



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABBES LAGHROUR- KHENCHELA



FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de fin d'études
*Pour l'obtention du diplôme de **Master***

FILIÈRE : **Mathématiques**
SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Appliquées**

**Contrôlabilité des systèmes
abstraites d'ordre fractionnaire**

RÉALISÉ PAR :
Amina Kabrine

Dirigé par : A.MERGHAD

Membres de jury : O.ZAHI PRÉSIDENT
N.HAKKAR EXAMINATEUR

2019-2020

Table des matières

1	Notions préliminaires	6
1.1	Espaces fonctionnels	6
1.22.1	Théorie des opérateurs linéaires	10
1.36	Semi-groupes	13
1.37.1	L'approximation généralisée de Yosida	16
1.45	Théorie du semi-groupes	19
1.58	Propriété de la croissance exponentielle de semi groupe	23
1.65	Calcul Fractionnaire :	27
1.66	Fonction Gamma d'Euler :	27
1.72	Fonction d'erreur :	30
1.73	La fonction de Mittag-Leffler :	30
1.77	Transformation de Laplace au sens des fonctions :	35
1.77.1	Pierre-Simon Laplace :	35
1.77.2	La transformation de Laplace :	36
1.78	Intégration fractionnaire	36
2	Contrôlabilité des systèmes abstraits d'ordre fractionnaire	46
2.1	Introduction	46
2.10	Caractérisation de la contrôlabilité exacte	50
2.19	Caractérisation de la contrôlabilité approximative :	58
3	Applications	62
	Bibliographie	66

Remerciements

Je remercie **Allah** *le tout* puissant, de m'avoir donnée la santé, la volonté et le courage de mener à bien ce travail.

Je tiens particulièrement à remercier mon encadreur A.Merghad pour leur soutien, leurs conseils judicieux et leur grande bien vaillance durant l'élaboration de ce travail.

Mes remerciements également au :

Présidente de Jury : O. Zahi

Examineur : N. Hakkar

D'avoir accepté d'examiner et dévaluer mon travail.

Enfin, je remercie tous les enseignants qui ont contribué à mon formation depuis les études primaires et mes supérieurs.

Dédicaces

Par le biais de cet humble et modeste travail, je dédie le fruit de ma persévérance :

- A ma raison de vivre et ma fleur de vie ma mère, symbole d'amour, d'affection et de bienveillance, pour sa patience, ses sacrifices, sa conscience, ses conseils qui ont éclairé mon chemin, et surtout pour l'amour qu'elle m'a apportée depuis ma naissance.

- A mon très cher père. Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager.

Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

- Et tout particulièrement à mon futur mari Abderrahmane grâce à qui j'ai pu entrainer ce travail.

Son aide, son amour, son soutien moral et son attention m'ont donnée la force et le courage.

- A mes très chers frères et mes belles sœurs.

- Je lui témoigne ici tout les membres de la famille, et toute ma reconnaissance.

Introduction

L'idée du calcul fractionnaire est apparue pour la première fois dans une lettre envoyée par Marquis de L'Hospital(1661-1704)à Wilhelm Leibniz(1646-1716),datée en 30 Septembre 1695.dans cette lettre, L'Hospital interroge Leibniz sur son artucle apparu en 1646 dans lequel il donne une définition de la dérivée d'ordre n d'une fonction f où $n = 1, 2, 3, \dots$. L'Hôpital lui demande qu'obtient-on si $n = \frac{1}{2}$.et Leibniz répond que "cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences".Depuis cette découverte, beaucoup de mathématiciens se sont penchés sur le sujet,nous citons :

P.S.Laplace (1812), J.B.J.Fourier (1822), N.H.Abel (1823-1826), J.Liouville (1832-1873), B.Riemann(1847), H.Holmgren (1865-1867), A.K.Grunwald (1867-1872), A.V.Letnikov (1868-1872), H.Laurent (1884), P.A.Nekrassov (1888), A.Krug (1890), J.Hadanard (1892), O.Heaviside (1892-1912), S.Pincherle (1902), G.H.Hardy et J.E.Littlewood (1917-1928), H.Weyl (1917), P.Levy (1923), A.Marchaud (1927), H.T.Davis (1924-1936), A.zygmund (1935-1945), E.R.Amour (1938-1996), H.Kober (1940), D.V.Widder (1941), M.Riesz (1949). Le but étant de généraliser les résultats obtenus pour des dérivées d'ordre entier, dans le cas où les dérivées sont d'ordre arbitraire.

Durant presque plus de 300 ans, la théorie du calcul Fractionnaire a été développée uniquement en tant que théorie pure utile juste pour les mathématiciens.Ce n'est qu'au début des années 1950 que Vanderziel dans ses recherches sur les spectres de bruit des semi-conducteurs, puis Davidson et Cole dans leurs travaux sur la relaxation diélectrique dans certains liquides ont pu modéliser des phénomènes naturels en faisant appel à la dérivée d'ordre fractionnaire.

les divers domaines où le calcul fractionnaire a fait un impact profond comprend la viscoélasticité et la rhéologie, le génie électrique, l'électrochimie, la biologie (battements du coeur, flux du sang), biophysique et le géniebiologique, le traitement du signal et d'image, la mécanique, la mécatronique, la physique, et la théorie de la commande.

Ce travail se présente comme suit :

Le premier chapitre rappelle quelque notions préliminaires essentielles de l'analyse fonctionnelle et de calcul fractionnaire.

La deuxième chapitre présente la notion de contrôlabilité exacte et approchée d'un système linéaire fractionnaire. La définition classique y sont adaptées, pour ensuite étendre le critère de Kalman pour ce type de systèmes en dimension infini.

Dans la troisième chapitre nous traitons une application sur un système modélisé par une équation intégrale fractionnaire dans un espace de Hilbert.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Espaces fonctionnels

Définition 1.2 (*Espace vectoriel*) Soit E un ensemble non vide muni d'une opération interne notée $+$ (addition) et d'une opération externe sur le corps \mathbb{K} notée \cdot (multiplication par un scalaire), i.e. une application qui au couple $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E$ associe un élément $\alpha \cdot x \in E$.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} si :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif,

2. $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a :

- $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

- $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

- $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$,

- $1 \cdot x = x$.

Les éléments de E sont appelés points, éléments ou vecteurs (selon le contexte), ceux de \mathbb{K} scalaires.

Définition 1.3 (*Sous-espace vectoriel*) Toute partie non vide F d'un espace vectoriel E sur \mathbb{K} , stable pour l'addition interne de E (i.e. $x + y \in F, \forall x, y \in F$) et la multiplication externe (i.e. $\alpha x \in F, \forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times F$) a une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} induite par celle de E .

On dit que F est sous-espace vectoriel de E .

Définition 1.4 (*Espace vectoriel normé*) Soit X un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} . Une norme sur X est une application de X dans \mathbb{R}_+ noté $x \mapsto \|x\|$ ou $N(x)$ qui vérifié $\forall x, y \in X$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ les propriétés suivantes :

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Séparation)
 2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Homogénéité)
 3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Triangulaire).
- On dit que $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} .

Remarque 1.5 Si l'application $x \mapsto \|x\|$ vérifié uniquement les propriétés (2) et (3), on parle alors d'une semi-norme.

Définition 1.6 (Espace de Banach) Un espace normé E est dit espace de Banach s'il est complet, i.e. si toute suite de Cauchy convergentes vers un élément de E .

Définition 1.7 (Suite de Cauchy) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans un espace normé E . On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n, m \geq N_\epsilon : \|x_n - x_m\| \leq \epsilon$$

.

Espace des fonctions intégrables

Espace de Hilbert

Définition 1.8 (Produit scalaire) On appelle produit scalaire sur H toute application (\cdot, \cdot) de $H \times H$ dans \mathbb{K} t.q. : $\forall x, x', y \in H$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on ait les propriétés suivantes :

1. $(\lambda x + \mu x', y) = \lambda(x, y) + \mu(x', y)$ (Linéarité en x)
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (Symétrie)
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (Anti-symétrie)
3. $(x, x) \in \mathbb{R}_+$ (Positivité)
4. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Espaces des fonctions et quelques propriétés

L'espace des fonctions intégrables

Définition 1.9 Soit $\Omega = [a, b] (-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle bornée de \mathbb{R} .

Pour $1 \leq p < \infty$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions réelles et mesurables de puissance p^{ime} intégrables sur Ω , c'est-à-dire :

$$L^p(\Omega) = \{f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}/f \text{ est mesurable et } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}$$

Pour $p = \infty$ on désigne par L^∞ l'espace des classes de fonctions réelles, mesurables et bornées presque par tout. C'est-à-dire :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}/f \text{ est mesurable et } \exists M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ p.p.}\}$$

Proposition 1.10 Soit $\Omega = [a, b]$. Pour $1 \leq p < \infty$, la fonction qui à tout $f \in L^p(\Omega)$ associe le nombre

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

est une norme sur $L^p(\Omega)$. Pour $p = \infty$, la fonction qui à tout $f \in L^p(\Omega)$ associe le nombre

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{esssup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

est une norme sur $L^\infty(\Omega)$.

Théorème 1.11 (Fischer-Riesz) Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $(\|\cdot\|_{L^p})$ est un espace de Banach.

Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme $(\|\cdot\|_{L^\infty})$ est un espace de Banach.

Théorème 1.12 (Inégalité de Holder) Soit $\Omega = [a, b]$, et soient p et q deux exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Si $f \in L^p(\Omega)$, alors, $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour $p = q = 2$, l'inégalité précédente devient

$$\int |fg| dt \leq \left(\int |f|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ce qu'on appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Espaces des fonctions continues

Définition 1.13 Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et soit $n \in \mathbb{N}$. On note par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles n fois continument dérivables sur Ω , muni de la norme

$$\| f \|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \sup_{x \in [a, b]} | f^{(k)}(x) |.$$

Définition 1.14 (Espace préhilbertien) Un \mathbb{K} -espace vectoriel X muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien (réel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Corollaire 1.15 Soit X un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(., .)$. La relation

$$\| x \| = (x, x)^{\frac{1}{2}},$$

définit une norme sur X .

Définition 1.16 (Espace de Hilbert) Un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire est appelé espace de Hilbert.

Exemple 1.17 L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré intégrable muni du produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

définit un espace de Hilbert.

Remarque 1.18 Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert (c'est le cas de \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n munis de leurs produits scalaires canoniques respectifs).

En particulier, pour tout élément z de X , on a :

- $z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \varnothing_n \rangle \varnothing_n$ i.e. $\lim_{N \rightarrow \infty} \| z - \sum_{n=1}^N \langle z, \varnothing_n \rangle \varnothing_n \|_X = 0$.
- $\| z \|_X^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \langle z, \varnothing_n \rangle |^2$.

Définition 1.19 (Espace séparable) Un espace séparable est un espace topologique contenant un sous-ensemble dense et au plus dénombrable.

Théorème 1.20 Toute espace de Hilbert séparable de dimension infinie possède une base hilbertienne dénombrable.

Espaces $H^k(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$

Définition 1.21 Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , pour tout $p \in [1, +\infty]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k\}.$$

En particulier, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in (L^2(\Omega))^n\}.$$

Définition 1.22 Soit $\Omega \in \mathbb{C}^1$ (régulier), alors on a :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

1.22.1 Théorie des opérateurs linéaires

Dans toute la suite E, F sont des espaces normés sur le même corps \mathbb{K} .

Opérateurs linéaires

Définition 1.23 Un opérateur linéaire de E dans F est une application A d'un sous-espace $D(A) \subseteq E$ à valeur dans F t.q. :

$$\forall x, y \in D(A), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \text{ on a : } A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Avec $D(A)$ est le domaine de l'opérateur A .

- L'image de A est le sous-espace :

$$R(A) = \text{Im}A = \{A(x) : x \in D(A)\} = A(D(A)) \subset F.$$

- Le noyau de A est le sous-espace :

$$N(A) = \text{Ker}A = \{x \in D(A) : A(x) = 0\} \subset E.$$

Remarque 1.24 1. En disant que A est un opérateur de E dans F , il est possible que $D(A)$ soit un sous-espace propre de E , par contre l'écriture $A : E \rightarrow F$ signifie que $D(A) = E$.

2. A est surjectif si et seulement si $R(A) = F$.

3. A est injectif si et seulement si $N(A) = \{0\}$.

4. D'habitude on écrit simplement Ax au lieu de $A(x)$.

Définition 1.25 (*Opérateur adjoint*) Soient E, F deux espaces de Hilbert. Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $A^* \in \mathcal{L}(E, F)$ l'opérateur défini par

$$(\phi, A^*\psi)_E = (A\phi, \psi)_F, \quad \forall(\phi, \psi) \in E \times F.$$

Définition 1.26 (*Base Hilbertienne*) Une famille $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace de Hilbert X est une base orthonormée de X ou une base Hilbertienne de X si et seulement si

- $\|\phi_n\|_X = 1, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\langle \phi_n, \phi_m \rangle_X = 0, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$
- l'espace vectoriel engendré par la famille $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans X .

