الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة عباس لغرور خنشلة

كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم: علوم التسيير

مطبوعة مستوفاة لمقياس

رياضيات المؤسسة

محاضرات و دروس مقدمة للسنة ثانية ليسانس

شعبة: علوم التسيير

تخصص: إدارة الأعمال

من إعداد:

د.عبد النور هبال

السنة الجامعية: 2016-2017

فهرس المحتويات

مقدمة:

يقوم جوهر النظرية الإقتصادية على البحث عن الطريقة المثلى لتوزيع الموارد المتوفرة و التي تتميز بالندرة على الإستخدامات المتعددة بما يحقق أقصى فاعلية و نجاعة ممكنة.

و هكذا يجد متخذ القرار مهما كان موقعه أمام مشكلات تتعلق بالتخصيص الأمثل لما تحت تصرفه من إمكانات (مواد خام، عمالة، مال، زمن متاح...) على مختلف الخيارات المتاحة أمامه (منتجات، مشاريع...) بالكيفية التي تعظم العوائد أو تخفض التكاليف...

في هذا الصدد تقدم التقنيات الكمية المعروفة تحت عنوان "رياضيات المؤسسة" إطارا هاما لتحليل المشكلات الإقتصادية و مشكلات التسيير و تشكل دعامة علمية منظمة و فعالة لاتخاذ القرار.

تقوم تقنيات رياضيات المؤسسة على منهجية تتلخص في الخطوات التالية:

- معرفة الهدف المطلوب من وراء حل المسألة أو المشكلة المطروحة؛
- استنتاج متغيرات المسألة؛
- بناء النموذج الرياضي المعبر عن المسألة؛ و هو صيغة رياضية تعبر عن الهدف المطلوب تحقيقه و القيود التي تحد من القدرة على تحقيق الهدف؛
- حل النموذج و تفسير النتائج و اتخاذ القرارات في ضوء النتائج و الحلول المحصل عليها من حل النموذج؛
- القيام –حسب الحاجة- بطرح السؤال "ماذا لو...؟ What if..." و من ثم تحليل حساسية الحلول الناتجة عن النموذج للتغيرات الممكن أن تطرأ على المعطيات المستخدمة في بنائه.

تغطي هذه المطبوعة أبرز التقنيات الشائعة الاستخدام في رياضيات المؤسسة و هي: البرمجة الخطية، نماذج النقل، نظرية الشبكات: أسلوب المسار الحرج؛ و شبكة (PERT)؛ مع أمثلة توضيحية مفصلة و مبسطة.

الفصل الأول: البرمجة الخطية Linear Programming

تمهيد:

يعتبر المدخل الكمي من أهم مداخل اتخاذ القرار، و "مما لاشك فيه فإن القرارات الإدارية المترتبة على استخدام أساليب بحوث العمليات تعد أفضل من مثيلاتها الناتجة عن التقدير و التخمين الشخصي، لما يتطلبه استخدام أساليب بحوث العمليات من افتراضات واضحة و تبريرات منطقية"[1]، و تبرز البرمجة الرياضية كواحدة من أبرز أركان أساليب بحوث العمليات.

تستجيب البرمجة الرياضية – التي تعتبر البرمجة الخطية جزءا منها– لحالات عديدة من المشكلات سواء من جهة طبيعة المشكلة من حيث حالتي التأكد و عدم التأكد؛ وكذا من حيث طبيعة النتائج المراد التوصل إليها: وحدات غير قابلة للتجزئة (أرقام طبيعية)، وحدات قابلة للتجزئة (أرقام كسرية).

و كذلك من جهة طبيعة العلاقة الرياضية التي تربط بين المتغيرات: علاقة خطية، علاقة غير خطية.

سنختار في هذا الفصل البرمجة التي تكون فيها العلاقة خطية وهو ما يعرف ب" البرمجة الخطية "Linear Programming" باعتبارها واسعة الإنتشار؛ وذات قيمة عملية كبيرة.

[1] أحمد رجب عبد العال، بحوث العمليات في المحاسبة، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، 2002، ص:07

المبحث الأول: مقدمة عن البرمجة الخطية An Introduction to Linear Programming

منذ ولدت البرمجة الخطية من رحم الحرب العالمية الثانية في بريطانيا من أجل توزيع الموارد على الاستخدامات ؛خضعت هذه التقنية عبر مسيرتها لتحسينات عديدة بغية جعلها أكثر قدرة على الاستجابة للمشكلات الميدانية؛ حتى صارت ركنا كبيرا من أركان علم " بحوث العمليات Operational research ".

لقد عرفت البرمجة الخطية عدة تعاريف نذكر منها:

- هي " أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد و الإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود و المعاملات الثابتة، بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي أن يكون التوزيع أمثلاً"[1]؛
- "طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة من أجل تحقيق هدف معين، حيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف و القيود التي تحد من القدرة على تحقيقه في صورة معادلات أو متباينات خطية"[2]؛
- كما عرفها الدكتور حنفي محمود سليمان بأنها: " أداة مفيدة حينما يكون هناك عدة متغيرات تؤثر على تحقيق الهدف المرجو، بحيث تصبح المشكلة هي مشكلة اختيار أحسن التوافيق الخاصة بقيم هذه المتغيرات، و كما يدل الإسم فإن العلاقة بين كل متغير من هذه المتغيرات من ناحية و الهدف المطلوب تحقيقه من ناحية أخرى يجب أن تكون خطية"[3]؛
- هي: " ذلك الأسلوب الرياضي الذي يهدف إلى إيجاد أحسن استخدام للموارد المحدودة وفقا لمعيار أفضلية معين"[4]؛
- كما عرفت على أنها: " طريقة رياضية تمكن من التوصل لأفضل الحلول الممكنة لمجموعة من المشاكل التي تتوافر فيها شروط رياضية معينة"[5].

إجمالا يمكننا القول إن البرمجة الخطية تسعى إلى تخصيص الموارد النادرة بين الاستخدامات البديلة بحيث يتحقق عن هذا التوزيع الحد الأقصى من الكفاءة ، إذ تسعى إلى إيجاد القيمة المثلى Optimal value لدالة خطية مقيدة Constrained بجملة من المعادلات الخطية Linear Equations ، وتطرح مشكلة البرمجة الخطية عموما على نحو المثال التالي :

---

[1] فؤاد الشيخ سالم و آخرون، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، المنظمة العربية للعلوم الإدارية، عمان، الأردن، 1983، ص: 07

[2] علي فؤاد حمدي، الإتجاهات الحديثة في الإدارة البرمجة الخطية و بيرت، دار النهضة العربية، بيروت، لبنان، 1982، ص: 04

[3] حنفي محمود سليمان، المنهج المتكامل في الإدارة، دار الجامعات المصرية، الإسكندرية، مصر، 1979، ص: 147

[4] فريد عبد الفتاح زين الدين، بحوث العمليات و تطبيقاتها في حل المشكلات و اتخاذ القرارات، الجزء الأول، كلية التجارة، جامعة الزقازيق، مصر، 1997، ص: 29

[5] مرعي عبد الحق، المعلومات المحاسبية و بحوث العمليات في اتخاذ القرارات، مؤسسة شباب الجامعة، مصر، 1993، ص: 323

مثال1.1:

في ورشة للصناعة التقليدية يقوم منتج بإنتاج "الموائد" و"الكراسي" مستعينا بآلة نجارة، يحتاج إنتاج السلعتين إلى نوعين من المواد الأولية :" الخشب" و" القصبات الحديدية" ،حيث يدخل في إنتاج المائدة الواحدة (02) م^2 من الخشب و متر واحد من القصبات الحديدية؛ أما الكرسي فيستهلك (01) م^2 من الخشب و (02) متر من القصبات الحديدية، كما تحتاج المائدة الواحدة إلى 05 دقائق معالجة على الآلة والكرسي إلى 10دقائق .

يحصل المنتج على تموين يومي بالمواد الأولية لا يمكن أن يفوق 26 م^2 من الخشب و 28 مترا من القصبات الحديدية ؛وبسبب التقادم لا يمكن للآلة أن تشتغل لأكثر من ثلاث ساعات و نصف يوميا.

يبلغ الربح الناتج عن بيع مائدة واحدة 180 دينارا وعن بيع الكرسي 220 دينارا

المشكلة المطروحة: ما هي الكميات التي ينبغي إنتاجها من الموائد و الكراسي في اليوم بحيث يصل الربح اليومي إلى أقصى ما يمكن ؟

وكما طرحت المشكلة السابقة في صورة تعظيم ربح؛ فقد تطرح في صورة تدنية التكاليف أين تتركز المسألة مثلا حول البحث عن أدنى تكلفة ممكنة لإنتاج منتج معين أو جملة من المنتجات ذات مواصفات محددة .

وبناءً عليه يمكن أن نستخلص أن البرمجة الخطية تنطوي على :"البحث عن النقطة القصوى (العظمى أو الدنيا) لدالة خطية مشكلة من n متغيرا مترابطين بنظام مشكل من m علاقة خطية (معادلات أو متراجحات) تسمى قيوداً "[1].

إن أول خطوة في استخدام هذه التقنية هي بناء النموذج، وبشكل عام يكتب البرنامج الخطي في حالة التعظيم كما يلي:[2]

$$Max\,(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + \ldots C_nx_n$$

$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots a_{3n}x_n \le b_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \ldots\ldots\ldots x_n \ge 0 \end{cases}$$

حيث:

1-[1] Luc Boyer et autres, Précis d'Organisation et de Gestion de la Production, Les éditions d'organisation, Paris, 1982.، p: 121

[2] محمد راتول، بحوث العمليات ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004 ، ص10 بتصرف .

Max:تعني "تعظيم maximisation" أي جعل الدالة (Z) في أعظم قيمة لها.

$x_1,x_2,x_3,..x_n$: هي متغيرات البرنامج والمطلوب البحث عن قيمها ويشترط أن لا تكون سالبة كما يشير إلى ذلك القيد الأخير.

$c_1,c_1,c_1,.....c_n$: معاملات الدالة المراد تعظيمها وتسمى الدالة الاقتصادية أو "دالة الهدف Objective Function".

$a_{11},a_{12},.....a_{mn}$: هي معاملات القيود.

$b_1,b_1,...b_m$: شعاع الثوابت ويشترط أن تكون قيمه موجبة .

S/c : تعني "تحت القيود sous les contraintes" أي تعظيم دالة الهدف في حدود الطاقات المتاحة المعبر عنها بمعادلات أو متراجحات Inequations، وفي الأدبيات الانجلوساكسونية يستخدمون الرمز s/t أي " Subject to" وهي بالعربية : "خاضعة لِ".

أما في حالة التدنية فيكتب البرنامج الخطي عموما كما يلي:

$$Min\ (Z) = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\ldots\ldots c_nx_n$$

وتتحول الإشارة في القيود من (≤) إلى (≥)، حيث تعني (Min) تدنية أي Minimisation .

إذن تتكون مسألة البرمجة الخطية من ثلاثة أجزاء أساسية:

1- دالة الهدف Objective Function : لتطبيق البرمجة الخطية على مشكلة ما يجب توفر شروط معينة؛ و بشكل خاص " وجود هدف معين واضح و محدد بدقة و قابل للقياس الكمي يراد تحقيقه فلكل مؤسسة إنتاجية و غيرها هدف معين تسعى لتحقيقه، كتعظيم الأرباح أو تخفيض التكاليف إلى مستوى مرغوب"[1] وتعبر دالة الهدف "عما يرغب متخذ القرار أو صاحب المشكلة في تحقيقه مثل تعظيم الربح، تدنية التكلفة، تدنية الوقت ..."[2]

2- قيود المشكلة constraints: بحكم أن السوق قد يفرض حدا أقصى من الإنتاج لا يمكن تخطيه أو بحكم محدودية المدخلات كالمادة الأولية وساعات العمل فإن حجم الإنتاج محدود[3]

3- قيد عدم السالبية Trivial constraints : نتعامل في نطاق البرمجة الخطية عموما مع القيم الموجبة، إذ لا يعقل مثلا أن تكون الكميات المنتجة قيما سالبة.

في الواقع هناك عدة خطوات يتم القيام بها لتحديد نموذج البرمجة الخطية إنطلاقا من الإجابة على الأسئلة التالية:[4]

–ما المطلوب تحديده من البرنامج أي ما هي المتغيرات غير المعروفة للمشكلة؟

---

[1] منعم زمرير الموسوي، مقدمة في بحوث العمليات، منشورات الجامعة المفتوحة، طرابلس، ليبيا، 1995، ص: 14

[2] جلال العبد و إسماعيل السيد، الأساليب الكمية في الإدارة، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2003، ص: 266 بتصرف

[3] السابق، نفس الصفحة

[4] Hamdi .A.Taha، Operations Research، an Introduction، third edition، Mac millan publishing Co.Inc، New York، USA، 1982، p:16

– ما هي القيود المفروضة على المتغيرات لإشباع حدود النموذج أي تحقيق كل شروط النموذج؟
– ما هو الهدف المطلوب تحقيقه لتحديد أفضل حل من خلال كل القيم العملية؟
–ما هي مفاتيح القرارات التي يمكن اتخاذها و ما طبيعة المشكلة المطروحة للمعالجة؟
–ما الذي يجعل محيط القرار معقدا حتى يتطلب الأمر استعمال البرمجة الخطية؟
–كيف يمكن توظيف تحليل النتائج و ترجمتها إلى حلول؟

عند الكلام عن شكل المسألة في البرمجة الخطية نميز بين شكلين: الشكل القياسي Standard form والذي سنراه لاحقا والشكل القانوني Canonical form والذي يتصف بما يلي:

– في حالة التعظيم :تكون جميع القيود على شكل اصغر أو تساوي .
– في حالة التدنية : تكون جميع القيود على شكل اكبر أو تساوي .

