous obtenons

$$\frac{\partial H_n}{\partial w_2} = n \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \theta_i w_1^i w_2^{n-i-1}. \quad (2.55)$$

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

En utilisant les formules (2.53) et (2.55), on en déduit par analogie

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial w_1^2} = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i \theta_{i+2} w_1^i w_2^{n-2-i}, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial w_1 \partial w_2} = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i \theta_{i+1} w_1^i w_2^{n-2-i}, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial w_2^2} = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i \theta_i w_1^i w_2^{n-2-i}. \quad (2.58)$$

Maintenant nous affirmons qu'il existe une constante positive C_2 indépendante de $t \in [0, T_{\max}[$ tel que

$$I_1 \leq C_2 \quad t \in [0, T_{\max}[. \quad (2.59)$$

Pour voir cela, nous suivons le même raisonnement que dans [15] :

(i) Si $0 < \lambda < 1$, en utilisant les conditions aux limites (2.34) nous obtenons

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \left(\lambda_1 \frac{\partial H_n}{\partial w_1} (\gamma_1 - \sigma w_1) + \lambda_2 \frac{\partial H_n}{\partial w_2} (\gamma_2 - \sigma w_2) \right) d\sigma,$$

où $\sigma = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ et $\gamma_i = \frac{\rho_i}{1-\lambda}$, $i = 1, 2$.

Puisque

$$\begin{aligned} H(w_1, w_2) &= \lambda_1 \frac{\partial H_n}{\partial w_1} (\gamma_1 - \sigma w_1) + \lambda_2 \frac{\partial H_n}{\partial w_2} (\gamma_2 - \sigma w_2), \\ &= P_{n-1}(w_1, w_2) - Q_n(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Où P_{n-1} et Q_n sont des polynômes à coefficients positifs de degrés $n-1$ et n respectifs et comme la solution est positive, on obtient

$$\limsup_{(|w_1|+|w_2|) \rightarrow +\infty} H(w_1, w_2) = -\infty, \quad (2.60)$$

ce qui prouve que H est uniformément borné sur \mathbb{R}_+^2 et par conséquent (2.59).

(ii) Si $\lambda = 0$, alors $I_1 = 0$ sur $[0, T_{\max}[$.

(iii) Le cas des conditions homogènes de Dirichlet est trivial, puisque dans ce cas

$w_1(t, x) = w_2(t, x) = 0$ sur $[0, T_{\max}[\times \partial\Omega$, donc $\frac{\partial H_n}{\partial w_1} = \frac{\partial H_n}{\partial w_2} = 0$ alors $I_1 = 0$. Par conséquent, on obtient à nouveau (2.59) avec $C_2 = 0$.

D'autre part, on a

$$I_2 = -n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i \times \int_{\Omega} w_1^i w_2^{n-2-i} (\lambda_1 \theta_{i+2} |\nabla w_1|^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) \theta_{i+1} \nabla w_1 \nabla w_2 + \lambda_2 \theta_i |\nabla w_2|^2) dx.$$

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

En utilisant (2.46) et (2.47), nous en déduisons que les formes quadratiques (par rapport à ∇w_1 et ∇w_2)

$$\begin{aligned} B(\nabla w_1, \nabla w_2) &= \lambda_1 \theta_{i+2} |\nabla w_1|^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) \theta_{i+1} \nabla w_1 \nabla w_2 + \lambda_2 \theta_i |\nabla w_2|^2, \\ &= \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} \nabla w_i \cdot \nabla w_j, \end{aligned}$$

sont définie positive avec

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \theta_{i+2} & \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} \theta_{i+1} \\ \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} \theta_{i+1} & \lambda_2 \theta_i \end{pmatrix},$$

d'après théorème 1.1 du chapitre 1 et pour que cette forme quadratique soit définie positive il faut et il suffit que les déterminants principaux successifs de la matrice B doit être strictement positive.

$\lambda_1 \theta_{i+2} > 0$ car $\lambda_1 > 0$ et $\theta > 0$,
et $\det B = \lambda_1 \lambda_2 \theta_i \theta_{i+2} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4} \theta_{i+1}^2 > 0$, car

$$\left((\lambda_1 + \lambda_2) \theta_{i+1} \right)^2 - 4 \lambda_1 \lambda_2 \theta_i \theta_{i+2} = \theta_{i+1}^2 \left((\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4 \lambda_1 \lambda_2 \theta^2 \right) < 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2. \quad (2.61)$$

Alors

$$I_2 \leq 0. \quad (2.62)$$

(2.53) et (2.55) ensemble implique

$$J = n \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \int_{\Omega} \left[(\theta_{i+1} F_1(w_1, w_2) + \theta_i F_2(w_1, w_2)) w_1^i w_2^{n-1-i} \right] dx.$$

En utilisant les expressions (2.45), nous obtenons

$$\begin{aligned} \theta_{i+1} F_1(w_1, w_2) + \theta_i F_2(w_1, w_2) &= (-\theta_{i+1} + \theta_i) f + (\mu_1 \theta_{i+1} - \mu_2 \theta_i) g, \\ &= (\mu_1 \theta_{i+1} - \mu_2 \theta_i) \left[\frac{\frac{\theta_i}{\theta_{i+1}} - 1}{-\mu_2 \frac{\theta_i}{\theta_{i+1}} + \mu_1} f + g \right]. \end{aligned}$$