En particulier, tout élément z de X , on a

- $z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n$ (i.e. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|z - \sum_{n=1}^N \langle z, \phi_n \rangle \phi_n\|_X = 0$);
- $\|z\|_X^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \phi_n \rangle|^2$.

Définition 1.27 (*Opérateur diagonalisable*) Un opérateur A d'un espace de Hilbert X sera dit diagonalisable si et seulement s'il existe une base hilbertienne de X constituée de fonctions propres de A , i.e. s'il existe une base hilbertienne $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X et une suite de nombres complexes $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$D(A) = \left\{ z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle z, \phi_n \rangle|^2 < +\infty \right\}$$

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \phi_n \rangle_X \phi_n, \quad \forall z \in D(A).$$

Théorème 1.28 (voir [3], Theorem XV.3.4) Soient Y, Z deux espaces de Banach, soit $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Si T est surjectif alors son adjoint T^* est borné inférieurement, i.e. il existe $\gamma > 0$ tel que $\|z^*\| \leq \gamma \|T^*z^*\| \dots$ (adj) pour $z^* \in Z^*$. En outre, si Y et Z sont réflexifs et (adj) est vérifiée, alors T est surjectif, le théorème suivant va nous être d'une très grande utilité dans la suite :

Définition 1.29 (*Inverse d'opérateurs*) Soit A un opérateur de E dans F . On dit que A a un inverse ou que l'inverse de A existe si A est injectif.

Dans ce cas l'inverse est l'opérateur linéaire de domaine $R(A)$ et d'image $D(A)$ définie par :

$$A^{-1}y = x \text{ lorsque } Ax = y.$$

$$A^{\frac{1}{2}}z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \langle z, \varnothing_n \rangle_X \varnothing_n, \forall z \in X.$$

Opérateurs linéaires continus

Définition 1.30 Soit A un opérateur linéaire de E dans F . On dit que A est continu en un point $x_0 \in D(A)$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

$$1. \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in D(A) : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| \leq \epsilon.$$

2. Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ de limite x_0 , on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} Au_n = Ax_0$.
- A est dit continu s'il est continu en tout point de $D(A)$.

Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.31 Soit A un opérateur linéaire de E dans F . On dit que A est borné sur $D(A)$ s'il existe une constante $c > 0$ t.q. :

$$\|Ax\| \leq c \|x\|, \forall x \in D(A) \quad \Delta$$

.

Remarque 1.32 La plus petite valeur possible de la constante c dans (Δ) est notée $\|A\|$ et est appelée norme de l'opérateur A t.q. :

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

. D'où l'inégalité (Δ) s'écrit :

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \forall x \in D(A)$$

.

Lemme 1.33 Pour tout opérateur linéaire borné A de E dans F , on a :

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\|$$

.

Corollaire 1.34 Soit A un opérateur linéaire de E dans F , alors : A borné sur $D(A)$ si et seulement si A est continu.

Définition 1.35 Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, alors :

1. On appelle spectre de A , l'ensemble :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda I_{dE} - A) \text{ non inversible}\}, \text{ (non inversible i.e. non bijectif).}$$

Tout scalaire $\lambda \in \sigma(A)$ est dit valeur spectrale.

2. On appelle ensemble résolvant de A , l'ensemble :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda I_{dE} - A) \text{ inversible}\}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$, alors la résolvante de A est :

$$R_\lambda(A) = (\lambda I_{dE} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

1.36 Semi-groupes

La fonction $t \mapsto e^{ta}$, $a \in \mathbb{R}$, est une solution réelle continue de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(t+s) = f(t)f(s)$ avec la condition $f(0) = 1$. Cette équation a été étudiée par beaucoup de mathématiciens commençant avec Cauchy meme.

D'autre part, il est très bien connu que la fonction exponentielle $t \mapsto e^{ta}$ est la solution unique sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' = ay$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} y' = Ay, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où A est une matrice sous la forme :

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Ce résultat a été étendu aux équations différentielles opérationnelles $Y' = AY$, où A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach E , qui a pour solution fondamentale donnée par : $y(t) = e^{At}y_0$, t.q. y_0 donné dans un espace de Banach E

Nous avons considéré des exemples si A est un opérateur linéaire non borné. Par exemple dans un espace de Hilbert $L^2(U)$, la solution du problème (1.1) est donnée par la formule :

$$y(t) = S(t)y_0,$$

Où S est un opérateur borné dans E , vérifiant certaines des propriétés de l'exponentielle e^{At} ci-dessus, et plus précisément

$$\begin{cases} S(0) = I, \\ S(t+s) = S(t)S(s), \\ \lim_{t \rightarrow 0} S(t)y_0 = y_0, \text{ dans } E. \end{cases} \quad (1.2)$$

Si $h \rightarrow 0$; on obtient

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \implies (\lambda - A)R(\lambda)x = x; \forall x \in E$$

Alors $R(\lambda)$ est Linverse à gauche de l'opérateur $(\lambda I - A)$.

L inverse à droite ?

Pour montrer que c'est un inverse à droite de $(\lambda I - A)$ il suffit de montrer que $AR(\lambda) = R(\lambda)A$

On a. Si $x \in D(A)$; on a

$$\begin{aligned} AR(\lambda)x &= A \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{S(h) - I}{h} S(t)x dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) \frac{S(h) - I}{h} x dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) Ax dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) dt Ax = R(\lambda)Ax. \end{aligned}$$

Ainsi on a déduire que $R(\lambda)(\lambda I - A)x = x$

d'où $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ c'est-à-dire $R(\lambda) = R(\lambda, A)$.

Étude de la croissance de la Résolvante

On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\lambda > w > w_0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt$ est convergente.

$$e^{-\lambda t} \| S(t)x \| \leq \| x \| M_\epsilon e^{(-\lambda+w_0+\epsilon)t} \text{ où } \epsilon > 0$$

De cette manière on peut définir l'opérateur borné

$$R(\lambda) : E \longrightarrow E; R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \text{ telle que } \lambda > w_0 + \epsilon.$$

Et que

$$\| R(\lambda) \| \leq \frac{M_\epsilon}{\lambda - w_0 - \epsilon}$$

d'autre part on a $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \leq w_0\}$, et en générale $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda > w_0\}$. Et on a

$$R(\lambda, A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) dt \text{ et } \| R(\lambda, A) \| \leq \frac{M_0}{\lambda - w_0}.$$

Proposition 1.37

$$(R(\lambda - A))^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{n-1} S(t) dt$$

Démonstration

Tout d'abord on remarque que l'on a $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$ identité des résolvante de Hilbert.

$$\begin{aligned} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} &= -R(\lambda, A)R(\mu, A) \\ \rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} &= \lim_{\lambda \rightarrow \mu} (-R(\lambda, A)R(\mu, A)) \\ \frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) &= -(R(\lambda, A))^2 \end{aligned}$$

Par récurrence on peut démontrer facilement que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! (R(\lambda, A))^{n+1}$$

Alors :

$$(R(\lambda, A))^n = \frac{1}{(-1)^{n-1}(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)$$

$$(R(\lambda, A))^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{n-1} T(t) dt; \forall \lambda \in \rho(A)$$

Donc :

$$\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-w)t} t^{n-1} dt$$

On obtient :

$$\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda-w)^n}.$$

1.37.1 L'approximation généralisée de Yosida

Lemme 1.38 Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes

◇ A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = E$.

◇ Il existe $w \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $A_w \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in A_w$; on a

$$\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda-w)^n}; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Alors pour tout $\lambda \in A_w$; nous avons $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x; \forall x \in E$ De plus :

$$\lambda AR(\lambda, A) \in F(X)$$

$$\text{Et : } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda AR(\lambda, A)x = Ax; \forall x \in D(A)$$

Remarque 1.39 On peut dire que les opérateurs bornés $\lambda AR(\lambda, A)$ sont des approximations pour l'opérateur non borné A . C'est le motif pour lequel on introduit le théorème suivant.

Théorème 1.40 La famille $\{A_\lambda\}_{\lambda \in A_w} \subset F(E)$; où

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$$

S'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A .

Preuve On a $(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I \Rightarrow (\lambda I - A)R(\lambda, A) = I$
 $\Rightarrow \lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A) = I \Rightarrow \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda AR(\lambda, A) = \lambda I$
 $\Rightarrow \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I = \lambda AR(\lambda, A) = A_\lambda.$

Théorème 1.41 (de Hille-Yosida) *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe $S(t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornées si et seulement si*

(i) *A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = E$.*

(ii) *Il existe $w \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $A_w \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in A_w$; on a :*

$$\| (\lambda I - A)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Démonstration (\Rightarrow) déjà démontrée.

(\Leftarrow) Dans ce but introduisant tout d'abord la notion d'approchante Yosida

Définition 1.42 *Pour $\lambda > w$ on définit les approchant Yosida de A par :*

$$A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I = \lambda AR(\lambda, A).$$

Lemme 1.43 *On a*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax; \forall x \in D(A).$$

Démonstration Soit $x \in D(A) : \| \lambda R(\lambda, A)x - x \| = \| AR(\lambda, A)x \|$
 $= \| R(\lambda, A)Ax \| \leq \| R(\lambda, A) \| \cdot \| Ax \| \leq \frac{M}{\lambda - w} \| Ax \| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0, \lambda \rightarrow +\infty$
D'après Banach-Steinhaus :

$$\lambda R(\lambda, A)x \rightarrow 0, \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty; \forall x \in D(A)$$

$$\text{Or : } \overline{D(A)} = E : \| R(\lambda, A) \| \leq \frac{M\lambda}{\lambda - w} \leq c$$

Alors d'après Banach-Steinhaus : $\lambda R(\lambda, A)x \rightarrow x : \forall x \in E$

Ainsi : $A_\lambda x \rightarrow Ax; \forall x \in D(A)$

$$\{A_\lambda x = \lambda R(\lambda, A)Ax \rightarrow Ax\}$$

Lemme 1.44 *Soient A et B deux opérateurs linéaires telle que $A \subset B$ et $\rho(A) \cap \rho(B) = \emptyset$. Alors $A = B$.*

Démonstration Soit $x \in D(B)$ et $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$ posons : $Bx - \lambda_0 x = y$
 et $z = (A - \lambda_0 I)^{-1}y$
 $\Rightarrow z \in D(A)$ et de plus $Az - \lambda_0 z = y$
 $\Rightarrow z \in D(B) : Bz - \lambda_0 z = y$
 $\Rightarrow z = (B - \lambda_0 I)^{-1}y = (B - \lambda_0 I)^{-1}(B - \lambda_0 I)x = x$
 $\Rightarrow x \in D(A)$

Ainsi $D(A) = D(B) \Rightarrow A = B$.

Démonstration (suite de la démonstration de la suffisance de théorème de Hille-Yosida) : Pour chaque $\lambda > w$: soit $A_\lambda = \lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I \Rightarrow A_\lambda \in L(E)$; on peut alors construire le semi-groupe :

$$S_t^\lambda = e^{A_\lambda t} = e^{\lambda^2 t(\lambda I - A)^{-1} - \lambda t}$$

$$S_t^\lambda = e^{A_\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} (\lambda I - A)^{-1}$$

On va montrer que la limite de semi-groupe S_t^λ existe quand $\lambda \rightarrow +\infty$ et que de semi-groupe chercher S_t .

Notons que :

$$\| S_t^\lambda \leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} \frac{M}{(\lambda - w)^n}$$

$$= M \cdot \exp\left(\frac{\lambda w t}{\lambda - w}\right)$$

Il facile de voir que : $A_\lambda \cdot A_\mu = A_\mu \cdot A_\lambda$ (vue que : $R(\lambda, A) \cdot R(\mu, A) = R(\mu, A) \cdot R(\lambda, A)$)
 est que : $A_\lambda \cdot S_t^\mu = S_t^\mu \cdot A_\lambda$

Soit $x \in D(A)$ on a :

$$S_t^\lambda x - S_t^\mu x = \int_0^t \frac{d}{ds} (S_{t-s}^\mu - S_s^\lambda) x ds$$

$$= \int_0^t S_{t-s}^\mu (A_\lambda - A_\mu) S_s^\lambda x ds$$

$$= \int_0^t S_{t-s}^\mu S_s^\lambda (A_\lambda - A_\mu) x ds$$

$$\Rightarrow \| S_t^\lambda x - S_t^\mu x \| \leq M^2 \cdot \exp\left(\frac{\mu w t}{\mu - w}\right) \| (A_\lambda - A_\mu) x \| \cdot \int_0^t \exp\left(-\frac{(\lambda - \mu) w^2 s}{(\mu - w)(\lambda - w)}\right) ds$$

Choisi : $\lambda > \mu$

$$\| S_t^\lambda x - S_t^\mu x \| \leq M^2 \cdot \exp\left(\frac{\mu w t}{\mu - w}\right) t \| (A_\lambda - A_\mu) x \| .$$

(et on a $A_\lambda x \rightarrow Ax$ car $\lambda, \mu \rightarrow \infty$)

Donc $S_t^\lambda x$ converge fortement vers une limite qu'on note par : $S_t x$.

Il reste que S_t est un C^0 -semi-groupe dans le générateur infinitésimal A .

