
Université ABBES LAGHROUR Khenchela



جامعة عباس لغرور خنشلة
Faculté de Sciences et Technologie
كلية العلوم و التكنولوجيا
Département de Génie Mécanique
قسم الهندسة الميكانيكية



Mémoire

de fin d'études Pour l'obtention du diplôme

MASTER (LMD)

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Thème

**Modélisation de l'effet du
tournoiement -Application à un arbre
de transmission**

Réalisé par :

KHABTANE Sara

Dirigé par :

Dr. MEDDOUR Belkacem

Année universitaire : 2019-2020

إهداء

إلى روح صديقتي العزيزة بومحذاف إيناس –
رحمها الله -

التي لولا إرادة الله التي تسبق كل شيء لكانت
شريكتي في هذه المذكرة.

إلى أبي و أمي أدامهما الله و إخوتي و صديقاتي
أمينة, هدى و شهرزاد.

REMERCIEMENT

Avant tout, je remercie Dieu le tout puissant, pour m'avoir donné la santé, le courage et la volonté d'étudier et pour m'avoir permis de réaliser ce travail.

Je remercie fortement mon encadreur : Mr MEDDOUR Belkacem de m'avoir orienté par ses conseils dans le but de mener à bien ce travail.

Je remercie les membres de jury Mr MESSAOUDI Aissam et Mr BOUALI Hicham qui ont accepté de faire partie de ce jury de soutenance.

Et en fin, je remercie tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de ce travail.

Résumé :

Ce mémoire s'intéresse à l'étude des phénomènes vibratoires affectant le comportement dynamique des arbres tournants. Cette étude concerne les vitesses critiques qui conduisent généralement à de problèmes dangereux. On a fait une étude théorique pour obtenir les équations des énergies cinétiques et potentielles des composants du rotor afin de trouver les équations de mouvement puis obtenir les fréquences et donc les vitesses de rotation critiques. Cette étude a été appliquée à un arbre de transmission dans une boîte de vitesses d'un tour parallèle.

ملخص :

هذه المذكرة تهتم بدراسة الظواهر الاهتزازية المؤثرة على السلوك الديناميكي للأعمدة الدوارة, تتعلق هذه الدراسة بالسرعات الحرجة التي في العادة ما تسبب مشاكل خطيرة. لقد قمنا بدراسة نظرية للحصول على معادلات الطاقة الحركية و الكامنة لمكونات الدوار و ذلك لإيجاد معادلات الحركة و من ثم الحصول على الترددات و منه سرعات الدوران الحرجة. و تم تطبيق هذه الدراسة على عمود نقل الحركة في علبة سرعات مخروطية.

Abstract :

The aim of his work is the study of the vibratory phenomena affecting the dynamic behavior of rotating shafts. This study concerns the critical speeds which generally lead to dangerous problems. We did a theoretical study to obtain the kinematic and potential energy equations of the rotor components in order to find the kinematic equations then obtain the frequencies therefore critical rotation speeds. This study was applied to a driveshaft in a lathe gearbox.

Sommaire

Introduction générale

Chapitre 1 : Présentation de la dynamique des rotors

I.1.Introduction	1
I.2 Historique.....	1
I.3.Définition d'un rotor.....	6
I.3.1.L'arbre.....	7
I.3.2.Disque.....	7
I.3.3.Les paliers.....	8
I.3.4.Le balourd.....	8
I.4.Les modèles d'un rotor.....	9
I.4.1.Modèle de Jeffcott/Laval.....	9
I.4.2.Modèle avec paliers flexibles (cas isotropique).....	10
I.4.3.Modèle avec paliers flexibles (cas anisotropique).....	10
I.5.Conclusion.....	10

Chapitre 2 : Modélisation de l'effet du tournoiement (Whirling)

II.1.Introduction.....	11
II.2.Caractéristiques des éléments du rotor.....	11
II.3.Énergies cinétiques et de déformation.....	14
II.3.1.Le disque.....	14
II.3.2.L'arbre.....	15
II.3.2.1.L'énergie cinétique.....	15
II.3.2.2.L'énergie de déformation.....	16
II.3.3.Les paliers.....	18
II.3.4.Le balourd.....	19
II.4.Mise en équation.....	21
II.4.1.Représentation du modèle.....	21
II.4.2.Exemple d'un modèle simple.....	22
II.4.3.Données.....	22
II.5.Modèle symétrique.....	24
II.5.1.Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation.....	25
II.5.2.Diagramme de Campbell.....	27

II.5.3.Réponse aux forces d'excitation.....	29
II.6.Conclusion.....	32

Chapitre 3 : Application à un arbre de transmission de la boîte de vitesses
d'un tour

III.1.Introduction.....	33
III.2.Présentation du rotor à étudier.....	33
III.2.1.La machine choisie.....	33
III.2.2. La boîte de vitesse	34
III.3.Mesure des grandeurs géométriques du rotor.....	35
III.3.1.Définition.....	35
III.3.2.Principe.....	36
III.4. Modélisation 3D avec Solidworks.....	36
III.4.1.L'arbre.....	37
III.4.2.Le baladeur.....	37
III.5. L'assemblage du rotor.....	37
III.6. Dessins de définition et d'assemblage du rotor.....	38
III.6.1.Dessin de définition de l'arbre.....	38
III.6.2.Le dessin de définition du baladeur.....	40
III.6.3.Le dessin d'assemblage	41
III.7.Détermination des caractéristiques inertielles du rotor.....	42
III.8.Application du modèle du whirling au rotor choisi.....	44
III.8.1.Modèle adopté du rotor.....	44
III.8.2.Données de départ de calcul du rotor.....	44
III.8.3.Mise en équation.....	45
III.8.3.1.L'énergie cinétique totale.....	46
III.8.3.1.1.L'énergie cinétique de l'arbre.....	47
III.8.3.1.2.L'énergie cinétique de disque.....	48
III.8.3.1.3.L'énergie cinétique de balourd.....	48
III.8.3.2.L'énergie de déformation.....	49
III.9. Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation.....	50
III.10. Diagramme de Campbell.....	52
III.11. Réponse aux forces d'excitation.....	53
III.12. Conclusion.....	55

Conclusion générale.....	56
--------------------------	----

LISTE DES FIGURES

Chapitre 1 : Présentation de la dynamique des rotors

Figure I-1. Modèle de Rankine	2
Figure I-2. Model Jeffcott/Laval.....	4
Figure I-3. Arbre de sortie (réducteur) effectué sur solidwork.....	6
Figure I-4. Modèle d'un rotor simple.....	7
Figure I-5. Arbre de sortie.....	7
Figure I-6. Un arbre avec une roue dentée.....	8
Figure I-7. Palier à roulement.....	8
Figure I-8. Élément de balourd	9
Figure I-9. Modèle de Jeffcott/Laval.....	9
Figure I-10. Modèle de Jeffcott/Laval sur paliers flexibles.....	10

Chapitre 2 : Modélisation de l'effet du tournoiement (Whirling)

Figure II-1. Repère de référence du disque sur l'arbre flexible.....	11
Figure II-2. Angles d'Euler.....	12
Figure II-1. Modèle du disque.....	15
Figure II-2. Section droite de l'arbre.....	16
Figure II-5. Amortissement et raideurs de palier.....	18
Figure II-6. Le balourd.....	20
Figure II-7. Les angles θ et Ψ	21
Figure II-8. Modèle simple de rotor.....	22
Figure II-9. Diagramme de Campbell.....	29
Figure II-10. Réponse du balourd.....	31

Chapitre 3 : Application à un arbre de transmission de la boîte de vitesses d'un tour

Figure III-1. Tour parallèle choisi pour l'étude	33
--	----

Figure III-2. Vue d'ensemble du rotor à étudier.....	34
Figure III-3. Boite de vitesse	34
Figure III-4. Modélisation 3D de La boite de vitesse avec Solidworks.....	35
Figure III-5. Machine de mesure tridimensionnelle.....	36
Figure III-6. Modélisation 3D de l'arbre avec Solidworks.....	37
Figure III-7. Modélisation du baladeur avec Solidworks.....	37
Figure III-8. La modélisation de rotor sur le Solidworks.....	38
Figure III-9. Le dessin de définition d'arbre.....	39
Figure III-10. Le dessin de définition du baladeur.....	40
Figure III-11. Le dessin d'assemblage du rotor à étudier.....	41
Figure III-12. Les propriétés de masse du baladeur.....	42
Figure III-13. Les propriétés de masse de l'arbre.....	43
Figure III-14. Modèle du rotor à étudier.....	44
Figure III-15. Diagramme de Campbell.....	53
Figure III-16. Réponse du balourd.....	54

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I- 1. Résumé des différents phénomènes dynamiques du rotor.....	5
Tableau II-1. Les trois premiers modes de vibration.....	23
Tableau III- 1. Les propriétés de masse du baladeur.....	42
Tableau III- 1. Les propriétés de masse de l'arbre.....	43

LISTE DES SYMBOLES

Variable	Désignation
T_{tot}	Énergie cinétique totale
T_a	Énergie cinétique de l'arbre
T_d	Énergie cinétique de disque
T_b	Énergie cinétique de balourd
U	Énergie de déformation.
q_i	Coordonnées généralisées du système
F_{q_i}	Force généralisée
ψ	Angle de précession autour de l'axe Oz
θ	Angle de nutation autour de l'axe Ox
φ	Angle de rotation autour de l'axe Oy
Ω	Vitesse de rotation
ω	Pulsation propre
u	Déplacement de l'arbre selon l'axe Ox
w	Déplacement de l'arbre selon l'axe Oz
m_d	La masse de disque
ρ	La masse volumique
h	L'épaisseur de disque
R	Le rayon extérieur de disque
r	Le rayon intérieur de disque
$I_{d/O}$	Le tenseur d'inertie du disque dans le repère ROxyz
I_{dx}	Le moment d'inertie de disque par à rapport Ox
I_{dy}	Le moment d'inertie de disque par à rapport Oy
I_s	Le moment quadratique de l'arbre par à rapport Ox
ε	La déformation longitudinale
σ	La contrainte
V	Le volume
k_{xx}	La rigidité des paliers selon l'axe Ox
k_{zz}	La rigidité des paliers selon l'axe Oz
c_{xx}	L'amortissement des paliers selon l'axe Ox

c_{zz}	L'amortissement des paliers selon l'axe Oy
δW_p	Le travail virtuel de forces extérieures
F_u	Force généralisée autour de l'axe Ox
F_w	Force généralisée autour de l'axe Oz
m_b	La masse de balourd
O	centre géométrique de l'arbre O
d	La distance de balourd
$f(y)$	la déformée
L	La longueur de l'arbre
l_1	La position de disque
l_2	La position des paliers
S	L'aire de la section droite de l'arbre
A_e	Limite de déplacement

INTRODUCTION GENERALE

Les machines tournantes constituent des éléments indispensables dans différents domaines de l'industrie moderne : turbomachines, automobiles, les pompes, les moteurs d'avions et les compresseurs, machines-outils ...

En général on trouve le mouvement à recevoir ou à transmettre se trouve sous forme rotative ce qui explique l'abondance des liaisons pivot dans ces machines d'où l'existence intense des pièces tournantes tels les arbres, les roues dentées, les turbines,...

Ces machines peuvent être considérées comme se composant de deux parties essentielles : une partie fixe appelée le stator et une autre partie tournante appelée le rotor. L'arbre d'un rotor peut être considéré en tant qu'un corps élastique continu avec des propriétés d'inertie et de masse répartir tout le long de sa longueur. Les arbres généralement peuvent être le siège des phénomènes vibratoires qui perturbent leur fonctionnement normal. Ce sont des phénomènes dangereux dont les conséquences sont souvent catastrophiques. L'une des causes les plus connues de l'apparition de ces phénomènes est l'excentricité du centre de gravité qui cause une distribution de déséquilibre tout le long de l'arbre ou le rotor surtout dans le domaine des vitesses élevées, pour ça il est nécessaire d'étudier le comportement dynamique des corps tournants pour la prédiction des vitesses critiques et la modification de la conception pour altérer les vitesses critiques.

Dans ce mémoire on a fractionné travail en trois chapitres:

- Le premier a été consacré pour mentionner quelques points historiques importants dans le développement de la dynamique des rotors où le concept du tournoiement et de la vitesse critique sont expliqués et les concepts de base de la dynamique des rotors sont exposés.
- Le deuxième représente les caractéristiques des éléments d'un rotor et les énergies cinétiques et potentielles pour développer les équations du mouvement et déterminer les fréquences propres pour tracer le diagramme de Campbell.

- Le dernier chapitre constitue le squelette de ce travail où on applique le modèle à un arbre de transmission sur lequel sont montés deux baladeurs, sachant que ce rotor fait partie du mécanisme de la boîte de vitesses d'un tour.

Chapitre I

Présentation de la dynamique des rotors

I.1. Introduction

Les machines tournantes (turbines, automobiles, turbomachines, etc.) se trouvent dans de nombreux domaines avec des applications industrielles très étendues, et parmi leurs fonctions sont le transfert et la transmission d'énergie, ces machines subissent des vibrations dues aux déformations causées par de grandes forces dynamiques. Au cours de la dernière période, la forte augmentation des vitesses a causé des problèmes dangereux. Plus la vitesse est élevée, plus il y a de vibrations, souvent limitent les performances et mettent en danger la sécurité d'opération. C'est ce qui a conduit à l'étude de ces phénomènes afin de déterminer correctement et d'éviter les vitesses critiques.

I.2. Historique

La rotation est l'une des causes les plus courantes de dommages aux machines rotatives. La conception incorrecte des paramètres du système peut entraîner des pannes rapides lorsque les machines fonctionnent à proximité de la fréquence critique. Et pour résoudre ces problèmes, la recherche sur la dynamique du vertige a commencé il y a près de 140 ans.

Cette science remonte à l'Amérique du Nord [1], à commencer par William John Maquorn Rankine (1820-1872). Il a été professeur de génie civil et de mécanique de 1855 à 1872. Il a été décrit comme "le père des sciences de l'ingénieur dans ce pays", en reconnaissance de ses réalisations en tant que scientifique théorique et un éducateur. [2] Il a été un contributeur majeur au développement de la dynamique du rotor et il a exécuté la première analyse d'un arbre tournant.

Rankine (1869) a effectué la première analyse d'un arbre en rotation. Il a choisi un modèle à deux degrés de liberté consistant en une masse rigide tourbillonnant, avec un ressort élastique agissant dans la direction radiale. Il a prédit qu'après une certaine vitesse critique, l'arbre serait instable simplement parce que sa forme serait courbée, [3] mais il utilisé la loi de Newton a incorrectement ont le résultat était un modèle infortuné. Cette analyse erronée a entraîné une baisse de la dynamique du rotor il y a environ 5 décennies. [4]

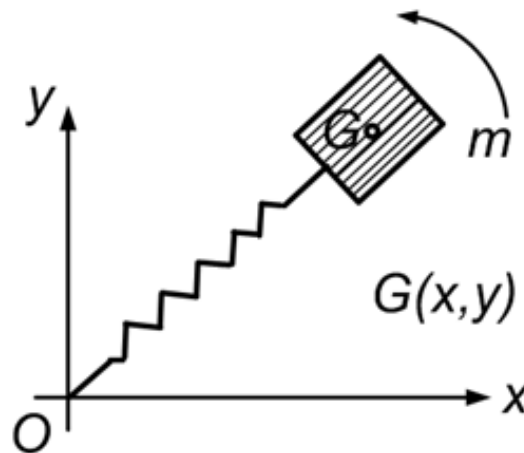


Figure I-1. Modèle de Rankine. [9]

A la fin du XIX^e siècle. La théorie de la vibration a été très largement développée. Dans le même temps, la construction de machines a progressé rapidement, en particulier le développement de locomotives et de turbines à vapeur. La vitesse de rotation de l'arbre depuis l'invention de la roue était généralement inférieure à 1000 tr / min. Dans les années 1870, le Dr Gustaf Patrie de Laval, un ingénieur suédois, a inventé le séparateur de lait qui devait fonctionner à 6 000 à 10 000 tr / min. Les premières unités De Laval étaient entraînées à la main ou à cheval avec une augmentation adaptée de la vitesse. Il a rapidement vu le besoin de vitesses plus élevées et la turbine à vapeur est née. Il expérimentait des rotors de turbine de 30 000 à 42 000 tr / min et il a dû surmonter le problème d'un équilibrage incomplet qui, à ces vitesses, entraînerait des forces centrifuges prohibitives avec des arbres rigides. Il a ensuite inventé l'arbre flexible à faible vitesse critique (7 fois inférieure à la vitesse de rotation de ses turbines). Il a remarqué qu'il pouvait accélérer à travers la vitesse critique, et que l'opération à des vitesses supérieures plus élevées que la vitesse critique était très souple. [5]

Essentiellement, c'est la première tentative pour déterminer un degré de système de vibration rotatif libre. Certains ont préféré nommer les modèles de rotor à disque unique comme modèle de Laval.