حيث تطلق الصيغة المختلطة على المسألة التي تتنوع إشارات قيودها ($\leq$، $\geq$ ،=).

وبصيغة رياضية يكون الشكل القانوني :

$$Max(z) = CX$$
$$s/c \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث يعبر (C) عن شعاع معاملات دالة الهدف ، و (A) عن مصفوفة معاملات القيود؛ و(B) عن شعاع الثوابت (الطرف الأيمن من المتراجحات).

أو :

$$Min(z) = CX$$
$$s/c \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

بالرجوع إلى مثالنا السابق ؛ نجد أن الهدف المراد تحقيقه هو تعظيم الربح ، وإذا فرضنا بأن (x_1) هي الكمية المطلوب إنتاجها من الموائد و (x_2) هي الكمية المطلوب إنتاجها من الكراسي ، فإن الربح الإجمالي هو مجموع حاصل ضرب كل كمية في الربح الوحدوي المقابل، إذن يمكن التعبير عنه بالدالة:

$$(z) = 180x_1 + 220x_2$$

نحن نبحث الآن عن قيمة المتغيرين x_1 و $x2$ التي تجعل قيمة (z) أعظم ما يمكن؛ وذلك في ظل قيود المتاح من المواد الأولية وساعات العمل:

بالنسبة لـ "الخشب" لا يمكننا استخدام أكثر من 26 م^2 في اليوم، وبذلك ينتج لدينا القيد التالي:

$$2x_1 + x_2 \leq 26$$

أي أن الكمية المراد إنتاجها من الموائد مضروبة في احتياج كل مائدة من الخشب؛ مضافا إليها الكمية المراد إنتاجها من الكراسي مضروبة في احتياج كل كرسي من الخشب ينبغي أن لا يفوق كمية الخشب المتاحة يوميا وهي 26 م^2.

وبالنسبة للقصبات الحديدية نجد القيد التالي :

$$x_1+2x_2 \leq 28$$

أما ساعات العمل على الآلة فتفرض القيد التالي:

$$5x_1+10x_2 \leq 210$$

لنلاحظ أنه تم تحويل الساعات (3.5 ساعة) إلى دقائق (210 دقيقة) و ذلك لوجوب التجانس بين طرفي المتراجحة.

وبذلك نحصل على المسألة في صورتها الرياضية كما يلي:

$$Max:(z)=180x_1+220x_2$$

$$S/C\begin{cases}2x_1+x_2 \leq 26\\ x_1+2x_2 \leq 28\\ 5x_1+10x_2 \leq 210\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\end{cases} ----------(I)$$

تسمى الصيغة السابقة "النموذج الرياضي" أو "البرنامج الخطي" المعبر عن المشكلة المطروحة وسنأتي لاحقا على كيفية الحل و تحديد قيم المتغيرات.

تأخذ المسألة في البرمجة الخطية –كما أشرنا – إحدى صورتين إما البحث عن أعظم قيمة ممكنة كما في مثالنا السابق، وإما البحث عن أدنى قيمة ممكنة كما في المثال التالي:

مثال 1. 2:

دلت التعليمات الطبية الموجهة إلى مريض أجرى عملية جراحية على أنه يحتاج يوميا على الأقل إلى:

12 وحدة من الفيتامين C ؛

10 وحدات من الفيتامين B ؛

08 وحدات من الألياف

وبمراجعة قائمة مشترياته المعتادة من الفواكه وجدنا أن أكثرها تكرارا " البرتقال" و" التفاح" حيث كانت لدينا المعطيات التالية: حبة من البرتقال تحتوي على: وحدة واحدة من الفيتامين C و وحدتين (02) من الفيتامين B و وحدة واحدة من الألياف ، وأن نظيرتها من التفاح تحتوي على : 03 وحدات من الفيتامين C و04 وحدات من الفيتامين B و وحدة واحدة من الألياف، فإذا كان سعر حبة البرتقال : 02 وحدة نقدية (الوحدة النقدية = 10 دج) ؛ وسعر حبة التفاح 05 وحدة نقدية،

المطلوب: ما هي التركيبة اليومية من البرتقال والتفاح التي تحقق أدنى تكلفة ممكنة مع الوفاء بالاحتياجات السابقة كلها ؟

لنقم ببناء النموذج الرياضي المعبر عن المشكلة:

إن القرارات التي ينبغي اتخاذها بهذا الشأن هي تحديد عدد حبات البرتقال و عدد حبات التفاح التي ينبغي أن يتشكل منها المزيج المطلوب في ضوء تحقيق الهدف و هو تدنية التكاليف إلى أدنى حد ممكن؛ كل ذلك مع احترام الخصائص التي ينبغي أن يتصف بها هذا المزيج (توفير الحدود الدنيا من الفيتامينات و العناصر الغذائية المختلفة).

لنرمز لعدد حبات البرتقال التي سنختارها لتشكيل المزيج بـ (x_1) و لنظيرتها من التفاح بـ (x_2)، تكلفة حبة برتقال واحدة (02) وحدة نقدية؛ هذا يعني أن كمية ما عددها (x_1) حبة برتقال ستكلف $(2x_1)$ وحدة نقدية، و تكلفة حبة تفاح (05) وحدة نقدية؛ هذا يعني أن كمية ما عددها (x_2) حبة تفاح ستكلف $(5x_1)$ وحدة نقدية، و بناء عليه فإن التكلفة الإجمالية للمزيج المطلوب يمكن التعبير عنها كما يلي: $(2x_1+5x_2)$ و هي دالة الهدف التي نسعى إلى البحث عن أدنى قيمة لها؛ لذلك نكتب:

$$Min:(w)=2x_1+5x_2$$

غير أن المزيج المطلوب عليه أن يستجيب لثلاثة قيود: المحتوى من الفيتامين (C)؛ (B) و الألياف:

بالنسبة إلى قيد الفيتامين (C) تعطي حبة برتقال وحدة واحدة منه؛ هذا يعني أن كمية عددها (x_1) حبة برتقال ستعطي $(1\times x_1=x_1)$ وحدة، و تعطي حبة تفاح (03) وحدات منه؛ هذا يعني أن كمية عددها (x_2) حبة تفاح ستعطي $(3x_2)$ وحدة، أما مجمل وحدات الفيتامين (C) فما هي إلا حاصل جمع الكميتين (x_1+3x_2)؛ هذه الكمية الإجمالية يجب أن لا تقل عن الحد الأدنى المطلوب من هذا الفيتامين (12 وحدة) و هو ما يعطي القيد التالي:

$$x_1+3x_2\geq 12$$

على النحو نفسه يمكننا أن نحصل على القيد الخاص بالفيتامين (B) كما يلي:

$$2x_1+4x_2\geq 10$$

و كذلك نصوغ قيد الألياف:

$$x_1+x_2\geq 08$$

وبالطبع لا يمكن أن يكون عدد حبات البرتقال الداخلة في تشكيل المزيج كمية سالبة و لا عدد حبات التفاح:

$$(x_1\geq 0, x_2\geq 0)$$

و هكذا نحصل على النموذج الرياضي المعبر عن المشكلة المطروحة:

$$\begin{aligned}
&Min:(w)=2x_1+5x_2\\
&x_1+3x_2\geq 12\\
&2x_1+4x_2\geq 10 \qquad -------------(II)\\
&x_1+x_2\geq 08\\
&(x_1\geq 0, x_2\geq 0)
\end{aligned}$$

المبحث الثاني: طرق حل مسائل البرمجة الخطية LP Solving Methods

من أبرز الأساليب المستخدمة في حل مسائل البرمجة الخطية:

- الطريقة الجبرية Algebraic Method
- الطريقة البيانية Graphical Method
- طريقة السمبلكس Simplex Method

وسنكتفي هنا بالأخيرتين :

أولا: الطريقة البيانية Graphical Method

يتميز هذا الأسلوب بالبساطة ؛ كما أنه يساعد على فهم آلية عمل أسلوب "السمبلكس"الذي سنأتي عليه تباعا، غير أنه غير ذي قيمة عملية لصعوبة تطبيقه عندما يزيد عدد المتغيرات على اثنين واستحالة ذلك إذا زادت على ثلاثة؛ و هو ما يبرز " محدودية استعمال هذه الطريقة بحيث لا يمكن استعمالها في المؤسسات الكبيرة و ذات الإنتاج الواسع و المختلط، مما يعني أنها تطبق على المؤسسات التي تنتج منتجين فقط لكن في الحياة الإقتصادية نادرا ما توجد مؤسسات تنتج منتجين فقط"[1].

تتلخص أبرز خطوات هذه الطريقة في:[2]

- رسم القيود في شكل بياني Graph وتحديد منطقة الحلول الممكنة Feasible Area
- اختيار الحل الأمثل ؛ ويتم عادة بتقييم النقط الركنية Corner Pointsو اختيار القيمة المثلى.

وبالرجوع إلى مثالنا الأول الذي سبق بناء نموذجه (النموذج (I) السابق)؛ نحل المسألة بيانيا كما يلي:

[1] Anderson، Sweeney، Williams، An Introduction to Management Science Quantitative Approaches to Decision Making، seventh edition، west publishing company، USA، 1996، p: 110

[2] محمد توفي ماضي، الأساليب الكمية في مجال إدارة الإنتاج والعمليات، المكتب العربي الحديث،1992 ، ص18 بتصرف.

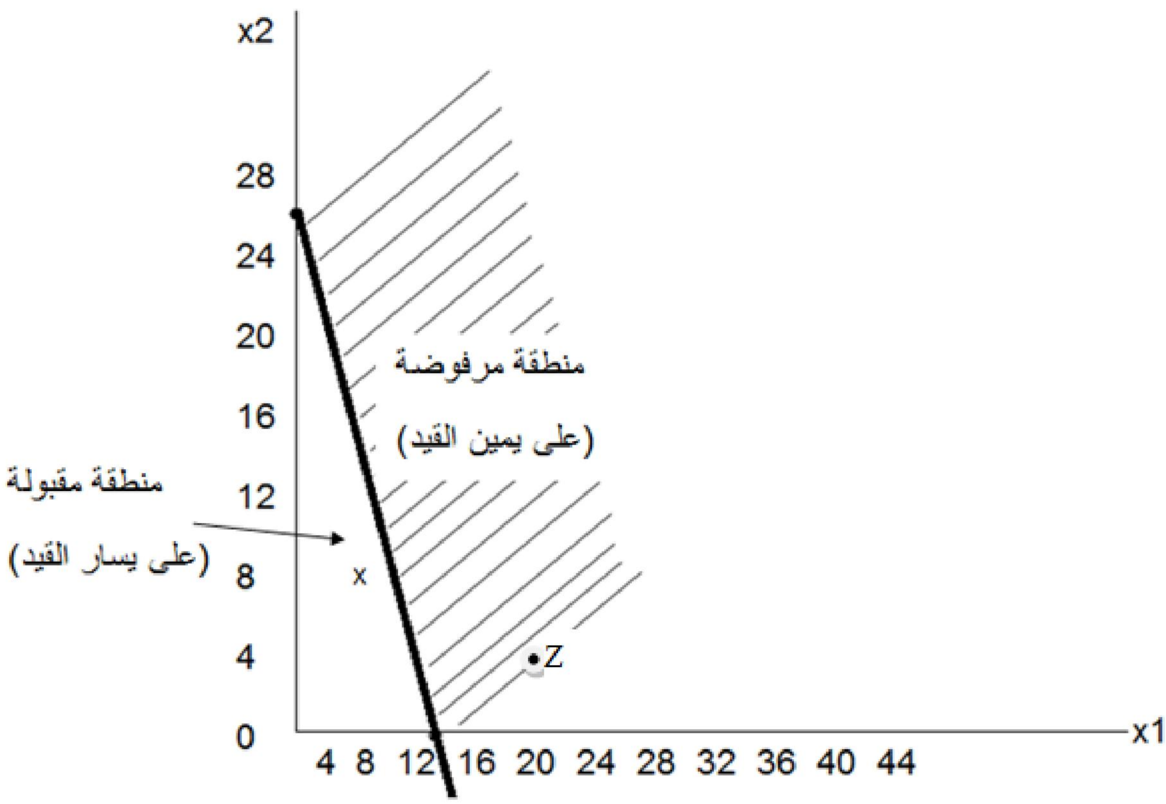
نمثل كل قيد بيانيا؛ ونبدأ بالقيد الأول (قيد الخشب) حيث نفترض وجود تساو:

$$2x_1 + x_2 = 26$$

بفرض: $(x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 26)$، فنحصل على نقطة إحداثياها $(26,0)$ علما أننا نقرأ بهذا الترتيب (x_2, x_1)

وبفرض: $(x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{26}{2} = 13)$، فنحصل على نقطة إحداثياها $(0,13)$

وانطلاقا من النقطتين نرسم الخط الذي يمثل القيد كما يظهره الشكل:



لنلاحظ أن المستقيم المعبر عن القيد الأول (قيد الكمية المتوفرة من الخشب) قد شطر المستوي إلى شطرين شطر مرفوض و هو المشطوب على يمين القيد و شطر مقبول تمثله النقاط الواقعة في المثلث على يمين القيد، تعبر كل نقطة من المنطقة المرفوضة عن برنامج إنتاجي (كمية معينة من الموائد و كمية معينة من الكراسي) لا يمكن تنفيذه لأن الكمية المتوفرة من الخشب لا تكفي لذلك؛ و يمكن التحقق من ذلك عن طريق اختيار أي نقطة من تلك المنطقة و التعويض بإحداثياتها في القيد فنجد أنه مختل؛ فمثلا النقطة (Z) في الشكل أعلاه إحداثياها: $(x_1 = 20, x_2 = 4)$ عندما نعوض بإحداثييها في قيد الخشب نجد:

$$2(20) + 4 = 44$$

أي أن إنتاج (20) مائدة و (04) كراسي يتطلب (44) مترا مربعا من الخشب بينما لا يتوفر لدينا إلا (26) و هو ما يعني أن هذا البرنامج الإنتاجي لا يمكن تنفيذه.