◇ $S_{t+s} x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_{t+s}^\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_t^\lambda \cdot S_s^\lambda x = S_t \cdot S_s x; \forall x \in E; \forall t, s \geq 0$

◇ $S_0 x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_0^\lambda x = Ix = x \Rightarrow S_0 = I$

◇ La continuité forte est une conséquence direct de la continuité uniforme sur le compacte.

A est la générateur infinitésimal de S_t ?

Soit $x \in D(A)$

$$S(t)x - x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{A_\lambda t} x - x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda ds = \int_0^t S(s) A x ds$$

Soit B le générateur de $S(t)$ et soit $x \in D(A)$

$$\Rightarrow \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t S(s) A x ds$$

$$\Rightarrow x \in D(B); Bx = Ax$$

$$\Rightarrow B \supseteq A$$

Si $\lambda > w$ on' a tout d'abord $\lambda \in \rho(A)$ et $\lambda \in \rho(B)$ d'après de condition nécessaire de Hille-Yosida alors d'après le lemme précédente : $A = B$.

Ainsi le théorème est démontré.

1.45 Théorie du semi-groups

Semi-groupe fortement continues à l'origine

Définition 1.46 Soit E un espace de Banach. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $S(t) : E \rightarrow E$ dépendante du paramètre $t \geq 0$ forme un semi groupe si :

$$\begin{cases} 1) S(0) = I \\ 2) S(t+s) = S(t)S(s); \forall t, s \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Définition 1.47 Un semi-groupe $S(t)$ est dit fortement continue à l'origine ou bien semi groupe de classe C_0 si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \| S(t)x - x \| = 0; \forall x \in E$$

Définition 1.48 Soit $S(t)$ un semi groupe sur E le générateur infinitésimal de $S(t)$ est l'opérateur linéaire non borné A défini par

$$A : D(A) \subset E \rightarrow E$$

$$D(A) = \{x \in E \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - I}{t} x \text{ existe} \},$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ pour } x \in D(A)$$

$D(A)$ est le domaine de A .

Proposition 1.49 Soient $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornées et A son générateur infinitésimal. Si $x \in D(A)$, alors $S(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité $S(t)Ax = AS(t)x; \forall t \geq 0$.

Démonstration Soit $x \in D(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons :

$$S(t)Ax = S(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h}.$$

Donc $S(t)x \in D(A)$ et on a $S(t)Ax = AS(t)x; \forall t \geq 0$.

Remarque 1.50 On voit que : $S(t)D(A) \subseteq D(A); \forall t \geq 0$.

Lemme 1.51 Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma)x d\sigma = S(t)x$$

Pour tout $x \in E$ et $t \geq 0$.

Démonstration Ce lemme résulte de l'évaluation :

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma)x d\sigma - S(t)x \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (S(\sigma) - S(t))x d\sigma \right\| \leq \sup_{\sigma \in [t, t+h]} \|S(\sigma)x - S(t)x\|$$

et de la continuité de l'application $[0, \infty) \ni tS(t)x \in E$.

Proposition 1.52 Soient $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornées et A son générateur infinitésimal. Si $x \in D(A)$, alors : $\int_0^t S(\sigma)x d\sigma \in D(A)$ et on a l'égalité :
 $A \int_0^t S(\sigma)x d\sigma = S(t)x - x; \forall t \geq 0.$

Théorème 1.53 Soient $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe d'opérateur linéaire bornée et A son générateur infinitésimal. alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si
 $S(t)x - x = \int_0^t S(\sigma)y d\sigma; \forall t \geq 0.$

Proposition 1.54 $\forall x \in D(A); S(t)x \in D(A)$ et $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$

Démonstration Remarquons que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t)S(h) - S(t)}{h}x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t)(S(h) - I)}{h}x \\ &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h}x = S(t)Ax \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h}S(t)x &= AS(t)x; \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

D'autre parte

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t-h+h)x}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t-h)S(h)x}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h) \frac{I - S(h)}{-h}x = S(t)Ax \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h}S(t-h)x = AS(t)x.$

Proposition 1.55 Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe donc $D(A)$ est un sous espace vectoriel dense dans $E(\overline{D(A)} = E).$

Démonstration $D(A)$ sous espace vectorielle qu'on peut vérifie facilement.

Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma)x d\sigma = x; \forall x \in E$$

donc il suffit de démontrer que

$$\forall x \in E \text{ et } \forall t > 0; \int_0^t S(\sigma)x d\sigma \in D(A)$$

En effet

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(\sigma)x d\sigma &= \frac{1}{h} \int_0^t \{S(h + \sigma)x - S(\sigma)x\} d\sigma \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t S(h + \sigma)x d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^t S(\sigma)x d\sigma \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{h+t} S(\sigma)x d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^t S(\sigma)x d\sigma \\ &= \frac{1}{h} \int_h^0 S(\sigma)x d\sigma + \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(\sigma)x d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^t S(\sigma)x d\sigma \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(\sigma)x d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma)x d\sigma = S(t)x - x \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(\sigma)x d\sigma = S(t)x - x$$

d'où

$$\int_0^t S(\sigma)x d\sigma \in D(A)$$

On a donc aussi $\frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma)x d\sigma \in D(A)$, et comme $x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma)x d\sigma$.
On en déduit que $\overline{D(A)} = E$, et $A \int_0^t S(\sigma)x d\sigma = S(t)x - x$. et en plus $\int_0^t S(\sigma)Ax d\sigma = S(t)x - x$.

Proposition 1.56 *L'opérateur A est fermé.*

Démonstration pour tout $(x_n) \in D(A)$ telle que $x_n \rightarrow x$ et $Ax_n \rightarrow y$

Est-ce que $x \in D(A)$ et $Ax = y$?

En effet, supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$(x_n)_n \in D(A) \text{ et } x_n \rightarrow x_0 \text{ et } Ax_n \rightarrow y_0$$

dans E d'après la démonstration précédente

$$\int_0^t S(\sigma)y_0 d\sigma = S(t)x_0 - x_0$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x_0 - x_0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma)y_0 d\sigma$$

On en déduit que $x_0 \in D(A)$ et $Ax_0 = y_0$. Ainsi l'opérateur A est fermé.

Unicité du générateur

Théorème 1.57 Soient deux C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A . Alors :

$$T(t) = S(t); \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Démonstration Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$. Définissons l'application :

$$[0, t) \ni s \mapsto U(s)x = T(t-s)S(s)x \in D(A).$$

Alors :

$$\frac{d}{ds}U(s)x = \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x = -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0$$

Quel que soit $x \in D(A)$. Par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in D(A)$, d'où :

$$T(t)x = S(t)x; \forall x \in D(A) \text{ et } t \geq 0.$$

Puisque $\overline{D(A)} = E$ et $T(t), S(t) \in F(E)$, pour tout $t \geq 0$, il résulte que :

$$T(t)x = S(t)x; \forall t \geq 0 \text{ et } x \in E$$

Ou bien $T(t) = S(t); \forall t \geq 0$.

1.58 Propriété de la croissance exponentielle de semi groupe

Lemme 1.59 Soit $S(t)$ un semi groupe fortement continu alors il existe $M \geq 1$ et $w \in \mathbb{R}$ telle que

$$\| S(t) \| \leq Me^{wt}; \forall t \geq 0$$

Démonstration Considérons le compact $[0, 1]$
 Comme $S(t)$ est fortement continue alors $\forall x \in E; t \rightarrow S(t)x$ est continue.
 Alors l'image du compact $[0, 1]$ par cette application est borné :

$$\exists M_x > 0 \text{ telle que } \| S(t)x \| \leq M_x; \forall t \in [0, 1]$$

d'après Banach-Steinhaus

$$\exists M \text{ telle que } \| S(t) \| \leq M; \forall t \in [0, 1]$$

Comme $S(0) = I \Rightarrow M \geq 1$

Si $t \notin [0, 1]$; on peut écrire t sous la forme : $t = n + \sigma$ ou $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} S(t) &= S(n + \sigma) = S(n)S(\sigma) = S(\overbrace{1 + \dots + 1}^n)S(\sigma) \\ &= \{S(1)\}^n S(\sigma) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \| S(t) \| &= \| \{S(1)\}^n \| \| S(\sigma) \| \leq \| S(1) \|^n \| S(\sigma) \| \\ \| S(t) \| &\leq M^n M = M e^{n \log M} = M e^{tw} \end{aligned}$$

Donc $\| S(t) \| \leq M e^{tw}$ telle que $w = \log M$.

Proposition 1.60 Si $S(t)$ est un semi-groupe fortement continue à l'origine est la majoration

$$\| S(t) \| \leq M e^{wt}$$

Alors $S(t)$ est fortement continue en tout points $s > 0$

Démonstration Soit $S(t)$ un semi-groupe fortement continue à l'origine pour tout

$$x \in E; \| S(t)x - x \| \rightarrow 0 \text{ quand } t \mapsto 0^+$$

Montrons la continuité forte en un point $s > 0$?

C-à-d montrons que :

$$\forall x \in E; \| S(s+t)x - S(s)x \| \rightarrow 0 \text{ quand } t \mapsto 0^+$$

Considérons d'abord le cas $t > 0$

$$\| S(s+t)x - S(s)x \| = \| S(t)S(s)x - S(s)x \| = \| S(t)y - y \| \rightarrow 0 \text{ quand } t \mapsto 0^+$$

Grâce à la continuité forte à l'origine. La continuité à droite (I)

Le cas $t < 0$

$$\begin{aligned} \| S(t+s)x - S(s)x \| &= \| S(t+s)x - S(t-t+s)x \| \\ &= \| -S(t+s)(S(-t)x - x) \| \\ &\leq \| S(t+s) \| \| (S(-t)x - x) \| \\ &\leq M e^{w(t+s)} \| (S(-t)x - x) \| \end{aligned}$$

On a

$$\| S(-t)x - x \| \rightarrow 0 \text{ quand } t \mapsto 0^+ (\text{ car } t < 0 \text{ alors } -t > 0)$$

Donc la continuité à gauche (II)

d'après (I) et (II) alors $S(t)$ est fortement continue.

Type d'un semi-groupe

Définition 1.61 On appelle type d'un C_0 semi-groupe $S(t)$ le nombre w_0 définie par

$$w_0 = \inf\{w \in \mathbb{R}; \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ telle que } \| S(t) \| \leq Me^{wt} \text{ pour tout } t \geq 0\}$$

$$w_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log \| S(t) \|}{t} = \inf \frac{\log \| S(t) \|}{t}$$

Semi-groups importants

Si $\forall t \geq 0$ on a $\| S(t) \| \leq M$ le semi-groupe $S(t)$ est dit borné.

Si $\forall t \geq 0$ on a $\| S(t) \| \leq 1$ le semi-groupe $S(t)$ est dit contraction

La transformée de Laplace d'un C_0 -semi-groupe

Dans la suite, pour $w \geq 0$ nous désignerons par A_w l'ensemble

$$A_w = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda > w > w_0\}$$

Soit $\lambda \in A_w$ et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornées nous avons

$$\| S(t) \| \leq Me^{wt}; \forall t \geq 0.$$

Et on voit que

$$\| e^{-\lambda t} S(t)x \| \leq e^{-\lambda t} \| S(t) \| \| x \| \leq Me^{-(\lambda-w)t} \| x \|; \forall x \in E$$

Définissons l'application $R_\lambda : E \rightarrow E$ par

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire. De plus on a

$$\| R_\lambda x \| \leq \int_0^\infty \| e^{-\lambda t} S(t)x \| dt \leq \frac{M}{\lambda - w} \| x \|; \forall x \in E$$

d'où il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.

Démonstration L'opérateur $R : A_w \rightarrow F(E)$

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$$

S'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Théorème 1.62 Si λ est telle que

$$\lambda > w_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log \| S(t) \|}{t}$$

Alors $\lambda \in \rho(A)$ et l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$ existe. Et :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt = R(\lambda, A)x$$

Lemme 1.63 (Baire) : Soit (E, d) un espace métrique complet.

Alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E .

Proposition 1.64 Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que F est ouvert, alors $F = E$.

Démonstration Si F est ouvert, alors puisque $0 \in F$, il existe $r > 0$ telle que $B(0, r) \subset F$, prenons, $x \in E, x \neq 0$ alors $y = \frac{rx}{2 \| x \|}$ a pour norme $\frac{r}{2}$ c'est donc un élément de F , puisque F est stable par multiplication par un scalaire $x = \frac{2 \| x \|}{r} y$ est élément de F et donc $F = E$.

Généralisation de Semi – groupe :

On appelle C_0 semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) une famille d'opérateurs $(S(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{L}(X)$, lorsque les conditions suivantes sont réalisées

- i) $S(0) = I$,
 ii) $S(t_1, t_2) = S(t_1)S(t_2), \forall t_1, t_2 > 0$,
 iii) $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x - x = 0, \forall x \in X$.

Démonstration Si $w_0 < w < \lambda$ on a $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt \right\| &\leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} S(t)\| dt = \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| \|S(t)\| dt \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{wt} dt = M \int_0^\infty e^{(w-\lambda)t} dt \end{aligned}$$

Ainsi si $w_0 < \lambda$ alors l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$ existe.