Une expérience importante a été réalisée par la British Rail Road Engineer Tower en 1886 par Osborne Reynolds pour découvrir les paliers hydrodynamiques qui composent l'élément porteur du système et ont donc une rigidité et un amortissement. Ces paliers

jouent un rôle important dans le comportement du rotor. Rayleigh, en utilisant le principe de l'énergie, a fourni une méthode approximative (borne supérieure) pour déterminer la première vitesse critique d'un rotor. [4]

En 1895, Dunkerley a étudié les vibrations des arbres chargés de plusieurs disques. Tel qu'il a dérivé une relation empirique pour estimer la valeur limite inférieure de la vitesse critique. [6]

Dans la même année, Föppl a utilisé un meilleur modèle et explique analytiquement comment l'opération dépasse la vitesse critique, Ce qui signifie qu'il y a plus d'une vitesse critique. [7]

C'était en Angleterre en 1916, Kerr a publié une évidence expérimentale d'une deuxième vitesse critique, et bien sûr cette vitesse ne peut être atteinte qu'après avoir dépassé en toute sécurité la première vitesse critique. [8]

Même avec la connaissance générale des vitesses critiques, le comportement de l'arbre à n'importe quelle vitesse générale était encore peu clair jusqu'à ce que Jeffcott formule le problème du rotor comme un problème de vibration forcée. Il a montré pour la première fois que l'arbre ne tournait pas principalement autour de sa position de repos, mais de sa propre ligne médiane. Le tourbillon du rotor correspond à une vibration libre ou forcée d'une structure stationnaire. [4] Jeffcott a confirmé la prédiction de Föppl de l'existence une solution supercritique stable. Et il a étendu l'analyse de Föppl en incluant l'amortissement externe (c.-à-d. Des forces d'amortissement qui ne dépendent que de l'absolu la vitesse du rotor). [3] Il s'agit d'un développement important dans la compréhension du comportement dynamique du rotor. Les rotors, modélisés comme un seul disque sur un arbre flexible sans masse, semblable à une masse sur un modèle de liberté à un seul degré, sont nommés d'après Jeffcott pour apprécier les grandes contributions de Jeffcott dans le domaine de la dynamique de rotation [4] parfois, il est nommé le rotor Jeffcott-Laval. (Fig I.2)

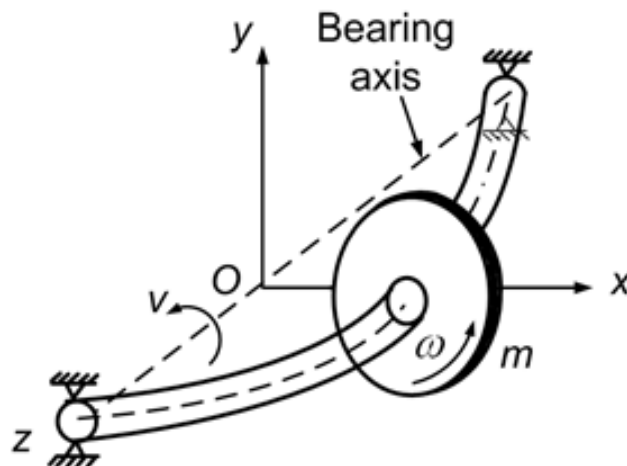


Figure I-2. Modèle de Jeffcott / Laval. [9]

Stodola a présenté une méthode graphique pour déterminer les vitesses critiques des rotors pratiques. Cette méthode a continué d'être largement utilisée pendant plus de cinq décennies jusqu'à ce que des méthodes de matrice de transfert et des ordinateurs numériques soient devenues disponibles. [4] En 1924, il a écrit un chef-d'œuvre détaillé des développements de la dynamique des rotors. [10] Dans son travail, il a présenté les effets gyroscopiques et a démontré que les solutions supercritiques étaient stabilisées par les accélérations de Coriolis. En 1933, Smith était le premier à étudier les systèmes symétriques et asymétriques. [11] Les vibrations des rotors avec des masses continûment réparties ont été étudiées en continu dans les années 1950 et 1960 par Bishop, Gladwell et Parkson qui ont reporté une série de publications sur les réponses déséquilibrées et l'équilibrage des rotors continus. [12]

Campbell, (1924), a étudié les vibrations des turbines à vapeur et a développé une méthode pour tracer les vitesses critiques et les lignes d'excitations synchrones par rapport à la vitesse de fonctionnement, avec leurs intersections mettant en évidence les points de résonance tourbillonnante. Maintenant largement connus comme diagramme de Campbell.

En 1933, Smith a analysé un système de rotor avec amortissement visqueux interne et a prouvé que sans aucun amortissement externe, le système devenait instable à la 1ère vitesse critique. Ce point est appelé seuil d'instabilité car l'amortissement visqueux interne a eu un effet stabilisateur jusqu'à ce point, c'est-à-dire à des vitesses sous-critiques. [13]

Tableau I-1. Résumé des différents phénomènes dynamiques du rotor. [3]

	Phénomènes / effets	Causé par	Rapporté / Interprété par
1	Tournoiement (whirling)	balourd	Rankine (1869)
2	Centrage automatique de rotor	balourd	De Laval (1883)
3	Tournoiement synchrone	balourd	Föppl (1895)
4	Vitesse critique	balourd	Dunkerley (1895)
5	Deuxième vitesse critique	balourd	Kerr (1916)
6	Réponse supercritique stable	balourd	Jeffcott (1919)
7	Résonance secondaire	la gravité	Stodola (1924)
8	Instabilité	Asymétrie de l'arbre	Prandtl (1918)
9	Effet gyroscopique	Rotation du rotor	Stodola (1924)
10	Vitesse de rotation seuil pour l'instabilité	Amortissement interne	Newkirk (1924), Kimball (1924), Smith (1933), Crandall (1961).
11	Vitesse de rotation seuil pour l'instabilité	Dissymétrie de la rigidité du roulement	Smith (1933)
12	Fouet à huile	Action non linéaire du coin d'huile dans un palier lisse	Newkirk and Taylor (1925)
13	Vibration auto-excitée	Contact entre rotor et stator	Baker (1933)
14	Fouet à huile	Palier hydrodynamique	Hori (1959)
15	Vibrations induites par l'écoulement	Rotor creux contenant du fluide	Kollmann (1962), Ehrich (1965), Kuipers (1964), Wolf (1968).
16	Sous-harmoniques / résonance combinée	Non-linéarité (roulement à billes)	Yamamoto (1955, 1957)
17	Résonance non linéaire	Films d'huile dans les paliers lisses	Tondl (1965)

18	Réponse non stationnaire	Accélérations constantes / variables de la vitesse du rotor	Lewis (1932)
19	Vibrations de l'arbre à des vitesses critiques	La variation des vitesses de rotation	Natanzon (1952)
20	Vitesse critique amortie	Paliers hydrodynamiques	Ruhl et Booker's (1972), Lund's (1974)

I.3. Définition d'un rotor

Les machines tournantes se composent de deux parties, la partie fixe est appelée le stator et la partie rotative est appelée le rotor.

Le rotor (suivant la définition ISO), est un corps suspendu par un ensemble de charnières ou roulements cylindriques qui lui permettent de tourner librement autour d'un axe fixé dans l'espace. [14] Le rôle principale des rotors est de transformer et de transfert l'énergie.

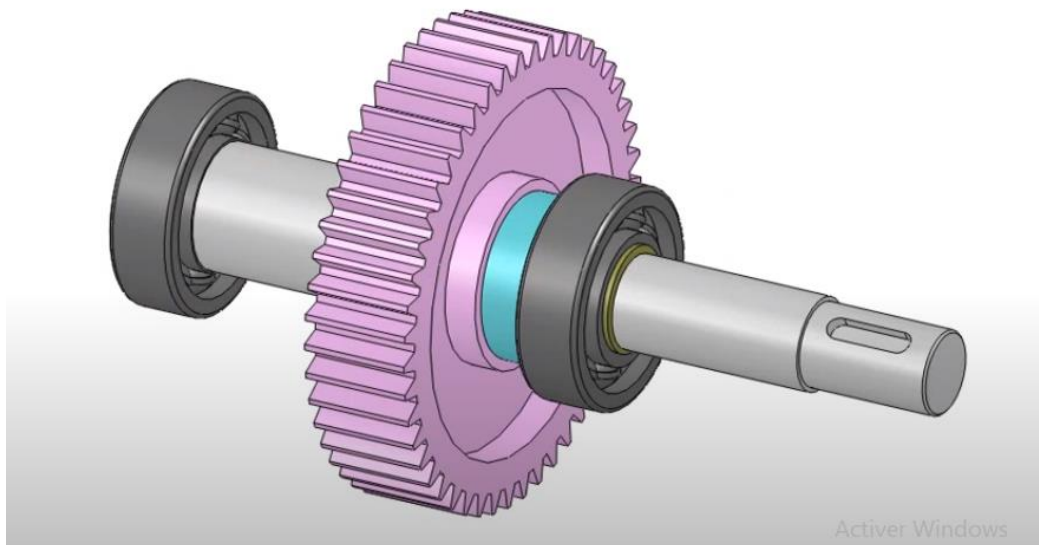


Figure I- 3. Arbre de sortie (réducteur) réalisé sur Solidwork.

Les éléments de base d'un rotor sont : le disque, l'arbre, les paliers et le balourd.

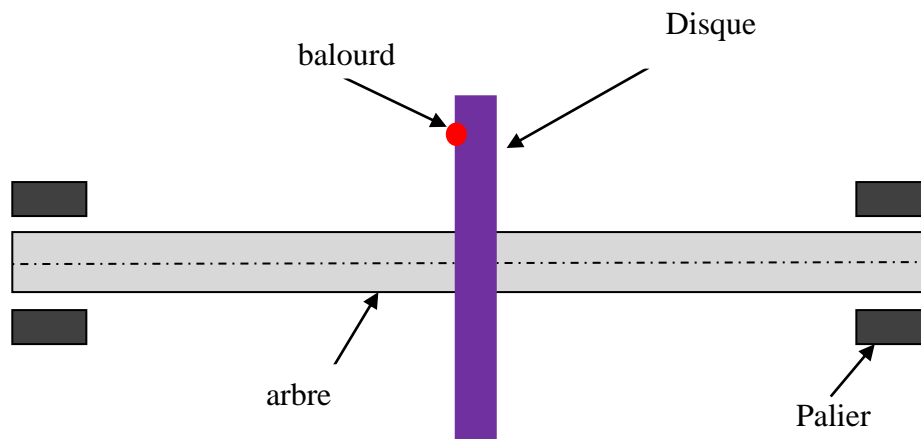


Figure I- 4. Modèle d'un rotor simple. [16]

I.3.1. L'arbre

L'arbre est représenté par une poutre de section circulaire. Il est l'élément qui porte les disques (les roues). Il peut être rigide ou flexible, ces propriétés dépendent de son matériau. [17]

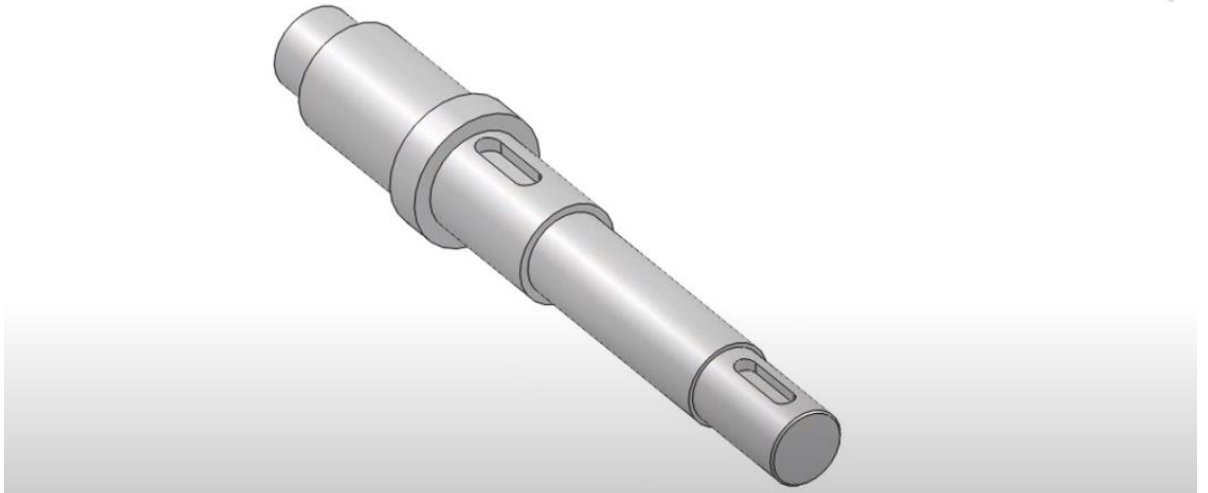


Figure I- 5. Un arbre de sortie.

I.3.2. Disque

Le disque est la modélisation de la roue, il est représenté géométriquement sous une forme cylindrique. il peut être déformable ou rigide. [17]

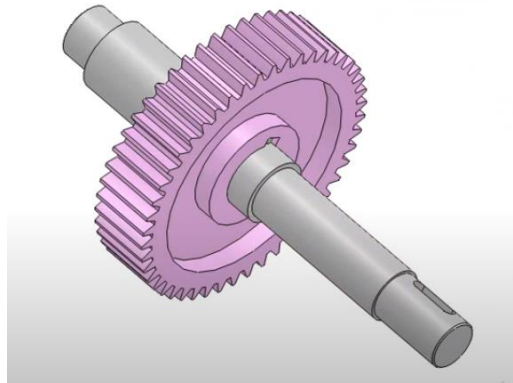


Figure I- 6. Un arbre avec une roue dentée.

I.3.3. Les paliers

Les paliers sont aussi appelés supports, ils peuvent être flexibles (isotrope ou anisotrope) ou rigides. Le palier constitue un système de dissipation ou non lorsque la flexibilité est anisotrope. Les types des paliers : paliers aérostatiques, les paliers aérodynamiques, les paliers hydrostatiques, paliers à roulements (les éléments roulant entre les surfaces comme galets, billes et aiguilles.) (Fig .I.7) [17]



Figure I- 7. Palier à roulement.

I.3.4. Le balourd

Le balourd est toute masse excentrée m_b d'un rotor. Il est localisé en une distance d du centre de géométrie de l'arbre. (Fig I.8) [17] Il provoque l'apparition des forces d'inertie centrifuges à cause des défauts de fabrication (exp : un matériau non homogène), de conception (exp : Formes asymétriques), ...etc.