و على خلاف ذلك النقطة (X) على يمين القيد إحداثياها ($x_1 = 8, x_2 = 8$) تعبر عن برنامج إنتاجي تسمح كمية الخشب المتوفرة بتنفيذه و بالتعويض بتلك الكميات في القيد نجد:

$$2(8) + 8 = 24$$

يستهلك هذا البرنامج الإنتاجي (24) مترا مربعا بينما الكمية المتوفرة هي (26).

و على النحو نفسه نمثل بقية القيود في المعلم نفسه؛ فبالنسبة للقيد الثاني (قيد القصبات الحديدية):

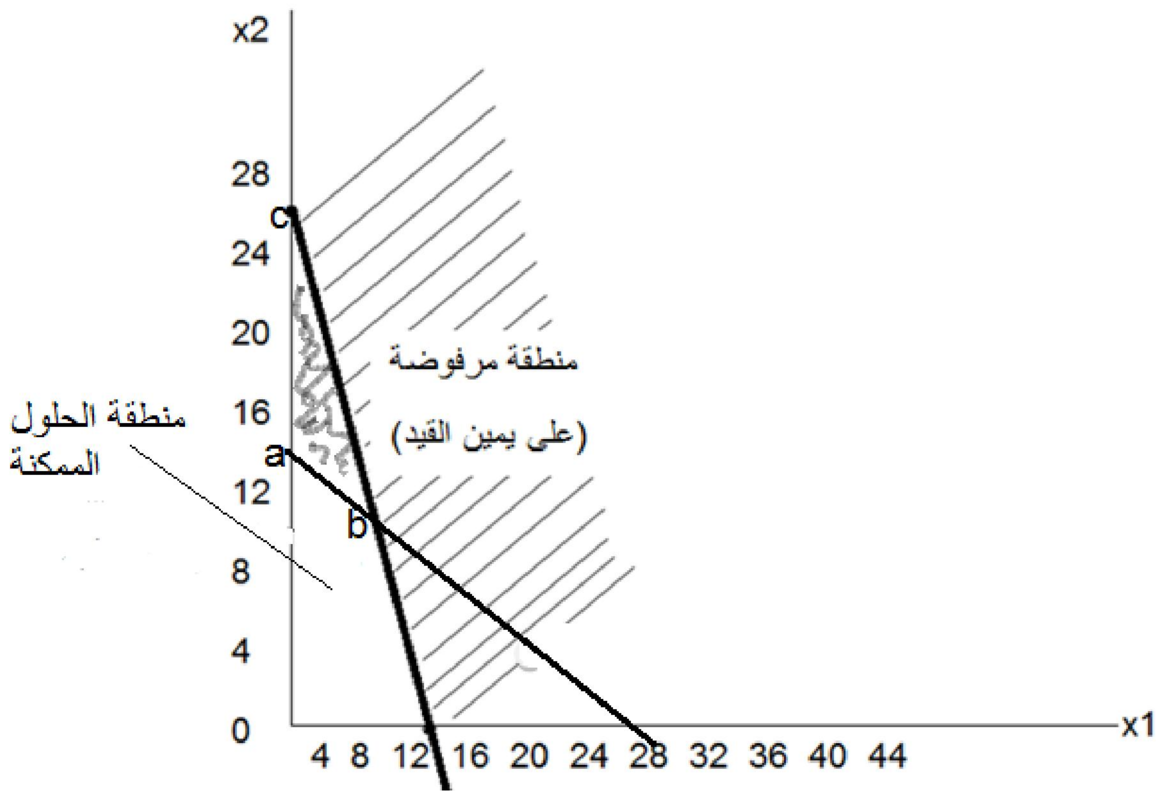
$$x_1+2x_2 \leq 28$$

نفترض التساوي (أي استعمال كل الكمية المتاحة من المورد): ($x_1 + 2x_2 = 28$)؛

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{28}{2} = 14.(0,14)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 28.(28,0)$$

حصلنا على نقطتين لكل نقطة إحداثيان و بواسطة النقطتين يمكن تمثيل القيد:



لنلاحظ أن إدخال القيد الثاني أدى إلى تقليص منطقة الحلول الممكنة بعد حذف جزء منها هو المثلث (abc) الذي تعبر كل نقطة من النقاط الواقعة فيه عن برنامج إنتاجي يكفي الخشب لتنفيذه و لكن لا تكفي كمية القصبات الحديدية لذلك و بالتالي فهي برامج لا يمكن تنفيذها.

علينا أن نضيف القيد الثالث (قيد زمن تشغيل الآلة):

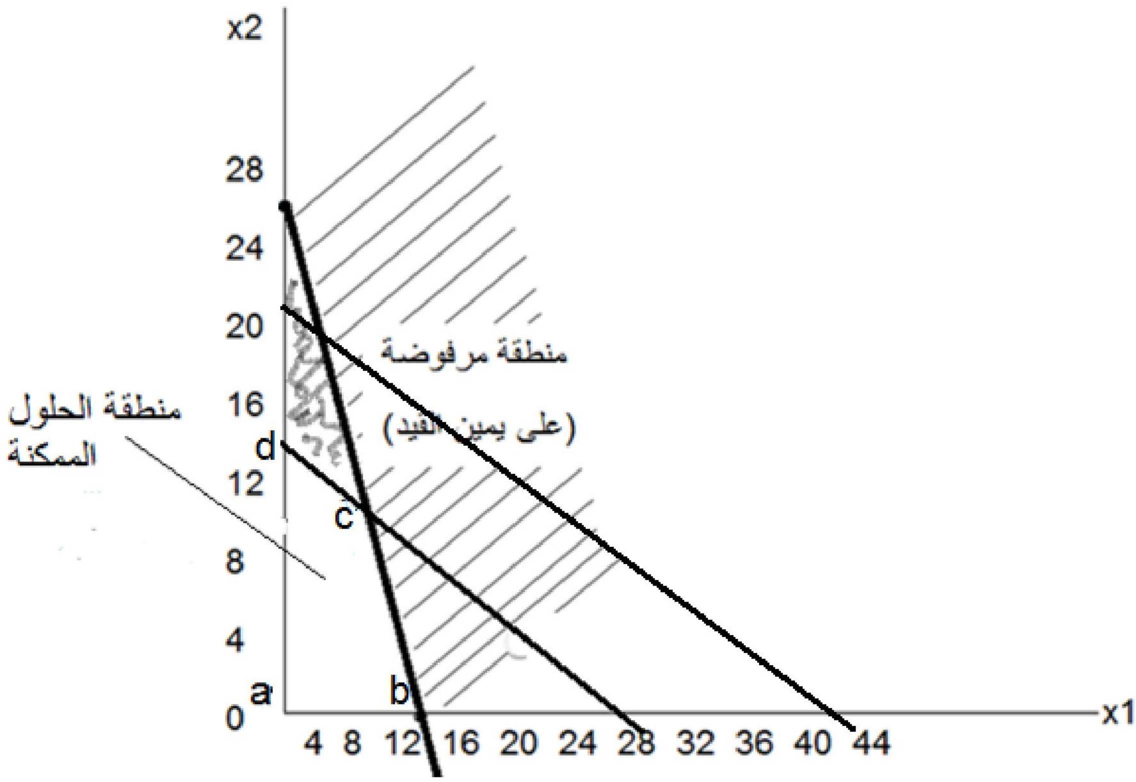
$$5x_1+10x_2 \leq 210$$

$$5x_1 + 10x_2 = 210$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{210}{10} = 21.(0,21)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{210}{5} = 42.(42,0)$$

و بإضافة القيد الثالث في المعلم نحصل على منطقة الحلول الممكنة في شكلها النهائي:



لنلاحظ أن القيد الثالث لم يغير منطقة الحلول الممكنة، حصلنا في النهاية على النقاط التي تشكل شبه المنحرف (abcd) حيث تمثل جميع نقاط تلك المنطقة حلولا للمسألة (برامج إنتاجية تسمح الإمكانات المتاحة بتنفيذها)، غير أننا نبحث ضمنها عن الحل الأمثل Optimal Solution وهو الذي يجعل الدالة: [(z) $=180x_1+220x_2$] في أعلى قيمها؛ ولسنا بحاجة هنا إلى اختبار كل نقاط منطقة الحلول الممكنة بل يكفي اختبار الرؤوس ؛إذ من المبرهن عليه أن الحل الأمثل هو أحدها (نظرية مبرهن عليها في الهندسة).

"إن الحل الأمثل ينتمي إلى المنطقة المحصورة بين خطوط القيود والمحورين x_2،x_1 وهي المنطقة التي تعرف باسم منطقة الحلول الممكنة Feasible Region"[1]؛ و باستثناء الرأس (a) ذي الإحداثيات (0,0) أي يمثل وضعية اللاإنتاج؛ وهو ما يعني أن:

[1] C.woodford and c.phillips، Numerical Methods with worked examples، Chapman and Hall، London ،1997، p:132

$(z) = 180 \times 0 + 220 \times 0 = 0$ ،أي الربح معدوم.

أما الرأس B (0، 13) فيمثل حلا يقضي بإنتاج (13) مائدة وعدم إنتاج الكراسي، والربح الموافق لهذا البرنامج هو –بالتعويض في دالة الهدف– : $(z) = 180(13) + 220(0) = 2340$

يمكننا وضع عمليات اختبار الرؤوس في جدول كما يلي:

الرأس	التقاطع	الإحداثيات		التعويض في دالة الهدف $[(z) = 180x_1 + 220x_2]$
		x_1	x_2	
b	تقاطع القيد الأول مع المحور الأفقي	13	0	$(z) = 180(13) + 220(0) = 2340$
c	تقاطع القيد الثاني مع المحور العمودي	0	14	$(z) = 180(0) + 220(14) = 3080$
d	تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني	8	10	$(z) = 180(8) + 220(10) = 3640$

لدى تحديد إحداثيات النقطة (d) يمكننا تحديد القيدين المتقاطعين (في مثالنا القيد الأول و الثاني) و تشكيل جملة معادلتين و بحلها نحصل على الإحداثيات:

$$2x_1 + x_2 = 26$$
$$x_1 + 2x_2 = 28$$

و بحل جملة المعادلتين نحصل على القيم التالية: $x_1 = 8, x_2 = 10$

لنلاحظ أن النقطة (d) تعطي أعلى قيمة لدالة الهدف و هو ما يعني أن البرنامج الإنتاجي الذي تعبر عنه هو البرنامج الإنتاجي الأمثل؛ أي إنتاج (08) موائد و (10) كراسي؛ و هو ما ينجم عنه أقصى ربح و قدره (3640 ون).

يمكننا التحقق من احترام هذا البرنامج لقيود الموارد المتوفرة بالتعويض في القيود:

$$\begin{cases} 2(8) + 10 = 26 \\ 8 + 2(10) = 28 \\ 5(8) + 10(10) = 140 \end{cases}$$

نلاحظ أن الكميات المتوفرة من المورد الأول (الخشب) و المورد الثاني (القصبات الحديدية) تم استهلاكها بالكامل؛ أما المورد الثالث (زمن تشغيل الآلة) فتم استخدام (140) دقيقة منه أي يتبقى فائض قدره ($210 - 140 = 70$) دقيقة من وقت الآلة يوميا غير مستعملة.