Notons par $R(\lambda)$ l'opérateur défini pour chaque $x \in E$ par

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

Tout d'abord on va montrer que

$$\forall x \in E; R(\lambda)x \in D(A)$$

En effet $\forall x \in E$ on a

$$\frac{S(h) - I}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt = \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} [S(t+h)x - S(t)x] dt$$

On pose $t+h = \sigma$ alors on a

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt &= \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda(\sigma-h)} S(\sigma)x d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\sigma} S(\sigma)x d\sigma \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\sigma} S(\sigma)x d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(\sigma-h)} S(\sigma)x d\sigma \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} R(\lambda)x - e^{-\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{\lambda\sigma} S(\sigma)x d\sigma \end{aligned}$$

1.65 Calcul Fractionnaire :

1.66 Fonction Gamma d'Euler :

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma (indiquée par la lettre grecque Γ) est une extension de la fonction factorielle à des nombres complexes.

Définition 1.67 Soit ($z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0$), la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale d'Euler de second espèce :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

A titre d'exemple calculons $\Gamma(1)$ et $\Gamma(\frac{1}{2})$:

$$\bullet \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

• Par définitions, nous avons

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt, \text{ après un changement de va-}$$

riables $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} 2dx$ où $x = t^{\frac{1}{2}}$ et $dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$ Calculons l'intégrale

$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, il est clair que :

$$I^2 = (\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx)(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

En utilisant les coordonnées polaires, on trouve :

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} [-\frac{e^{-r^2}}{2}]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Comme $I > 0$ et ceci est vrai tout simplement par ce que $e^{-(x^2)} > 0$, alors

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \text{ Donc : } \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Propriétés 1.68 1- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

2- $\Gamma(n) = (n-1)!$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

3- $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Preuve

1- En intégrant par partie :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

2- On pose $z = n-1$, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$

$$= (n-1)(n-2)\dots\Gamma(1)$$

$$= (n-1)!$$

3- En peut facilement démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

• Pour $n = 0$, on a $\Gamma(0 + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

• Supposons que la formule est vérifiée pour $(n - 1)$ et le montrons pour n :

$$\Gamma\left((n - 1) + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2(n - 1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!},$$

est vérifié. Alors $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{(2(n - 1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!} \\ &= \left(\frac{2n - 1}{2}\right) \frac{(2n - 2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n - 1)!} = \frac{2n}{2n} \frac{(2n - 1)}{2} \frac{(2n - 2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!} \\ &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{aligned}$$

Exemple 1.69 On a vu que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et on a $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, alors

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Théorème 1.70 $\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2$ avec $\Re(z) > 0$ et $\Re(w) > 0$

$$\int_0^1 t^{w-1}(1 - t)^{z-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}$$

Preuve Les justifications de permutation des symboles d'intégrations se

font en invoquant le théorème de Fubini. $\Gamma(z + w)\beta(z, w) = \Gamma(z + w) \int_0^1 t^{w-1}(1 - t)^{z-1} dt$

$$\begin{aligned} &= \Gamma(z + w) = \int_0^\infty u^{w-1} \left(\frac{1}{1 + u}\right)^{z+w} du = \frac{u}{1 + u} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{w-1} \left(\frac{1}{1 + u}\right)^{z+w} v^{z+w-1} e^{-v} dv du \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{w-1} s^{z+w-1} e^{-s(u+1)} ds du = \frac{v}{1 + u} \\ &= \int_0^\infty s^z e^{-s} \int_0^\infty (us)^{w-1} e^{-su} du ds \\ &= \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} \Gamma(w) ds = \Gamma(z)\Gamma(w) \end{aligned}$$

Prolongement de $\Gamma(z)$ pour z négatif :

Supposons $-1 < z < 0$ soit $0 < z + 1 < 1$: $\Gamma(z + 1)$ est bien définie par la formule d'Euler, mais pas $\Gamma(z)$. on convient alors de définir $\Gamma(z)$ par la

relation $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$

Par récurrence on déduit facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

Cette relation permet de définir $\Gamma(z)$ pour z réel négatif telle que $-n < z < -n+1$

Preuve (par récurrence) :

- Si $n=1$, alors $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$
- Supposons la formule vérifiée pour n et le montrons pour $n+1$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

est vérifié. Alors

$$\begin{aligned} \Gamma(z+n+1) &= (z+n)\Gamma(z+n) = (z+n)\Gamma(z)z(z+1)\dots(z+n-1) \\ &= \Gamma(z)z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n) \text{ alors : } \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n-1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)} \end{aligned}$$

On a ainsi défini $\Gamma(z)$ pour tout nombre réel z

Exemple 1.71 $\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2} + 1\right)}{\frac{-1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{-1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$

1.72 Fonction d'erreur :

En mathématiques, la fonction d'erreur (aussi appelée fonction d'erreur de Gauss) est une fonction entière utilisée en analyse. Cette fonction se note erf et fait partie des fonctions spéciales. Elle est définie par :

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

La fonction erf intervient régulièrement dans le domaine des probabilités et statistiques, ainsi que dans les problèmes de diffusion (de la chaleur ou de la matière)

1.73 La fonction de Mittag-Leffler :

La fonction de Mittag-Leffler est une fonction importante dans le monde du calcul fractionnaire. Son rôle est analogue à celui joué par la fonction exponentielle dans le cas du calcul entier.

La définition standard de cette fonction à un paramètre est donnée par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha.k + 1)} (\alpha > 0)$$

Cette fonction a été introduite par le suédois Gosta-Mittag-Leffler (1846-1927) en 1903

La fonction exponentielle usuelle correspond pour une valeur de $\alpha = 1$

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Il est aussi courant de représenter la fonction de Mittag-Leffler avec deux paramètres α et β , comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha.k + \beta)} (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1.4)$$

Cette fonction a été introduite par le Indien Ravi.P.Agarwal (10 Juillet 1947) et le Hongrois Arther Erdelyi (1908-1977) en 1953-1954

Exemple 1.74

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha.k + 1)} = E_\alpha(z) \quad (1.5)$$

$$E_{0,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$E_{1,0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k)} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = ze^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

et en général :

$$E_{1,p}(z) = \frac{1}{z^{p-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{z^k}{k!} \right\}$$

Les cosinus et les sinus hyperboliques sont aussi des cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler :

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k + 1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}$$

La fonction $E(t, \alpha, a)$ est utilisée pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire, qui est définie par :

$$E(t, \alpha, a) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \alpha + 1)} = t^\alpha E_{1, \alpha+1}(at) \quad (1.6)$$

Théorème 1.75

$$E(t, \alpha, a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \xi^{\alpha-1} e^{a(t-\xi)} d\xi \quad (1.7)$$

Preuve Nous commençons par l'intégrale dans le coté gauche

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \xi^{\alpha-1} e^{a(t-\xi)} d\xi &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \xi^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k (t-\xi)^k}{k!} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a^k t^k}{k!} \left(\int_0^t \xi^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\xi}{t}\right)^k d\xi \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a^k t^k}{k!} I \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Pour compléter la preuve, nous devons calculer l'intégrale donnée par I où :

$$I = \int_0^t \xi^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\xi}{t}\right)^k d\xi \quad (1.9)$$

soit $\mu = \frac{\xi}{t}$, alors $d\xi = t d\mu$ comme $\xi = 0$ alors $\mu = 0$, et comme $\xi = t$, alors $\mu = 1$. En remplaçant dans (1.9) on trouve :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 t^{\alpha-1} \mu^{\alpha-1} (1-\mu)^k t d\mu \\ &= t^\alpha \int_0^1 \mu^{\alpha-1} (1-\mu)^k d\mu = \frac{t^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

afin de remplacer (1.10) dans (1.8) le produit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \xi^{\alpha-1} e^{a(t-\xi)} d\xi &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!} \frac{t^\alpha \Gamma(\alpha) k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)} = \\ &= t^\alpha E_{1, \alpha+1}(at) = E(t, \alpha, a) \end{aligned}$$

Corollaire 1.76

$$\begin{aligned}
 (i) \quad E_{1, \frac{1}{2}}(at) &= \frac{e^{at}}{\sqrt{at}} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) \\
 (ii) \quad E_{1, \frac{1}{2}}(at) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{at} e^{at} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) \\
 (iii) \quad E_{1, \frac{1}{2}}(at) &= \frac{1}{at} \left[\frac{e^{at}}{\sqrt{at}} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right] \\
 (iv) \quad E_{1, -\frac{1}{2}}(at) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + (at) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{at} e^{at} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) \right)
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Preuve (i) $E(t, \alpha, a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \xi^{\alpha-1} e^{a(t-\xi)} d\xi$

Soit $\alpha = \frac{1}{2}$ dans (1.7) on obtient :

$$E(t, \frac{1}{2}, a) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \xi^{(\frac{1}{2})-1} e^{a(t-\xi)} d\xi = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \xi^{(-\frac{1}{2})} e^{at} e^{-a\xi} d\xi$$

$$E(t, \frac{1}{2}, a) = \frac{e^{at}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \xi^{(-\frac{1}{2})} e^{-a\xi} d\xi \quad \nabla$$

Soit $\mu^2 = a\xi$, alors $d\xi = \frac{2\mu}{a} d\mu$

comme $\xi = 0$ alors $\mu = 0$, et comme $\xi = t$, alors $\mu = \sqrt{at}$. En remplaçant dans (∇) on trouve :

$$E(t, \frac{1}{2}, a) = \frac{e^{at}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\sqrt{at}} \left(\frac{\mu^2}{a}\right)^{(-\frac{1}{2})} e^{-\mu^2} \frac{2\mu}{a} d\mu$$

$$E(t, \frac{1}{2}, a) = \frac{e^{at}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\sqrt{at}} \frac{\sqrt{a}}{\mu} e^{-\mu^2} \frac{2\mu}{a} d\mu$$

$$E(t, \frac{1}{2}, a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{at}}{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{at}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{e^{at}}{\sqrt{a}} \operatorname{erf}(\sqrt{at})$$

$$E(t, \alpha, a) = t^\alpha E_{1, \alpha+1}(at)$$

$$E(t, \frac{1}{2}, a) = t^{\frac{1}{2}} E_{1, (\frac{1}{2}+1)}(at) = \sqrt{t} E_{1, \frac{3}{2}}(at)$$

$$\sqrt{t} E_{1, \frac{3}{2}}(at) = \frac{e^{at}}{\sqrt{a}} \operatorname{erf}(\sqrt{at})$$

$$E_{1, \frac{3}{2}}(at) = \frac{e^{at}}{\sqrt{at}} \operatorname{erf}(\sqrt{at})$$

(ii) D'après la définition on a :

$$E_{1, \frac{1}{2}}(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{1}{2})} \quad (1.12)$$

On effectue le changement de variable $k = k + 1$ dans (1.12) et l'on obtient :

$$E_{1, \frac{1}{2}}(at) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(at)^{k+1}}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} = (at) \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}$$

$$E_{1, \frac{1}{2}}(at) = (at) \left[\frac{(at)^{-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} \right]$$

$$E_{1, \frac{1}{2}}(at) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + (at) E_{1, \frac{3}{2}}(at) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + (at) \frac{e^{at}}{\sqrt{at}} \operatorname{erf}(\sqrt{at})$$

$$E_{1, \frac{1}{2}}(at) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{at} e^{at} \operatorname{erf}(\sqrt{at}). \text{ on utilise (1.11)(i)}$$

(iii) D'après la définition on a :

$$E_{1, \frac{5}{2}}(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{5}{2})} \quad (1.13)$$

on effectue le changement de variable $k = k - 1$ dans (1.13) et l'on obtient :

$$E_{1, \frac{5}{2}}(at) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(at)^{k-1}}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} = (at)^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} - \frac{(at)^0}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right]$$

$$E_{1, \frac{5}{2}}(at) = (at)^{-1} \left[E_{1, \frac{3}{2}}(at) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right] = \frac{1}{(at)} \left[\frac{e^{at}}{\sqrt{at}} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right]$$

(iv) D'après la définition on a :

$$E_{1, -\frac{1}{2}}^{-1}(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k - \frac{1}{2})} \quad (1.14)$$

On effectue le changement de variable $k = k + 2$ dans (1.8) et l'on obtient :

$$E_{1, -\frac{1}{2}}^{-1}(at) = \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{(at)^{k+2}}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} = (at)^2 \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}$$

$$E_{1, -\frac{1}{2}}^{-1}(at) = (at)^2 \left[\frac{(at)^{-2}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} + \frac{(at)^{-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} \right]$$

$$E_{1, -\frac{1}{2}}^{-1}(at) = \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})} + \frac{(at)}{\Gamma(\frac{1}{2})} + (at)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}$$

$$E_{1, -\frac{1}{2}}^{-1}(at) = \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})} + \frac{(at)}{\Gamma(\frac{1}{2})} + (at)^2 E_{1, \frac{1}{2}}^{-3}(at)$$

$$E_{1, -\frac{1}{2}}^{-1}(at) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + (at) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{ate^{at}} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) \right)$$

1.77 Transformation de Laplace au sens des fonctions :

1.77.1 Pierre-Simon Laplace :

Pierre-Simon de Laplace ou Pierre-simon Laplace, né le 23 mars 1749 à Beaumont-en-Auge et mort le 05 mars 1827, à Paris, mathématicien-physicien français.