Puisque la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{-\mu_2 x + \mu_1}$ est croissante avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{-\mu_2 x + \mu_1} = -\frac{1}{\mu_2}$ et que $\frac{\theta_i}{\theta_{i+1}}$ est suffisamment grand lorsque θ est choisi suffisamment grand, par utilisation du condition (2.41) et relation (2.44) successivement, nous obtenons, pour une constante C_3 ,

$$J \leq C_3 \int_{\Omega} \left[\sum_{i=0}^{n-1} (w_1 + w_2 + 1) C_{n-1}^i w_1^i w_2^{n-1-i} \right] dx.$$

Suivant le même raisonnement que dans [13], un simple calcul montre que

$$J \leq C_4 L(t) \quad \text{sur} \quad [0, T^*].$$

2.5 Étude de l'existence local et globale du solutions d'un système de réaction diffusion à deux composants d'une matrice pleine

Ensuite, nous avons

$$\dot{L}(t) \leq C_5 L(t) + C_6 L^{\frac{p-1}{p}}(t) \quad \text{sur } [0, T^*].$$

Mettrons

$$Z = L^{\frac{1}{p}},$$

on obtient

$$p\dot{Z} \leq C_5 Z + C_6.$$

La solution de cette inégalité différentielle linéaire donne la limite uniforme de la fonction L sur l'intervalle $[0, T^*]$, qui complète la preuve de la théorème. \square

Corollaire 2.1.

Supposons que les fonctions f et g sont continuellement différentiable sur Σ , points en Σ sur $\partial\Sigma$ et satisfaire la condition (2.41). Alors tous les solutions de (2.21) - (2.24) avec des données initiales en Σ et uniformément bornés sur Ω sont dans $L^\infty(0, T^, L^p(\Omega))$ pour tous $p \geq 1$.*

Démonstration.

La preuve est une conséquence immédiate du Théorème 2.2, la triviale inégalité

$$\int_{\Omega} (w_1(t, x) + w_2(t, x))^p dx \leq L(t) \quad \text{sur } [0, T^*].$$

Et (2.44) \square

Proposition 2.3.

Selon l'hypothèse du Corollaire 2.1, si les réactions f et g sont polynomialement borné, alors toutes les solutions de (2.21)–(2.23) avec les données initiales en Σ et uniformément bornées sur Ω sont globales dans le temps.

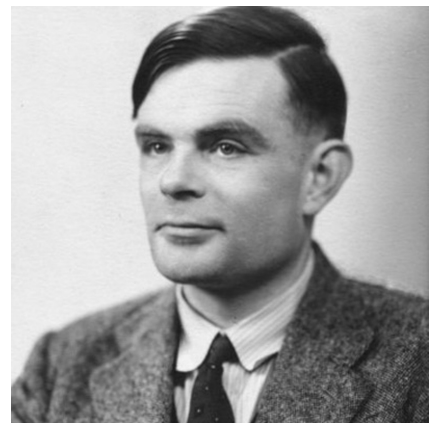
Démonstration.

Comme il a été mentionné ci-dessus, il suffit de dériver une estimation uniforme de $\|F_1(w_1, w_2)\|_p$ et $\|F_2(w_1, w_2)\|_p$ sur $[0, T^*[$ pour certains $p > \frac{N}{2}$. Comme les fonctions f et g sont polynomialement bornées sur Σ . En utilisant les relations (2.30) et (2.31), nous obtenons que $F_1(w_1, w_2)$ et $F_2(w_1, w_2)$ le sont également et la preuve devient une conséquence immédiate du Corollaire 2.1. \square

3 RÉACTION DIFFUSION ET FORMATION DE MOTIFS

Introduction

La formation de motifs est un domaine de recherche étudié depuis les travaux pionniers d'**Alan Turing** sur la morphogénèse (Turing, 1952) [10]. Il a montré que la formation de motifs pouvait être obtenue par l'interaction de deux substances qui se propageaient à des vitesses différentes. Pour les interactions de ce type, Turing a introduit le nouveau terme, systèmes de réaction-diffusion, qui est maintenant généralement utilisé. Il a démontré qu'un état d'équilibre homogène est instable dans certains systèmes de ce type et que toute déviation locale minime par rapport à cet état d'équilibre suffit à déclencher la formation de motifs. Ce phénomène, appelé instabilité induite par la diffusion, s'est avéré s'appliquer à de nombreux systèmes biologiques et chimiques et a été analysé mathématiquement à l'aide de diverses techniques [3], [4]. L'instabilité classique de Turing conduit à l'établissement des motifs spatiaux stationnaires. Après les travaux pionniers de Turing, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude des conditions d'instabilité dissociée dans les systèmes de réaction-dissipation et de leurs liens avec la formation de motifs dans une grande variété d'applications.



Alan Turing

3.1 Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces

3.1.1 Condition de nos dimensionnalisation

Soit un système de réaction diffusion à deux espèces

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = D_A \Delta A + F(A, B), \\ \frac{\partial B}{\partial t} = D_B \Delta B + G(A, B), \end{cases} \quad (3.1)$$

où les fonctions de réactions F et G sont définies par

$$\begin{cases} F(A, B) = k_1 - k_2 A + k_3 A^2 B, \\ G(A, B) = k_4 - k_3 A^2 B. \end{cases} \quad (3.2)$$

Où les D_A , D_B , k_i , $i = 1, 4$ sont strictement positives.

Le système (3.2) est appelé la cinétique de Schnakenberg.