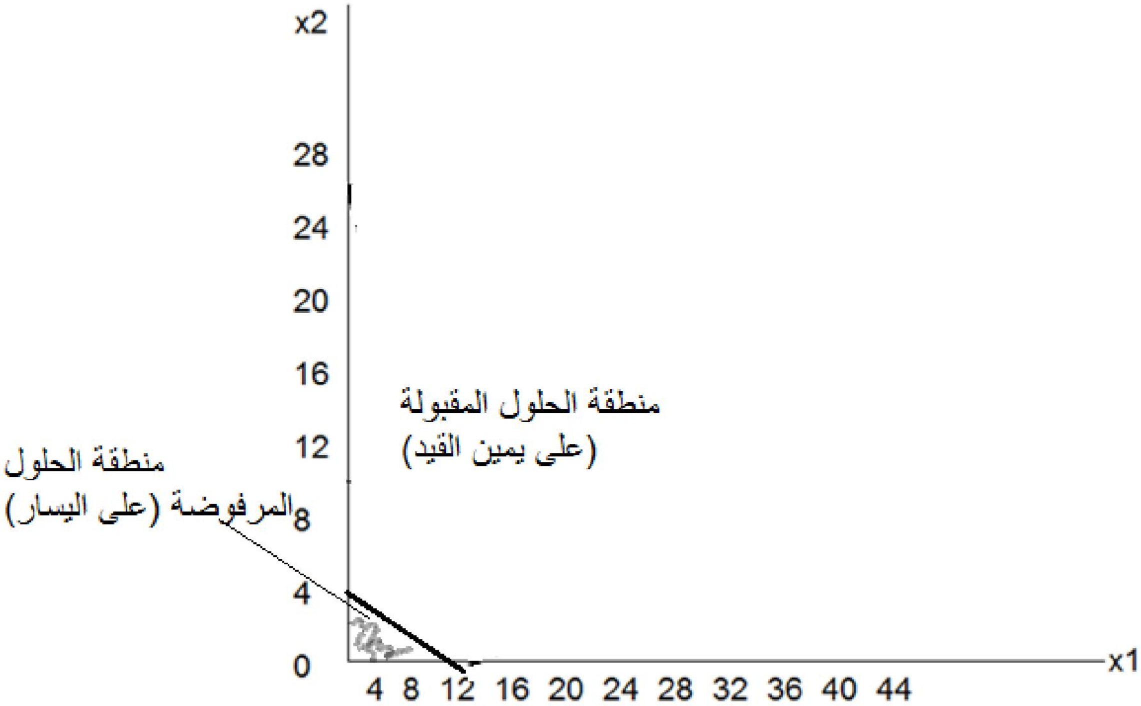
أما في حالة التدنية فلا يختلف تطبيق الطريقة البيانية عن حالة التعظيم السابق شرحها إلا في بعض التفاصيل البسيطة؛ و لتوضيحها نرجع إلى النموذج (II) الذي سبق بناؤه و لنقم بحله:

$$Min:(w)=2x_1+5x_2$$
$$x_1+3x_2\geq 12$$
$$2x_1+4x_2\geq 10$$
$$x_1+x_2\geq 08$$
$$(x_1\geq 0, x_2\geq 0)$$

نقوم بتمثيل القيود بعد تحويلها إلى معادلات؛ و لنبدأ بالقيد الأول ($x_1+3x_2=12$):

$$x_1=0\Rightarrow x_2=\frac{12}{3}=4.(0,4)$$
$$x_2=0\Rightarrow x_1=12.(12,0)$$

بالنقطتين السابقتين يمكننا تمثيل القيد:



لنلاحظ أنه على خلاف حالة التعظيم أين كان اتجاه المتراجحات هو(أصغر من أو يساوي) فإنه في حالة التدنية عندما تكون المتراجحات على شكل (أكبر من أو يساوي) تصبح المنطقة المقبولة على يمين القيد و المرفوضة على اليسار.

على النحو نفسه نكمل تمثيل بقية القيود:

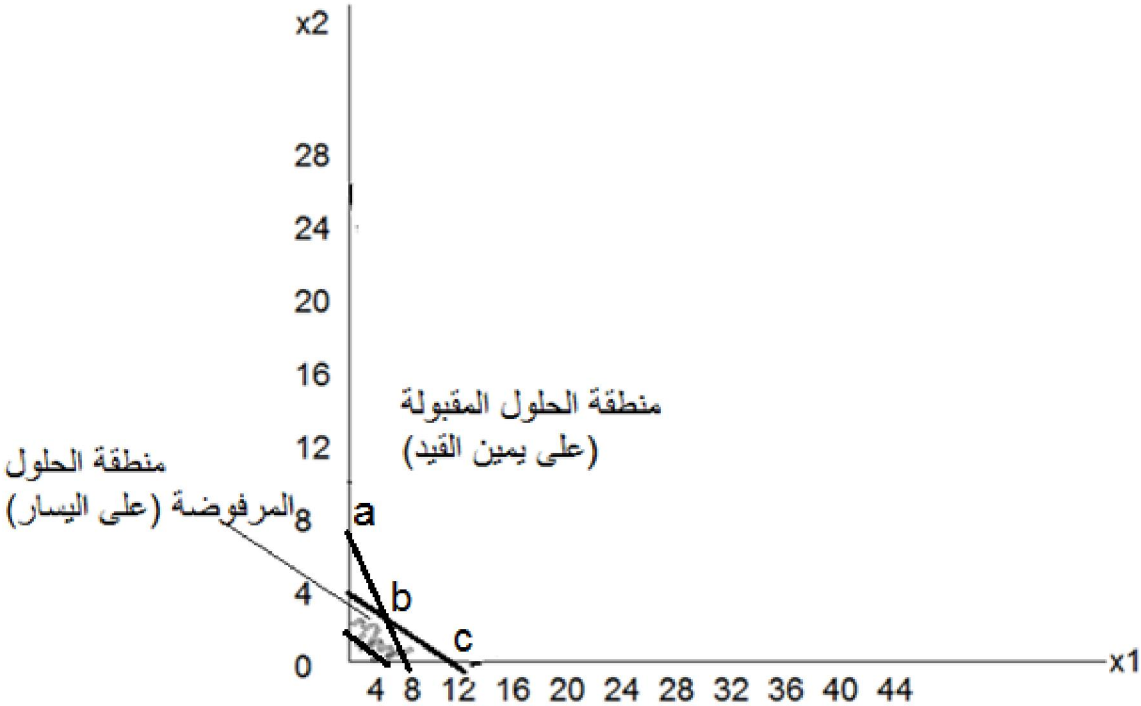
بالنسبة للقيد الثاني ($2x_1+4x_2=10$):

$$x_1=0\Rightarrow x_2=\frac{10}{4}=2.5.....(0,2.5)$$
$$x_2=0\Rightarrow x_1=\frac{10}{2}=5.....(5,0)$$

و بالنسبة للقيد الثالث ($x_1+x_2=8$):

$$x_1=0\Rightarrow x_2=8.....(0,8)$$
$$x_2=0\Rightarrow x_1=8.....(8,0)$$

نمثل كل القيود في معلم واحد و نحدد منطقة الحلول الممكنة:



نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة تقع على اليمين عكس حالة التعظيم؛ أما الحل الأمثل فهو حسب المبرهنة الهندسية أحد الرؤوس (abc)؛ و لمعرفة الحل الأمثل يمكننا تشكيل جدول لاختبار الرؤوس:

الرأس	التقاطع	الإحداثيات		التعويض في دالة الهدف
		x_1	x_2	$Min:(w)=2x_1+5x_2$
A	تقاطع القيد الثالث مع المحور العمودي	0	8	$w=2(0)+5(8)=40$
B	تقاطع القيد الأول مع القيد الثالث	6	2	$w=2(6)+5(2)=22$
C	تقاطع القيد الأول مع المحور الأفقي	12	0	$w=2(12)+5(0)=24$

يمكننا حساب إحداثيات النقطة (b) بجملة معادلتي القيد الأول و الثالث:

$$x_1+3x_2=12$$
$$-1(x_1+x_2)=8$$

بضرب المعادلة الثانية في (-1) و الجمع طرفا إلى طرف نجد:

$$2x_2=4$$
$$x_2=2\rightarrow x_1=6$$

لنلاحظ من الجدول أن الرأس (b) يعطي أدنى قيمة لدالة الهدف و هو ما يعني أنه الحل الأمثل؛ أي أن التركيبة المثلى ينبغي أن تتألف من (06) حبات برتقال و (02) حبة تفاح و هو ما يسمح بالحصول على كل الاحتياجات الغذائية اليومية المطلوبة و بأقل تكلفة ممكنة.

ثانيا: أسلوب السمبلكس Simplex Method

"إن هذه الطريقة أوجدها العالم الأمريكي جورج دانتزيغ Dantzig عام 1947 بتقديمها كأسلوب رياضي على درجة عالية من الكفاءة والدقة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية بغض النظر عن عدد المتغيرات التي تتضمنها المشكلة"[1]، إذ أن "الطريقة البيانية لا يمكن استخدامها عموما إلا لحل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي على متغيرين اثنين فقط "[2].

عند صياغة المشكلة رياضيا تكون عموما في صورة قانونية Canonical form أو مختلطة و يتعين قبل الإنطلاق في الحل تحويلها إلى الصيغة القياسية Standard form والتي تتحقق"إذا كانت كل القيود في صورة معادلات "[3] وذلك بعد إدخال متغيرات إضافية تسمى متغيرات الفجوة "Slack Variables" إذا كانت قيود المسألة على شكل أصغر أو يساوي($\leq$) ،وإلى جانبها متغيرات تسمى متغيرات اصطناعية Artificial Variables إذا كانت القيود على شكل اكبر أو تساوي ($\geq$) حيث "المتغير الاصطناعي يصبح متغيرا أساسيا في الحل الأساسي الممكن الأول "[4]، أما إذا كانت على شكل يساوي (=) فتضاف إليها المتغيرات الاصطناعية مباشرة .

ولتوضيح هذا الأسلوب نرجع إلى مثالنا السابق ونفرض أن المنتج قام بتوسيع الورشة فصارت مصنعا للصناعات التقليدية ينتج أربعة منتجات موائد كبيرة، موائد صغيرة، كراسي كبيرة، كراسي صغيرة باستخدام آلتي نجارة حديثتين، وبذلك صارت المعطيات كما يلي:

---

[1] بوشنافة احمد ،أساليب التحليل الكمي في عملية اتخاذ القرارات الإدارية ، حالة المؤسسة العمومية الاقتصادية الجزائرية .أطروحة مقدمة لنيل شهادة دكتوراه دولة في علوم التسيير ، جامعة الجزائر 2001، ص:188.

[2] محمد اسعد عبد الوهاب النيداني : مقدمة في بحوث العمليات .مكتبة ومطبعة الإشعاع الفنية .مصر،1998 ، ص: 90، بتصرف

[3] ريتشارد برونسون :نظريات ومسائل في بحوث العمليات ، سلسلة ملخصات شوم ، ترجمة د/حسن حسني الغباري ، الدار الدولية للنشر والتوزيع .القاهرة، 1988 ، ص:39 بتصرف يسير.

[4] Boualem Benmazouz، Recherche Opérationnelle de gestion، Algérie، Atlas Edition، 1995، p52. (بتصرف)

مثال: 1. 3:

المخرجات / المدخلات	مائدة كبيرة	مائدة صغيرة	كرسي كبير	كرسي صغير	الحد الأقصى الأسبوعي المتاح
الخشب ($م^2$)	2	1	3	2	400 $م^2$
القصبات الحديدية(م)	2	2	1	3	140 م
معالجة على الآلة الأولى (دقيقة)	15	10	12	15	2400 دقيقة
معالجة على الآلة الثانية (دقيقة)	5	7	15	10	2400 دقيقة
الربح الوحدوي دج	230	180	190	220	

المطلوب: ما هي التشكيلة المثلى التي تعظم الربح ؟

سنحاول حل المسألة موضحين منهجية أسلوب " السمبلكس ":

لنفرض أن x_1: هي الكمية المنتجة من الموائد الكبيرة، x_2: الكمية المنتجة من الموائد الصغيرة، x_3: الكمية المنتجة من الكراسي الكبيرة، x_4: الكمية المنتجة من الكراسي الصغيرة، وهي المتغيرات التي نبحث عن قيمها.

- نشكل أولا البرنامج الخطي المعبر عن المشكلة :

$$Max : (z) = 230x_1 + 180x_2 + 190x_3 + 220x_4$$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 140 \\ 15x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 15x_4 \leq 2400 \\ 5x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 10x_4 \leq 2400 \\ X_i \geq 0,\ i = 1...4 \end{cases}$$

- نحول المسألة إلى الصيغة القياسية Standard form، وذلك بتحويل المتراجحات إلى معادلات عن طريق إضافة متغيرات الفجوة Slack Variables:

$$Max:(z) = 230x_1 + 180x_2 + 190x_3 + 220x_4 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$$
$$z - 230x_1 - 180x_2 - 190x_3 - 220x_4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + S_1 = 400$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + S_2 = 140$$
$$15x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 15x_4 + S_3 = 2400$$
$$5x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 10x_4 + S_4 = 2400$$

نلاحظ أن متغيرات الفجوة (S_j) أضيفت إلى القيود من أجل ردم الفجوة بين طرفي المتراجحة؛ و لأن كل متغير يظهر في قيد أو مجموعة قيود يجب أن يظهر في دالة الهدف فقد تم إدخالها في دالة الهدف و لكن بمعاملات صفرية لأن هذه المتغيرات تعبر اقتصاديا عن الموارد المتاحة و لا يتأتى الربح في هذه الحالة ببيع الموارد و لكن ببيع المنتجات.