Il a été l'un des scientifiques les plus influents de son temps.

Surnommé le (Newton-Français).

Parmi les découvertes mineures de Laplace en mathématiques pures : la transformation de Laplace.

Cette transformation fut introduite pour la première fois sous une forme proche de celle utilisée par Laplace en 1774, dans le cadre de la théorie des probabilités.

1.77.2 La transformation de Laplace :

La transformée de Laplace d'une fonction est donnée par l'expression suivante :

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

Elle appartient à la famille très vaste des transformées intégrales, où le symbole $L\{f(t)\}$ veut dire la transformée de Laplace de $f(p)$.

On utilise aussi l'expression $F(p)$ pour décrire la transformée de Laplace : $F(p) = L\{f(t)\}$

Cette notation permet de mettre de l'emphase sur le fait que le résultat de la transformée de Laplace n'est pas fonction du temps t , mais plutôt fonction de p . L'opérateur p sera l'inverse du temps, donc une fréquence.

La transformée de Laplace permet donc de transformer le problème du domaine du temps au domaine de la fréquence.

Lorsqu'on obtient la réponse voulue dans le domaine de la fréquence, on transforme le problème à nouveau dans le domaine du temps, à l'aide de la transformée inverse de Laplace. Le résultat qui suit est une caractérisation utile des opérateurs surjectifs.

1.78 Intégration fractionnaire

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale

$$\int_a^x f(t) dt$$

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(s) ds$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt,$$

Plus généralement le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I^{(n)} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt, \quad (1.15)$$

pour tout entier n .

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n - 1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que le second membre de (1.15) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.79 si $f \in \mathcal{C}[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \quad \text{telle que } a \in]-\infty, +\infty[\quad (1.16)$$

est appelée intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

On peut écrire I_a^α sous la forme suivante :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t) dt$$

Exemple 1.80 Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$. Alors

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} (t-a)^\beta dt$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x-a)\tau$, d'où

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta dt = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha}$$

après utilisation de l'intégrale eulérienne de première espèce (la fonction beta d'Euler). On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ où on a

$$I_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (x-a)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} (x-a)^{\beta+1}$$

à cause de la relation connue $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Voici des identités qui nous serviront par la suite.

Proposition 1.81 Pour $f \in \mathcal{C}[a, b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe

$$I_a^\alpha [I_a^\beta f(x)] = I_a^{\alpha+\beta} f(x) \quad \text{pour } \alpha > 0, \beta > 0, \quad (1.17)$$

De plus on a :

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-1} f(x) \quad \text{pour } \alpha > 0 \quad (1.18)$$

Démonstration Soient f une fonction intégrable et bornée, et α et β deux nombres réels strictement positifs. Alors on a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha [I_a^\beta f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} I_a^\beta f(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} dt \int_a^{x-t} (x-t-u)^{\beta-1} f(u) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) du \int_0^{x-u} t^{\alpha-1} (x-t-u)^{\beta-1} dt. \end{aligned}$$

Posons

$$t = v(x-u).$$

$$\text{Alors } dt = (x-u)dv.$$

Par suite, il résulte que

$$\begin{aligned} I_a^\alpha [I_a^\beta f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) du \int_0^1 (v(x-u))^{\alpha-1} (x-u-v(x-u))^{\beta-1} (x-u) dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-u)^{\beta+\alpha-1} f(u) du \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-u)^{\alpha+\beta-1} f(u) du \beta(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\beta(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-u)^{\alpha+\beta-1} f(u) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-u)^{\alpha+\beta-1} f(u) du \\ &= I_a^{\alpha+\beta}(f(x)). \end{aligned}$$

On montre maintenant la deuxième égalité.

$$\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right)$$

puisque $f(t)$ et $(x-t)^{\alpha-1}$ sont continues donc l'application :

$$t \rightarrow (x-t)^{\alpha-1} f(t)$$

est continue, et on a. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx} ((x-t)^{\alpha-1} f(t)) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\
&= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\
&= I_a^{\alpha-1} f(x).
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

De manière générale on a :

$$D[I^\alpha f(x)] \neq I^\alpha[Df(x)].$$

Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Riemann-Liouville définie par(1.16), laquelle peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$:

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = t^{\alpha-1} \star f(t) = g(t) \star f(t)$$

La transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ est [A. Erdélyi (ed), Tables of Integral Transforms, vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1954.]

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}. \quad (1.19)$$

Et donc, en utilisant la transformée de Laplace de la convolution, nous obtenons la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$L\{I_0^\alpha f; s\} = s^{-\alpha} F(s). \quad (1.20)$$

Dérivées fractionnaires

Pour la dérivation fractionnaire, il y a plusieurs types de définitions, citons les plus utilisées dans les applications :

Dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'idée est de définir la dérivée fractionnaire en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire.

Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n - 1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$${}^L D_a^p = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-p} f(t)) \quad (1.21)$$

Exemple 1.82 *La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville* En général la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$${}^L D_a^p C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}$$

La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Riemann-Liouville Soit p non entier et $0 \leq n - 1 < p < n$ et $\alpha > -1$, alors on a :

$${}^L D_a^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} {}^L D_a^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\alpha-p} \int_a^t (1-s)^{n-p-1} s^\alpha ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1) B(n-p, \alpha+1)}{\Gamma(n-p)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1) \Gamma(n-p) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p) \Gamma(\alpha-p+1) \Gamma(n+\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \end{aligned}$$

A titre d'exemple

$${}^L D_0^{0.5} t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5)$$

Propriétés 1.83 (générales) :

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,

$${}^L D_a^p(I^p f(t)) = f(t), \quad (1.22)$$

en général on a

$${}^L D_a^p(I^q f(t)) = {}^L D_a^{p-q} f(t) \quad (1.23)$$

et si $p - q < 0$, ${}^L D_a^{p-q} f(t) = I^{q-p} f(t)$.

En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$${}^L D_a^{-p}({}^L D_a^q f(t)) = {}^L D_a^{q-p} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}^L D_a^{q-k} f(t)]_{t=0} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}$$

avec $m - 1 \leq q < m$.

2. Composition avec les dérivées d'ordre entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

$$\frac{d^n}{dt^n}({}^L D_a^p f(t)) = {}^L D_a^{n+p} f(t), \quad (1.24)$$

mais

$${}^L D_a^p\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = {}^L D_a^{n+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}$$

3. Composition avec les dérivées fractionnaires Soit $n - 1 \leq p < n$ et $m - 1 \leq q < m$, alors

$${}^L D_a^p({}^L D_a^q f(t)) = {}^L D_a^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}^L D_a^{q-k} f(t)]_{t=0} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(p-k+1)}, \quad (1.25)$$

et

$${}^L D_a^p = {}^L D_a^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^n [{}^L D_a^{p-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)}, \quad (1.26)$$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire ${}^L D_a^p$ et ${}^L D_a^q$ ($p \neq q$), ne commutent que si et $[{}^L D_a^{p-k} f(t)]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, et $[{}^L D_a^{q-k} f(t)]_{t=a}$ pour tout $k = 1, 2, \dots, m$.

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$, posons

$${}^L D_a^p = g^{(n)}(t)$$

ce qui entraîne

$$g(t) = {}^L D_a^{-(n-p)} f(t) \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau, n-1 < p < n$$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à

$$\mathcal{L}\{{}^L D_0^p f(t)\} = s^p G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (1.27)$$

où

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s). \quad (1.28)$$

A partir de la définition de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville, il vient

$$g^{n-k-1}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}^L D_0^{-(n-p)} f(t) = {}^L D_0^{p-k-1} f(t). \quad (1.29)$$

En substituant (1.27) et (1.28) dans (1.29), nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{{}^L D_0^p f(t)\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}^L D_0^{p-k-1} f(t) |_{t=0}, n-1 < p < n.$$

Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a, b]$)

La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par

$$\begin{aligned} {}^c D_a^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \end{aligned}$$

Propriétés 1.84 (générales) 1. Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

Soit $p > 0$ avec $n - 1 < p < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$), supposons que f est une fonction telle que ${}^c D_a^p f(t)$ et ${}^L D_a^p f(t)$ existent alors

$${}^c D_a^p f(t) = {}^L D_a^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, on aura ${}^c D_a^p f(t) = {}^L D_a^p f(t)$.

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue on a

$${}^c D_a^p I_a^p f = f \text{ et } I_a^p {}^c D_a^p f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!},$$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemple 1.85 1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo.

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$${}^c D_a^p C = 0.$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Caputo.

Soit p un entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on a

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (\tau-a)^{\alpha-n},$$

d'où

$${}^c D_a^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau,$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
{}^c D_a^p (t - a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} (\tau - a)^{\alpha-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} (t - a)^{\alpha-p} \int_a^1 (1 - s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + 1)B(n - p, \alpha - n + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} (t - a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)}
\end{aligned}$$

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo se donne par la formule :

$$\mathcal{L}\{{}^c D_0^p f(t)\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} \frac{d^k f(t)}{dt^k} t = 0, n - 1 < \alpha < n. \quad (1.30)$$

Dérivées fractionnaire au sens de Hilfer

La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer d'ordre $0 < \alpha < 1$ et de type $\beta \in [0, 1]$ de la fonction $h : [a, +\infty) \in \mathbb{R}$ est défini par :

$$D_a^{\alpha, \beta} h(t) = [I_a^{(1-\alpha)\beta} D(I_a^{(1-\alpha)(1-\beta)} h)](t) \quad (1.31)$$

Relation avec les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo

- si on pose $\beta = 0, 0 < \alpha < 1$ et $a = 0$, dans la formule de dérivée fractionnaire au sens de Hilfer (1.31) on obtient la dérivée fractionnaire classique au sens de Riemann-Liouville :

$$D_0^{\alpha, 0} h(t) = \frac{d}{dt} I_0^{(1-\alpha)} h(t) = {}^L D_0^\alpha h(t)$$

- si on pose $\beta = 1, 0 < \alpha < 1$ et $a = 0$, dans la formule de dérivée fractionnaire au sens de Hilfer (1.31) on obtient la dérivée fractionnaire classique au

sens de Caputo :

$$D_a^{\alpha,1}h(t) = I_a^{(1-\alpha)} \frac{d}{dt}h(t) = {}^c D_0^\alpha h(t)$$

La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer peut considérer comme une interpolateur entre la dérivée de Riemann-Liouville et de Caputo.

Théorème 1.86 *Soient Y, Z deux espaces de Banach. Soit $S \subseteq \mathcal{L}(Y, Z)$ l'ensemble des opérateurs surjectifs. Alors S est ouvert dans $\mathcal{L}(Y, Z)$*

Chapitre 2

Contrôlabilité des systèmes abstraits d'ordre fractionnaire

2.1 Introduction

Le problème du four :

La théorie du contrôle est une branche des mathématiques permettant de contrôler un système sur lequel on a une action une commande (comme une voiture, une fusée, une réaction chimique, un système biologique, un marché financier,...) le problème de contrôlabilité consiste alors à déterminer une loi de contrôle permettant d'emmener, de guider ce système vers un certain état final désiré.

On considère le système linéaire fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo décrit par :

$$\begin{cases} {}_0^c D_t^\alpha = Ax(t) + Bu(t) & \text{if } t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Où :

- A est un opérateur linéaire borné de l'espace de Banach X dans X .
 A fournit la dynamique du système.
- B est un opérateur linéaire borné de l'espace de Banach U dans l'espace de Banach X .
 B excite le système pour modifier l'état.
- x est appelé l'état du système,
- $u(\cdot)$ est la fonction du contrôle qu'on suppose qu'elle appartient à $L^p(0, \tau; U)$, $1 \leq p \leq \infty$ fixé.
- X est l'espace d'état,
- U l'espace du contrôle.

La solution du système (A, B) est donnée par la formule :

$$x(t) = E_\alpha(t^\alpha A)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)Bu(s)ds$$

$E_\alpha(t^\alpha A)$ est l'opérateur de Mittag-Leffler.

Le concept de la contrôlabilité consiste à savoir si l'on peut amener le système d'un état initial x_0 à un état désiré donné x_d en temps fini.

Définition 2.2 *Le système (A, B) est dit exactement contrôlable dans X sur $[0, \tau]$, si pour tous x_0, x_d de X il existe $u(\cdot) \in L^p(0, \tau; U)$ tel que $x(\tau) = x_d$.*

Définition 2.3 *Le système (A, B) est dit exactement nul contrôlable dans X sur $[0, \tau]$ si pour tout $x_0 \in X$ il existe $u(\cdot) \in L^p(0, \tau; U)$ tel que $x(\tau) = 0$.*

Définition 2.4 *Le système (A, B) est dit exactement contrôlable en temps fini s'il existe $\tau > 0$ tel que le système (A, B) est exactement contrôlable sur $[0, \tau]$.*

Définition 2.5 *Le système (A, B) est dit exactement nul contrôlable en temps fini s'il existe $\tau > 0$ tel que le système (A, B) est exactement nul contrôlable sur $[0, \tau]$.*

Définition 2.6 Le système (A, B) est dit *approximativement contrôlable* sur $[0, \tau]$ si :

$\forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in X, \exists u_\epsilon \in L^p(0, \tau; U)$ tel que $\|x_d - x(\tau)\| < \epsilon \forall x_d \in X$.

