

Matière : Équations différentielles dans les espaces de Banach
Corrigé
Master 01 (2024/ 2025)

Exercice 1 (3 pts)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(0.1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

$$(0.2) \quad x(0) = x_0$$

(1) Vérification des hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t, x) = x$.

f est :

— continue sur \mathbb{R} ;

— localement lipschitzienne sur \mathbb{R} , car $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues.

(2) Détermination du flot

Ainsi, les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites. Par conséquent, pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0$, il existe une unique solution définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 .

On cherche la solution x vérifiant $x'(t) = x(t)$ et $x(t_0) = x_0$.

$$x'(t) = x(t) \Rightarrow x(t) = x_0 e^{t-t_0}$$

Le flot $\Phi(t, t_0, x_0)$ est défini sur \mathbb{R}^3 par :

$$\Phi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$$

Exercice 2

1. On considère le système différentiel :

$$Y'(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{bmatrix} Y(t) \dots \dots \dots (H)$$

Rappel :

Une matrice $R(t, t_0)$ est une résolvante de (H) si elle vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0), \text{ et } R(t_0, t_0) = I_{\mathbb{R}^2}$$

et

$$(1) \text{ Calculons } R(t_0, t_0) : R(t_0, t_0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{t_0-t_0} & +e^{t_0} - e^{t_0} \\ e^{-t_0} - e^{-t_0} & 1 + e^{t_0-0-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette condition est satisfaite.

(2) Vérification de l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t, t_0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{t-t_0} & +e^t \\ e^{-t} & -e^{t_0-t} \end{bmatrix},$$

(3) Maintenant, calculons $A(t)R(t, t_0)$:

$$A(t)R(t, t_0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{t-t_0} & +e^t - e^{t_0} \\ e^{-t_0} - e^{-t} & 1 + e^{t_0-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{t-t_0} & +e^t \\ e^{-t} & -e^{t_0-t} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0).$$

La matrice $R(t, t_0)$ est bien une résolvante du système (H) .

2. Résolution du système avec condition initiale $Y(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

La solution générale est donnée par : $Y(t) = R(t, 1)Y(1)$

Donc

$$Y(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{t-1} \\ e^{-1} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

Exercice 3

1. Définissons $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(t, x) \mapsto f(t, x) = -\frac{2t}{1+t^2}x - t^2x^2$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc localement lipschitzienne par rapport à x .

En vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale x définie sur un intervalle ouvert $]T_-, T_+[$. De plus $f \in \mathcal{C}^0$, donc $x \in \mathcal{C}^1$.

2. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in]0, T_+[$ tel que $x(t_1) = 0$. Alors x est aussi une solution du problème :

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{2t}{1+t^2}x(t) - t^2x^2(t) \\ x(t_1) = 0 \end{cases}$$

Mais la solution fonction nulle est aussi une solution sur \mathbb{R} de ce système. Alors, $x \equiv 0$ sur $]T_-, T_+[\subset \mathbb{R}$, en contradiction avec $x(0) = 1$.

3.

$$x(t) = -\left(\frac{2t}{1+t^2}x + t^2x^2\right) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

Alors, x est décroissante sur $[0, T_+[$.

Comme x est décroissante sur $[0, T_+[$, alors

$$\begin{aligned} x(t) &< x(0) \quad \forall t \in [0, T_+[\\ \Rightarrow x(t) &< 1 \quad \forall t \in [0, T_+[\end{aligned}$$

4. Comme x est bornée sur $[0, T_+[$, alors $T_+ = +\infty$