- نشكل الآن جدول السمبلكس الأول :

متغيرات خارج الأساس (معدومة)

T_1	X_1	X_2	X_3	X_4	B
S_1	2	1	3	2	400
S_2	2	2	1	3	140
S_3	15	10	12	15	2400
S_4	5	7	15	10	2400
Z	-230	-180	-190	-220	0

متغيرات الأساس

عمود الثوابت

معاملات دالة الهدف

قيمة دالة الهدف

يسمى هذا الجدول " جدول الحل الأساسي الأول " ؛ وتكون فيه 'متغيرات الفجوة' هي المتغيرات الأساسية تقرأ قيمها في عمود الثوابت، بينما تكون المتغيرات القرارية خارج الأساس أي معدومة أما معاملاتها فتقرأ في السطر الأسفل المقابل ، وبذلك يعبر هذا الجدول عن حالة اللاإنتاج التي تكون فيها كل الإمكانيات المتاحة طاقات عاطلة (عمود الثوابت) ما يعني أن قيمة دالة الهدف معدومة. نشير إلى أنه لكي يكون المتغير أساسيا ومن ثم مؤهلا لاحتلال الأساس في جدول الحل المبدئي؛ ينبغي أن يتوفر فيه شرطان: أن يظهر في قيد واحد فقط، و أن يكون معامله (+1).

تسعى خوارزمية السمبلكس إلى تحسين الحل الأساسي الأول عبر اختبار مجموعة من الحلول الأساسية إلى أن لا يبقى مجال للتحسين وذلك عند بلوغ الحل الأمثل.

" إنطلاقا من الجدول الأول نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الثاني وذلك باختيار المتغيرة التي تدخل الأساس و المتغيرة التي تخرج منه وكذلك 'عنصر الارتكاز' المعرف لاحقا "[1] وذلك كما يلي:

*بما إننا نسعى إلى تعظيم دالة الهدف ؛ فالمتغيرة التي تدخل الأساس هي ذات أعلى معامل في الدالة، لذلك نختار من سطر دالة الهدف أكبر قيمة (بالقيمة المطلقة) والعمود الذي تنتمي إليه يسمى "عمود الارتكاز"؛

*المتغيرة التي تخرج من الأساس هي المقابلة لأصغر قيمة موجبة ناتجة عن قسمة عمود الثوابت على عمود الارتكاز ، ويسمى سطرها " سطر الارتكاز"؛

*عنصر تقاطع عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز يسمى "عنصر الارتكاز" أو "البؤرة Pivot".

وبعد تبادل المواقع بين المتغيرة الداخلة إلى الأساس والخارجة منه نجري مجموعة من التحويلات قبل التطرق إليها نعود إلى الجدول الأول لنوضح كيفية تحديد المتغيرة الداخلة والخارجة وعنصر الارتكاز:

T_1	X_1	X_2	X_3	X_4	B	
S_1	2	1	3	2	400	400/2 = 200
S_2	2	2	1	3	140	140/2 = 70 ←
S_3	15	10	12	15	2400	2400/15= 160
S_4	5	7	15	10	2400	2400/5 = 480
Z	-230	-180	-190	-220	0	

في هذا الجدول: إخترنا أعلى قيمة (بالقيمة المطلقة) في سطر معاملات دالة الهدف (230) فكان ذلك "عمود الارتكاز"، ثم قسمنا عليه عمود الثوابت وأخذنا أصغر قيمة موجبة (70) فكان ذلك" سطر الارتكاز" ،ونتج عن تقاطعهما العنصر (2) وهو "عنصر الارتكاز"؛ هذا يعني أن خوارزمية السمبلكس ستحل المتغيرة x_1 محل المتغيرة S_2 ،ويتبع ذلك تحويلات كما يلي :

- في الجدول الجديد يحل "مقلوب عنصر الارتكاز" محل ''عنصر الارتكاز"
- يقسم باقي عناصر سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز
- باقي عناصر عمود الارتكاز يحل محلها نفس العناصر مقسومة على "سالب عنصر الارتكاز"
- تحول بقية قيم الجدول وفق طرق أبرزها " قاعدة المستطيلات" وهي كما يلي:

[1] محمد راتول ،مرجع سابق ص15 بتصرف.

	a			b
	c			d

$\longrightarrow$

1/a			b/a	
c/−a			$d' = d - \frac{c \times b}{a}$	

بعد تلك التحويلات نفحص من جديد معاملات سطر دالة الهدف ونعيد الكرة كما في السابق، إلى أن تصبح قيم السطر الأخير موجبة أو معدومة ؛ وهو ما يعني أننا وصلنا إلى جدول الحل الأمثل وفي مثالنا يكون الجدول الثاني كما يلي:

T_2	S_2	X_2	X_3	X_4	B	
S_1	−1	−1	2	−1	260	260/2=130 ⟵
X_1	0.5	1	0.5	1.5	70	70/0.5=140
S_3	−7.5	−5	4.5	− 7.5	1350	1350/4.5=300
S_4	−2.5	2	12.5	2.5	2050	2050/12.5=164
Z	115	50	−75 ↑	125	16100	

في هذا الجدول تم حساب العنصر a_{32} (العنصر الواقع في السطر الثالث و العمود الثاني) مثلا كما يلي: $a_{32}=10-(15*2/2) = -5$ ؛

وكذا بقيمة العناصر باستثناء عناصر سطر الارتكاز التي قُسمت على عنصر الإرتكاز، و عمود الإرتكاز الذي قُسمت عناصره على سالب عنصر الإرتكاز، وتم في هذا الجدول إدخال x_1 إلى برنامج الإنتاج بحجم يقرأ في العمود الأخير (70) وحدة منتجة فقفزت قيمة دالة الهدف من الصفر إلى 16100 و.ن يحصل عليها إما بطريقة المستطيلات السابق شرحها أو بالتعويض مباشرة في دالة الهدف (70*230=16100).

لازلنا نلاحظ هنا وجود معاملات سالبة في سطر دالة الهدف؛ وهذا يعني أن إمكانية تحسينها لا تزال قائمة؛ نعيد إذن إجراء الخطوات السابقة، وسنسعى الآن إلى إيجاد الجدول الثالث باختيار أكبر قيمة ضمن القيم السالبة من سطر دالة الهدف (بالقيمة المطلقة) و في الجدول أعلاه توضيح لعملية اختيار عمود الارتكاز و سطر الارتكاز و البؤرة؛ نلاحظ أن المتغير المرشح لدخول الأساس في هذه المرحلة هو (x_3):

T_3	S_2	X_2	S_1	X_4	B
X_3	-0.5	-0.5	0.5	-0.5	130
X_1	0.75	1.25	-0.25	1.75	5
S_3	-5.25	-2.75	-2.25	-5.25	765
S_4	3.75	8.25	-6.25	8.75	425
Z	77.5	12.5	37.5	87.5	25850

في هذا الطور من الحل أدخلت الخوارزمية إلى البرنامج الإنتاجي x_3 بكمية قدرها 130 فارتفعت قيمة دالة الهدف إلى (25850 و ن)؛ كما نلاحظ أن كافة معاملات دالة الهدف صارت أكبر من أو تساوي الصفر وهو ما يعني أننا أمام الحل الأمثل؛ إذن البرنامج الإنتاجي الأمثل للمصنع هو أن يتم إنتاج:

(05) "موائد كبيرة" و(130) "كرسيا كبيرا" أسبوعيا؛ ويتخلى عن إنتاج "الموائد الصغيرة" و "الكراسي الصغيرة"، أما أقصى ربح يمكن الوصول إليه في ظل الإمكانات المتاحة فهو: (25850 ون).

وعن تأثير هذا البرنامج على الإمكانات الإنتاجية للمصنع نعوض بالكميات السابقة في قيود المسألة فنجد ما يلي:

$$2(5)+0+3(130)+2(0) = 400$$
$$2(5)+2(0)+1(130)+3(0) = 140$$
$$15(5)+10(0)+12(130)+15(0) = 1635$$
$$5(5)+7(0)+15(130)+10(0) = 1975$$

هذا يعني أن الكمية المتاحة من الخشب أُستخدمت بالكامل (400م^2) وكذلك بالنسبة للكمية المتاحة من القصبات المعدنية (140م)، أما الآلة الأولى فيستهلك من طاقتها (1635دقيقة) و تبقى لديها طاقة عاطلة قدرها (2400-1635=765 دقيقة)، و أما الآلة الثانية فيستهلك من طاقتها (1975 دقيقة) و تبقى لديها طاقة عاطلة قدرها (2400- 1975 = 425 دقيقة)، كما يمكن قراءة هذه النتائج مباشرة من جدول الحل الأمثل كما يلي :

- وجود كل من (X_2) و (X_4) خارج الأساس يعني أن الكميتين معدومتان؛ أي التخلي عن إنتاج الموائد الصغيرة و الكراسي الصغيرة؛
- وجود كل من(S_1) و (S_2) خارج الأساس (أي يساويان الصفر) يعني أن المورد الأول و الثاني لهذا المصنع تم استخدامهما بالكامل؛ لأن هذه المتغيرات (Sj) تعبر عن "الطاقة العاطلة".

– تقرأ قيم متغيرات الأساس (X_3،X_1،S_3،S_4) مباشرة في العمود الأخير (B) و تضم متغيرين قراريين يعبران عن الكميات التي ينبغي إنتاجها من المنتجين المذكورين؛ ومتغيرين يعبران عن الطاقة العاطلة في المورد الثالث (الآلة الأولى) والمورد الرابع (الآلة الثانية) على التوالي.

أما في مسألة التدنية Minimisation؛ فإن كيفية إستخدام هذا الأسلوب لا تتغير كثيرا إذ تبقى الخطوات ذاتها باستثناء ما يلي :

– عند تحويل البرنامج إلى الصيغة القياسية تطرح متغيرات الفجوة من أجل تحويل المتراجحات إلى معادلات؛ ويضاف في الوقت نفسه ما يعرف بـ"المتغيرات الاصطناعية Artificial Variables"؛ وفي الغالب تكون هي متغيرات الأساس في الجدول المبدئي لأن معاملات متغيرات الفجوة تكون حينها (‎-1).

– إجراء تعديلات على معاملات سطر دالة الهدف سنراها في مثال؛

– المتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي – على خلاف حالة التعظيم – ذات أصغر معامل ضمن القيم الموجبة في سطر دالة الهدف، أما المتغيرة الخارجة فهي –كما في السابق – المقابلة لأصغر نسبة موجبة. وللتوضيح نرجع إلى مثال التدنية الذي أوردناه سابقا (النموذج II):

$$
\begin{aligned}
&Min:(w) = 2x_1 + 5x_2 \\
&x_1 + 3x_2 \geq 12 \\
&2x_1 + 4x_2 \geq 10 \\
&x_1 + x_2 \geq 08 \\
&(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)
\end{aligned}
$$

نلاحظ أن المسألة تتكون من متغيرين؛ وبذلك يمكن حلها بالطريقة البيانية غير أننا سنختار حلها بأسلوب "السمبلكس":

نحول المسألة إذن من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية؛ ونبدأ من القيود التي تصبح كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 - S_1 + a_1 = 12 \\
&2\mathrm{x}_1 + 4\mathrm{x}_2 - \mathrm{S}_2 + \mathrm{a}_2 = 10 \\
&x_1 + x_2 - S_3 + a_3 = 8 \\
&x_i \geq 0,\ a_i \geq 0
\end{aligned}
$$

في هذه المرحلة قمنا بطرح متغيرات الفجوة Sj من القيود لتحويلها إلى معادلات ولما كانت غير صالحة لأن تكون متغيرات أساسية لكون معاملها (‎-1) أضفنا ما يعرف بالمتغيرات الوهمية.

إن المتغيرات الوهمية (Aj) ليس لها معنى إقتصادي؛ لكن يستعان بها لتلعب دور المتغيرات الأساسية إن فقدت، ووجود أحدها في الأساس يعني أننا خارج منطقة الحلول الممكنة.

نجري تحويلا على الدالة الاقتصادية كما يلي :

$$Min:(w)=2x_1+5x_2+0S_1+Ma_1+0S_2+Ma_2+0S_3+Ma_3$$

نلاحظ أن المتغيرات الاصطناعية(a_1,a_2,a_3) قد أخذت المعامل(M)، والذي يفترض فيه أن يأخذ قيمة كبيرة جدا بإشارة موجبة، والغرض هنا هو عدم السماح للمتغيرات الاصطناعية – والتي هي مجرد متغيرات مساعدة – بالظهور في جدول الحل النهائي لأنها ستكون أول مرشح للخروج من الأساس بحكم ضخامة معاملها الذي يتناقض مع طبيعة الهدف (تدنية).

نوجد كالعادة جدول السمبلكس المبدئي:

	T_0	X_1 (2)	X_2 (5)	S_1 (0)	S_2 (0)	S_3 (0)	B	
(M)	a_1	1	3	-1	0	0	12	12/1=12
(M)	a_2	2	4	0	-1	0	10	10/2=5 ←
(M)	a_3	1	1	0	0	-1	8	8/1=8
	w^a	4m-2 ↑	8m-5	-M	-M	-M		

نلاحظ أننا أضفنا إلى رمز الدالة (w) حرفا هو (a) ليشير إلى أننا حولنا دالة الهدف إلى 'دالة هدف وهمية' لأن وجود المتغيرات الوهمية في الأساس يجعل من قيمة هذه الدالة غير ذات دلالة عملية لذلك استغنينا عن حساب قيمتها في هذه المرحلة.