On introduit L comme une échelle de longueur et on pose [4]

$$u = A \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v = B \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t^* = \frac{D_A t}{L^2}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad (3.3)$$

$$d = \frac{D_B}{D_A}, \quad a = \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{k_4}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = \frac{L^2 k_2}{D_A}. \quad (3.4)$$

Prenant la dérivée partielle de A par rapport à t^* et x^* , donne

$$\frac{\partial A}{\partial t^*} = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t^*} = \frac{L^2}{D_A} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \frac{\partial A}{\partial x^*} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^*} = L \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Utilisons l'équation (3.5) pour calculer le laplacien de A par rapport à x^*

$$\Delta(x)A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{L^2} \Delta(x^*) A. \quad (3.6)$$

Par les relations données de (3.3); on obtient

$$A = \left(\frac{k_2}{k_3} \right)^{\frac{1}{2}} u \quad \text{donc} \quad \frac{\partial A}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t^*}. \quad (3.7)$$

La première équation de (3.1) devient sous la forme

$$\frac{D_A}{L^2} \frac{\partial A}{\partial t^*} = \frac{D_A}{L^2} \Delta(x^*) A + F(A, B). \quad (3.8)$$

3.1 Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces

Ce qui donne

$$\frac{\partial A}{\partial t^*} = \Delta(x^*) A + \frac{L^2}{D_A} F(A, B). \quad (3.9)$$

Par suite de relation (3.7) on trouve

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} (k_1 - k_2 A + k_3 A^2 B). \quad (3.10)$$

Alors que la remplacement de A et B par u et v et par l'utilisation de (3.3) on obtient

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} \left[k_1 - k_2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u + k_3 \left[\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u \right]^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right]. \quad (3.11)$$

En suite, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} \left[k_1 \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - k_2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} u + k_3 \left(\frac{k_2}{k_3}\right) \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} u^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right]. \quad (3.12)$$

Il vient après un calcul simple

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} \left[k_1 \frac{k_2}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - k_2 u + k_2 u^2 v \right]. \quad (3.13)$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} k_2 \left[\frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - u + u^2 v \right]. \quad (3.14)$$

On obtient la suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} k_2 [a - u + u^2 v]. \quad (3.15)$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \gamma [a - u + u^2 v]. \quad (3.16)$$

Enfin, nous obtenons la première équation non dimensionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \gamma f(u, v). \quad (3.17)$$

Prenant la dérivée partielle de B par rapport à t^* et x^* ; donne

$$\frac{\partial B}{\partial t^*} = \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t^*} = \frac{L^2}{D_A} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \frac{\partial B}{\partial x^*} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^*} = L \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (3.18)$$

Utilisons l'équation (3.18) pour calculer le laplacien de B par rapport à x^*

$$\Delta(x) B = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{L^2} \Delta(x^*) B. \quad (3.19)$$

3.1 Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces

Par les relations données de (3.3), on obtient

$$B = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \quad \text{donc} \quad \frac{\partial B}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t^*}. \quad (3.20)$$

La deuxième équation de (3.1) devient sous la forme

$$\frac{D_A}{L^2} \frac{\partial B}{\partial t^*} = \frac{D_B}{L^2} \Delta(x^*) B + G(A, B). \quad (3.21)$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial B}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \Delta(x^*) B + \frac{L^2}{D_A} G(A, B). \quad (3.22)$$

Par suite on trouve

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} [k_4 - k_3 A^2 B], \quad (3.23)$$

remplacement de A et B par u et v et par l'utilisation de (3.3) on obtient

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} \left[k_4 - k_3 \left[\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u \right]^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right]. \quad (3.24)$$

Il vient après un calcul simple

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} \left[k_4 \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - k_3 \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u \right]^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right], \quad (3.25)$$

on obtient (3.25) sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} k_2 \left[\frac{k_4}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - u^2 v \right], \quad (3.26)$$

alors

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = d\Delta(x^*)v + \gamma[b - u^2v], \quad (3.27)$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = d\Delta(x^*)v + \gamma g(u, v). \quad (3.28)$$

Le système (3.1) est non dimensionné et prendre la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \gamma f(u, v) \text{ sur } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + \gamma g(u, v) \text{ sur } \Omega, \end{cases} \quad (3.29)$$

avec les conditions au limite suivante

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

3.1.2 Analyse de stabilité

Le système (3.29) sans diffusion est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma f(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \gamma g(u, v). \end{cases} \quad (3.30)$$

Cherchons les points d'équilibres

$$f(u_0, v_0) = g(u_0, v_0) = 0.$$

Considérons une perturbation w de l'état d'équilibre

$$w(t) = \begin{pmatrix} u(t) - u_0, \\ v(t) - v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Pour $\|w\|$ petit et par la linéarisation autour de l'équilibre (u_0, v_0) , la perturbation est régie localement par l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \gamma J w, \quad (3.32)$$

où J est la matrice jacobienne évaluée en (u_0, v_0) , la matrice J est donner par

$$J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)}.$$

maintenant, nous cherchons les solutions sous la forme

$$w = \alpha e^{\lambda t},$$

où λ est une valeur propre de γJ .

3.1.3 Stabilité sans diffusion

Ce système linéaire est stable lorsque toutes les valeurs propres de γJ ont $\text{Re}(\lambda) < 0$.