Définition 2.7 Le système (A, B) est dit *approximativement contrôlable en temps fini* s'il existe $\tau > 0$ tel que le système (A, B) est *approximativement contrôlable* sur $[0, \tau]$.

L'utilisation de la définition pour démontrer la contrôlabilité d'un système n'est pas tout le temps pratique, c'est pour cela qu'on doit trouver d'autres critères de contrôlabilité plus pratiques à manipuler.

La solution du système, nous amène à introduire l'application (contrôle \rightarrow état final).

$\Lambda_\tau : L^p(0, \tau; U) \rightarrow X$.

$$u(\cdot) \mapsto \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((\tau - s)^\alpha A) B u(s) ds \quad (2.1)$$

Dans ce qui suit, nous notons q l'exposant conjugué de p . Pour garantir que l'opérateur Λ_τ est bien défini nous devons nous assurer que la fonction $s \mapsto (\tau - s)^{\alpha-1}$ est q -intégrable en $[0, \tau]$.

Nous avons la propriété suivante :

Proposition 2.8 Soit $p > \frac{1}{\alpha}$, Alors Λ_τ est un opérateur linéaire borné. Λ_τ est appelé l'opérateur de contrôlabilité.

Preuve

La fonction $s \mapsto (\tau - s)^{\alpha-1}$ est q -intégrable est équivalent à

$$q(\alpha - 1) > -1$$

.d'où :

$$\frac{p}{p-1}(\alpha - 1) > -1 \quad (\text{car } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

Alors $p > \frac{1}{\alpha}$

Si $p > \frac{1}{\alpha}$ Alors Λ_τ est bien défini.

La linéarité de Λ_τ découle immédiatement de la linéarité de l'opérateur B et de la linéarité de l'intégration.

Maintenant, Montrons que Λ_τ est borné.

On a :

$$\begin{aligned}
\| \Lambda_\tau u(\cdot) \|_X &= \left\| \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\tau - s)^\alpha A) B u(s) ds \right\|_X \\
&= \left\| \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau - s)^{n\alpha} A^n}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} B u(s) ds \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} B \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha(n+1)-1} u(s) ds \right\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\| A \|^n}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} \| B \| \left\| \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha(n+1)-1} u(s) ds \right\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\| A \|^n}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} \| B \| \left(\int_0^\tau (\tau - s)^{[\alpha(n+1)-1]q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\tau \| u(s) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \| \Lambda_\tau u(\cdot) \| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\| A \|^n}{\Gamma(n+1)} \| B \| \left(\int_0^\tau (\tau - s)^{[\alpha(n+1)-1]q} \right)^{\frac{1}{q}} \| u \|_p
\end{aligned}$$

d'où il résulte que Λ_τ est borné.

Proposition 2.9 *Si $\tau_1 < \tau_2$. Alors $Im\Lambda_{\tau_1} \subset Im\Lambda_{\tau_2}$*

Démonstration Soit $x \in Im\Lambda_{\tau_1}$. Alors il existe une fonction de contrôle $u \in L^p([0, \tau_1], U)$ telle que :

$$x = \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\tau_1 - s)^\alpha A) B u(s) ds.$$

considérons le contrôle :

$$\tilde{u}(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s < \tau_2 - \tau_1 \\ u(s + \tau_1 - \tau_2), & \tau_2 - \tau_1 \leq s \leq \tau_2. \end{cases}$$

Il est claire que $\tilde{u} \in L^p([0, \tau_2], U)$. Et on a ,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\tau_2 - s)^\alpha A) B \tilde{u}(s) ds \\
&= \int_{\tau_2 - \tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\tau_2 - s)^\alpha A) B u(s + \tau_1 - \tau_2) ds
\end{aligned}$$

le changement de variable $\xi \rightarrow s + \tau_1 - \tau_2$ donne :

$$= \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\tau_1 - \xi)^\alpha A) Bu(\xi) d\xi = x,$$

$$\int_0^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\tau_2 - s)^\alpha A) B\tilde{u}(s) ds = \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\tau_1 - \xi)^\alpha A) Bu(\xi) d\xi = x$$

ce qui implique que $x \in \text{Im}\Lambda_{\tau_2}$

Nous définissons le concept de contrôlabilité exacte comme d'habitude.

Nous allons maintenant caractériser des testes de contrôlabilité pour un système fractionnaire.

2.10 Caractérisation de la contrôlabilité exacte

Théorème 2.11 *Soit $p > \frac{1}{\alpha}$. le système (A, B) est exactement contrôlable sur $[0, \tau]$ si et seulement si l'opérateur Λ_τ est surjectif.*

$$(A, B) \text{ contrôlable} \Leftrightarrow \Lambda_\tau \text{ est surjectif.}$$

Preuve

D'autre part, en procédant comme dans le cas du système d'ordre , nous pouvons établir un critère de contrôlabilité exacte en termes d'espaces duals. Soit $\tau > 0$ fixé. supposons que $L^p(0, \tau; U)^* = L^q(0, \tau; U^*)$.

Alors on a :

Corollaire 2.12 *Soit $p > \frac{1}{\alpha}$.*

Si le système (A, B) est exactement contrôlable sur $[0, \tau]$, alors le système (A, B) est exactement contrôlable sur $[0, a]$ pour tout $a > \tau$.

Corollaire 2.13 *Soit $p > \frac{1}{\alpha}$.*

Si le système (A, B) est exactement contrôlable sue temps fini, alors le système (A, B) est exactement contrôlable sur $[0, a]$ pour tout $a > 0$.

Lemme 2.14 *Soit $p > \frac{1}{\alpha}$. Alors : $\Lambda_\tau^* : X^* \rightarrow L^q(0, \tau; U^*)$ est donné par :*

$$\Lambda_\tau^*(x^*)(s) = (\tau - s)^{\alpha-1} B^* E_{\alpha,\alpha}((\tau - s)^\alpha A^*) x^*, s \in \tau. \quad (2.2)$$

Démonstration Utilisons la définition de l'opérateur adjoint, alors pour tout $u \in L^p(0, \tau; U)$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_\tau U(\cdot), x^* \rangle &= \left\langle \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((\tau - s)^\alpha A) B u(s) ds, x^* \right\rangle \\
\langle \Lambda_\tau u(\cdot), x^* \rangle_{X, X^*} &= \left\langle \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((\tau - s)^\alpha A) B u(s) ds, x^* \right\rangle \\
&= \left\langle \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau - s)^{\alpha n} A^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} B u(s) ds, x^* \right\rangle \\
&= \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau - s)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} \langle A^n B u(s), x^* \rangle ds \\
&= \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau - s)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} \langle u(s), B^* A^{*n} x^* \rangle ds \\
&= \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \langle u(s), B^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\tau - s)^\alpha A^*)^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} x^* \rangle ds \\
&= \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \langle u(s), B^* E_{\alpha, \alpha}((\tau - s)^\alpha A^*) x^* \rangle ds \\
&= \int_0^\tau \langle u(s), (\tau - s)^{\alpha-1} B^* E_{\alpha, \alpha}((\tau - s)^\alpha A^*) x^* \rangle_U ds \\
&= \int_0^\tau \langle u(\cdot), \Lambda_\tau^* x^*(\cdot) \rangle_{U, U^*} ds
\end{aligned}$$

En combinant le lemme (2.14) avec le théorème (1.28) nous obtenons le critère de contrôlabilité suivant.

Théorème 2.15 Soit $p > \frac{1}{\alpha}$. Supposons que U et X sont des espaces réflexifs. Alors le système (A, B) est exactement contrôlable sur $[0, \tau]$ si et seulement s'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\| x^* \|_{X^*} \leq \delta \left[\int_0^\tau (\tau - s)^{q(\alpha-1)} \| B^* E_{\alpha, \alpha}((\tau - s)^\alpha A^*) x^* \|_{U^*}^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

pour tout $x^* \in X^*$.

Démonstration

Le système (A, B) est exactement contrôlable si et seulement si l'opérateur Λ_τ est surjectif. Alors d'après le théorème (1.28), la contrôlabilité du système (A, B) équivaut à l'existence d'une constante $\delta > 0$ telle que

$$\| x^* \|_{X^*} \leq \delta \| \Lambda_\tau^* x^* \|_{L^q(0, \tau; U^*)}$$

Compte tenu du lemme (2.14) on obtient :

$$\begin{aligned} & \| x^* \|_{X^*} \leq \delta \| (\tau - s)^{\alpha-1} B^* E_{\alpha,\alpha}((\tau - s)^\alpha A^*) x^* \|_{L^q(0,\tau;U^*)} \\ & = \delta \left[\int_0^\tau (\tau - s)^{q(\alpha-1)} \| B^* E_{\alpha,\alpha}((\tau - s)^\alpha A^*) x^* \|_{U^*}^q ds \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

pour tout $x^* \in X^*$.

Maintenant on va étendre aux systèmes fractionnaires un critère de contrôlabilité initialement établi par Korobov et Rabakh pour les systèmes du premier ordre. Pour établir ce résultat, la propriété suivante des opérateurs linéaires bornés est nécessaire :

Lemme 2.16 *Soient X, Y, Z_τ des espaces de Banach pour tout $0 < \tau \leq a$. Soient $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ et $\Lambda_\tau \in \mathcal{L}(Z_\tau, X)$. Supposons que les propriétés suivantes soient vérifiées :*

(i) : *l'opérateur C est surjectif.*

(ii) : *Pour tout $\tau > 0$, il existe $S_\tau, R_\tau \in \mathcal{L}(Z_\tau, X)$ tels que $\Lambda_\tau = S_\tau + R_\tau$.*

(iii) : *Pour tout $0 < \tau \leq a$ il existe un opérateur linéaire $Q_\tau : Y \rightarrow Z_\tau$ tel que $S_\tau Q_\tau = C$ et $\| R_\tau Q_\tau \| \rightarrow 0$ quand $\tau \rightarrow 0^+$.*

Alors il existe $\tau_0 > 0$ tel que Λ_τ est surjectif pour tout $0 < \tau \leq \tau_0$.

Démonstration On a :

$$\begin{aligned} \| \Lambda_\tau Q_\tau - C \| & = \| C - S_\tau Q_\tau - R_\tau Q_\tau \| \\ & = \| R_\tau Q_\tau \| \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème (1.86), nous en déduisons que $\Lambda_\tau Q_\tau$ est surjectif pour tout $0 < \tau \leq \tau_0$ pour un certain $\tau_0 > 0$. Cela implique à son tour que Λ_τ est surjectif pour tout $0 < \tau \leq \tau_0$.

Théorème 2.17 *Soit $p > \frac{1}{\alpha}$. Le système (A, B) est exactement contrôlable sur $[0, \tau]$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$BU + ABU + \dots + A^n BU = X. \quad \star$$

Démonstration Supposons d'abord que le système (A, B) est exactement contrôlable sur $[0, \tau]$. On définit les opérateurs : $\Lambda_{\tau,n} : L^p(0, \tau; U) \rightarrow X$ par :

$$\Lambda_{\tau,n}(u) = \sum_{k=0}^n A^k B \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha(k+1)-1} u(s) ds.$$

On a :

$$\begin{aligned}
& \| \Lambda_\tau(u) - \Lambda_{\tau,n}(u) \| \\
&= \left\| \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\tau - s)^\alpha A) B u(s) ds \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=0}^n A^k B \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha(k+1)-1} u(s) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\tau - s)^{k\alpha} A^k}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} B u(s) ds \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=0}^n A^k B \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha(k+1)-1} u(s) ds \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=n+1}^\infty A^k B \int_0^\tau \frac{(\tau - s)^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} u(s) ds \right\| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^\infty \| A \|^k \| B \| \int_0^\tau \frac{(\tau - s)^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} \| u(s) \| ds \\
&\leq \sum_{k=n+1}^\infty \| A \|^k \| B \| \left(\int_0^\tau \frac{(\tau - s)^{[\alpha(k+1)-1]q}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)^q} ds \right)^{\frac{1}{q}} \| u \|_p \\
&= \sum_{k=n+1}^\infty \| A \|^k \| B \| \frac{1}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} \left(\frac{1}{(\alpha(k+1) - 1)q + 1} \tau^{[\alpha(k+1)-1]q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \| u \|_p \\
&= \sum_{k=n+1}^\infty \| A \|^k \| B \| \frac{1}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} \frac{1}{[(\alpha(k+1) - 1)q + 1]^{\frac{1}{q}}} \tau^{\alpha(k+1)-1+\frac{1}{q}} \| u \|_p
\end{aligned}$$

Pour tout $u \in L^p(0, \tau; U)$. Cela implique que $\| \Lambda_\tau - \Lambda_{\tau,n} \| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. En utilisant le lemme 2.16, nous en déduisons que $\Lambda_{\tau,n}$ est surjectif pour n assez grand, ce qui implique à son tour que (\star) est vraie.