أما معاملات سطر دالة الهدف فتم حسابها كما يلي:

$$C_j^a=(\sum C_i'.\alpha_{ij})-C_j$$

حيث:

C_j^a : هو المعامل الواقع في العمود (j) من سطر الدالة الوهمية؛

C_i' : هو معامل المتغير الأساسي الواقع في السطر (i) معامله في دالة الهدف؛ نلاحظ في الجدول أعلاه أننا وضعنا بجانب كل متغير يظهر في الأساس معامله في دالة الهدف؛

α_{ij} : العنصر الواقع في السطر(i) و العمود (j) من مصفوفة المعاملات؛

C_j : معامل المتغير الواقع في العمود (j) في دالة الهدف؛ و في الجدول أعلاه وضعنا بجوار كل متغير معامله في دالة الهدف.

مثلا تم حساب المعامل الأول من سطر دالة الهدف الوهمية (المقابل للمتغير X_1) كما يلي:

$$1.M+2.M+1M-2=4M-2$$

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف لم يتم احتسابها في هذه المرحلة لأنها غير عملية بسبب وجود المتغيرات الوهمية في الأساس.

و كما فعلنا في حالة التعظيم نبدأ بتحديد المتغير الذي سيدخل الأساس فيتحدد عمود الإرتكاز؛ و لهذا الغرض ننظر ضمن القيم الموجبة و نختار أصغر قيمة منها؛ و في مثالنا القيم الموجبة في سطر الدالة هي:
[(4m-2)، (8m-5)] و بما أن المقدار (M) يفترض أنه كبير جدا فإنه يلغي القيم التي بجواره، نلاحظ أن أصغر قيمة ضمنها هي: (4m-2) و على أساسها حددنا عمود الإرتكاز و هو ما يعني أن المتغير الذي سيدخل الأساس هو (X_1)، و بعد قسمة عناصر عمود الثوابت على عناصر عمود الإرتكاز و أخذ أصغر قيمة موجبة تحدد سطر الإرتكاز و هو ما يعني أن المتغير الوهمي (a_2) سيغادر الأساس، و سنقوم بعد ذلك بالتحويلات نفسها السابق شرحها في حالة التعظيم، و نستمر في تحسين الحل حتى تصبح كل عناصر سطر دالة الهدف أصغر من أو تساوي الصفر و نتخلص من كل المتغيرات الوهمية التي في الأساس، و عليه يكون الجدول الموالي كما يلي:

T_1	a_2	X_2	S_1	S_2	S_3	B	
a_1	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	7	7÷1/2=14
X_1	$\frac{1}{2}$	2	0	$-\frac{1}{2}$	0	5	نتجنب القسمة على السالب
a_3	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	-1	3	3÷1/2=6 ←
w^a	-2m+1	-1	-m	m-1 ↑	-m		

لا يمكن إعطاء تفسير عملي للحل الوارد في هذا الجدول نظرا لبقاء متغير وهمي أو أكثر في الأساس؛ غير أنه مادامت عناصر السطر الأخير لم تعد جميعا سالبة أو معدومة فذلك يعني أننا ما زلنا لم نصل إلى الحل الأمثل؛ مرة أخرى ننظر ضمن القيم الموجبة في سطر دالة الهدف لنختار أصغرها (لدينا هنا: "m-1" فقط) إذن سيكون عمودها هو عمود الإرتكاز و هو ما يعني أن (S_2) هو الذي سيدخل الأساس في الطور القادم من سيرورة الحل؛ نلاحظ أننا أهملنا قسمة العنصر الثاني من عمود الثوابت على نظيره من عمود الارتكاز لكون الأخير سالبا و هو ما لا يسمح له بأن يكون عنصر ارتكاز، كما نلاحظ أن المتغير المرشح للخروج من الأساس هو (a_3)؛ و بتطبيق القواعد السابق شرحها نحصل على بقية أطوار الحل كما يلي:

T_2	a_2	X_2	S_1	a_3	S_3	B	
a_1	1	2	−1	1	1	4	4/1=4
X_1	0	1	0	1	−1	8	نهمل القسمة على السالب
S_2	−1	−2	0	2	−2	6	نهمل القسمة على السالب
w^a	−m+1	2m−3	−m	−2m+2	m−2		

T_3	a_2	X_2	S_1	a_3	a_1	B	
S_3	1	2	−1	1	1	4	4/2=2 ←
X_1	1	3	2	2	1	12	12/3=4
S_2	1	2	−2	4	2	14	14/2=7
w^a	−2m+3	+1	−2	−3m+4	−m+2		

لنلاحظ أننا في هذا الطور (T_3)تخلصنا من كل المتغيرات الوهمية التي كانت في الأساس؛ و هو ما يعني أن هذا الجدول يعبر عن حل عملي (يمكن إعطاؤه قراءة عملية)؛ و هو ينص على ($x_1=12, x_2=0$)، أما المتغيرات (S_2, S_3) فهي تعبر عن الفائض في القيدين الثاني و الثالث و يمكن التعويض بقيم ($x_1=12, x_2=0$) في القيود للتحقق من الأمر:

$$Min:(w) = 2x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\geq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 10 \\ x_1 + x_2 &\geq 08 \\ (x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 1(12)+3(0) &= 12 \\ 2(12)+4(0) &= 24 \\ 1(12)+0 &= 12 \end{aligned}$$

نلاحظ وجود فائض قدره (04) في القيد الثالث، و فائض (14) في القيد الثاني.

لا يزال لدينا معامل موجب في سطر دالة الهدف (+1) إذن نكمل الحل:

T_4	a_2	S_3	S_1	a_3	a_1	B
X_2	½	1/2	−1/2	1/2	1/2	2
X_1	−1/2	−3/2	7/2	1/2	−1/2	6
S_2	0	−1	−1	3	1	10
	−2m+5/2	−1/2	−3/2	−3m+7/2	−m+3/2	

في هذا الطور صارت جميع معاملات السطر الأخير تحقق شرط الأمثلية (سالبة أو معدومة) و هو ما يعني أن هذا هو الحل الأمثل؛ نقرأ قيم متغيرات الأساس في العمود (B):

$$x_1 = 6$$
$$x_2 = 2$$

نلاحظ وجود فائض في القيد الثاني قدره $(S_2 = 10)$؛ و هي النتائج ذاتها التي حصلنا عليها بالطريقة البيانية.

المبحث الثالث: حل الصيغ المختلطة

إن النماذج التي تعاملنا معها إلى حد الآن هي صيغ 'قانونية' أي إما الدالة في حالة تعظيم و كل القيود على شكل أصغر أو يساوي، و إما الدالة في حالة تدنية مع كون جميع القيود على شكل أكبر أو يساوي؛ و هناك ما يسمى 'الصيغ المختلطة' أي تلك التي تختلط فيها القيود بين أكبر أو يساوي، أصغر أو يساوي و معادلات؛ و سنتطرق هنا إلى بعض الأمثلة لتوضيح كيفية التعامل مع هذه الصيغ:

مثال:1. 4:

يقوم منتج حلويات بإنتاج نوعين من الكعك (A) و (B) باستخدام نوعين من المدخلات: طحين و مزيج مكون من الزبدة و المضافات الغذائية.

تحتاج حبة الكعك من النوع (A) إلى وحدة واحدة من الطحين و وحدتين (02) من المزيج؛

و تحتاج حبة الكعك من النوع (B) إلى ثلاث (03) وحدات من الطحين و أربع (04) وحدات من المزيج؛

يحصل المنتج على تموين يومي بالطحين و المزيج قدره 66 وحدة، 90 وحدة على التوالي، و نظرا لسرعة تلف المكون الثاني (المزيج) فإن سياسة المنتج تقوم على ضرورة استنفاد الكمية المتوفرة منه بالكامل في اليوم نفسه.

و نظرا لطبيعة الطلب (اشتراطات تتعلق بالزبائن) يجب أن لا تقل الكمية المنتجة من الكعك (B) عن (10) وحدات يوميا، كما يبلغ الربح الناجم عن بيع الوحدة الواحدة من النوعين (02) وحدة نقدية و (05) وحدة نقدية على التوالي.

المطلوب: ما هو البرنامج الإنتاجي اليومي الذي يجعل ربح هذا المنتج في أقصى حد ممكن؟

لنقم أولا ببناء النموذج المعبر عن المشكلة:

لدينا (x_1, x_2) متغيران يعبران عن الكميتين المنتجتين من الكعكين (A, B) على الترتيب؛ تعبر دالة الهدف عن تعظيم الربح لذلك نصوغها كما يلي:

$$Max:(z) = 2x_1 + 5x_2$$

أما القيود فهي ثلاثة: قيدان يتعلقان بالمدخلات اللازمة للإنتاج و قيد يتعلق بالسوق؛

نصوغ قيد الطحين كما يلي:

$$x_1 + 3x_2 \le 66$$

و نصوغ قيد المزيج كما يلي:

$$2x_1 + 4x_2 = 90$$

لنلاحظ أننا اشترطنا التساوي في القيد الثاني لأن معطيات المسألة تبين أن المنتج لا يرغب في الاحتفاظ بأي فائض من هذا المزيج السريع التلف؛ أي أن الكمية المستخدمة في الإنتاج يجب أن تساوي الكمية المتوفرة منه.
يتعلق القيد الأخير بحالة الطلب السوقي الذي يفرض عدم قلة الكمية المنتجة من الكعك (B) عن (10) وحدات؛ و هو ما يفرض القيد التالي:

$$x_2 \ge 10$$

و هكذا يصبح لدينا النموذج التالي:

$$Max:(z) = 2x_1 + 5x_2$$
$$x_1 + 3x_2 \le 66$$
$$2x_1 + 4x_2 = 90$$
$$x_2 \ge 10$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

لنلاحظ أن النموذج المتحصل عليه نموذج غير قانوني (صيغة مختلطة) يمكننا حله بالطريقة البيانية لأنه يتضمن متغيرين؛ كما يمكن حله بطريقة سمبلكس و سنقوم بحله بكلتا الطريقتين:

- الحل بالطريقة البيانية:

$$x_1 + 3x_2 = 66$$
$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 66/3 = 22 \rightarrow (0,22)$$
$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 66 \rightarrow (66,0)$$

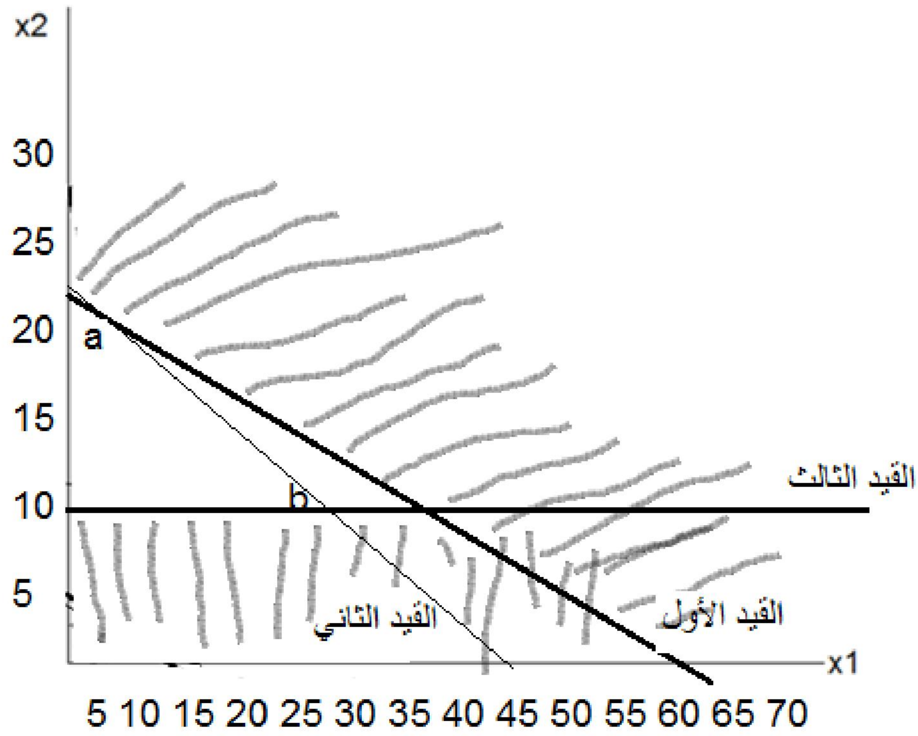
هكذا حصلنا على إحداثيات نقطتين لتمثيل القيد الأول.

$$2x_1 + 4x_2 = 90$$
$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 90/4 = 22.5 \rightarrow (0,22.5)$$
$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 90/2 = 45 \rightarrow (45,0)$$

أما القيد الثالث فنحوله إلى معادلة ($x_2 = 10$)

بعد الحصول على إحداثيات النقاط اللازمة لتمثيل القيود نشكل الرسم البياني:

....