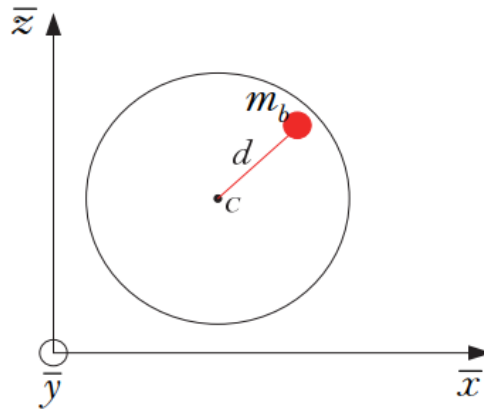


Figure I- 8. Élément de balourd. [17]

I.4. Les modèles d'un rotor

I.4.1. Modèle de Jeffcott/Laval

Le modèle est constitué de :

- Un arbre de masse faible et de raideur en flexion k_a ;
- Un disque indéformable de faible masse m et une excentricité e . C'est à dire que son centre de gravité et son centre géométrique ne sont pas confondus. [12]

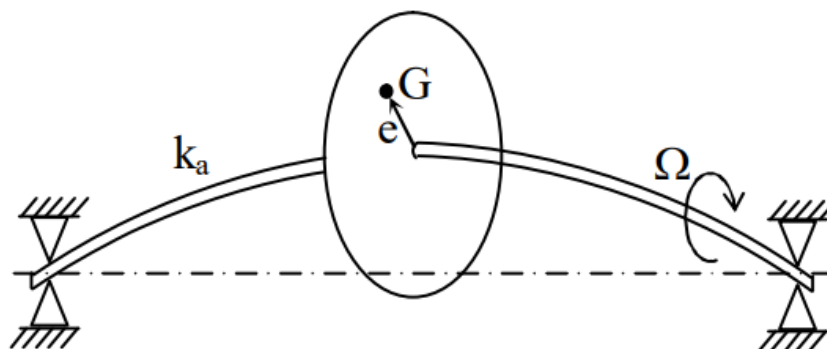


Figure I- 9. Modèle de Jeffcott/Laval. [12]

On considère le cas le plus simple :

Les vibrations de flexion latérales du modèle symétrique non amorti, la vitesse de rotation est constante, la pesanteur et l'effet gyroscopique sont négligés. [12]

I.4.2. Modèle avec paliers flexibles (cas isotropique)

Un modèle simple de Laval Jeffcott constitué de :

Deux paliers flexibles identiques et isotropiques, c'est à dire que leurs caractéristiques (raideurs et viscosités) sont les mêmes dans les deux directions ox et oz . [12]

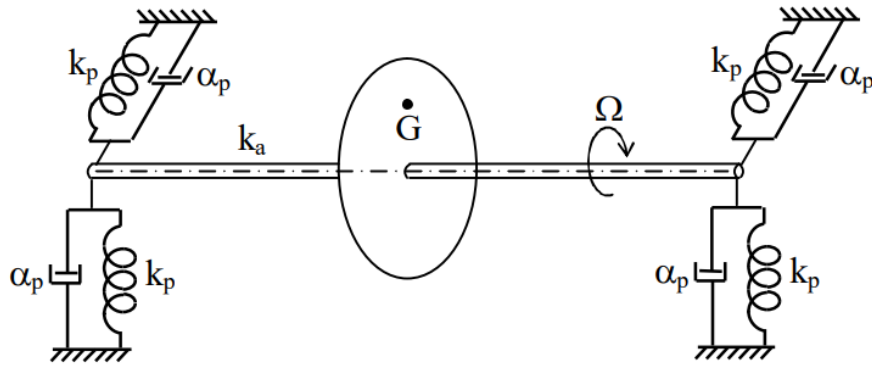


Figure I- 10. Modèle de Jeffcott/Laval sur paliers flexibles. [12]

$$K_x = k_z \text{ et } \alpha_x = \alpha_z$$

I.4.3. Modèle avec paliers flexibles (cas anisotropique)

Les caractéristiques (raideurs et viscosités) des paliers ne sont pas les mêmes suivant les deux directions ox et oz .

$$K_x \neq k_z \text{ et } \alpha_x \neq \alpha_z$$

I.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'histoire de la dynamique des rotors et les travaux les plus importants des chercheurs et des ingénieurs dans ses études des différents phénomènes et les résultats qu'ils obtiennent. Puis on a expliqué quelques concepts de base.

Chapitre II

*Modélisation de l'effet du tournoiement
(Whirling)*

II.1. Introduction

Dans ce chapitre, on représente les phénomènes vibratoires associés aux systèmes tournants, à partir des caractéristiques des éléments d'un rotor pour développer les équations du mouvement. Ces équations sont obtenus par application l'équation de Lagrange et par l'utilisation de la méthode de Rayleigh-Ritz.

II.2. Caractéristiques des éléments du rotor

Les équations générales du mouvement d'un rotor sont obtenues à partir :

- Les énergies cinétiques T_i de chacun des composants : le disque, l'arbre et le balourd ;
- L'énergie de déformation U de l'arbre (flexible) ;
- Le travail virtuel des forces extérieures δW pour caractériser les paliers ;
- L'application de l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq_i} \right) - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = F_{q_i} \tag{1}$$

On prend deux repères principaux qui sont définis comme suit: (Fig. II-1)

- $R_0(x_0, y_0, z_0)$ est le repère galiléen, lié au rotor;
- $R_1(x_1, y_1, z_1)$ est le repère lié au disque.

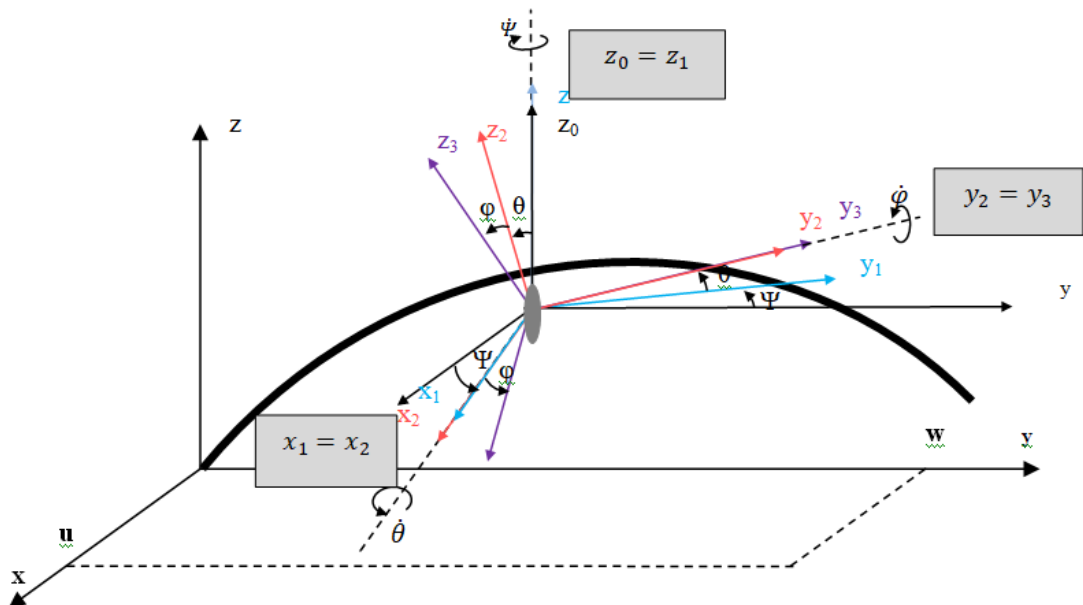


Figure II-1. Repère de référence du disque sur l'arbre flexible. [17]

Ainsi pour déterminer l'orientation du disque on effectue les rotations successives suivantes :

- La précession Ψ : Rotation autour de l'axe Oz_0 passant de (O, x_0, y_0, z_0) à (O, x_1, y_1, z_1) ;
- La nutation θ : Rotation autour l'axe Ox_1 passant de (O, x_1, y_1, z_1) à (O, x_2, y_2, z_2) ;
- La rotation propre φ : Rotation autour de l'axe Oy_2 passant de (O, x_2, y_2, z_2) à (O, x_3, y_3, z_3) . (Fig. II-2)

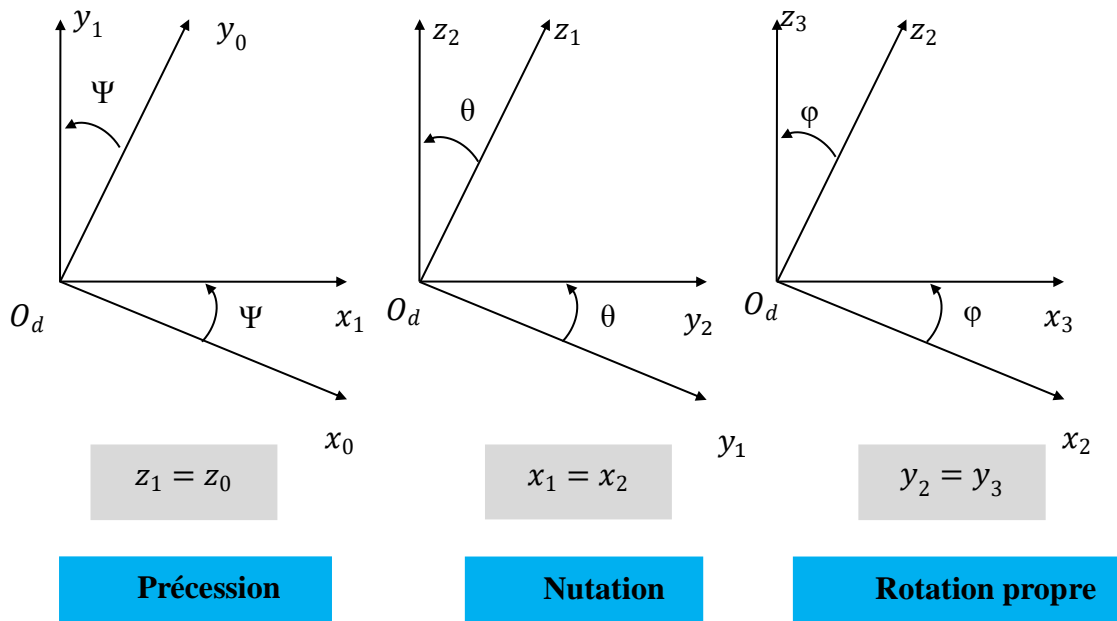


Figure II-2. Angles d'Euler.

Le vecteur de vitesse de rotation :

$$\vec{\omega} = \dot{\Psi}\vec{z}_1 + \dot{\theta}\vec{x}_2 + \dot{\varphi}\vec{y}_3 \tag{2}$$

On détermine les expressions des vecteurs unitaires z_1 et x_2 en fonction des vecteurs unitaires du repère (O_3, x_3, y_3, z_3) , pour exprimer le vecteur de rotation dans le repère d'inertie du disque. On utilise les figures (Fig. II-1 et Fig. II-2)

Par projection on a :

$$\vec{z}_1 = \cos\theta\vec{z}_2 + \sin\theta\vec{y}_1 \quad (3)$$

$$\vec{z}_2 = \sin\varphi\vec{x}_3 + \cos\varphi\vec{z}_3 \quad (4)$$

$$\vec{y}_1 = \vec{y}_3 \quad (5)$$

On remplace les équations (4) et (5) dans (3) :

$$\vec{z}_1 = \cos\theta(\sin\varphi\vec{x}_3 + \cos\varphi\vec{z}_3) + \sin\theta\vec{y}_3 \quad (6)$$

$$\vec{z}_1 = \cos\theta\sin\varphi\vec{x}_3 + \cos\theta\cos\varphi\vec{z}_3 + \sin\theta\vec{y}_3$$

$$\vec{x}_2 = \cos\varphi\vec{x}_3 - \sin\varphi\vec{z}_3 \quad (7)$$

Le vecteur vitesse de rotation s'écrit :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Psi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\Psi} \sin \theta \\ \dot{\Psi} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (8)$$

ω_{x3} ; ω_{y3} et ω_{z3} sont les composants du vecteur de rotation instantané suivant le repère (O, x_3, y_3, z_3)

On a :

$$\Omega = \dot{\varphi} \text{ et } \varphi = \Omega t$$

Ω est la vitesse de rotation du disque autour son axe principal ;

En admettant que l'angle θ est petit, on peut faire les approximations suivantes :

$$\cos \theta \approx 1 \text{ et } \sin \theta \approx \theta$$

Donc :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\Psi} \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \Omega + \dot{\Psi} \theta \\ \dot{\Psi} \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9)$$

II.3. Énergies cinétiques et de déformation

II.3.1. Le disque

Le disque supposé rigide est caractérisé uniquement par son énergie cinétique.

On a :

u et w les coordonnées du centre du disque O_d suivant O_dx_0 , O_dz_0 , la coordonnée suivant O_dy_0 est constante ; (Fig. II-4)

La masse de disque est $m_d = \pi h \rho_d (R^2 - r^2)$;

Le tenseur d'inertie est :

$$I_{d/o} = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_d}{12} (3R^2 + 3r^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_d}{2} (R^2 + r^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_d}{12} (3R^2 + 3r^2 + h^2) \end{bmatrix}$$

On remarque que :

$$I_{dx} = I_{dz}$$

Donc on peut écrit l'équation de l'énergie cinétique du disque comme suit:

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \quad (10)$$

Tel que :

$$\frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) : \text{L'énergie cinétique de translation ;}$$

$$\frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) : \text{L'énergie cinétique de rotation.}$$

On peut simplifier cette expression :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (11)$$

Tel que :

$\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$: Terme constant représentant l'énergie de rotation du disque .Terme constant non influent sur la nature des équations.

$I_{dy}(\Omega\dot{\Psi}\theta)$: Terme décrivant l'effet gyroscopique (Coriolis).

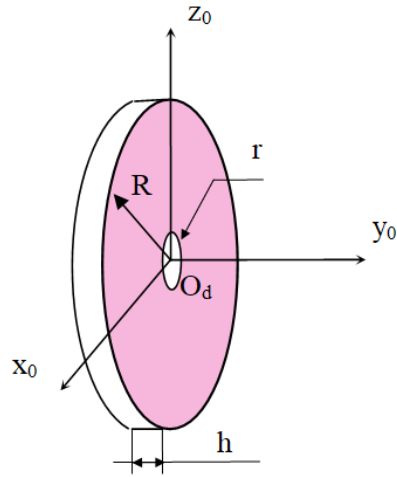


Figure II-3. Modèle du disque.

II.3.2. L'arbre

L'arbre est modélisé par une poutre de section circulaire. Il est considéré comme déformable, donc il est caractérisé par l'énergie cinétique et l'énergie de déformation.

II.3.2.1. L'énergie cinétique

On considère une masse élémentaire infiniment mince, de section S (supposée constante), d'épaisseur dy , de masse volumique ρ et de moment d'inertie quadratique I_s .

L'énergie cinétique s'écrit :

$$T_a = \frac{\rho S}{2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I_s}{2} \int_0^l (\dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I_s L \Omega^2 + 2\rho I_s \int_0^l \dot{\Psi}\theta dy \quad (11)$$

Tel que :

$\frac{\rho S}{2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy$: L'expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion ;

$\frac{\rho I_s}{2} \int_0^l (\dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy$: représente l'effet secondaire de l'inertie de rotation (poutre de Timoshenko) ;

$\rho I_s L \Omega^2$: Un terme constant, représente l'énergie de rotation de l'arbre, il n'a pas une contribution dans les équations du mouvement ;

$2\rho I_s \int_0^l \dot{\Psi}\theta dy$: Un terme représentant l'effet gyroscopique.

II.3.2.2. L'énergie de déformation

Dans la théorie des milieux continus l'énergie de déformation de l'arbre se calcule à partir de la déformation d'un point de la section droite de l'arbre (Fig. II-4). Soit :

- C le centre Géométrique de la poutre ;
- A (x' , y') est un point de la section droite ;
- E est le module de Young ;
- ε et σ sont les déformations et la contrainte ;
- u' et w' sont les déplacements du centre géométrique par rapport aux axes x' et z' .

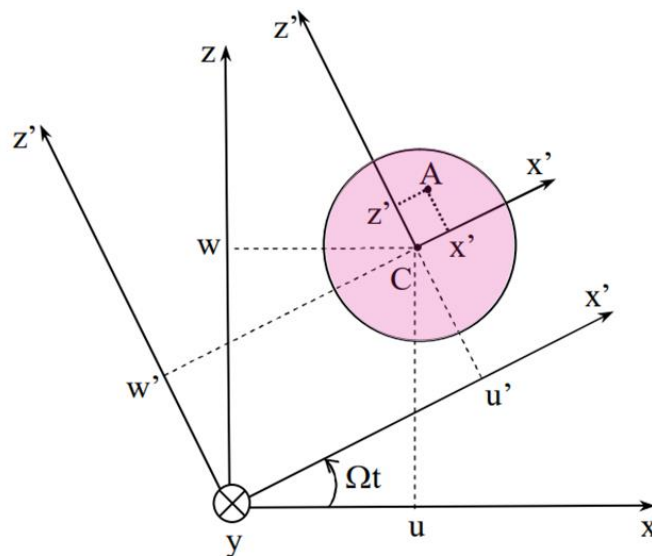


Figure II-4. Section droite de l'arbre. [17]

La déformation longitudinale au point A s'écrit :

$$\varepsilon = -x' \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - z' \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \quad (12)$$

L'énergie de déformation de l'arbre est:

$$U_a = \frac{1}{2} \int_{(V)} \varepsilon \sigma dV$$

Où V est le volume de l'arbre.

D'après la loi de Hooke $\sigma = \varepsilon E$ donc on aura :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_{(V)} \varepsilon^2 dV$$

En utilisant l'expression (13) l'énergie de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} U_a &= \frac{E}{2} \int_{(V)} \left[-x' \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - z' \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right]^2 dV \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_{(S)} \left[x'^2 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right)^2 + z'^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 + 2x'z' \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right] ds dy \end{aligned}$$

Le troisième terme de l'intégrale est nul par suite de la symétrie de la section, d'où :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \int_{(S)} \left[x'^2 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right)^2 + z'^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 \right] ds dy \quad (13)$$

Avec :

$$I_{x'} = \iint_{(S)} z'^2 ds$$

Et

$$I_{z'} = \iint_{(S)} x'^2 ds$$

L'énergie de déformation donc s'écrit :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_{z'} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right)^2 + I_{x'} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (14)$$

Pour exprimer l'énergie de déformation dans le repère fixe (O,x,y,z) ; on utilise les relations de passage u' et w' en fonction de u et w, soient :

$$u' = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t$$

$$w' = u \sin\Omega t + w \cos\Omega t$$

On a pour le cas de l'arbre symétrique $I_{x'} = I_{z'} = I$

En remplaçant u' et w' par leurs valeurs :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\left(\cos\Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin\Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\cos\Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin\Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (15)$$

Et finalement, on a :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (16)$$

II.3.3. Les paliers

Généralement, les paliers induisent des forces extérieures sur l'arbre comportant des caractéristiques de raideurs et d'amortissement. Ces caractéristiques sont sur le plan de la section droite selon les directions montrées sur la figure II-5.