Le polynôme caractéristique de γJ est

$$\lambda^2 - \gamma (f_u + g_v) \lambda + \gamma^2 (f_u g_v - f_v g_u) = 0, \quad (3.33)$$

il s'ensuit que les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\gamma \left[(f_u + g_v) + \sqrt{(f_u + g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u)} \right]}{2}, \\ \lambda_2 = \frac{\left[\gamma (f_u + g_v) - \sqrt{(f_u + g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u)} \right]}{2}. \end{cases} \quad (3.34)$$

3.1 Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces

Donc la stabilité linéaire ($\text{Re}(\lambda) < 0$) est garantie si

$$\text{Tr}(J) = f_u + g_v < 0, \quad (3.35)$$

$$\det(J) = f_u g_v - f_v g_u > 0. \quad (3.36)$$

Les équations (3.35) - (3.36) sont les deux conditions pour que la solution de (3.30) soit stable.

Les conditions (3.35) et (3.36) joueront un rôle important dans l'établissement du moment où l'instabilité de Turing peut se former.

3.1.4 Instabilité induite par diffusion

Nous devons considérer maintenant un couplage entre la réaction et la diffusion, et avec la linéarisation autour de l'équilibre (u_0, v_0) , le système d'équations aux dérivées partielles (3.29) devient

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\Delta w + \gamma Jw, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, nous cherchons des solutions pour (3.37) sous la forme

$$w = \sum_k c_k e^{\lambda_k t} \psi_k,$$

où ψ est la solution de l'équation de Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta \psi_k + k^2 \psi_k = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.38)$$

Ici, $k^2 > 0$ est une constante positive. En substituant une fonction de test $c_k e^{\lambda_k t} \psi_k$ dans (3.37), on obtient

$$\lambda \psi_k c_k e^{\lambda t} = k^2 D \psi_k c_k e^{\lambda t} + \gamma J \psi_k c_k e^{\lambda t},$$

ce qui réduit à l'équation

$$\lambda \psi_k = D k^2 \psi_k + \gamma J \psi_k,$$

par une écriture sous forme matricielle on obtient

$$\left[\lambda I - \gamma J + D k^2 \right] \psi_k = 0, \quad \text{tel que } \psi_k \neq 0. \quad (3.39)$$

3.1 Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces

Soit $N = \lambda I - \gamma J + Dk^2$. Ce système aura des solutions non triviales si $\det(N) = 0$, donc on a

$$\det(\lambda I - \gamma J + Dk^2) = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \lambda - \gamma f_u + k^2 & -\gamma f_v \\ -\gamma g_u & \lambda - \gamma g_v + dk^2 \end{vmatrix} = 0,$$

un calcul simple donne un polynôme d'ordre deux en λ

$$\lambda^2 + [(d+1)k^2 - \gamma(f_u + g_v)]\lambda + H(k^2) = 0, \quad (3.40)$$

$$H(k^2) = dk^4 - \gamma k^2(df_u + g_v) + \gamma^2 \det(J).$$

L'équation (3.40) prend la forme

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0,$$

$$\alpha = (d+1)k^2 - \gamma(f_u + g_v), \quad (3.41)$$

$$\beta = dk^4 - \gamma k^2(df_u + g_v) + \gamma^2 \det(J), \quad (3.42)$$

$$k^2(d+1) - \gamma(f_u + g_v) > 0.$$

Donc le seul moyen d'obtenir $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ est lorsque $H(k^2) < 0$ pour un certain k . Nous pouvons vérifier cette condition à partir des solutions du polynôme (3.40).

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)}{2} - \frac{\sqrt{[k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)]^2 - 4H(k^2)}}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)}{2} + \frac{\sqrt{[k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)]^2 - 4H(k^2)}}{2} \end{cases}$$

Parce que nous avons besoin de $\det(J) > 0$ à partir de la condition (3.36), nous pouvons voir que $H(k^2) < 0$ ne se produit que lorsque

$$df_u + g_v > 0. \quad (3.43)$$

L'inégalité (3.43) est une condition nécessaire mais insuffisante pour $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

Pour obtenir $H(k^2) < 0$ pour certains $k \neq 0$, nous exigeons que le minimum $H_{\min} < 0$. A partir de l'équation (3.42), la dérivée par rapport à k^2 est

$$2dk_m^2 - \gamma(df_u + g_v) = 0. \quad (3.44)$$

Ainsi on obtient

$$k_m^2 = \frac{\gamma(df_u + g_v)}{2d}, \quad (3.45)$$

3.1 Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces

et pour que cette quantité soit positive, il faut que $df_u + g_v > 0$.

Qui donne le minimum $H(k_m^2)$ comme suit

$$H_m = H(k_m^2) = dk_m^4 - \gamma k_m^2 (df_u + g_v) + \gamma^2 \det(J).$$

Pour que $H(k^2)$ soit strictement négatif pour un k différent de zéro, le minimum H_m doit être strictement négatif.

De l'équation (3.45), on obtient

$$H_m = H(k_m^2) = \gamma^2 \left[\det(J) - \frac{(df_u + g_v)^2}{4d} \right].$$

Ainsi, la condition que $H(k^2) < 0$ pour un $k^2 \neq 0$ est

$$\det(J) < \frac{(df_u + g_v)^2}{4d},$$

pour $k \neq 0$, et à la bifurcation, quand $H(k_m^2) = H_m = 0$

$$\det(J) = \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}.$$

3.1.5 Les coefficients critiques

A la bifurcation, lorsque $H(k_m^2) = H_m = 0$, nous avons besoin de

$$\det(J) = \frac{(df_u + g_v)^2}{4d},$$

$$\det(J) = f_u g_v - f_v g_u = \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}.$$

On obtient après un arrangement

$$d_c^2 f_u^2 + 2(2f_v g_u - f_u g_v) d_c + g_v^2 = 0,$$

cela définit un coefficient de diffusion critique d_c comme racine appropriée.