نلاحظ أن المنطقة المرفوضة بالنسبة للقيد الأول تقع على اليمين لأن اتجاه القيد هو (أصغر أو يساوي) بينما بالنسبة للقيد الثالث تقع إلى أسفل لأن اتجاهه (أكبر أو يساوي)؛ أما بالنسبة للقيد الثالث فإن كل نقطة خارج المستقيم نفسه هي مرفوضة لأنه على شكل معادلة؛ و مما سبق نجد أن المنطقة المشتركة بين القيود الثلاثة هي النقاط الواقعة على القطعة المستقيمة [ab] حيث أن الرأس (a) ناتج عن تقاطع القيد الأول مع الثاني، أما الرأس (b) فناتج عن تقاطع القيد الثاني مع الثالث، و لتحديد احداثيات كل رأس نشكل في كل مرة جملة معادلتين:

بالنسبة للرأس (a):

$$x_1 + 3x_2 = 66$$
$$2x_1 + 4x_2 = 90$$

بضرب طرفي المعادلة الأولى في (2−) و الجمع طرفا إلى طرف نحصل على:

$$-2x_2 = -42$$
$$x_2 = 21$$

و بالتعويض في إحدى المعادلتين و لتكن الأولى مثلا نحصل على قيمة المتغير الآخر:

$$x_1 + 3(21) = 66$$
$$x_1 = 3$$

أي أن إحداثيات الرأس (a) هي: (3، 21)، نعوض بها في دالة الهدف:

$$z = 2(3) + 5(21) = 111$$

بالنسبة للرأس (b):

$$2x_1 + 4x_2 = 90$$
$$x_2 = 10$$
$$\Rightarrow x_1 = 25$$

نعوض بتلك الإحداثيات في دالة الهدف:

$$z = 2(25) + 5(10) = 100$$

نلاحظ أن الرأس (a) هو الذي يعطي الحل الأمثل و يقضي بإنتاج (03) حبات كعك من النوع (A) و (21) حبة من النوع (B) و هو ما يسمح بالحصول على أعظم ربح (111 وحدة نقدية).

لنقم الآن بحل المسألة نفسها باستخدام خوارزمية سمبلكس:

مثال:1. 5: إرجع إلى بيانات المسألة الواردة في المثال السابق (1. 4) و أوجد الحل باستخدام خوارزمية سمبلكس.

نقوم أولا بإيجاد الصيغة القياسية للمسألة عن طريق إضافة المتغيرات الإضافية إلى القيود (متغيرات الفجوة أو المتغيرات الوهمية) حسب الحاجة:

$$x_1 + 3x_2 + S_1 = 66$$
$$2x_1 + 4x_2 + a_2 = 90$$
$$x_2 - S_3 + a_3 = 10$$

نلاحظ أن القيد الأول عندما كانت إشارته أصغر أو يساوي أضفنا إليه متغير الفجوة من أجل مساواة الطرف الأصغر مع الأكبر؛ أما القيد الثاني فبما أنه على شكل مساواة لا يوجد ما نضيفه أو نطرحه من أجل تحقيق المساواة لذلك أضفنا إليه مباشرة المتغير الوهمي؛ أما القيد الثالث فلما كانت إشارته أكبر أو يساوي نحتاج إلى طرح متغير الفجوة لتحقيق المساواة؛ و لما كان معامل متغير الفجوة (1−) فهو غير مناسب ليكون في الأساس لذلك احتجنا إلى إضافة متغير وهمي ليلعب دور المتغير الأساسي بالنسبة للقيد الثالث.

الآن ندخل كل المتغيرات الإضافية في دالة الهدف:

$$Max:(Z) = 2x_1 + 5x_2 + 0S_1 - Ma_2 + 0S_3 - Ma_3$$

لنلاحظ أننا أدخلنا المتغيرات الوهمية بمعاملات كبيرة سالبة لكي تكون معاكسة للهدف (تعظيم) و هو ما يسمح للخوارزمية بسرعة التخلص منها، يمكننا الآن تشكيل جدول السمبلكس الأولي:

		(2)	(5)	(0)		
	T_0	X_1	X_2	S_3	B	
(0)	S_1	1	3	0	66	66/3=22
(-m)	A_2	2	4	0	90	90/4=22.5
(-m)	A_3	0	1	-1	10	10/1=10 ××
	Z	-2m-2	-5m-5	m		

↑

قمنا باختيار عمود الإرتكاز على أساس اختيار أكبر قيمة (بالقيمة المطلقة) في سطر دالة الهدف؛ بعد ذلك نقوم بالتحويلات السابق شرحها:

T_1	X_1	A_3	S_3	B	
S_1	1	/	3	36	36/3=12 ××
A_2	2	/	4	50	50/4=12.5
X_2	0	/	-1	10	نتجنب القسمة على السالب
Z	-2m-2	/	-4m-5		

↑

لنلاحظ أننا أهملنا حساب عناصر عمود المتغير الوهمي الذي خرج من الأساس لأن الخوارزمية لن تقبل بعودته إلى الأساس مرة أخرى

T_2	X_1	A_3	S_1	B	
S_3	1/3	/	1/3	12	12÷1/3=36
A_2	2/3	/	-4/3	2	2÷2/3=3 ××
X_2	1/3	/	1/3	22	66
Z	-2/3m-1/3	/	4/3m+5/3		

↑

T_3	A_2	A_3	S_1	B
S_3	/	/	1	11
X_1	/	/	-2	3
X_2	/	/	1	21
Z	/	/	1	

نلاحظ أن جميع معاملات سطر دالة الهدف صارت أكبر من أو تساوي الصفر (يمكننا إغفال حساب عناصر أعمدة المتغيرات الوهمية الخارجة من الأساس)؛ و عليه فهذا هو جدول الحل الأمثل؛ و يعبر عن النتائج السابقة نفسها أما المتغير ($S_3 = 11$) فيعبر عن الفائض في القيد الثالث أي الكمية الإضافية المنتجة من المنتج (B) فوق الحد الأدنى المشترط (و هو 10).

رأينا في المثال السابق صيغة مختلطة في حالة تعظيم و سنرى الآن صيغة مختلطة في حالة تدنية:

مثال: 1. 6:

لنرجع إلى معطيات المسألة الواردة في المثال (1. 4) و لنفترض أن دالة الهدف التي تم بناؤها تعبر عن تكاليف و ليس عن أرباح؛ و عليه يكون الهدف هو تدنية التكاليف بدل تعظيم الأرباح مع بقاء كل المعطيات و الإشتراطات الأخرى على حالها فيصبح النموذج السابق كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&Min:(W) = 2x_1 + 5x_2 \\
&x_1 + 3x_2 \le 66 \\
&2x_1 + 4x_2 = 90 \\
&x_2 \ge 10 \\
&x_i \ge 0, i = 1,2
\end{aligned}
$$

سنقوم بحل النموذج بأسلوب سمبلكس:

نقوم كالعادة بإيجاد الصيغة القياسية و التي تتحقق عندما تصبح كل القيود على شكل معادلات و ذلك بعد إدخال المتغيرات الإضافية:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 + S_1 = 66 \\
&2x_1 + 4x_2 + a_2 = 90 \\
&x_2 - S_3 + a_3 = 10
\end{aligned}
$$

ندخل المتغيرات الإضافية في دالة الهدف كما يلي:

$$Min:(W) = 2x_1 + 5x_2 + 0S_1 + Ma_2 + 0S_3 + Ma_3$$

لنلاحظ أن المتغيرات الوهمية تأخذ هذه المرة معاملا كبيرا و لكن بإشارة موجبة لكي تكون معاكسة للهدف (تدنية)؛ و هذه هي القاعدة العامة؛ ندخل المتغير الوهمي في دالة الهدف بمعامل كبير يأخذ إشارة معاكسة لاتجاه دالة الهدف ففي حالة التدنية ندخله بمعامل كبير موجب و في حالة التعظيم ندخله بمعامل كبير سالب؛ و ذلك ليسهل على خوارزمية سمبلكس التخلص منه.

نشكل الآن جدول سمبلكس الأولي:

		(2)	(5)	(0)		
	T_1	X_1	X_2	S_3	B	
(0)	S_1	1	3	0	66	66/1=66
(M)	A_2	2	4	0	90	90/2=45 ××
(M)	A_3	0	1	-1	10	لا نقسم على الصفر
	W	2m-2	5m-5	-m		

من ضمن القيم الموجبة في السطر الأخير اخترنا أقل قيمة فتحدد عمود الإرتكاز؛ نكمل التحويلات:

T_1	A_2	X_2	S_3	B	
S_1	-1/2	1	0	21	21/1=21
X_1	1/2	2	0	45	45/2=22.5
A_3	0	1	-1	10	10/1=10 ××
W	-m-1	m-1	-m		

T_2	A_2	A_3	S_3	B
S_1	/	/	1	11
X_1	/	/	2	25
X_2	/	/	-1	10
W	/	/	-1	

بما أن معاملات السطر الأخير صارت تحقق شرط الأمثلية (أقل من أو تساوي الصفر) فهذا هو الحل الأمثل ($x_1 = 25, x_2 = 10$) و بالتعويض في دالة الهدف نجد أن قيمتها ($W = 2(25)+5(10)=100$)، يشير متغير الفائض (S_1) إلى بقاء طاقة عاطلة (فائض) في القيد الأول قدره (11) وحدة و يمكن التعويض في القيد بقيم المتغيرات للتحقق من الأمر.

المبحث الرابع: حالات خاصة في البرمجة الخطية:

قد نصادف في مسائل البرمجة الخطية بعض الحالات الخاصة أبرزها:

1- برنامج غير عملي No Feasible Solution

ويطلق أيضا على هذه الحالة " مسألة غير ممكنة الحل"، وتحصل هذه المشكلة عموما عندما يكون هناك تناقض بين قيدين على الأقل؛ لنلاحظ مثلا نظام القيود التالي:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ x_2 \geq 3 \\ x1\ ,\ x2 \geq 0 \end{cases}$$

إذ كيف يمكن للمتغير (x_2) أن يكون اكبر أو يساوي (3) ويحقق في الوقت نفسه القيد الأول؟!

إن التمثيل البياني لهذه المسألة يكشف عدم وجود مساحة مشتركة تحقق القيدين معا؛ أي لا توجد منطقة حل، و هو ما يجعل منها مسألة غير ممكنة الحل، إن هذه الحالة تدل على خطأ في بناء النموذج أي في الصياغة الرياضية للمشكلة.

بالنسبة لخوارزمية السمبلكس؛ تظهر هذه المشكلة عندما يكون لدينا متغير وهمي Artificial Variable واحد أو أكثر في الأساس في جدول الحل الأمثل؛ لأن دور هذا النوع من المتغيرات يقتصر على المساعدة في تركيب حل مبدئي قاعدي؛ ولا ينبغي أن تظهر في النهاية داخل الأساس.

2- حالة الحلول المثلى البديلة Alternative Optimal Solutions

نكون أمام هذه الحالة إذا كان لدينا حل تختلف فيه قيم المتغيرات القرارية (Xj) مع بقاء قيمة دالة الهدف ثابتة وتحصل هذه الحالة –عند الحل بالطريقة البيانية– لما يلامس مستقيم دالة الهدف رأسين في آن واحد من رؤوس منطقة الحلول الممكنة، أما علامة هذه الحالة بالنسبة لخوارزمية سمبلكس فهي أن يظهر الصفر (0) في سطر دالة الهدف في الجدول الأمثل؛ فيمكن حينها اختيار عمود الصفر كعمود ارتكاز و هو ما يؤدي إلى دخول متغير إلى الأساس و خروج متغير منه أي تغير تركيبة الأساس و بالتالي تغير الحل مع بقاء قيمة دالة الهدف ثابتة.

3- حالة منطقة حلول ممكنة غير محدودة Unbounded Feasible Solution

بالنسبة إلى الطريقة البيانية تكون منطقة الحلول الممكنة غير محدودة في الصيغ القانونية من نوع تدنية (لاحظ التمثيل البياني الخاص بمسائل التدنية في المثال 1. 2)؛ غير أن عدم محدوديتها في هذه الحالة لا يطرح إشكالا لأن

الإهتمام ينصب على الرؤوس القريبة من نقطة المبدأ؛ أما لو كان عدم المحدودية يتعلق بمسألة تعظيم فلن يمكن حينها تحديد قيم المتغيرات بالضبط لأن الإهتمام يصبح حينها منصبا على أبعد نقطة في منطقة الحلول الممكنة

و هو ما يجعل قيمة دالة الهدف لانهائية.

بالنسبة لخوارزمية سمبلكس تحصل هذه المشكلة عندما يتعذر وجود عنصر يمكن أن يكون عنصر ارتكاز؛ نظرا لكون جميع عناصر عمود الإرتكاز أقل أو تساوي الصفر ما يجعل اختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس متعذرا، لأن الخوارزمية تشترط مقابلتها لأصغر نسبة موجبة بين عمود الثوابت وعمود الارتكاز.

4- الإنحلال Degeneracy

و تسمى أيضا "عدم الإنتظام" أو "التفسخ"؛ تحصل هذه الحالة عندما نكون أمام متغيرتين مرشحتين للخروج أو للدخول إلى الأساس، وهنا نختار واحدة عشوائيا و نكمل الحل.