Supposons maintenant que la condition (\star) est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On définit : $S_\tau = \Lambda_{\tau,n}$ et $R_\tau = \Lambda_\tau - S_\tau$. On note : $y = U^{n+1}$ muni de la norme

$$\| (u_0, \dots, u_n) \|_1 = \sum_{i=0}^n \| u_i \|.$$

Il est bien connu que Y muni de cette norme est un espace de Banach. On utilise aussi en Y la norme

$$\| (u_0, \dots, u_n) \|_\infty = \max_{0 \leq i \leq n} \| u_i \| .$$

Introduisons l'opérateur linéaire $C : Y \rightarrow X$ donné par

$$C(u_0, \dots, u_n) = \sum_{k=0}^n A^k B u_k.$$

Il est clair que C est un opérateur linéaire borné. Tenant compte de (\star) on en déduit que C est surjectif.

On choisit une subdivision $d = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n+1}\}$ de l'intervalle $[0, \tau]$ avec les points.

$$\tau_i = i \frac{\tau}{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Soit $\tilde{Q}_\tau : Y \rightarrow L^p(0, \tau; U)$ l'application donné par

$$\tilde{Q}_\tau(v_0, \dots, v_n)(s) = v(s) = \begin{cases} v_0, & \tau_0 \leq s \leq \tau_1, \\ v_i, & \tau_i < s \leq \tau_{i+1}, i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Il est clair que $v(\cdot)$ est une fonction étagée, alors $v(\cdot) \in L^p(0, \tau; U)$.

De plus,

$$\begin{aligned} \| v \|_{L^p(0, \tau; U)} &= \left(\int_0^\tau \| v(s) \|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \| v(s) \|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau}{n+1} \| v_i - 1 \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{\tau}{n+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \| v_i - 1 \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \theta^{\frac{1}{p}} \| (v_0, \dots, v_n) \|_1, \end{aligned}$$

Où nous avons noté $\theta = \frac{\tau}{n+1}$. Cela montre que \tilde{Q}_τ est un opérateur linéaire

borné et. $\| \tilde{Q}_\tau \|_{B(Y, L^p(0, \tau; U))} \leq \theta^{\frac{1}{p}}$. D'autre part,

$$S_\tau \tilde{Q}_\tau(v_0, \dots, v_n) = \sum_{k=0}^n A^k B \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha(k+1)-1} v(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n A^k B \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \sum_{j=1}^{n+1} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} (\tau - s)^{\alpha(k+1)-1} v_{j-1} ds \\
&= \sum_{k=0}^n A^k B \frac{1}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \sum_{j=1}^{n+1} \left((\tau - \tau_{j-1})^{\alpha(k+1)} - (\tau - \tau_j)^{\alpha(k+1)} \right) v_{j-1}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire cette dernière expression comme

$$\begin{aligned}
&S_\tau \tilde{Q}_\tau(v_0, \dots, v_n) \tag{2.3} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{\theta^{\alpha(k+1)} A^k B}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \sum_{j=1}^{n+1} \left((n+2-j)^{\alpha(k+1)} - (n+1-j)^{\alpha(k+1)} \right) v_{j-1}.
\end{aligned}$$

On définit $P_\tau : Y \rightarrow Y$ par

$$P_\tau(v_0, \dots, v_n) = (u_0, \dots, u_n), \tag{2.4}$$

Où

$$u_k = \frac{\theta^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \sum_{j=1}^{n+1} \left((n+2-j)^{\alpha(k+1)} - (n+1-j)^{\alpha(k+1)} \right) v_{j-1} \tag{2.5}$$

Pour $k = 0, \dots, n$. Il est clair que P_τ est un opérateur linéaire borné, et en combinant (2.3), (2.4) et (2.5), nous pouvons abrégier le développement précédent en

$$S_\tau \tilde{Q}_\tau = C P_\tau. \tag{2.6}$$

Réécrire (2.5) avec le changement du variable j au lieu de $n+1-j$, on obtient

$$u_k = \frac{\theta^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \sum_{j=0}^n [(j+1)^{\alpha(k+1)} - j^{\alpha(k+1)}] v_{n-j}, \tag{2.7}$$

et définissant $w_j = v_{n-j}$, $j = 0, \dots, n$, on a

$$w = E \text{col}(v_0, \dots, v_n),$$

où E est la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que E est une matrice inversible. Soit $M = (m_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$ la matrice avec des coefficients m_{ij} donnés par

$$m_{ij} = \frac{\theta^{\alpha(i+1)}}{\Gamma(\alpha i + \alpha + 1)} [(j+1)^{\alpha(i+1)} - j^{\alpha(i+1)}].$$

Avec cette notation, nous avons

$$P_\tau(v_0, \dots, v_n) = ME(v_0, \dots, v_n). \quad (2.8)$$

Nous introduisons les matrice

$$D = \text{Diag}\left(\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \dots, \frac{\theta^{\alpha(i+1)}}{\Gamma((i+1)\alpha + 1)}, \dots, \frac{\theta^{\alpha(n+1)}}{\Gamma((n+1)\alpha + 1)}\right),$$

et $N = (n_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$, $n_{ij} = (j+1)^{\alpha(i+1)} - j^{\alpha(i+1)}$. En utilisant cette notation, on obtient ça

$$M = DN \quad (2.9)$$

et

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2^\alpha - 1 & 3^\alpha - 2^\alpha & \dots & (n+1)^\alpha - n^\alpha \\ 1 & 2^{2\alpha} - 1 & 3^{2\alpha} - 2^{2\alpha} & \dots & (n+1)^{2\alpha} - n^{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2^{(n+1)\alpha} - 1 & 3^{(n+1)\alpha} - 2^{(n+1)\alpha} & \dots & (n+1)^{(n+1)\alpha} - n^{(n+1)\alpha} \end{pmatrix}.$$

On transforme la matrice N en ajoutant à chaque colonne $j = 1, \dots, n$ la colonne $j - 1$. La matrice résultante en appliquant cette transformation est

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2^\alpha & 3^\alpha & \dots & (n+1)^\alpha \\ 1 & 2^{2\alpha} & 3^{2\alpha} & \dots & (n+1)^{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2^{(n+1)\alpha} & 3^{(n+1)\alpha} & \dots & (n+1)^{(n+1)\alpha} \end{pmatrix}$$

qui est une matrice de Vandermonde correspondant aux $1, 2^\alpha, 3^\alpha, \dots, (n+1)^\alpha$. Il est bien connu que $\det(V) \neq 0$. En combinant cette assertion avec (2.8) et (2.9) on peut affirmer que P_τ est inversible. De plus $P_\tau^{-1}v = E^{-1}N^{-1}D^{-1}v$. Pour estimer $\|P_\tau^{-1}\|$ on observe d'abord que E^{-1} et N^{-1} sont des matrices indépendantes de θ . Par conséquent

$$\|P_\tau^{-1}(u_0, \dots, u_n)\|_\infty \leq K_n \|D^{-1}(u_0, \dots, u_n)\|_1$$

pour une constante $K_n > 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
\| D^{-1}(u_0, \dots, u_n) \|_1 &= \left\| \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\theta^\alpha} u_0, \dots, \frac{\Gamma((n+1)\alpha + 1)}{\theta^\alpha(n+1)} u_n \right) \right\|_1 \\
&\leq \frac{\Gamma((n+1)\alpha + 1)}{\theta^\alpha(n+1)} \| (u_0, \dots, u_n) \|_1 \\
&= \frac{\Gamma((n+1)\alpha + 1)}{\tau^\theta(n+1)} (n+1)^{\alpha(n+1)} \| (u_0, \dots, u_n) \|_1 \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Cela nous permet de définir $Q_\tau = \tilde{Q}_\tau P_\tau^{-1}$. Il résulte de (2.6) que $S_\tau Q_\tau = C$. Notre prochain objectif est d'estimer $\| R_\tau Q_\tau \|$. On procède comme précédemment pour obtenir (2.3), on a

$$R_\tau \tilde{Q}_\tau(v_0, \dots, v_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\theta^{\alpha(k+1)} A^k B}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \sum_{j=0}^n [(j+1)^{\alpha(k+1)} - j^{\alpha(k+1)}] v_{n-j}.$$

Pour abrégier le texte, on écrit $v = (v_0, \dots, v_n)$. De plus, on peut supposer que $0 < \tau < 1$. Dans ces conditions, on a

$$\begin{aligned}
\| R_\tau \tilde{Q}_\tau v \| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\theta^{\alpha(k+1)} \| A \|^k \| B \|}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \sum_{j=0}^n |(j+1)^{\alpha(k+1)} - j^{\alpha(k+1)}| \| v_{n-j} \| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\theta^{\alpha(k+1)} \| A \|^k \| B \|}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \sum_{j=0}^n ((j+1)^{\alpha(k+1)} - j^{\alpha(k+1)}) \max_{j=0, \dots, n} \| v_j \| \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \| A \|^k \| B \| (n+1)^{\alpha(k+1)} \frac{\theta^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \| v \|_\infty \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \| A \|^k \| B \| \frac{\tau^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \| v \|_\infty \\
&\leq \tau^{\alpha(n+2)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\| A \|^k \| B \|}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \| v \|_\infty.
\end{aligned}$$

avec $v = P_\tau^{-1}(u_0, \dots, u_n)$ et $u = (u_0, \dots, u_n)$, en remplaçant (\blacktriangle) dans les estimations ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\| R_\tau \tilde{Q}_\tau \circ P_\tau^{-1}(u_0, \dots, u_n) \| \\
&\leq \tau^{\alpha(n+2)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\| A \|^k \| B \|}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} K_n \frac{\Gamma((n+1)\alpha + 1)}{\tau^{\alpha(n+1)}} (n+1)^{\alpha(n+1)} \| u \|_1 \\
&= \tau^\alpha K_n (n+1)^{\alpha(n+1)} \Gamma((n+1)\alpha + 1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\| A \|^k \| B \|}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \| u \|_1.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\| R_\tau Q_\tau \| \leq \tau^\alpha K_n (n+1)^{\alpha(n+1)} \Gamma((n+1)\alpha + 1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\| A \|^k \| B \|}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \rightarrow 0,$$

Par conséquent, en définissant $Z_\tau = L^p(0, \tau; U)$ toutes les hypothèses du lemme (2.16) sont satisfaites. Nous en déduisons donc que Λ_τ est surjectif pour $0 < \tau \leq \tau_0$. A partir du corollaire (2.12) on obtient que Λ_τ est surjectif pour tout $\tau > 0$. Cela implique que le système (A, B) est exactement contrôlable.

Ce résultat nous permet de compléter le corollaire (2.12) et (2.13) la contrôlabilité d'un système est indépendante de l'intervalle $[0, \tau]$.

Corollaire 2.18 *Soit $p > \frac{1}{\alpha}$. les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) : *Le système (A, B) est exactement contrôlable en temps fini.*

(ii) : *Le système (A, B) est exactement contrôlable sur $[0, \tau]$ pour tout $\tau > 0$.*

(iii) : *Il existe $\tau > 0$ tel que le système (A, B) est exactement contrôlable sur $[0, \tau]$.*

2.19 Caractérisation de la contrôlabilité approximative :

Théorème 2.20 *Soit $p > \frac{1}{\alpha}$. Le système (A, B) est approximativement contrôlable sur $[0, \tau]$ si et seulement si :*

$$\overline{Im \Lambda_\tau} = X.$$

Démonstration Supposons que le système (A, B) est approximativement contrôlable .

Soit $x \in X$, alors $x + E_\alpha(t^\alpha A)x_0 \in X$, pour tout $x_0 \in X$ et $t \in [0, \tau]$.

Soit $\epsilon > 0$, en vertu de la contrôlabilité approximative du système (A, B) , il existe $u_\epsilon(\cdot) \in L^p(0, \tau; U)$ tel que :

$$\| x + E_\alpha(t^\alpha A)x_0 - x(\tau) \| < \epsilon.$$

Après substitution, il vient :

$$\| x + E_\alpha(t^\alpha A)x_0 - E_\alpha(t^\alpha A)x_0 - \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((t - s)^\alpha A) B u_\epsilon(s) ds \|$$

Alors $\|x - \Lambda_\tau u_\epsilon(\cdot)\| < \epsilon$

Donc, on déduit que $x \in \overline{Im\Lambda_\tau}$.

Maintenant, supposons que $\overline{Im\Lambda_\tau} = X$. Soient $\epsilon > 0$, $x_d, x_0 \in X$, alors $x_d - E_\alpha(t^\alpha A)x_0 \in X$

Tenant compte de la densité de $Im\Lambda_\tau$ dans X , il existe $u_\epsilon(\cdot) \in L^p(0, \tau; U)$ tel que :

$$\|x_d - E_\alpha(t^\alpha A)x_0 - \Lambda_\tau(u_\epsilon(\cdot))\| < \epsilon.$$

d'où :

$$\forall \epsilon > 0, \forall x_d, x_0 \in X, \exists u_\epsilon \in L^p(0, \tau; U) \quad \text{tel que } \|x_d - x(\tau)\| < \epsilon.$$

Par conséquent, la contrôlabilité approximative de (A, B) .