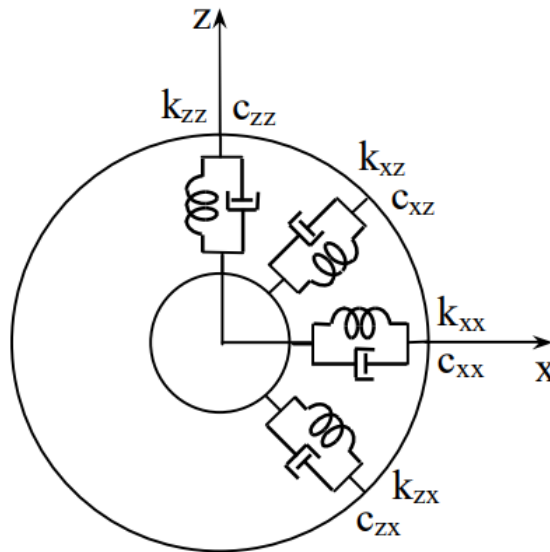


Figure II-5. Amortissement et raideurs de palier. [17]

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement sont supposées comme :

k_{xx} ; k_{zz} ; C_{xx} et C_{zz} : les rigidités et les amortissements selon les directions x et z de l'arbre.

k_{xz} ; k_{zx} ; C_{xz} et C_{zx} : les rigidités et l'amortissement dans une direction ils représentent des constantes d'accouplement.

Le travail virtuel de forces extérieures s'exprime sous la forme :

$$\delta W_p = -K_{xx}u\delta u - K_{xz}w\delta u - K_{zz}w\delta w - K_{zx}u\delta w - C_{xx}\dot{u}\delta u - C_{xz}\dot{w}\delta u - C_{zz}\dot{w}\delta w - C_{zx}\dot{u}\delta w \quad (17)$$

Ou sous une autre forme :

$$\delta W = F_u\delta u + F_w\delta w$$

Où F_u et F_w sont les forces généralisées.

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xz} \\ K_{zx} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (18)$$

II.3.4. Le balourd

Le balourd est constitué par : (Fig. II-6)

- Une masse ponctuelle (m_b) placée dans le plan du disque à une distance d de son centre géométrique de l'arbre O ;
- Le centre du disque est en C ;
- La masse de balourd en D .

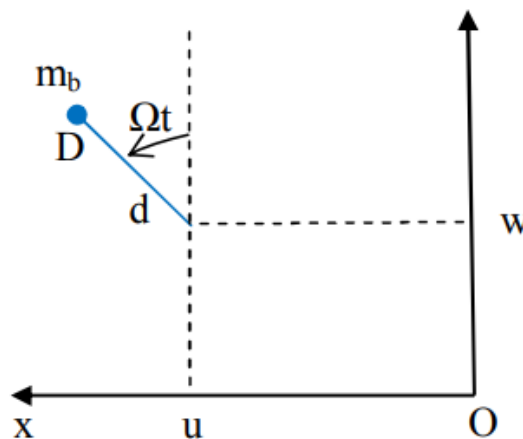


Figure II-6. Le balourd. [17]

Les coordonnées du balourd dans le repère fixe (O,x,y,z) sont données par :

$$\overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} u + d\sin\Omega t \\ cte \\ w + d\cos\Omega t \end{bmatrix}$$

D'où la vitesse :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} + d\Omega\sin\Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega\cos\Omega t \end{bmatrix}$$

Et l'énergie cinétique :

$$T_b = \frac{m_b}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2d\Omega\dot{u}\cos\Omega t - 2d\Omega\dot{w}\sin\Omega t) \quad (19)$$

$\frac{m_b}{2}\Omega^2 d^2$ est un terme constant sans influence sur les équations du mouvement en outre la masse m_b trop faible par rapport à la masse du rotor donc elle peut être est négligée.

L'énergie cinétique est sous la forme :

$$T_b = m_b \Omega d (\dot{u}\cos\Omega t - \dot{w}\sin\Omega t) \quad (20)$$

II.4. Mise en équation

La méthode de Rayleigh Ritz est l'une des méthodes les plus commodes pour calculer quelques-uns des premiers modes d'une structure. Cette méthode est caractérisée par la substitution des déplacements u et w par des fonctions d'approximation respectivement :

$$u(y, t) = f(y) q_1(t) = f(y) q_1 \quad (21)$$

$$w(y, t) = f(y) q_2(t) = f(y) q_2 \quad (22)$$

Où $f(y)$ est la déformée ; et q_1 et q_2 sont des coordonnées généralisées indépendant et ψ et θ sont petits.

$$\Psi = -\frac{du}{dy} = -\frac{df(y)}{dy} q_1(t) = -g(y) q_1 \quad (23)$$

$$\theta = \frac{dw}{dy} = \frac{df(y)}{dy} q_2(t) = g(y)q_2 \tag{24}$$

Les dérivées du second ordre de u et w sont aussi nécessaires pour exprimer l'énergie de déformation elle s'écrit :

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2f(y)}{dy^2} q_1 = h(y)q_1 \tag{25}$$

$$\frac{d^2w}{dy^2} = \frac{d^2f(y)}{dy^2} q_2 = h(y)q_2 \tag{26}$$

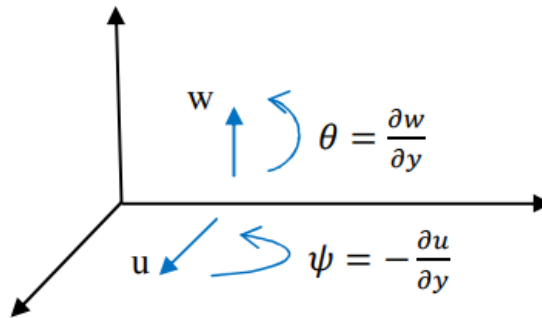


Figure II-7. Les angles θ et Ψ . [17]

II.4.1. Représentation du modèle

Le rotor étudié est composé :

- d'un arbre de longueur L supportant un disque avec un balourd situé à $y = l_1$;
- les paliers sont considérés comme infiniment rigides situés à $y = L$;
- Les possibles asymétries de l'arbre et du disque sont prises en considération.

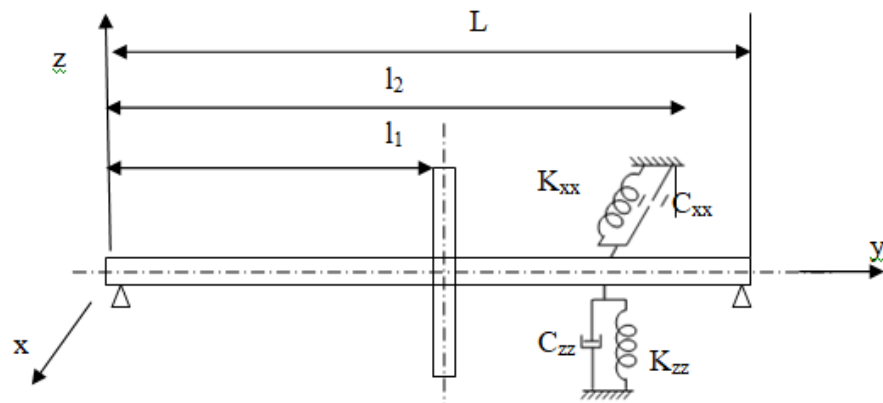


Figure II-8. Modèle simple de rotor.

II.4.2. Exemple d'un modèle simple**II.4.3. Données**

Les caractéristiques du rotor sont :

a. Le disque :

Rayon intérieur $R_{d1} = 0.01$ m

Rayon extérieur $R_{d2} = 0.15$ m

Épaisseur $h = 0.03$ m

$\rho = 7800$ Kg/m³

$l_1 = L/3$

La masse et les moments d'inertie du disque sont :

$m_d = (R_2^2 - R_1^2) \rho h = 16.47$ kg

$I_{dx} = I_{dz} = \frac{m_d}{12} (3R_1^2 + R_2^2 + h^2) = 9.247 \times 10^{-2}$ kg.m²

$I_{dy} = \frac{m_d}{2} (R_1^2 + R_2^2) = 0.1861$ kg.m²

b. L'arbre

Longueur $L = 0.4$ m

Rayon de section droite $R_a = 0.01$ m

$\rho = 7800$ Kg/m³

$E = 2 \times 10^{11}$ Pa

L'aire de la section droite et le moment d'inertie diamétral sont

$S = \pi R_1^2 = 3.14 \times 10^{-4}$ m²

$I = \frac{\pi R_1^4}{4} = 7.854 \times 10^{-9}$ kg.m⁴

c. Le balourd

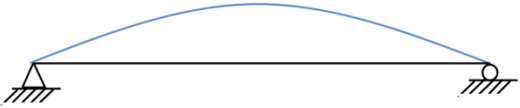
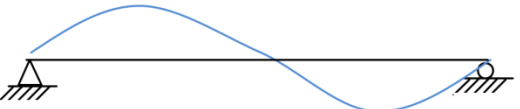

Masse $m_b = 10^{-4}$ Kg

Distance $d = 0.15\text{m}$

d. Les paliers

$$K_{zz} = 5 \times 10^5 \text{N/m}$$

Tableau II-1. Les trois premiers modes de vibration.

Le mode	La fonction	La représentation
1 ^{er} Mode	$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L}$	
2 ^{eme} Mode	$f(y) = \sin \frac{2\pi y}{L}$	
3 ^{eme} Mode	$f(y) = \sin \frac{3\pi y}{L}$	

On utilise la fonction du premier mode, soit :

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} = \sin \frac{\pi y}{0.4} = \sin 7.853y \quad (27)$$

L'énergie cinétique général du système est donnée par :

$$T = T_a + T_b + T_d \quad (28)$$

Où T_a , T_b et T_d sont les énergies cinétiques respectives d'arbre, du balourd et du disque.

L'expression de l'énergie cinétique générale après calcul est :

$$T = 7.147(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2.871\Omega\dot{q}_1q_2 + 1.299 \times 10^{-5}\Omega(\cos\Omega t \dot{q}_1 - \sin\Omega t \dot{q}_2) \quad (29)$$

L'énergie de déformation totale est :

$$U_a = 5.977 \times 10^5(q_1^2 + q_2^2) \quad (30)$$

Le travail virtuel total du à raideur du palier K_{zz} est :

$$\delta w = -3.75 \times 10^5 q_2 \delta q_2 \quad (31)$$

D'où :

$$Fq_1 = 0$$

$$Fq_2 = -3.75 \times 10^5 q_2$$

II.5. Modèle symétrique

On dit modèle symétrique si : $k_{xx} = k_{zz} = 0$ et $C_{xx} = C_{zz} = 0$.

L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq_i} \right) - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = Fq_i \quad (32)$$

$$\begin{cases} 14.29\ddot{q}_1 - 2.871\Omega\dot{q}_2 + 1.195 \times 10^6 q_1 = 1.299 \times 10^{-5}\Omega^2 \sin \Omega t \\ 14.29\ddot{q}_2 - 2.871\Omega\dot{q}_1 + 1.195 \times 10^6 q_2 = 1.299 \times 10^{-5}\Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (33)$$

Qui s'écrit sous la forme générale :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = c\Omega^2 \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = c\Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (34)$$

Et sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = c\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (35)$$

L'écriture matricielle (36) se compose de la première matrice qui représente la matrice de masse, de la deuxième qui représente la matrice de l'effet gyroscopique et la troisième qui représente la matrice de raideur.

II.5.1. Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

On considère le système homogène sans le deuxième membre (mouvement libre) :

$$\begin{cases} m\dot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = 0 \\ m\dot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Les solutions sont sous la forme :

$$\begin{cases} q_{1h} = \bar{A}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ q_{2h} = \bar{A}_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad (37)$$

Et sous la forme complexe :

$$\begin{cases} q_{1h} = A_1 \exp(j\omega t) \\ q_{2h} = A_2 \exp(j\omega t) \end{cases} \quad (38)$$

Avec $A_1 = \bar{A}_1 \exp(j\varphi_1)$ et $A_2 = \bar{A}_2 \exp(j\varphi_1)$

$$\begin{cases} m\ddot{q}_{1h} - a\Omega\dot{q}_{2h} + kq_{1h} = 0 \\ m\ddot{q}_{2h} + a\Omega\dot{q}_{1h} + kq_{2h} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

Et sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

La dernière équation est un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \bar{A}_1 et \bar{A}_2 avec un paramètre Ω .

On peut utiliser la méthode du déterminant, alors :

- Si $\det \neq 0$ on a $A_1 = A_2 = 0$ alors $q_{1h} = q_{2h} = 0 \Rightarrow$ C'est une solution sans intérêt ;
- Si $\det = 0$, on a $A_1 = \frac{0}{0}$ et $A_2 = \frac{0}{0} \Rightarrow$ Possibilité de solutions non nulles.

$$\det = \begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -ja\Omega r \\ ja\Omega r & k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (41)$$

Ce qui donne :

$$m^2\omega^4 - (2km + a^2\Omega^2)\omega^2 + k^2 = 0 \quad (42)$$

On remarque qu'il y a deux cas :

- Si $\Omega = 0$ (à l'arrêt) : la solution est : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Si $\Omega \neq 0$ (en rotation) : l'équation bicarrée, alors on a deux solutions réelles positives sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_0^2}{a^2\Omega^2}} \right)} \quad (43)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_0^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (44)$$

On remarque que :

$$\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$$

À remarquer dans l'équation (41) que :

$$k - m\omega^2 = a\Omega\omega \quad (45)$$

Aux deux valeurs ω_1 et ω_2 correspondent donc deux modes :

- Le mode (1) : $\omega = \omega_1$, on a :

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{ja\Omega\omega_1}{k - m\omega_1^2} = \frac{ja\Omega\omega_1}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)} = j \quad (46)$$

Avec :

$$\omega_1 < \omega_0$$

Donc :

$$\omega_0^2 - \omega_1^2 > 0 \quad (47)$$

On a :

$$\overline{A_{11}} = \overline{A_{21}} \text{ et } \varphi_{21} = \varphi_{11} - \frac{\pi}{2} \quad (48)$$

Donc :

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{\overline{A_{11}} \exp(j\varphi_{11})}{\overline{A_{21}} \exp(j\varphi_{21})} = j = \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) \quad (49)$$

$$\frac{\overline{A_{11}}}{\overline{A_{21}}} \exp j(\varphi_{11} - \varphi_{21}) = \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) \quad (50)$$

On peut écrire :

$$q_{1h1} = \overline{A_{11}} \cos(\omega_1 t + \varphi_{11}) \quad (51)$$

$$q_{2h1} = \overline{A_{11}} \cos(\omega_1 t + \varphi_{21}) = \overline{A_{11}} \cos\left(\omega_1 t + \varphi_{11} - \frac{\pi}{2}\right) = \overline{A_{11}} \sin(\omega_1 t + \varphi_{11}) \quad (52)$$

Les déplacements $u(t, y)$ et $w(t, y)$ s'écrivent :

$$u(t, y) = q_{1h1} f(y) = \overline{A_{11}} \cos(\omega_1 t + \varphi_{11}) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (53)$$

$$w(t, y) = q_{2h1} f(y) = \overline{A_{11}} \sin(\omega_1 t + \varphi_{11}) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (54)$$

- Le mode (2) : $\omega = \omega_2$, on a :

$$\frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{ja\Omega\omega_2}{k - m\omega_2^2} = \frac{ja\Omega\omega_2}{m(\omega_0^2 - \omega_2^2)} = -j \quad (55)$$

Avec :

$$\omega_2 > \omega_0$$

$$\omega_0^2 - \omega_2^2 < 0$$

On a :

$$\overline{A}_{12} = \overline{A}_{22} \text{ et } \varphi_{22} = \varphi_{12} + \frac{\pi}{2} \quad (56)$$

On peut écrire :

$$q_{1h2} = \overline{A}_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_{12}) \quad (57)$$

$$q_{2h1} = \overline{A}_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_{22}) = \overline{A}_{12} \cos\left(\omega_2 t + \varphi_{12} - \frac{\pi}{2}\right) = \overline{A}_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_{12}) \quad (58)$$

Les déplacements $u(t, y)$ et $w(t, y)$ s'écrivent :

$$u(t, y) = q_{1h2} f(y) = \overline{A}_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_{12}) \sin \frac{\pi y}{L} \quad (59)$$

$$w(t, y) = q_{2h2} f(y) = -\overline{A}_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_{12}) \sin \frac{\pi y}{L} \quad (60)$$

II.5.2. Diagramme de Campbell

L'équation caractéristique (43) s'écrit :

$$\omega^4 - (1.672 \times 10^5 + 4.034 \times 10^{-2} \Omega^2) \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8.292 \times 10^6}{\Omega^2}}\right) \quad (61)$$

$$\omega^4 - (1.672 \times 10^5 + 4.034 \times 10^{-2} \Omega^2) \omega^2 + 6.993 \times 10^9 = 0 \quad (62)$$

Les fréquences (pulsations) à l'arrêt sont :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = 289,1 \text{ rd / s}$$

Les fréquences (pulsations) en rotation sont :

$$\omega_1 = \sqrt{8.362 \times 10^4 + 2.017 \times 10^{-2} \Omega^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8.292 \times 10^6}{\Omega^2}}\right)} \quad (63)$$

$$\omega_2 = \sqrt{8.362 \times 10^4 + 2.017 \times 10^{-2} \Omega^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8.292 \times 10^6}{\Omega^2}}\right)} \quad (64)$$

La représentation de diagramme de Campbell est par :

- les fonctions $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$ et $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$;
- deux droites $\omega = \Omega$ (cas synchrone) et $\omega = s\omega$ (cas asynchrone avec $s = 0,5$).