Par conséquent, le nombre critique d'onde k_c est donné par

$$k_c^2 = \frac{\gamma(df_u + g_v)}{2d_c} = \gamma \frac{\sqrt{\det(J)}}{\sqrt{d_c}} = \gamma \frac{\sqrt{f_u g_v - f_v g_u}}{\sqrt{d_c}}.$$

3.1.6 Les conditions suffisantes pour la formation de motifs

Lorsque $H(k^2) < 0$, l'équation (3.40) a une solution $\lambda > 0$ pour la même gamme de nombres d'onde qui font que $H < 0$. De l'équation (3.40) avec $d > d_c$,

3.1 Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces

la gamme des nombres d'onde instables est $k_1^2 < k^2 < k_2^2$, qui est obtenu à partir du quadratique

$$k_i^2 = \gamma \frac{df_u + g_v \pm \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)}}{2d}, \quad i = 1, 2.$$

Ainsi,

$$k_1^2 < k^2 < k_2^2, \quad (3.46)$$

tel que

$$k_1^2 = \frac{\gamma}{2d} \left[df_u + g_v - \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)} \right], \quad (3.47)$$

$$k_2^2 = \frac{\gamma}{2d} \left[df_u + g_v + \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)} \right]. \quad (3.48)$$

L'expression $\lambda = \lambda(k^2)$ est appelée relation de dispersion. Dans un intervalle instable, $\text{Re } \lambda(k^2) > 0$ a un maximum pour k_m avec $d > d_c$. Cela implique qu'il existe un mode de croissance plus rapide dans la somme de w . Ainsi, nous avons

$$w \approx \sum_{k_1}^{k_2} c_k e^{\lambda(k)t} \psi_k \quad \text{pour les grands } t. \quad (3.49)$$

Pour récapituler nos résultats pour l'instabilité induite par la diffusion d'un système de réaction diffusion de deux espèces.

Théorème 3.1.

Considérons le système de réaction diffusion (3.29) avec le point d'équilibre (u_0, v_0) . Les conditions pour que les motifs de Turing se forment sont

$$f_u + g_v < 0, \quad (3.50)$$

$$f_u g_v - f_v g_u > 0, \quad (3.51)$$

$$df_u + g_v > 0, \quad (3.52)$$

$$\frac{(df_u + g_v)^2}{4d} > f_u g_v - f_v g_u. \quad (3.53)$$

Où toutes les dérivées partielles sont évaluées à (u_0, v_0) : Si ces conditions sont remplies, il existe alors une gamme de motifs dépendant de γ ; les nombres d'ondes linéairement instables donnés dans (3.46)-(3.48). Ces motifs spatiaux sont les fonctions propres ψ_k avec les nombres d'onde k_1 et k_2 .

Notez que cela découle de (3.50) et (3.52) où $d \neq 1$; et f_u et g_v doivent avoir des signes opposés. Par exemple, si $f_u > 0$ et $g_v < 0$, $d > 1$, cela signifie que l'inhibiteur du système (3.29) doit diffuser plus rapidement que l'activateur.

3.2 Application sur le système de Schnakenberg

3.2.1 Le système de Schnakenberg

Rappelons que le système de Schnakenberg [24] est de la forme (3.29) avec

$$\begin{cases} f(u, v) = a - u + u^2v, \\ g(u, v) = b - u^2v. \end{cases}$$

Dans le cas de la cinétique de Schnakenberg, il existe trois paramètres (a, b, d) strictement positive sous les quels le mécanisme (3.29) est instable.

3.2.2 Les points d'équilibres

Les points d'équilibre sont obtenus par $f(u, v) = g(u, v) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} a - u + u^2v &= 0, \\ b - u^2v &= 0, \end{aligned}$$

cela implique que le point d'équilibre est

$$(u_0, v_0) = \left(a + b, \frac{b}{(a + b)^2} \right).$$

La jacobienne du système au point d'équilibre (u_0, v_0) donne

$$J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} -1 + 2uv & u^2 \\ -2uv & -u^2 \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)},$$

par suite

$$J = \begin{pmatrix} \frac{b-a}{b+a} & (a+b)^2 \\ \frac{-2b}{b+a} & -(a+b)^2 \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Instabilité induite par la diffusion pour le système de Schnakenberg

et en utilisant la condition (3.50) du théorème 3.1, on obtient

$$\text{Tr}(J) = \frac{b-a}{b+a} - (a+b)^2 < 0, ,$$

3.2 Application sur le système de Schnakenberg

par conséquent

$$0 < b - a < (a + b)^3.$$

De même, la condition (3.51) du théorème 3.1 donne

$$\det J = \left[\left(\frac{2b}{b+a} \right) (a+b)^2 \right] - \left[\left(\frac{b-a}{b+a} \right) (a+b)^2 \right].$$