Théorème 2.21 Soit $p > \frac{1}{\alpha}$ et soit $x^* \in X^*$.

les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $x^* \in Im\Lambda_\tau^\perp$ si et seulement si $B^*E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A^*)x^* = 0$ pour tout $0 \leq t \leq \tau$.

(ii) $x^* \in (\bigcup_{\tau>0} Im\Lambda_\tau)^\perp$ si et seulement si $B^*E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A^*)x^* = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Démonstration On va montrer (i).

Supposons que $B^*E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A^*)x^* = 0$ pour tout $0 \leq t \leq \tau$. Soit $u \in L^p([0, \tau], U)$.

Alors :

$$\begin{aligned} \langle x^*, \Lambda u(\cdot) \rangle &= \langle x^*, \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\tau - s)^\alpha A) B u(s) ds \rangle \\ &= \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \langle x^*, E_{\alpha,\alpha}((\tau - s)^\alpha A) B u(s) \rangle ds \\ &= \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \langle B^* E_{\alpha,\alpha}((\tau - s)^\alpha A^*) x^*, u(s) \rangle ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque u a été choisi arbitrairement, cela implique que $x^* \in (Im\Lambda_\tau)^\perp$.

Inversement, supposons que $x^* \in (Im\Lambda_\tau)^\perp$. En procédant comme ci-dessus, nous obtenons .

$$\int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \langle B^* E_{\alpha,\alpha}((\tau - s)^\alpha A^*) x^*, u(s) \rangle ds = 0$$

Pour toute fonction $u \in L^p(0, \tau; U)$.

Soit $w \subseteq [0, \tau]$ une partie mesurable et soit $u_0 \in U$.

On définit $u(s) = \chi_w(\tau - s)u_0$, où χ_w désigne la fonction caractéristique de w . Alors

$$\int_w s^{\alpha-1} \langle B^* E_{\alpha,\alpha}(s^\alpha A^*) x^*, u_0 \rangle ds = 0$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne [28, Théorème 2.5.7].

On en déduit que

$$\langle B^* E_{\alpha,\alpha}(s^\alpha A^*) x^*, u_0 \rangle = 0, \quad s \in [0, \tau]$$

Puisque la fonction $s \mapsto B^* E_{\alpha,\alpha}(s^\alpha A^*) x^*$ est continue et $u_0 \in U$ a été arbitrairement choisi, nous obtenons $B^* E_{\alpha,\alpha}(s^\alpha A^*) x^* = 0$ pour tout $0 \leq s \leq \tau$.

(ii) La démonstration est similaire à celle de la propriété (i).

Corollaire 2.22 *Si le système (A, B) est approximativement contrôlable en temps fini, alors il est également approximativement contrôlable sur $[0, \tau]$ pour tout $\tau > 0$.*

Preuve Soit $x^* \in X^*$ tel que $B^* E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A^*) x^* = 0$ pour tout $0 \leq t \leq \tau$. Puisque la fonction $t \mapsto E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A^*) x^*$ est analytique sur $(0, \infty)$ et continue sur $[0, \infty)$, nous concluons que $B^* E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A^*) x^* = 0$ pour $t \geq 0$. En utilisant le théorème (2.21) (ii), nous déduisons que $x^* = 0$. En appliquant maintenant le théorème (2.21) (i), nous pouvons affirmer que $Im\Lambda_\tau$ est dense en X .

Nous sommes en mesure de généraliser la condition (\star)

Théorème 2.23 *Soit $p > \frac{1}{\alpha}$ et $\tau > 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) : *Le système (A, B) est approximativement contrôlable sur $[0, \tau]$.*

(ii) : *L'espace $Sp\{A^n B U : n \geq 0\}$ est dense en X .*

Preuve Supposons que la condition (i) soit vérifiée. Soit $x^* \in X^*$ tel que $x^* \perp Sp\{A^n B U : n \geq 0\}$. En utilisant le développement en série de $E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A^*)$ nous en déduisons que $B^* E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A^*) x^* = 0$ pour tout $0 \leq t \leq \tau$. En utilisant à nouveau théorème (2.21) (i), nous obtenons que $x^* = 0$. Une application standard du théorème de Hahn-Banach montre que $Sp\{A^n B U : n \geq 0\}$ est dense en X .

Supposons maintenant que la condition (ii) soit vérifiée. Soit $x^* \in X^*$ tel que

$$B^* E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A^*) x^* = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (2.10)$$

En évaluant (2.10) à $t = 0$, nous obtenons $B^* x^* = 0$. Maintenant, nous procédons à calculer à plusieurs reprises la dérivée dans l'expression (2.10)

pour $t > 0$ et ensuite nous évaluons la limite comme $t \rightarrow 0^+$. Nous obtenons $B^*(A^*)^k x^* = 0$ pour $k \in \mathbb{N}_0$. Cela montre que $x^* \perp Sp\{A^n B u : n \geq 0\}$. En appliquant la condition (ii), nous en déduisons que $x^* = 0$. En utilisant le théorème (2.21) (i), nous concluons que le système (A, B) est approximativement contrôlable sur $[0, \tau]$.

L'instruction suivante est une conséquence immédiate de théorème (2.23).

Corollaire 2.24 *Soit $p > \frac{1}{\alpha}$.*

(i) : *Le système (A, B) est approximativement contrôlable sur $[0, \tau]$, $\tau > 0$, si et seulement si la condition suivante est vérifiée : pour chaque $x^* \in X^*$ tel que $B^* E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha A^*) x^* = 0$ pour tout $0 \leq t \leq \tau$, alors $x^* = 0$.*

(ii) : *Le système (A, B) est approximativement contrôlable en temps fini si et seulement si la condition suivante est vérifiée : pour chaque élément $x^* \in X^*$ tel que $B^* E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha A^*) x^* = 0$ pour tout $t \geq 0$, alors $x^* = 0$.*

Chapitre 3

Applications

Nous complétons cet mémoire par une application. Dans la plupart des systèmes distribués qui surviennent dans des applications concrètes, l'opérateur A est non borné. Néanmoins, ces opérateurs peuvent généralement être approchés en un certain sens par des opérateurs linéaires bornés. Nous illustrons l'idée avec un cas très fréquent. On considère comme l'espace d'états $X = L^2([0, \pi])$ et l'opérateur $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ donné par

$$Ax(\xi) = \frac{d^2x(\xi)}{d\xi^2}, \quad \xi \in [0, \pi],$$

Sur le domaine

$$D(A) = \{x \in L^2([0, \pi]) : x'' \in L^2([0, \pi]), x(0) = x(\pi) = 0\}.$$

Il est bien connu que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X . De plus, A a un spectre discret, les valeurs propres sont $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, avec les fonctions propres normalisées correspondantes $z_n(\xi) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \sin(n\xi)$. De plus, l'ensemble $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base ortho-normée de X . Par conséquent,

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \langle z, z_n \rangle z_n,$$

pour $z \in D(A)$, et l'opérateur résolvant de A est donné par

$$R(\mu, A)z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} \langle z, z_n \rangle z_n \tag{3.1}$$

pour $Re(\mu) > -1$.

Puisque A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur X , alors l'approximation de Yosida de A , qui est définie par $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$ converge vers A comme $\lambda \rightarrow \infty$ ([30]). Il découle de (3.1) que

$$\begin{aligned} A_\lambda z(\xi) &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2}{\lambda + n^2} \langle z, z_n \rangle z_n(\xi) \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2}{\lambda + n^2} \int_0^\pi z(\eta) z_n(\eta) d\eta z_n(\xi) = \int_0^\pi H_\lambda(\xi, \eta) z(\eta) d\eta \end{aligned}$$

pour certaine fonction H_λ .

Cela nous motive   étudier la contrôlabilité du système

$${}_0^c D_t^\alpha w(t, \xi) = \int_0^\pi H_\lambda(\xi, \eta) w(t, \eta) d\eta + b(\xi) u(t), \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \quad (3.2)$$

$$w(t, 0) = w(t, \pi) = 0, \quad (3.3)$$

pour $t \geq 0$. Ici, nous supposons que $u(t) \in \mathbb{R}$ et $b \in X$. En définissant $x(t) = w(t, \cdot) \in X$, le système (3.2) – (3.3) peut être modélisé sous forme abstraite comme suit

$${}_0^c D_t^\alpha x(t) = A_\lambda x(t) + bu(t), \quad t \geq 0,$$

dans l'espace X . Nous considérons la fonction de contrôle $u(\cdot) \in L^p([0, \tau])$ $\tau > 0$. Il découle de Théorème 2.1 que ce système n'est pas exactement contrôlable sur $[0, \tau]$. Pour étudier la contrôlabilité approximative, les propriétés suivantes sont nécessaires.

Lemme 3.1 *Soit $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, tel que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z + n^2} a_n$ est une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{-n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ et $f(z) = 0$.*

Alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 3.2 *Pour $\lambda > 0$, $Sp\{A_\lambda^n b : n \geq 0\} = Sp\{R(\lambda, A)^n b : n \geq 0\}$.*

Preuve comme $AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I$, alors

$$A_\lambda b = \lambda[\lambda R(\lambda, A) - I]b = \lambda^2 R(\lambda, A)b - \lambda b,$$

ce qui implique que $Sp\{b, A_\lambda b\} = Sp\{b, R(\lambda, A)b\}$. En procédant de manière inductiv, nous pouvons montrer que

$$Sp\{b, A_\lambda b, \dots, A_\lambda^n b\} = Sp\{b, R(\lambda, A)b, \dots, R(\lambda, A)^n b\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci complète la preuve de l'assertion. Nous sommes en mesure d'établir la propriété suivante.

Proposition 3.3 *Soit $p > \frac{1}{\alpha}$, $\lambda > 0$ et $\tau > 0$. Si $\langle z_n, b \rangle \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors le système (3.2)-(3.3) est approximativement contrôlable sur $[0, \tau]$.*

Preuve Soit $y \in X$ tel que $y \in Sp\{A_\lambda^n b : n \in \mathbb{N}_0\}^\perp$. Du lemme 3.2 nous déduisons que $y \in Sp\{R(\lambda, A)^n b : n \in \mathbb{N}_0\}^\perp$. Cela signifie que $\langle R(\lambda, A)^n b, y \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Nous définissons la fonction $f(w) = \langle R(w, A)b, y \rangle$ pour $w \neq -n^2$ et $n \in \mathbb{N}$. De

$$\frac{d^n}{dw^n} R(w, A) = (-1)^n n! R(w, A)^{n+1},$$

nous obtenons que

$$\frac{d^n}{dw^n} f(w) \Big|_{w=\lambda} = (-1)^n n! \langle R(\lambda, A)^{n+1} b, y \rangle = 0.$$

Puisque $f(\cdot)$ est une fonction analytique, cela implique que $f(w) \equiv 0$. En outre,

$$f(w) = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w+n^2} \langle b, z_n \rangle z_n, y \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w+n^2} \langle b, z_n \rangle \langle y, z_n \rangle.$$

En utilisant le lemme (3.1), nous déduisons que $\langle b, z_n \rangle \langle y, z_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique à son tour que $\langle y, z_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base orthonormée de X , nous obtenons que $y = 0$. Par conséquent, l'espace $Sp\{A_\lambda^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ est dense dans X . En appliquant le théorème 2.2, nous pouvons affirmer que le système (3.2)-(3.3) est approximativement contrôlable sur $[0, \tau]$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la contrôlabilité des systèmes de contrôle repris par une équation différentielle fractionnaire dans les espaces de Banach. En utilisant les propriétés de la fonction Mittag-Leffler nous généralisons à ces systèmes un résultat de Korobov et Rabakh, qui a été établi pour les systèmes du premier ordre. Nous appliquons nos résultats pour étudier la contrôlabilité d'un système modélisé par une équation d'intégrale fractionnaire dans un espace de Hilbert.

Abstract

In this thesis, we are concerned with the controllability of control systems governed by a fractional differential equation in Banach spaces. Using the properties of the Mittag-Leffler function we generalize to these systems a result of Korobov and Rabakh, which was established for first order systems. We apply our results to study the controllability of a system modeled by a fractional integral equation in a Hilbert space.

Bibliographie

- [1] *S.Goldberg, Unbounded Linear Operators. McGraw-Hill, NewYork(1966).*
- [2] *V.I.Korobov, R.Rabakh, Exact controllability in Banach Spaces. Differential Equations 15, No 12(1979), 1531-1537.*
- [3] *S.Lang, Real and Functional Analysis. Third Edition. Springer-Verlag, New York(1993).*
- [4] *A.Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, NewYork(1983).*
- [5] *I.Podlubny, Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego(1999).*
- [6] *Therese Mur, Hernàn R.Henriquez, Controllability Of Abstract Systems Of Fractional Order. Fractional Calculus and Applied C'nalysis pp. 1379-1398 .*