L'intersection de les fonctions et les deux droites donne les points A et B pour le cas synchrone et les points C et D pour le cas asynchrone.

$$s^2(s^2m^2 - a^2)\Omega^4 - 2kms^2\Omega^2 + k^2 = 0 \quad (65)$$

Alors les solutions sont :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (66)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (67)$$

Avec $\omega = s \Omega$:

$$\omega_1 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (68)$$

$$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (69)$$

Les vitesses de rotations critiques :

- Pour le point A ($s = 1$) : $\Omega_{c1} = 263.88$ rd / s ;
- Pour le point B ($s = 1$) : $\Omega_{c2} = 323.49$ rd / s ;
- Pour le point C ($s = 0.5$) : $\Omega_{c3} = 488.48$ rd / s ;
- Pour le point D ($s = 0.5$) : $\Omega_{c4} = 747.79$ rd / s.

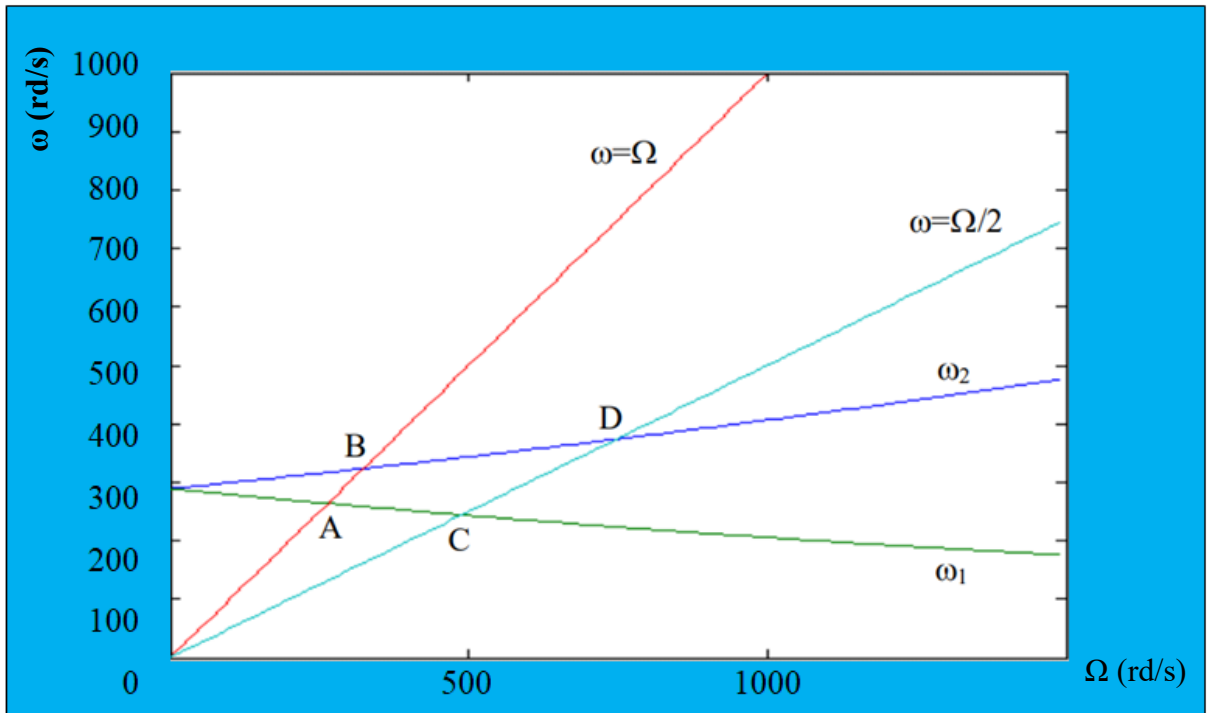


Figure II-9. Diagramme de Campbell. [12]

II.5.3. Réponse aux forces d'excitation

Réponse à une force synchrone (au balourd)

On considère le système avec le deuxième membre pour l'étude de la solution particulière.

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = c\Omega^2 \sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = c\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \quad (70)$$

La solution particulière sous forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = \overline{A_{e1}} \cos(\Omega t + \varphi_{e1}) \\ q_{2p} = \overline{A_{e2}} \cos(\Omega t + \varphi_{e2}) \end{cases} \quad (71)$$

Ou sous la forme complexe :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \exp(j\Omega t) \\ q_{2p} = A_{e2} \exp(j\Omega t) \end{cases} \quad (72)$$

$$\text{Avec } A_{e1} = \overline{A_{e1}} \exp(j\varphi_1) \text{ et } A_{e2} = \overline{A_{e2}} \exp(j\varphi_2) \quad (73)$$

Que l'on reporte dans le système :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_{1p} - a\Omega\dot{q}_{2p} + kq_{1p} = c\Omega^2 \exp(\Omega t - \frac{\pi}{2}) \\ m\ddot{q}_{2p} + a\Omega\dot{q}_{1p} + kq_{2p} = c\Omega^2 \end{cases} \quad (74)$$

$$\begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{e1} \\ A_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\Omega^2 \exp(\Omega t - \frac{\pi}{2}) \\ c\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (75)$$

On utilise la méthode de déterminant qui donne :

$$A_{e1} = \frac{\begin{vmatrix} c\Omega^2 \exp(-j\pi/2) & -ja\Omega^2 \\ c\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}}$$

$$A_{e1} = \frac{-jc\Omega^2}{k + (a-m)\Omega^2} \quad (76)$$

Et :

$$A_{e2} = \frac{\begin{vmatrix} k - m\Omega^2 & c\Omega^2 \exp(-j\pi/2) \\ ja\Omega^2 & c\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}}$$

$$A_{e2} = \frac{c\Omega^2}{k + (a-m)\Omega^2} \quad (77)$$

Dans le système homogène, on a :

$$\varphi_{e1} = -\frac{\pi}{2}; \varphi_{e2} = 0 \text{ et } A_{e1} = A_{e2} = \frac{c\Omega^2}{k + (a-m)\Omega^2} \quad (78)$$

D'où :

$$q_{1p} = A_{e1} \sin(\Omega t) \text{ et } q_{2p} = A_{e2} \cos(\Omega t) \quad (79)$$

L'annulation du dénominateur de (78) donne :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{m-a}} \quad (80)$$

Il y a une seule valeur critique qui correspond à Ω_{c2} pour $s = 1$ (au point B).

La réponse au balourd est :

$$A_{e1} = A_{e2} = \frac{1.299 \times 10^{-5} \Omega^2}{1.195 \times 10^6 - 11.42 \Omega^2} (\text{m}) \quad (81)$$

$$\text{Avec: } \Omega_c = 373.89 \text{ rd/s} \quad (82)$$

Remarque :

Quand Ω croit la valeur limite du déplacement est :

$$|A_{e1}| = |A_{e2}| = \left| \frac{c}{a-m} \right| = \frac{1.299 \times 10^{-5}}{11.42} = 1.37 \times 10^{-6} (\text{m}) \quad (83)$$

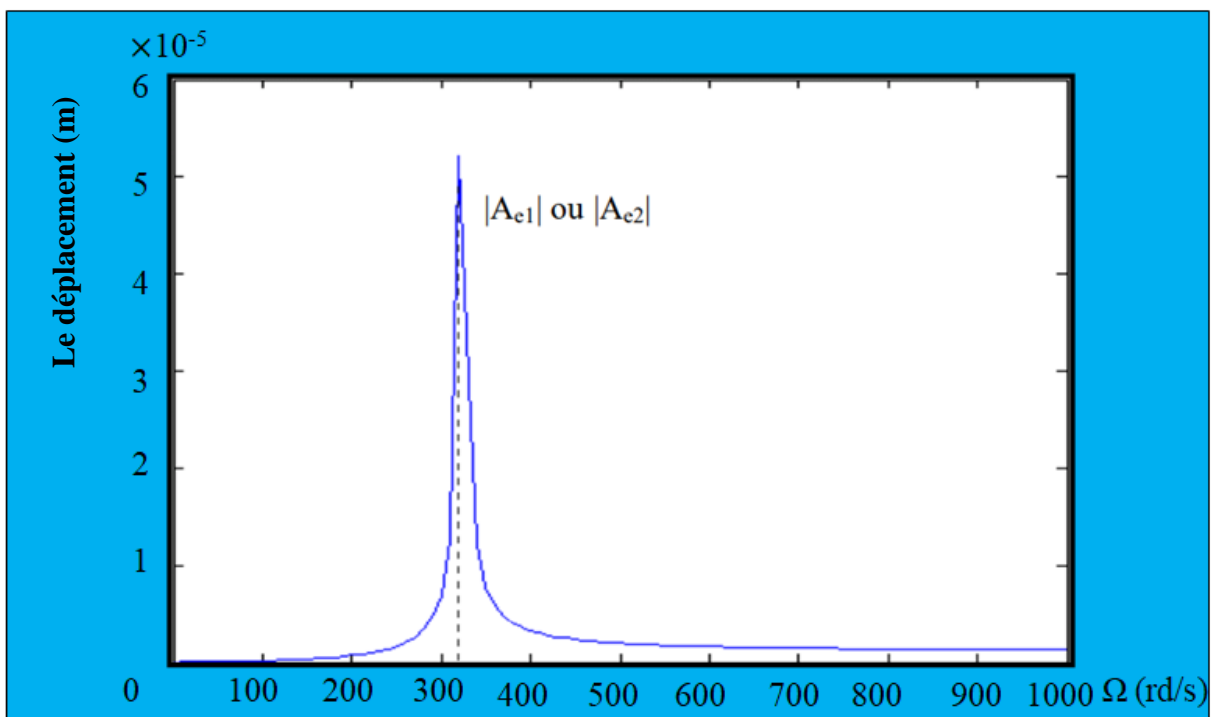


Figure II-10. Réponse du balourd. [12]

II.6. Conclusion

Dans ce travail, on a étudié le comportement vibratoire du rotor flexible. On calcule les équations des énergies cinétiques de l'arbre, disque et balourd et l'énergie potentielle de l'arbre. On trouve les équations de mouvement et les fréquences naturelles puis on trace le diagramme de campbell et de réponse de balourd.

Chapitre III

*Application à un arbre de transmission de la
boite de vitesses d'un tour*

III.1. Introduction

Dans ce chapitre et à partir d'un tour on choisit pour l'étude un rotor composé d'un arbre de transmission sur lequel sont montées des roues dentées, et on mesure les pièces de cet arbre sur la machine de mesure tridimensionnelle puis on applique du modèle du whirling à ce rotor après la modélisation des pièces avec le logiciel Solidworks.

III.2. Présentation du rotor à étudier

III.2.1. La machine choisie

La machine considérée comme support du rotor à étudier est un tour parallèle (Fig. III-1). Le tour considéré se compose principalement, comme il nous est connu, d'une boîte de vitesses de la broche liée à une autre boîte de vitesses des avances, des chariots, d'une contre poupée assemblés à un bâti. La partie nous intéressant est bien la boîte de vitesses de la broche.



Figure III-1. Tour parallèle choisi pour l'étude. [19]

III.2.2. La boîte de vitesses

Une boîte de vitesse est un élément important de tour qui transmet la vitesse entre un arbre moteur et un arbre de sortie, elle est constituée des arbres de transmission.

Le rotor considéré pour l'étude est constitué d'un arbre cannelé et de deux baladeurs. Ceux-ci permettent la transmission et de changement de vitesses du mouvement. (Fig. III-2 et Fig. III-3)

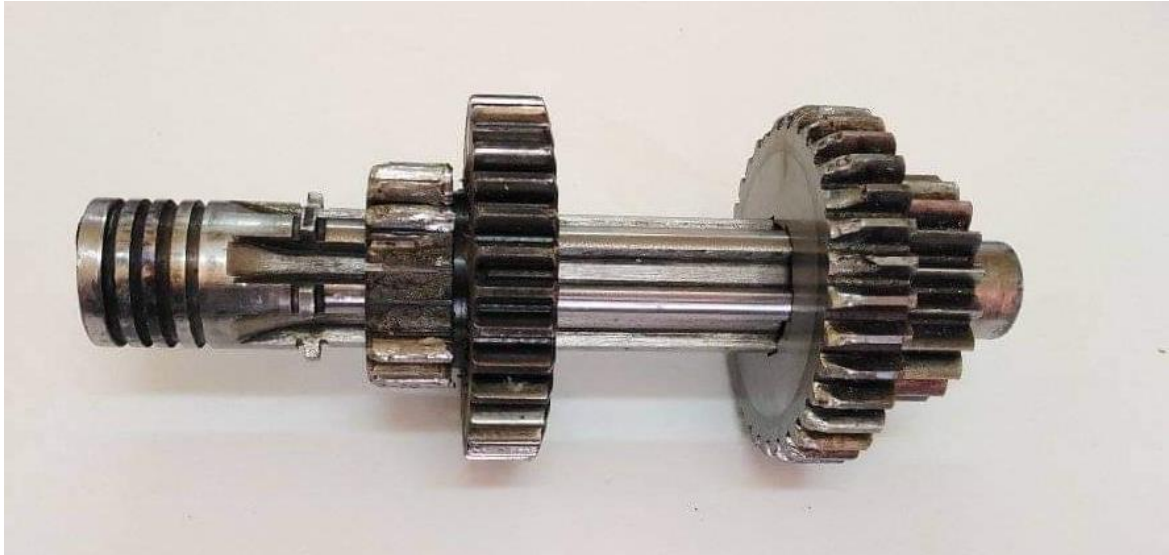


Figure III-2. Vue d'ensemble du rotor à étudier.



Figure III-3. Boîte de vitesse.