D'où

$$\begin{aligned} \det J &= b^2 + a^2 + 2ab, \\ &= (a+b)^2 > 0. \end{aligned}$$

La condition (3.52) du théorème 3.1 dit que

$$df_u + g_v > 0,$$

ce qui donne par conséquent

$$d(b-a) > (b+a)^3.$$

La dernière condition (3.53) du théorème 3.1 est

$$\frac{(df_u + g_v)^2}{4d} > f_u g_v - f_v g_u \Leftrightarrow (df_u + g_v)^2 > 4d(f_u g_v - f_v g_u).$$

Ainsi on a

$$[d(b-a) - (b+a)^3]^2 > 4d(b+a)^4.$$

Par la résumé suivante, nous obtenons les conditions pour la cinétique de Schnakenberg dans lesquelles on a une formation de motifs de Turing.

$$0 < b - a < (a + b)^3, \quad (3.54)$$

$$(a + b)^2 > 0, \quad (3.55)$$

$$d(b - a) > (b + a)^3, \quad (3.56)$$

$$[d(b - a) - (b + a)^3]^2 > 4d(b + a)^4. \quad (3.57)$$

Ces inégalités définissent un domaine dans l'espace des paramètres (a, b, d) , appelé espace de formation de motif ou espace de Turing pour la cinétique de Schnakenberg.

La solution d'équilibre homogène de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + a - u + u^2 v, \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + b - u^2 v. \quad (3.59)$$

3.2 Application sur le système de Schnakenberg

deviendra instable sous la moindre perturbation spatiale où les conditions (3.54)-(3.57) sont satisfaites. nous considérons le problème propre (3.38) et choisissons le domaine planaire $\Omega = (0, p) \times (0, q)$ pour les constantes positives p, q . Par la séparation des variables, la solution générale est

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} A_n \cos \left[\frac{n\pi x}{p} \right] B_m \cos \left[\frac{m\pi y}{q} \right]. \quad (3.60)$$

Considérons l'équation (3.60) avec l'équation (3.37) et (3.38). Maintenant, la solution instable à motifs spatiaux est donnée par

$$w(t, x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} e^{\lambda(k^2)t} A_n \cos \left[\frac{n\pi x}{p} \right] B_m \cos \left[\frac{m\pi y}{q} \right], \quad (3.61)$$

où

$$k^2 = \pi^2 \left[\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} \right], \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

La bande de nombres d'ondes de (3.46) à (3.48), est donnée par

$$\gamma\Gamma_1(a, b, d) = k_1^2 < k^2 < k_2^2 = \gamma\Gamma_2(a, b, d). \quad (3.62)$$

On utilisons les inégalités (3.46)-(3.48), on obtient

$$\Gamma_1(a, b, d) = \frac{df_u + g_v - \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)}}{2d}.$$

D'après la cinétique de Schnakenberg; on trouve

$$\Gamma_1(a, b, d) = \frac{[d(b-a) - (a+b)^3] - \sqrt{[d(b-a) - (a+b)^3]^2 - 4d \det(J)}}{2d(a+b)}, \quad (3.63)$$

et pour

$$\Gamma_2(a, b, d) = \frac{df_u + g_v + \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)}}{2d}.$$

Ce qui donne par similaire

$$\Gamma_2(a, b, d) = \frac{[d(b-a) - (a+b)^3] + \sqrt{[d(b-a) - (a+b)^3]^2 - 4d \det(J)}}{2d(a+b)}, \quad (3.64)$$

les paramètres dans (3.62) en termes de longueur d'onde $\omega = \frac{2\pi}{k}$, les longueurs d'onde sont limitées par des modes avec une borne inférieure et supérieure ω_1 et ω_2 , où

$$\omega_1^2 = \left[\frac{2\pi}{k_2} \right]^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma\Gamma_2(a, b, d)} < \omega^2 < \omega_2^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma\Gamma_1(a, b, d)}. \quad (3.65)$$

3.3 Motifs de poisson zèbre

Les paramètres de (3.37) expliquent le type de rôle que joue dans le système de réaction diffusion (3.1). Avec γ très petit, les inégalités (3.62) nous indiquent que la gamme de nombres d'ondes et donc de motifs de Turing ne se formera pas (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de région instable dans l'espace de Turing). D'autre part, avec γ suffisamment grand, cela garantit que le système (3.29) est spatialement instable et donc que des motifs se forment.

3.3 Motifs de poisson zèbre

Hongyong Zhao [11], a étudié la formation de motifs pour un type de poisson, l'auteur a utilisé le système de Schnackenberg comme modèle mathématique pour cette étude. avec des techniques et simulation numériques, quelques catégories de motifs de Turing sont obtenues, des taches, des bandes et des hexagonaux. En plus de l'effet de la diffusion croisée.

Les figures suivantes montrent certains types de ces motifs.

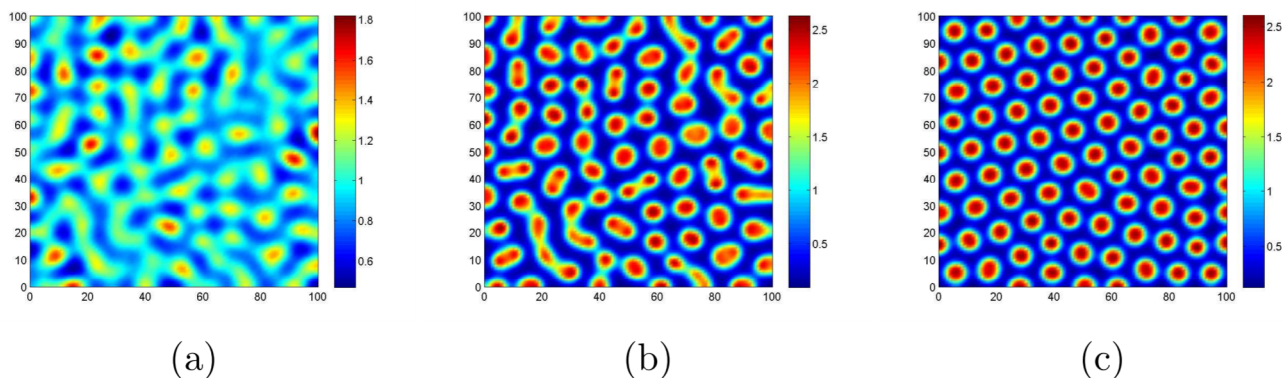


FIGURE 3.2 – Motifs sous forme des taches dans différents instants.

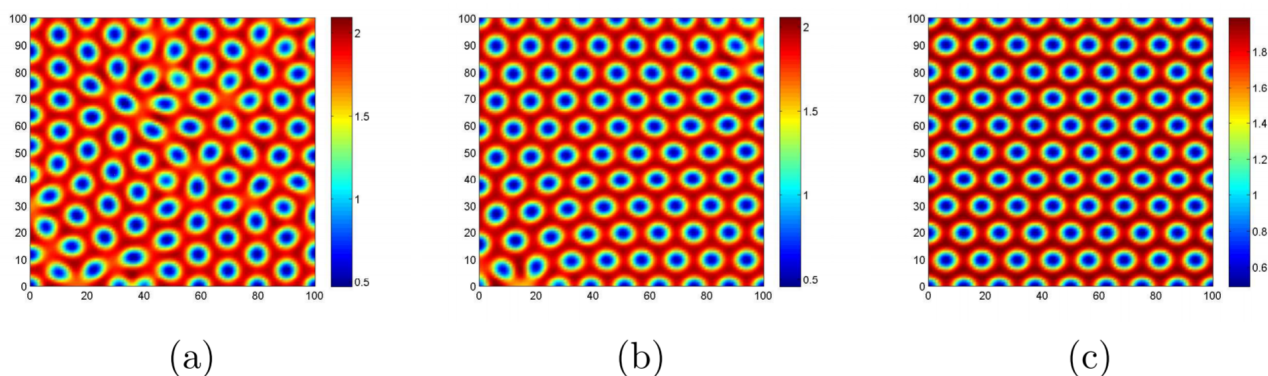


FIGURE 3.3 – Motifs sous forme des hexagones dans différents instants.

3.3 Motifs de poisson zèbre

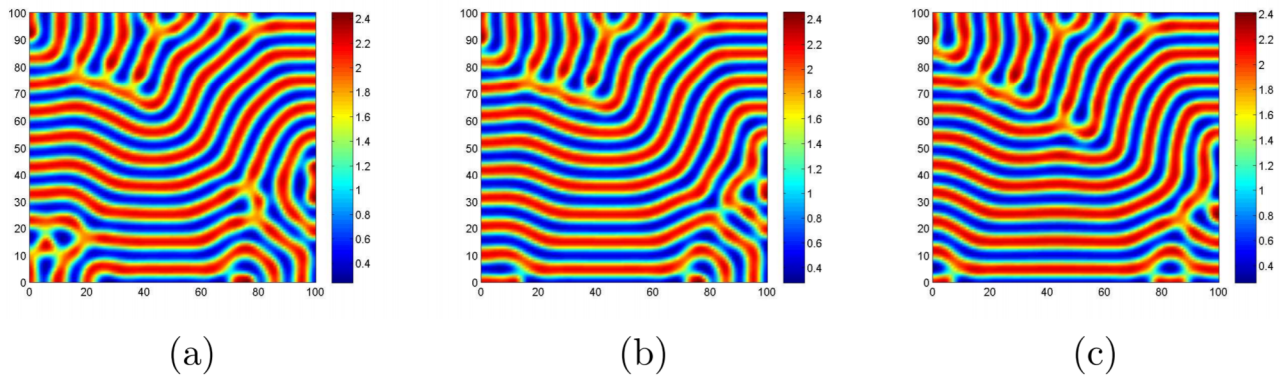


FIGURE 3.4 – Motifs sous forme des bandes dans différents instants.

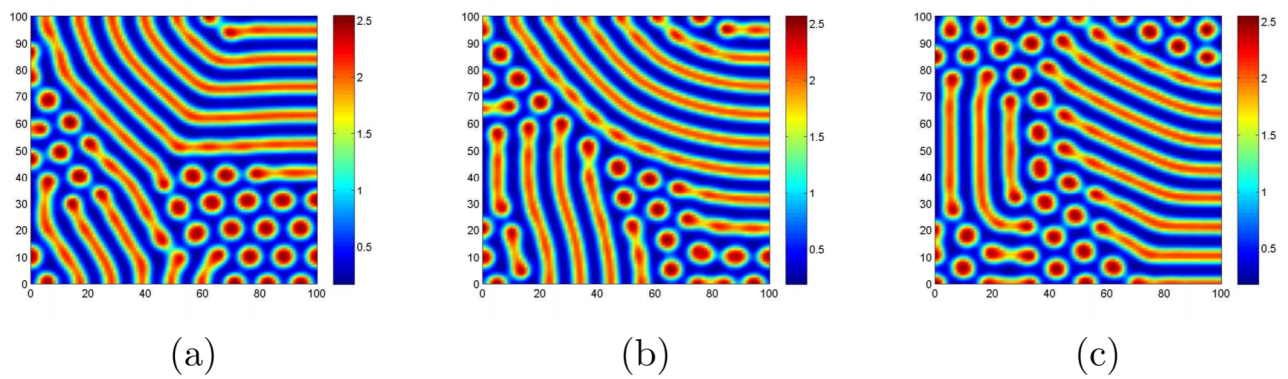


FIGURE 3.5 – Motifs sous forme des taches et des bandes dans différents instants.