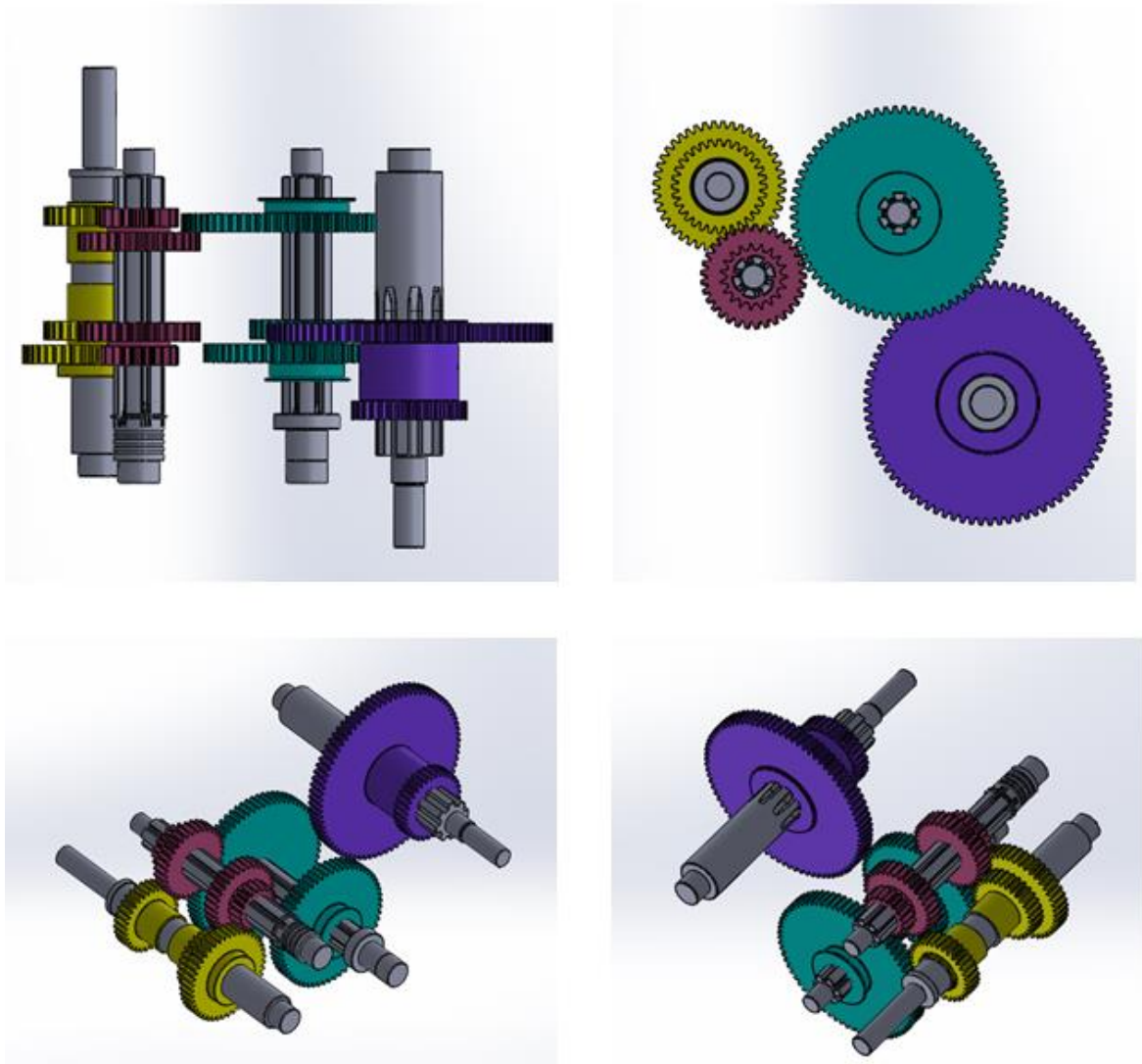


Figure III-4. Modélisation 3D de La boîte de vitesse avec Solidworks.

III.3. Mesure des grandeurs géométriques du rotor

III.3.1. Définition

Les machines à mesurer tridimensionnelles (MMT) sont apparues au début de 1960 et sont utilisées en métrologie dimensionnelle. Elles permettent d'accéder à la géométrie des pièces complexes avec une grande précision et une grande rapidité.

III.3.2. Principe

La machine à mesurer se compose généralement de trois axes de mesure. Le palpeur (une tige passant un conducteur une fois qu'elle entre en contact avec la pièce) est fixé à l'extrémité du dernier axe. Ce palpeur se déplace grâce à trois glissières (pas de jeu, pas de frottements). La position du palpeur est paramétrée par les trois coordonnées x,y,z du point de contact entre le palpeur et la surface à mesurer.

Les coordonnées du palpeur en contact avec la surface de la pièce à mesurer sont enregistrées à l'aide de règles de mesure de haute précision.



Figure III-5. Machine de mesure tridimensionnelle.

III.4. Modélisation 3D avec Solidworks

Après l'obtention des côtes et de la géométrie de l'ensemble des pièces composant le rotor et à l'aide de Solidworks on réalise la modélisation 3D de chaque composant du rotor, cela permet de déterminer les propriétés d'inertie de l'ensemble à étudier

III.4.1. L'arbre

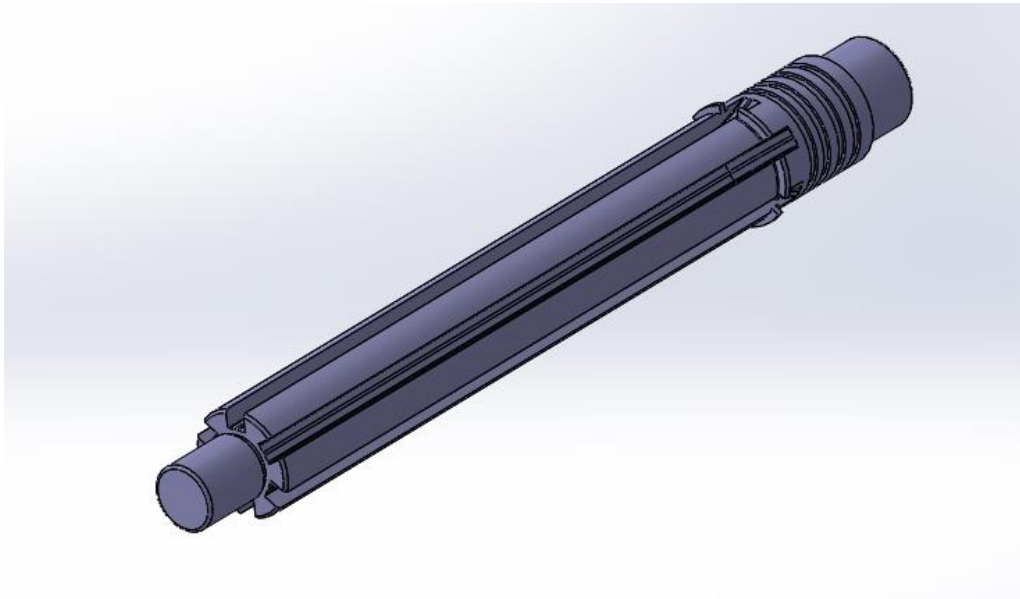


Figure III-6. Modélisation 3D de l'arbre avec Solidworks.

III.4.2. Le baladeur

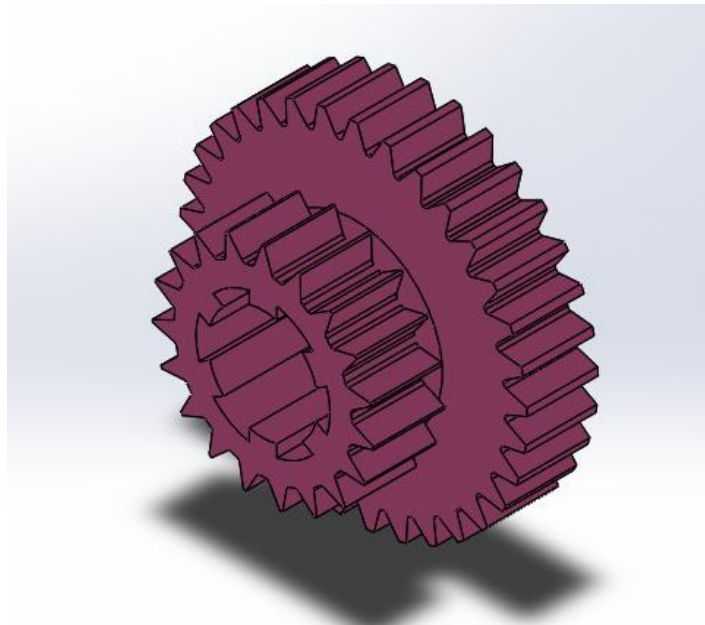


Figure III-7. Modélisation du baladeur avec Solidworks.

III.5. L'assemblage du rotor

Les composants sont assemblés dans Solidworks (Fig III.8)

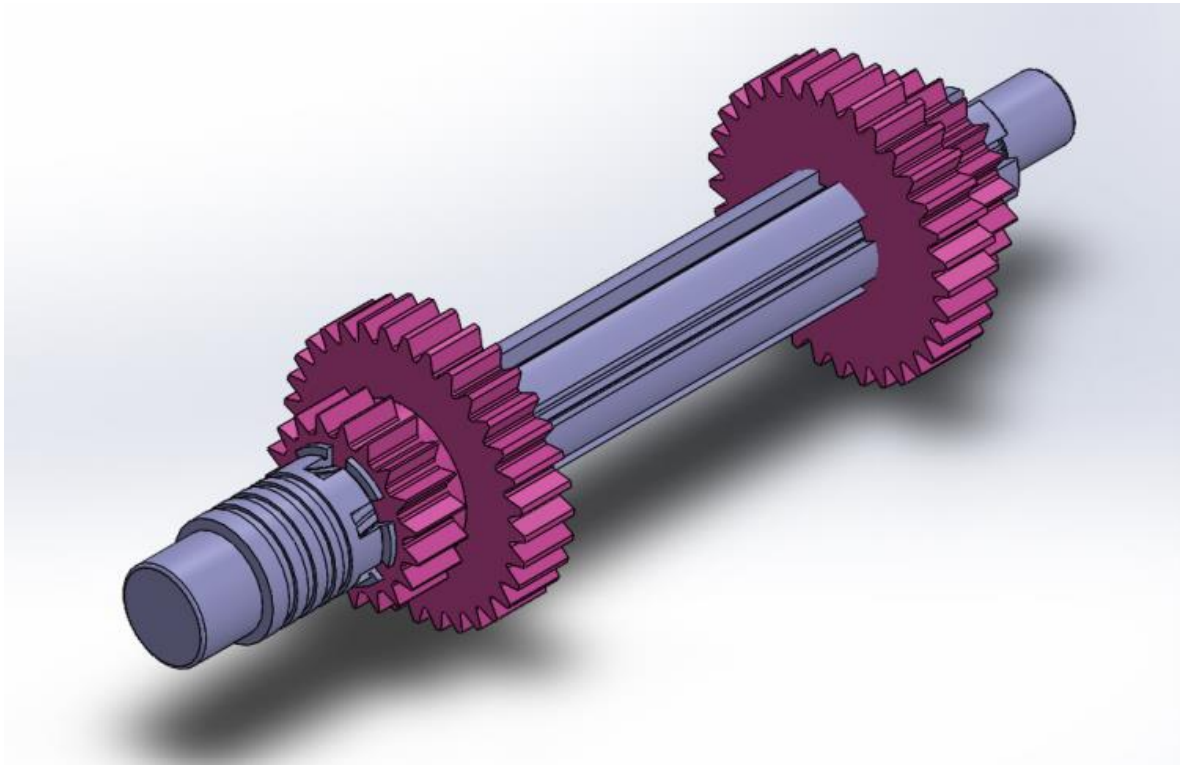


Figure III-8. La modélisation de rotor sur le Solidworks.

III.6. Dessins de définition et d'assemblage du rotor

Outre la modélisation 3D on extrait les dessins de définition de chaque composant du rotor.

III.6.1. Dessin de définition de l'arbre

Le dessin de définition de l'arbre de transmission est illustré par la figure (Fig. III.9)

III.6.2. Le dessin de définition du baladeur

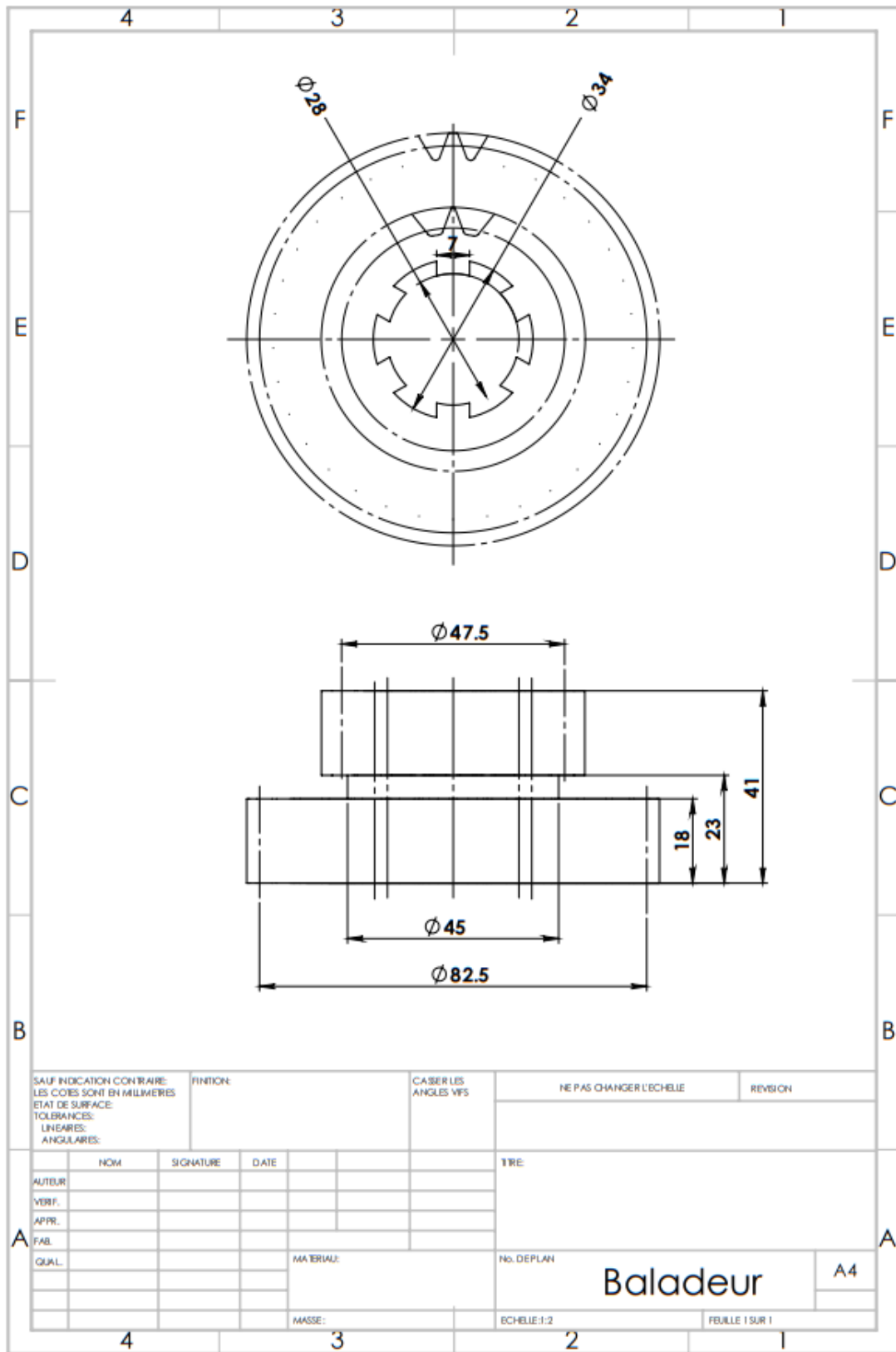


Figure III-10. Le dessin de définition du baladeur.

III.7. Détermination des caractéristiques inertielles du rotor

La modélisation 3D réalisée précédemment à l'aide de Solidworks permet de déterminer les caractéristiques inertielles (Centre d'inertie, masse et moments d'inertie) (Fig.III.12).

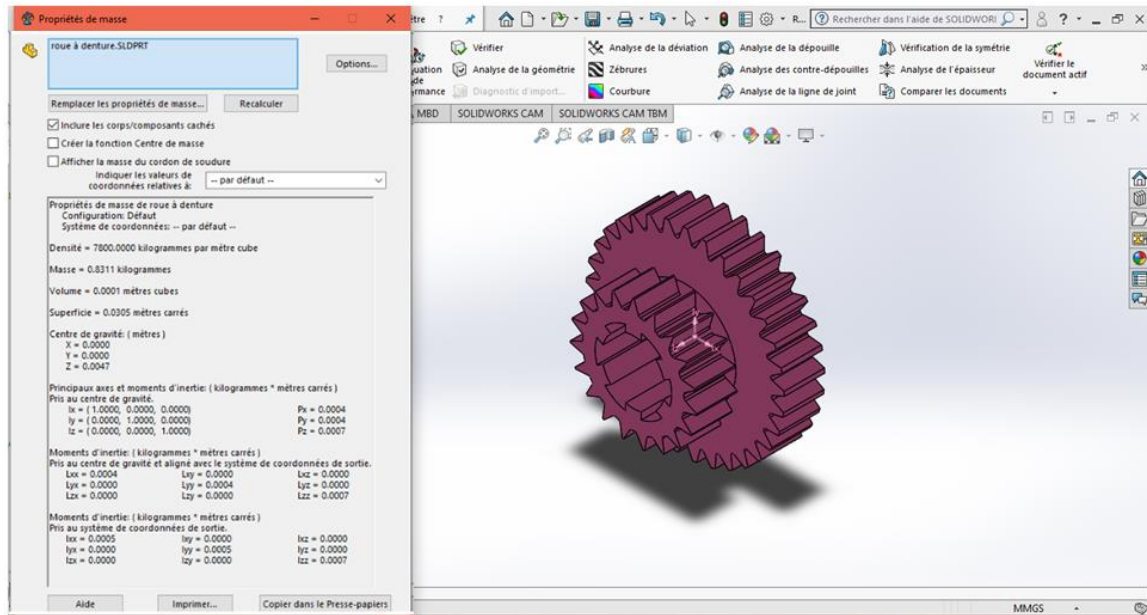


Figure III-12. Les propriétés de masse du baladeur.

Tableau III-1. Les propriétés de masse du baladeur.