(a)

(b)

FIGURE 3.6 – Exemples de poisson zèbre avec des motifs sous forme des taches (a) ou bien taches et bandes (b) dans la nature.

Conclusion générale et perspectives

Puisque les systèmes de réaction diffusion est un domaine large, nous avons rappelé certaines de ses bases, puis nous avons étudié l'existence globale de solutions pour un système de réaction diffusion à matrice de diffusion pleine 2×2 , les compétences utilisées, c'est la méthode fonctionnelle de Lyapunov et leur techniques.

Quant à la formation des motifs, nous avons précisé des conditions qui les constituent selon le mécanisme de Turing. Théoriquement, nous avons appliqué ces conditions au système de Schnakenberg.

Nos perspectives seront d'étudier les formations de motifs de trois espèces.

Bibliographie

- [1] G. Rolland, Global existence and fast-reaction limit in reaction-diffusion systems with cross effects *General Mathematics [math.GM]*. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012.
- [2] P.Quittner and P.Souplet, Superlinear Parabolic Problems Blow-up, Global Existence and Steady States, *Birkhäuser Basel*, 2007.
- [3] J.D. Murray, Mathematical Biology I : Spatial Models and Biomedical Applications, *Springer*, 2002.
- [4] J.D. Murray, Mathematical Biology II : Spatial Models and Biomedical Applications, Third Edition, *Springer*, 2002.
- [5] S. Kouachi, Invariant regions and global existence of solutions for reactions-diffusion systems with a full matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions, *Georgian Mathematical Journal*, volume 11 (2004), Number 2, 349-359.
- [6] M. Pierre and D. Schmitt, Blowup in reaction-diffusion systems with dissipation of mass, *SIAM Rev*, 42 (2000), pp. 93–106 (electronic).
- [7] M. Pierre, Global existence in reaction-diffusion systems with control of mass : a survey, *Milan J. Math*, 78 (2010), pp. 417–455.
- [8] F. Rothe, Uniform bounds from bounded-Lp-functionals in reaction-diffusion equations, *J. Differential Equations*, 45 (1982), pp. 207–233.
- [9] J. Morgan and S. Waggoner, Global existence for a class of quasi linear reaction diffusion systems, *Commun. Appl. Anal*, 8 (2004), pp. 153–166.
- [10] Théorie sur l'apparition de structures de Turing pour les biologistes ou éclaircissements sur deux intuitions ingénieuses, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 14 août 1952, Série B.
- [11] H. Zhao, Q. Zhang and L. Zhu, The spatial Dynamics of a zebrafish model with cross-diffusions, *Mathematical Biosciences and Engineering*, Volume 14, Number 4, August 2017 pp 1035-1054.

BIBLIOGRAPHIE

- [12] S. Abdelmalek, S. Kouachi, Proof of existence of global solutions for m–component reaction–diffusion systems with mixed boundary conditions via the Lyapunov functional method, *J. Phys.*, A 40 (2007) 12335–12350.
- [13] S. Kouachi, Existence of global solutions to reaction-diffusion systems with nonhomogeneous boundary conditions via a Lyapunov functional, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2002(2002), No. 88, pp. 1-13.
- [14] S. Kouachi, Existence of global solutions to reaction-diffusion systems via a Lyapunov functional, *Electron. J. Differential Equations*, 2001, No. 68, 10 pp.
- [15] S. Kouachi, Global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a full matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ*, 2002, No. 2, 10 pp.
- [16] C. Kuttler, Reaction diffusion equation with applications, *Sommersemester*, 2011.
- [17] D. Henry, Geometric Theory of Semi-Linear Parabolic Equations, in : Lecture Notes in Mathematics, vol. 840, *Springer-Verlag, New-York*, 1984.
- [18] J. A. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 258. *Springer-Verlag, New York*, 1983.
- [19] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, *Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J*, 1964.
- [20] A. Gierer and H. Meinhardt, A theory of biological pattern formation, *Kybernetik*, 12 (1972), 30-39.
- [21] J. Jost, Partial Differential Equations. Graduate Texts in Mathematics, 214. *Springer-Verlag, New York*, 2013.
- [22] T. Witelski and M. Bowen, Methods of Mathematical Modelling, Continuous Systems and Differential Equations, *Springer International Publishing*, 2015.
- [23] S. L. Hollis, R. H. Martin, Jr., and M. Pierre, Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems, *SIAM J. Math. Anal.*, 18 (1987), pp. 744–761.
- [24] G. Gambino, M.C. Lombardo, S. Lupo, M. Sammartino, Super-critical and subcritical bifurcations in a reaction–diffusion, *Ricerche di Matematica journal*, 2016, pp.449-467.
- [25] B. Dacorogna, Analyse avancée pour mathématiciens.