Propriétés de la masse du baladeur			
Densité :	Masse :	Volume :	Superficie :
7800 kg/m ³	0,83 kg	0,0001 m ²	0,0305 m ²
Centre de gravité :	Principaux axes et moments d'inertie		
x = 0,000	Pris au centre de gravité :		
y = 0,000	I _x = (1.000, 0.000, 0.0000)	P _x = 0.0004	
z = 0,0047	I _y = (0.000, 1.000, 0.000)	P _y = 0.0004	
	I _z = (0.000, 0.000, 1.000)	P _z = 0.0007	
	Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie :		
	I _{xx} = 0.0004	I _{xy} = 0.0000	I _{xz} = 0.0000
	I _{yx} = 0.0000	I _{yy} = 0.0004	I _{yz} = 0.0000
	I _{zx} = 0.0000	I _{zy} = 0.0000	I _{zz} = 0.0007
	Pris au système de coordonnées de sortie :		
	I _{xx} = 0.0005	I _{xy} = 0.0000	I _{xz} = 0.0000
	I _{yx} = 0.0000	I _{yy} = 0.0005	I _{yz} = 0.0000
	I _{zx} = 0.0000	I _{zy} = 0.0000	I _{zz} = 0.0007

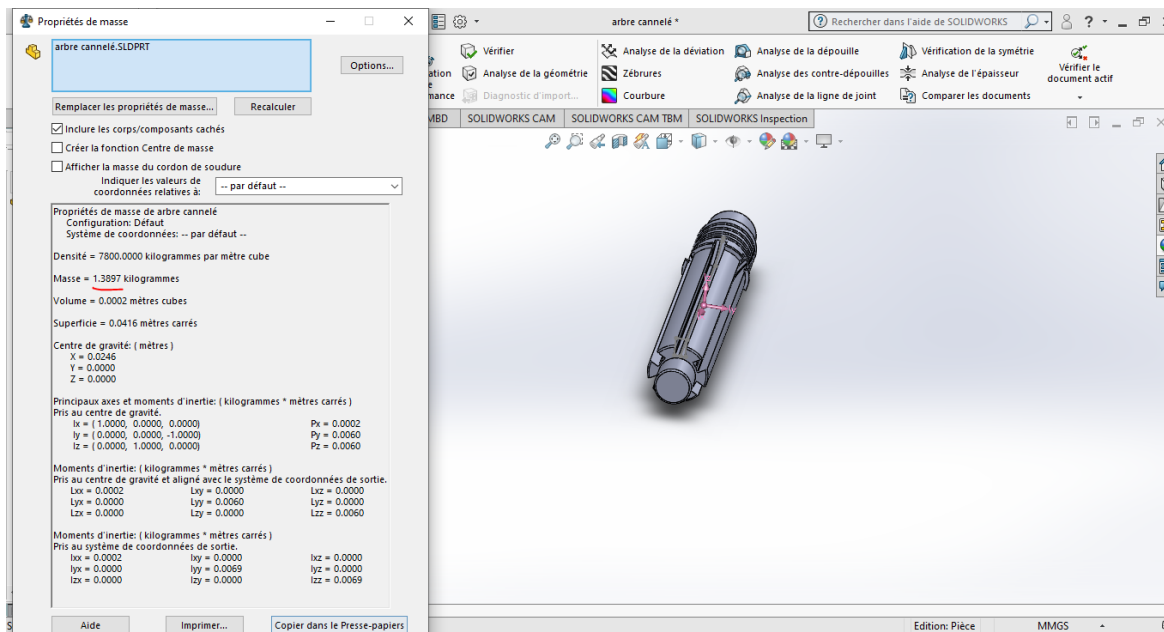


Figure III-13. Les propriétés de masse de l'arbre.

Tableau III-2. Les propriétés de masse de l'arbre.

Propriétés de la masse du baladeur			
Densité :	Masse :	Volume :	Superficie :
7800 kg/m ³	1.3897 kg	0,0002 m ²	0,0416 m ²
Centre de gravité :	Principaux axes et moments d'inertie :		
x = 0,0246	Pris au centre de gravité :		
y = 0,0000	$I_x = (1.000, 0.000, 0.0000)$	$P_x = 0.0002$	
z = 0,0000	$I_y = (0.000, 0.000, -1.000)$	$P_y = 0.0060$	
	$I_z = (0.000, 1.000, 0.000)$	$P_z = 0.0060$	
	Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie :		
	$I_{xx} = 0.0002$	$I_{xy} = 0.0000$	$I_{xz} = 0.0000$
	$I_{yx} = 0.0000$	$I_{yy} = 0.0060$	$I_{yz} = 0.0000$
	$I_{zx} = 0.0000$	$I_{zy} = 0.0000$	$I_{zz} = 0.0060$
	Pris au système de coordonnées de sortie :		
	$I_{xx} = 0.0002$	$I_{xy} = 0.0000$	$I_{xz} = 0.0000$
	$I_{yx} = 0.0000$	$I_{yy} = 0.0069$	$I_{yz} = 0.0000$
	$I_{zx} = 0.0000$	$I_{zy} = 0.0000$	$I_{zz} = 0.0096$

III.8. Application du modèle du whirling au rotor choisi

III.8.1. Modèle adopté du rotor

Le rotor choisi pour l'étude peut être modélisé par un arbre et deux disques, les paliers sont des roulements qui sont considérés rigides.

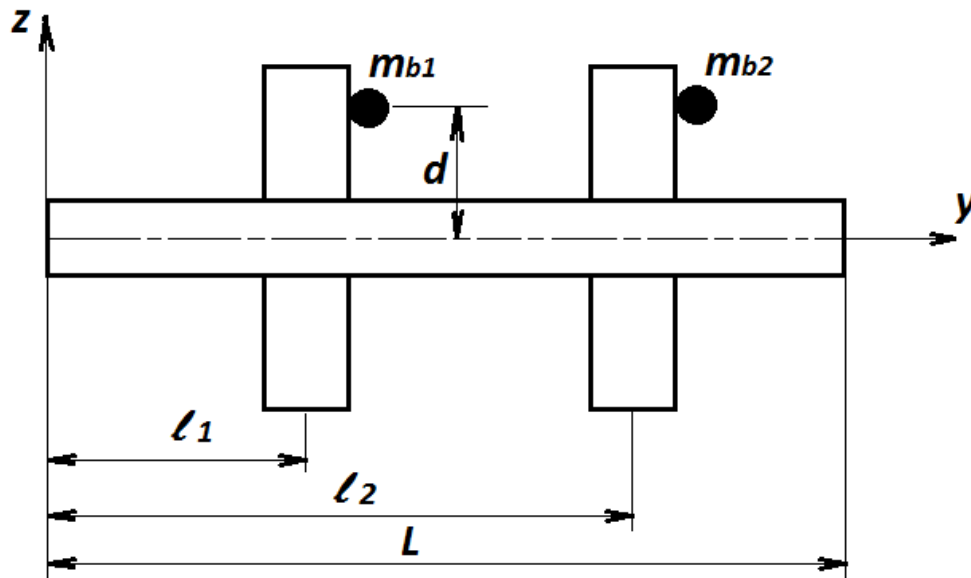


Figure III-14. Modèle du rotor à étudier.

III.8.2. Données de départ de calcul du rotor

Les caractéristiques du rotor sont données comme suit :

a. Le disque

Rayon intérieur $Rd_1 = 0.017\text{m}$

Rayon extérieur $Rd_2 = 0.041\text{m}$

Épaisseur $h = 0.018\text{ m}$

Masse volumique : $\rho = 7800\text{ Kg/m}^3$

$l_1 = 0.086\text{ m}$

$l_2 = 0.24\text{ m}$

La masse et les moments d'inertie du disque sont :

$$m_d = 0.831 \text{ kg}$$

$$I_{dx} = I_{dz} = 4.10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{dy} = 7.10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

b. L'arbre

Longueur $L = 0.32 \text{ m}$

Rayon de section droite : $R_a = 0.017 \text{ m}$

Masse volumique : $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$

Module de Young : $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$

L'aire de la section droite et le moment d'inertie diamétral sont

On considère que la section est circulaire :

$$S = \pi R_1^2 = 6.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\text{Moment d'inertie: } I = \frac{\pi R_1^4}{4} = 6.504 \times 10^{-8} \text{ Kg.m}^4$$

c. Le balourd

Masses des balourds : $m_{b1} = m_{b2} = 10^{-4} \text{ Kg}$

Excentricité : $d_1 = d_2 = 0.041 \text{ m}$ [17], [18]

III.8.3. Mise en équations

Par la méthode de séparation des variables on écrit les degrés de liberté:

$$u(y, t) = f(y) q_1(t) = f(y) q_1 \tag{84}$$

$$w(y, t) = f(y) q_2(t) = f(y) q_2 \quad (85)$$

Alors

$$\dot{u} = \dot{q}_1 f(y) \quad (86)$$

$$\dot{w} = \dot{q}_2 f(y)$$

Et:

$$\psi = -\frac{du}{dy} = -\frac{df(y)}{dy} q_1 \quad (87)$$

$$\theta = \frac{dw}{dy} = \frac{df(y)}{dy} q_2$$

Alors:

$$\dot{\psi} = -\frac{df(y)}{dy} \dot{q}_1 \quad (88)$$

$$\dot{\theta} = \frac{df(y)}{dy} \dot{q}_2$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2f(y)}{dy^2} q_1 \quad (89)$$

$$\frac{d^2w}{dy^2} = \frac{d^2f(y)}{dy^2} q_2$$

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} = \sin \frac{\pi y}{0.32} = \sin 9.81y \quad (90)$$

III.8.3.1. L'énergie cinétique totale

L'énergie cinétique est une grandeur extensive i.e. les énergies cinétiques des composants du système à étudier s'ajoutent:

$$T_{tot} = T_a + T_d + T_b \quad (91)$$

T_a : Energie cinétique de l'arbre

T_d : Energie cinétique des deux disques

T_b : Energie cinétique du balourd total

$$T_{tot} = \frac{\rho s}{2} \int_0^L (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) dy + \frac{\rho I_s}{2} \int_0^L (\dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I_s L \Omega^2 + 2\rho I_s \int_0^L \Psi \theta dy + \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \Psi \theta) + m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (92)$$

$\rho I_s L \Omega^2$ et $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$: Sont des termes constants et ne seront pas pris en compte.

III.8.3.2. L'énergie cinétique de l'arbre

$$T_a = \frac{\rho s}{2} \int_0^L (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) dy + \frac{\rho I_s}{2} \int_0^L (\dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + 2\rho I_s \int_0^L \Psi \theta dy \quad (93)$$

$$T_a = \frac{\rho s}{2} \int_0^L \left[\dot{q}_1^2 \left(\sin \frac{\pi y}{L} \right)^2 + \dot{q}_2^2 \left(\sin \frac{\pi y}{L} \right)^2 \right] dy + \frac{\rho I_s}{2} \int_0^L \left[\dot{q}_1^2 \left(\frac{d}{dy} \left(\sin \frac{\pi y}{L} \right) \right)^2 + \dot{q}_2^2 \left(\frac{d}{dy} \left(\sin \frac{\pi y}{L} \right) \right)^2 \right] dy + 2\rho I_s \int_0^L \left[-\dot{q}_1 \left(\frac{d}{dy} \left(\sin \frac{\pi y}{L} \right) \right) \dot{q}_2 \left(\frac{d}{dy} \left(\sin \frac{\pi y}{L} \right) \right) \right] dy \quad (94)$$

$$T_a = \frac{\rho s}{2} \int_0^L \left[(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) (\sin 9,81y)^2 \right] dy + \frac{\rho I_s}{2} \int_0^L \left[(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot 96,2 \cdot (\cos 9,81y)^2 \right] dy + 2\rho I_s \int_0^L \left[-\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cdot 96,2 \cdot (\cos 9,81y)^2 \right] dy \quad (95)$$

$$T_a = \left(\frac{\rho s}{2} \int_0^L (\sin 9,81y)^2 dy + \frac{\rho I_s}{2} \cdot 96,2 \int_0^L (\cos 9,81y)^2 dy \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (\dot{q}_1 \dot{q}_2) 2\rho I_s \cdot 96,2 \int_0^L (\cos 9,81y)^2 dy \quad (96)$$

$$\int_0^{0,32} (\sin 9,81y)^2 dy = 0,16 \quad (97)$$

$$\int_0^{0,32} (\cos 9,81y)^2 dy = 0,159 \approx 0,16 \quad (98)$$

Donc :

$$T_a = \left(\frac{1}{2} 7800.6,5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,16 + \frac{1}{2} 7800.6,504 \cdot 10^{-8} \cdot 96,2 \cdot 0,16 \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (q_1 q_2) \Omega \cdot 2.7800.6,504 \cdot 10^{-8} \cdot 96,2 \cdot 0,16 \quad (99)$$

$$T_a = 0,4(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 0,15\Omega(q_1 q_2) \quad (100)$$

III.8.3.3. L'énergie cinétique de disque

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) + I_{dy} (\Omega \dot{\Psi} \theta) \quad (101)$$

Pour le disque (1) $\rightarrow l_1 = 0,086 \text{ m}$

$$\begin{aligned} T_{d1} &= \frac{1}{2} m_d (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) (\sin 9.81 l_1)^2 + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) 96,2 (\cos 9.81 l_1)^2 \\ &\quad - I_{dy} \Omega (q_1 q_2) 96,2 (\cos 9.81 l_1)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 0,83 \cdot 2,16 \cdot 10^{-4} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 96,2 \cdot 0,99 \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\ &\quad - (7 \cdot 10^{-4} \cdot 96,2 \cdot 0,99 \Omega) (q_1 q_2) \\ T_{d1} &= (0,019) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (0,066 \Omega) (q_1 q_2) \end{aligned} \quad (102)$$

Pour le disque (2) $\rightarrow l_2 = 0,24 \text{ m}$

$$\begin{aligned} T_{d2} &= \frac{1}{2} m_d (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) (\sin 9.81 l_2)^2 + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) 96,2 (\cos 9.81 l_2)^2 \\ &\quad - I_{dy} \Omega (q_1 q_2) 96,2 (\cos 9.81 l_2)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 0,83 \cdot 0,0016 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 96,2 \cdot 0,99 \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (7 \cdot 10^{-4} \cdot 96,2 \cdot 0,99 \Omega) (q_1 q_2) \\ T_{d2} &= (0,019) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (0,066 \Omega) (q_1 q_2) \end{aligned} \quad (103)$$

$$T_d = T_{d1} + T_{d2} = 2T_{d1} = 2T_{d2} = 0,038(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 0,132\Omega(q_1 q_2) \quad (104)$$

III.8.3.4. L'énergie cinétique du balourd

$$T_b = T_{b1} + T_{b2} \quad (105)$$

Pour le balourd à gauche ($y = l_1$) :

$$\begin{aligned}
 T_{b1} &= m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \\
 &= m_b \Omega d (\dot{q}_1 \sin(9,81l_1) \cos(\Omega t) - \dot{q}_2 \sin(9,81l_1) \sin(\Omega t)) \\
 &= 10^{-4} \cdot 0,41 \cdot \Omega (\dot{q}_1 0,014 \cos(\Omega t) - \dot{q}_2 0,014 \sin(\Omega t)) \\
 T_{b1} &= 5,74 \cdot 10^{-8} \Omega (\dot{q}_1 \cos(\Omega t) - \dot{q}_2 \sin(\Omega t)) \tag{106}
 \end{aligned}$$

Pour le balourd à droite ($y = l_2$) :

$$\begin{aligned}
 T_{b2} &= m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \\
 &= m_b \Omega d (\dot{q}_1 \sin(9,81l_2) \cos(\Omega t) - \dot{q}_2 \sin(9,81l_2) \sin(\Omega t)) \\
 &= 10^{-4} \cdot 0,41 \cdot \Omega (\dot{q}_1 0,04 \cos(\Omega t) - \dot{q}_2 0,04 \sin(\Omega t)) \\
 T_{b2} &= 1,64 \cdot 10^{-7} \Omega (\dot{q}_1 \cos(\Omega t) - \dot{q}_2 \sin(\Omega t)) \tag{107}
 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique des deux balourds est finalement:

$$T_b = 2,21 \cdot 10^{-7} \Omega (\dot{q}_1 \cos(\Omega t) - \dot{q}_2 \sin(\Omega t)) \tag{108}$$

L'énergie cinétique totale du rotor s'écrit :

$$T = 0,52(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 0,28\Omega(q_1 q_2) + 2,21 \cdot 10^{-7} \Omega (\dot{q}_1 \cos(\Omega t) - \dot{q}_2 \sin(\Omega t)) \tag{109}$$

III.8.3.5. L'énergie de déformation

$$\begin{aligned}
 U_a &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \tag{110} \\
 &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(q_1 \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \right)^2 + \left(q_2 \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \\
 &= \frac{EI}{2} (q_1^2 + q_2^2) \int_0^L \left(\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \right)^2 dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{EI}{2} (q_1^2 + q_2^2) \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \sin 9,81y}{\partial y^2} \right)^2 dy \\
&= \frac{EI}{2} (q_1^2 + q_2^2) \int_0^L (96,2)^2 (\sin 9,81y)^2 dy \\
&= 2 \cdot 10^{11} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 10^{-8} \cdot 9254,4 \cdot 0,16 (q_1^2 + q_2^2) \\
U_a &= 9,62 \cdot 10^6 (q_1^2 + q_2^2) \tag{111}
\end{aligned}$$

Les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq_i} \right) - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU_a}{dq_i} = F q_i \tag{112}$$

$$\begin{cases} 1,04\ddot{q}_1 - 0,28\Omega\dot{q}_2 + 1,92 \times 10^5 q_1 = 2,21 \times 10^{-7} \Omega^2 \sin \Omega t \\ 1,04\ddot{q}_2 - 0,28\Omega\dot{q}_1 + 1,92 \times 10^5 q_2 = 2,21 \times 10^{-7} \Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \tag{113}$$

Qui s'écrit sous la forme générale :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = c\Omega^2 \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = c\Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \tag{114}$$

Avec :

$$m = 1,04$$

$$a = -0,28$$

$$k = 1,92 \cdot 10^5$$

$$C = 2,21 \times 10^{-7}$$

Et sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = c\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix}$$

III.9. Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

On considère le système homogène sans le deuxième membre:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = 0 \end{cases} \tag{115}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{116}$$

$$\det = \begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -ja\Omega r \\ ja\Omega r & k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (117)$$

Ce qui donne :

$$m^2\omega^4 - (2km + a^2\Omega^2)\omega^2 + k^2 = 0 \quad (118)$$

$$1,04^2\omega^2 - (2 \times 1,92 \times 10^5 \times 1,04 + 0,28\Omega^2)\omega^2 + (1,92 \times 10^5)^2 = 0$$

$$1,081\omega^2 - (3,99 \times 10^5\Omega^2)\omega^2 + 3,68 \times 10^5 = 0$$

On divise par $m^2 = 1,081$

$$\omega^4 - 3,69 \times 10^5 + \Omega^2\omega^2 + 3,4 \times 10^{10} = 0 \quad (119)$$

On remarque qu'il y a deux cas :

- Si $\Omega = 0$ (à l'arrêt) : la solution est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (120)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 429,6 \text{ rds/s} \quad (121)$$

- Si $\Omega \neq 0$ (en rotation) : l'équation bicarrée, alors on a deux solutions réelles positives sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_0^2}{a^2\Omega^2}} \right)} \quad (122)$$

$$\omega_1 = \sqrt{(429,6)^2 + \frac{(0,28)^2\Omega^2}{2(1,04)^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4(1,04)^2(429,6)^2}{0,28^2\Omega^2}} \right)} \quad (123)$$

$$\omega_1 = \sqrt{1,84 \times 10^5 + 4,2 \times 10^{-2}\Omega^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1,01 \times 10^7}{\Omega^2}} \right)} \quad (124)$$

Et:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_0^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (125)$$

$$\omega_2 = \sqrt{(429,6)^2 + \frac{(0,28)^2 \Omega^2}{2(1,04)^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4(1,04)^2 (429,6)^2}{0,28^2 \Omega^2}} \right)} \quad (126)$$

$$\omega_2 = \sqrt{1,84 \times 10^5 + 4,2 \times 10^{-2} \Omega^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1,01 \times 10^7}{\Omega^2}} \right)} \quad (127)$$

III.10. Diagramme de Campbell

Le diagramme de Campbell permet d'illustrer l'évolution des fréquences propres (naturelles) en fonction de la vitesse de rotation. Toute intersection de la courbe de la vitesse de rotation avec les autres courbes des fréquences propres donnent les valeurs des fréquences critiques.

Pour construire le diagramme de Campbell et trouver les fréquences critiques il faut résoudre l'équation (119) pour cela posons : $\omega = s \Omega$

Les solutions de (119) sont les vitesses de rotation :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (128)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (129)$$

Les fréquences correspondant à ces vitesses sont donc:

$$\omega_1 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (130)$$

$$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (131)$$

Les vitesses de rotations critiques :

$$- \text{ Pour le point A (s = 1) : } \Omega_{c1} = \sqrt{\frac{1,92 \times 10^5}{(1,04+0,28)}} = 381,38 \text{ rd/s ;} \quad (132)$$

- Pour le point B (s = 1) : $\Omega_{c2} = \sqrt{\frac{1.92 \times 10^5}{(1.04 - 0.28)}} = 502.62 \frac{rd}{s}$ (133)

- Pour le point C (s = 0.5) : $\Omega_{c3} = \sqrt{\frac{1.92 \times 10^5}{0.5(0.5 \times 1.04 + 0.28)}} = 692.80 \text{ rd/s}$ (134)

- Pour le point D (s = 0.5) : $\Omega_{c4} = \sqrt{\frac{1.92 \times 10^5}{0.5(0.5 \times 1.04 - 0.28)}} = 1264.9 \text{ rd/s}$ (135)

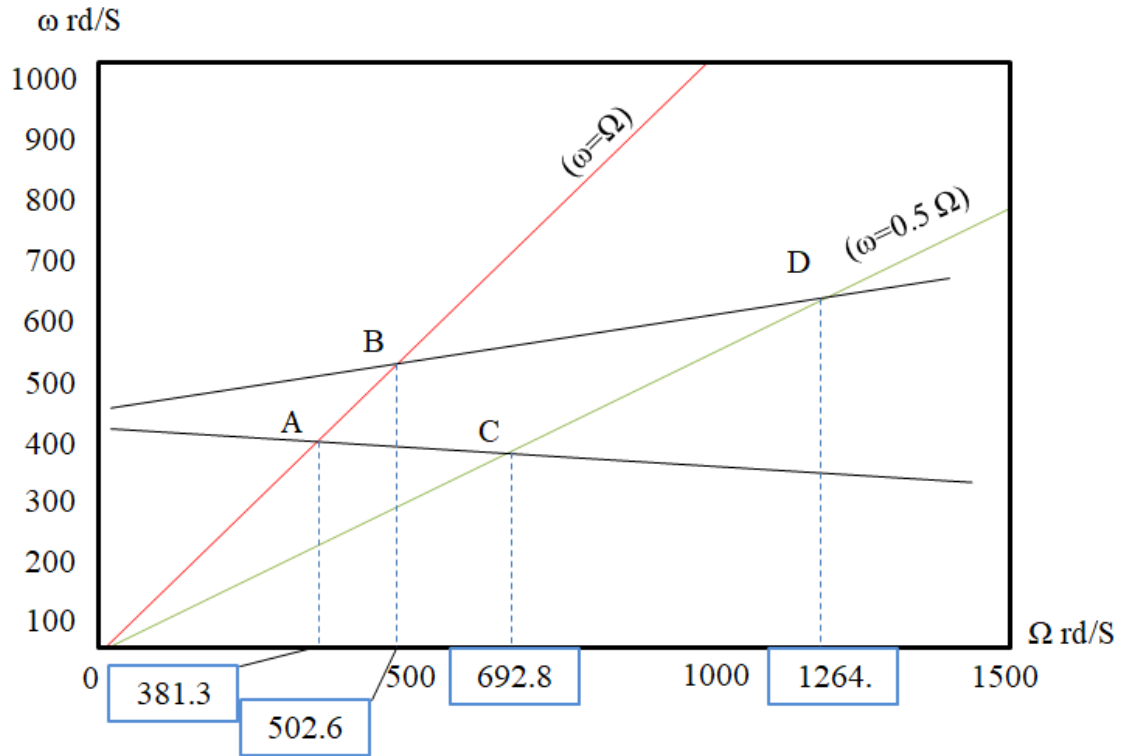


Figure III-15. Diagramme de Campbell.

III.11. Réponse aux forces d'excitation

Dans notre cas la force d'excitation est celle causée par le balourd, c'est une force synchrone (Sa fréquence coïncide avec la vitesse de rotation)

On considère le système avec le deuxième membre

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = c\Omega^2 \sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = c\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \quad (136)$$

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{m-a}} \quad (137)$$

Il y a une seule valeur critique qui correspond à Ω_{c2} pour $s=1$ (au point B).

La réponse au balourd est :

$$A_{e1} = A_{e2} = \frac{2,21 \times 10^{-7} \Omega^2}{1,92 \times 10^5 - 0,76 \Omega^2} \quad (138)$$

$$\Omega_c = 502,62 \text{ rd /s}$$

Quand Ω croit la valeur limite du déplacement est :

$$|A_{e1}| = |A_{e2}| = \left| \frac{c}{a-m} \right| = \left| \frac{1,21 \times 10^{-7}}{0,28 - 1,04} \right| = 2,9 \times 10^{-7} \text{ m} \quad (139)$$

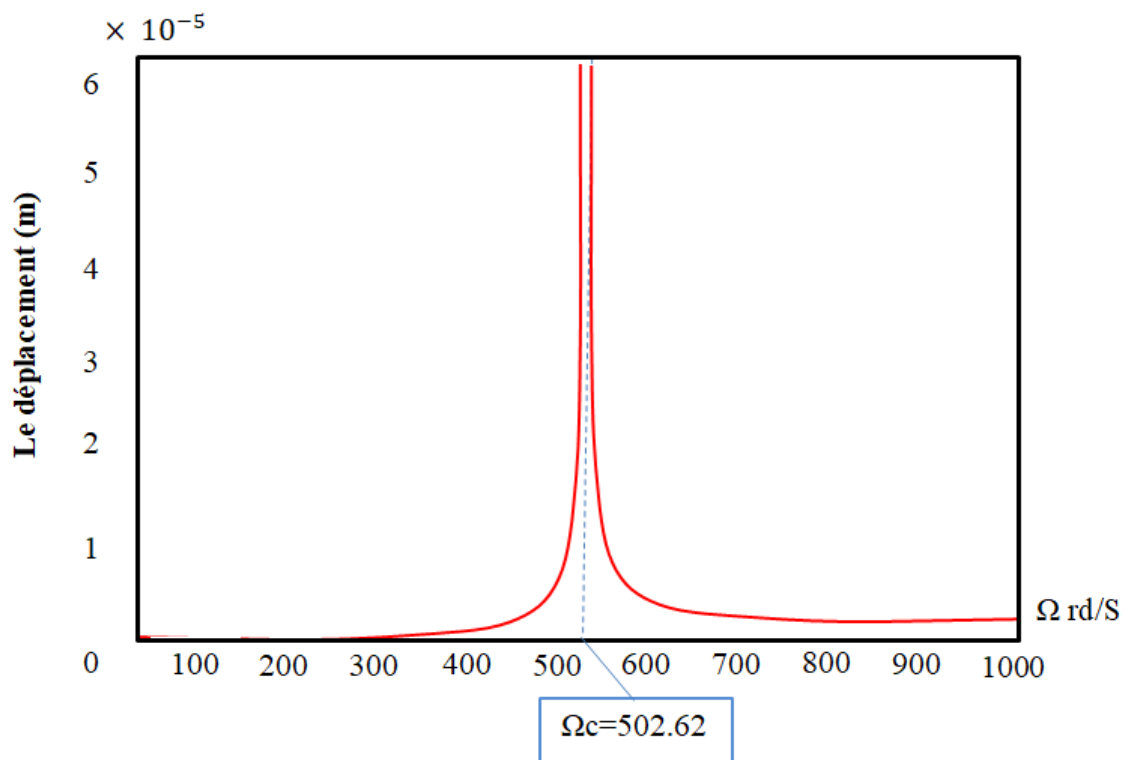


Figure III-16. Réponse du balourd.

III.12. Conclusion

On a étudié le comportement dynamique d'un arbre de transmission d'une machine de tournage par :

- La présentation des éléments constituant ce rotor ;
- Calcul des énergies cinétiques et potentielles de ces éléments ;
- L'application des équations de Lagrange et l'écriture des équations différentielles ;
- Détermination des fréquences naturelles ;
- Réponse aux forces d'excitation (Balourd).

CONCLUSION GENERALE

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude de comportement dynamique d'un arbre de transmission d'un tour, Il comprend trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, on a mentionné quelques points historiques importants dans le développement de la dynamique des rotors où le concept du tournoisement et de la vitesse critique sont expliqués et les concepts de base de la dynamique des rotors sont exposés.
- Dans le deuxième chapitre, on a représenté les caractéristiques des éléments d'un rotor et les énergies cinétiques et potentielles pour développer les équations du mouvement et déterminer les fréquences propres pour tracer le diagramme de Campbell.
- Dans le troisième chapitre, on a appliqué le modèle à un arbre de transmission sur lequel sont montés deux baladeurs, sachant que ce rotor fait partie du mécanisme de la boîte de vitesses d'un tour. L'application du modèle a permis de déterminer les fréquences critiques d'où les vitesses de rotation critiques et c'est l'objectif de ce travail.

En conclusion, ce travail nous a permis de :

- Bien comprendre le modèle de calcul du phénomène du whirling ;
- Rappeler et appliquer des notions vues pendant notre cursus ;
- L'usage de l'exploitation de SolidWorks.

Références bibliographiques

- [1]: Harry, Perez. *The Origin of Rotordynamics*. Turbomachinery Mastered. 2016, en ligne <https://blog.softinway.com/the-origin-of-rotordynamics/>
- [2]: Ernie, Chambers. History of the Institution. *William John MacQuorn Rankine 1820 - 1872*, 2007, p3
- [3]: Rajiv, Tiwari. *A Brief History and State of the Art of Rotor Dynamics*. Génie mécanique (Cours). Inde : L'institut indien de technologie Guwahati 781039, 2008, p91.
- [4]: J, S, Rao. *History of Rotating Machinery Dynamics*. Italie : Springer Netherlands, 2011. 9400711646
- [5]: Michael, J. Goodwin. *Rotordynamics '92. Proceedings of the International conference on rotating machine dynamics. 1. Italy: Springer-Verlag london, 1992. 978-1-4471-1979-1*
- [6] : Dunkerley, S. *On the Whirling and vibration of Shafts*, Phil. Trans. R. Soc., London, Ser. A, vol.185, p 279-360, 1894.
- [7]: Foppl, A., *Das Problem der Lavalischen Turbinewelle*, Der Civilingenieur, vol. 41, p 335-342, 1895.
- [8]: Kerr, W. On the Whirling Speed of Loaded Shafts, Engineering, p 150, 1916.
- [9]: Rajiv, Tiwari. *Theory & Practice of Rotor Dynamics*. Génie mécanique (Cours). Inde : L'institut indien de technologie Guwahati. p 1-3. 781039 2014
- [10]: Stodola, A. *DAMPF- UND GASTURBINEN*. 3e éd. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1924. 978- 3- 642- 50854- 7.
- [11]: Smith David Melville. *The Motion of a Rotor Carried by a Flexible Shaft in Flexible Bearings*. London : 1933. pp. 92-118.
- [12] : BELAHRACHE Saliha, Née DJERRI. *Analyse dynamique des corps continus en rotation : application aux arbres moteurs*. Construction mécanique (mémoire de magister). Constantine : université Mentouri, 2007, p123.
- [13]: James Grahame Knowles, *Investigation into Balancing of High Speed Flexible Shafts by Compensating Balancing Sleeves*. (Mémoire de doctorat). Angleterre : université de lincoln , 2017, p241.
- [14]: Giancarlo Genta, *Dynamics of Rotating Systems. 1*. Italy: Springer, 2005. 0387209360.

[14] : GHARBI, Radouane. *Analyses des phénomènes vibratoires en dynamique des rotors, modélisation et expérimentation. Construction mécanique (mémoire de magister). Algérie : université de Batna, 2014, p97.*

[15] : Mr. SAIMI Ahmed, *Comportement vibratoire des roues aubagées. Génie mécanique (mémoire de magister). Algérie : Université Aboubekr Belkaid– Tlemcen, 2013, p122.*

[16] : Trésor Kanyiki. *Simulation par la méthode des éléments finis du comportement vibratoire d'un Rotor. Électromécanique (cours). Congo : Université de Lubumbashi, 2018, p2-4.*

[17] : LALANNE M. et FERRARIS G, *Dynamique des rotors en flexion, Technique d'ingénieur, Lyon : 1996, p3-17, N° série b5110.*

[18] : P, BERTHIER,G, FERRARIS, M , LALANNE, *prédiction du comportement dynamique des moteurs d'avions : vitesse critiques - effets de balourds, journal de mécanique théorique et appliquée (1986).*

[19] : FC Mécanique, Spécialiste en Usinage de précision, <http://fc-mecanique.com/competences.php>.