5- حالة حياد أحد القيود Redundancy

قد نصادف في بعض المسائل حالات يكون فيها أحد القيود زائدا عن الحاجة، أي أن وجوده غير ضروري؛ لنلاحظ نظام القيود التالي:

$$X_1 \geq 18$$

$$X_1 \geq 26$$

نلاحظ بأن تحقق القيد الثاني يعني مباشرة تحقق القيد الأول تلقائيا؛ و يظهر التمثيل البياني للقيدين أن القيد الأول لا يشارك في تشكيل منطقة الحلول الممكنة؛ فهو حيادي لا يؤثر في المسألة لأنه محجوب بالثاني؛ ولذلك يستحسن حذفه من المسألة؛ و هكذا فإن كل قيد حيادي يمكن حذفه من المسألة دون أي تأثير على النتائج.

المبحث الثالث:المسألة المرافقة (الثنوية) Dual Problem:

"من الملاحظ أنه لكل مسألة أصلية في البرمجة الخطية مسألة ثنائية مرافقة"[1] ؛ وتسمى "المسألة الثنائية" أو "المرافقة" أو "الثنوية" كما تسميها بعض المراجع العربية "مشكلة الازدواجية"، حيث أن " لكل مسألة أصلية صورة ثانية يطلق عليها المسألة الثنائية؛ تستعمل نفس المعطيات التي تصاغ بها المسألة الأصلية إلا أن المسألتين تختلفان اختلافا جذريا من حيث المعنى الاقتصادي لمتغيراتها "[2].

[1] Robert Faure‹ précis de recherche opérationnelle‹ dunod‹ paris1978.p213.

[2] حمودي حاج صحراوي، رياضيات المؤسسة، دار النشر جيطلي، الجزائر،2014، ص:59 بتصرف.

و رغم أن "البرنامج الأصلي وبرنامجه المرافق يشكلان لعبة استراتيجية ذات مجموع صفري؛ وهذا ما لا تقابله إلا نادرا قيمة اقتصادية عملية"[3]، إلا أن المسألة المرافقة كثيرا ما تكتسي – من ناحية تحليل الموقف الإنتاجي – أهمية بالغة.

نحصل على البرنامج المرافق (المسألة الثنائية) كما يلي:

أ- إذا كانت المسألة الأولية (الأصلية) primal problem من نوع (Min)؛ فهي في المسألة الثنائية dual problem من نوع (Max) وتتحول المتراجحات من($\geq$) إلى ($\leq$)، و العكس بالعكس؛

ب- متغيرات المسألة الثنائية تأخذ عادة الرموز(Y_i) بدل (X_i)؛ وتكون بعدد القيود؛

ت- عناصر العمود الأخير في المسألة الأصلية (عمود الثوابت) تصبح معاملات دالة الهدف في المسألة الثنائية؛ كما تتحول معاملات دالة الهدف في الأولى إلى عناصر عمود الثوابت في الثانية؛

ث- مصفوفة معاملات القيود للمسألة الثنائية هي منقول مصفوفة معاملات القيود في المسألة الأصلية [4].

وللتوضيح نرجع إلى المسألة الواردة في المثال (1. 3) السابق حلها لإيجاد مسألتها المرافقة :

المسألة الأصلية

$$Max(z) = 230x_1 + 180x_2 + 190x_3 + 220x_4$$

$$s/c\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 140 \\ 15x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 15x_4 \leq 2400 \\ 5x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 10x_4 \leq 2400 \\ x_i \geq 0, i = 1...4 \end{cases}$$

المسألة الثنائية (المرافقة)

$$Min(w) = 400y_1 + 140y_2 + 2400y_3 + 2400y_4$$

$$s/c\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 15y_3 + 5y_4 \geq 230 \\ y_1 + 2y_2 + 10y_3 + 7y_4 \geq 180 \\ 3y_1 + y_2 + 12y_3 + 15y_4 \geq 190 \\ 2y_1 + 3y_2 + 15y_3 + 10y_4 \geq 220 \\ x_i \geq 0, i = 1...4 \end{cases}$$

يتم حل المسألة المرافقة (الثنائية) بطريقتين بارزتين: طريقة السمبلكس الخاصة بالمسائل الثنائية وطريقة التكامل بين متغيرات المسألة الأصلية ومتغيرات المسألة الثنائية؛ وسنركز هنا على الطريقة الثانية.

تعتمد طريقة التكامل بين المسألتين؛ على الحل الأمثل الخاص بالمسألة الأصلية إنطلاقا من العلاقات التي تربط بين متغيرات الأولى ومتغيرات الثانية.

فأما متغيرات المسألة الأصلية فهي –كما سبق بيانه -: المتغيرات القرارية (Xi)، ومتغيرات الطاقة العاطلة أو الفائض(Sj) وأما متغيرات المسألة الثنائية فهي :(Y_i) وT_j وهي متغيرات مكملة للمتغيرات الأولى على الترتيب وفق العلاقات التالية :

---

[3] Arnold kaufmann: Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle.T1.Dunod، paris، 1970 p48.
[4] Jacher.J.Gardelle:Programmation linéaire.Dunod، paris، 1978 p36.

$$S_i = 0 \Rightarrow y_i \geq 0$$
$$S_i > 0 \Rightarrow y_i = 0$$
$$X_j > 0 \Rightarrow t_j = 0$$
$$X_j = 0 \Rightarrow t_j > 0$$

يمكن الحصول على جدول الحل الأمثل الخاص بالمسألة الثنائية بطريقة مباشرة اعتمادا على الجدول الأمثل للأصلية وفق الخطوات التالية:

- عناصر العمود الأخير في الحل الأمثل للأصلية تصبح في سطر دالة الهدف للثنائية؛
- عناصر سطر دالة الهدف للأصلية تصبح في العمود الأخير للثنائية؛
- متغيرات الأساس في الأصلية تحل محلها المتغيرات المكملة لها لكن خارج الأساس في الجدول الأمثل للثنائية (فمثلا: X_1 متغيرها المكمل هو T_1، S_2 متغيرها المكمل هو Y_2)؛
- المتغيرات التي تكون خارج الأساس في الجدول الأمثل للأصلية تحل محلها المتغيرات المكملة لها لكن في الأساس في الجدول الأمثل للثنائية؛
- المصفوفة الموجودة في الجدول الأمثل للأصلية يحل محلها منقولها مضروبا في (-1) في الجدول الأمثل للثنائية،

منبهين إلى أنه عند الحل الأمثل تتساوى قيمة دالة الهدف للمسألتين.

دعنا نرجع إلى المثال السابق لنحول الجدول الأمثل للأصلية إلى جدول أمثل للثنائية:

الحل الأمثل للأصلية :

T_p	S_2	X_2	S_1	X_4	B
X_3	-0.5	-0.5	0.5	-0.5	130
X_1	0.75	1.25	-0.25	1.75	5
S_3	-5.25	-2.75	-2.25	-5.25	765
S_4	3.75	8.25	-6.25	8.75	425
Z	77.5	12.5	37.5	87.5	25850

الحل الأمثل للثنائية :

T_d	T_3	T_1	Y_3	Y_4	B
Y_2	0.5	-0.75	5.25	-3.75	77.5
T_2	0.5	-1.25	2.75	-8.25	12.5
Y_1	-0.5	0.25	2.25	6.25	37.5
T_4	0.5	-1.75	5.25	-8.75	87.5
W	130	5	765	425	25850

إن أهمية المسألة الثنائية تكمن في التفسير الاقتصادي لمتغيراتها؛ والذي هو – في مثالنا –كما يلي:

Y_3: يسمى المتغير (Y_i) "سعر الظل Shadow Price " ويعبر عن قيمة المورد بالنسبة للمؤسسة،لدينا هنا:

$y_3 = 0$: هذا يعني أن البرنامج الإنتاجي الأمثل يقتضي وجود طاقة عاطلة في المورد الثالث (آلة النجارة الأولى) أي أن إضافة طاقة جديدة في هذا المورد لا يرفع قيمة الحل الأمثل؛

$y_4 = 0$: أي أن إضافة طاقة جديدة في المورد الرابع (آلة النجارة الثانية؛ مثل رفع ساعات التشغيل أو إضافة آلة من نفس النوع) لا يرفع قيمة الحل الأمثل؛

$y_1 = 37.5$: هذا يعني أن البرنامج الإنتاجي الأمثل يستهلك كامل المورد الأول (الخشب) وكل وحدة إضافية (متر مربع) يحصل عليه المصنع يرفع قيمة الربح بـ 37.5 ون؛

$y_2 = 77.5$: أي أن المصنع استهلك كل الكمية المتوفرة من المورد الثاني (القصبات الحديدية) وكل وحدة إضافية (متر) يحصل عليه يرفع الربح بـ77.5 ون؛

عند المقارنة بين "سعر الظل" و "سعر السوق " نجد حالتين:

– سعر السوق < سعر الظل: وهنا يكون على المنتج أن يقتني كمية إضافية من المدخلات، لأن كل وحدة إضافية ينتج عنها ربح صافي قدره (سعر الظل – سعر السوق).

– سعر السوق > سعر الظل: في هذه الحالة على المنتج أن يفكر في تحويل كمية من المدخلات إلى السوق دون تحويلها (على شكل مواد خام)؛ إذ أن كل وحدة منزلة إلى السوق ينتج عنها ربح إضافي صافي قدره: (سعر السوق– سعر الظل).

أما المتغير (t_j) فيسمى " تكلفة الفرصة البديلة " Opportunity Cost" وهو يعبر عن التكلفة التي على المنتج أن يتحملها إذا قرر أن ينتج سلعة يقتضي البرنامج الإنتاجي الأمثل عدم إنتاجها، ولدينا هنا:

$t_3=0$،$t_1=0$: أي أن الحل الأمثل يقتضي إنتاج كميات معينة من السلعة الأولى (الموائد الكبيرة) والسلعة الثالثة (الكراسي الكبيرة) وبالتالي ليست هناك تكلفة فرصة بديلة لإنتاج السلعتين؛

$t_2 = 12.5$: وهو يعني أن البرنامج الأمثل يقتضي عدم إنتاج السلعة الثانية (الموائد الصغيرة) ؛ لكن إذا أراد المصنع إنتاجها لأسباب ما (كالحفاظ على شريحة من الزبائن مثلا) فعليه أن يتوقع انخفاضا في الربح قدره (12.5 ون) مقابل كل وحدة منتجة؛

$t_4 = 87.5$: أي أن الحل الأمثل يقتضي عدم إنتاج أية وحدة من السلعة الرابعة (الكراسي الصغيرة)، فإذا تقرر إنتاجها ينخفض الربح بمقدار (87.5) ون مقابل كل كرسي صغير منتج.

المبحث السادس: تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

بعد الوصول إلى جدول الحل الأمثل في البرمجة الخطية يطرح تساؤل مفاده: ما مدى تأثر الحل الأمثل بتغير ما في معطيات المسألة؛ كتغير معاملات دالة الهدف، أو تغير المتاح من مدخلات العملية الإنتاجية، إذ أن " هذا الحل يُتصور عادة في ظروف مؤكدة، و لكن ما يستوجب على الباحث النظر إليه هو الحالات المستقبلية التي قد يكتنفها الغموض أو التي لم يتم استيعابها أثناء التحليل"[1]؛ هذا ما يكشفه "تحليل الحساسية"؛ لذلك يسمى هذا التحليل أيضا " تحليل ما بعد الأمثلية Post-Optimality Analysis "، وهو أسلوب يهدف إلى قياس حساسية الحل الأمثل لتغير معطيات المسألة دونما حاجة إلى إعادة حلها من جديد وما يصاحب ذلك من متاعب حسابية تتناسب طرديا مع عدد القيود والمتغيرات.

يمكن أن نسجل – في هذا الصدد – الحالات التالية:

1- تغير قيمة الموارد المتاحة (الطرف الأيمن من القيود)

Changes in the Right Hands of the Constraints

2- تغير معاملات دالة الهدف

Changes in the Coefficients of the Objective Function

3- تغير في عناصر مصفوفة المعاملات Changes In The Coefficients Matrix

4- إضافة متغير أو متغيرات جديدة إلى المسألة

Addition of New Variable(s) To the LP

5- حذف متغير أو متغيرات من المسألة Variable(s) Push Out of the Model

6- إضافة قيد جديد أو قيود في البرنامج الخطي the Addition of New Constraint(s)

7- حذف قيد من النموذج Constraint(s) Push Out of the Model

وسنركز هنا على الحالات التالية: التغير في معاملات دالة الهدف، التغير في الموارد، إخراج قيد من المسألة:

1- التغير في معاملات دالة الهدف :

نفرض – في هذه الحالة – أن أحد معاملات دالة الهدف تغير بمقدار معين ونريد معرفة أثر ذلك على الحل الأمثل؛ و نميز هنا بين حالتين: التغير في معامل متغير من متغيرات الأساس، والتغير في معامل متغير خارج الأساس؛ لنرجع إلى جدول الحل الأمثل الخاص بالمثال السابق لتوضيح الأمر:

[1] عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، دار وائل، عمان، الأردن، ط2، 2006 ،ص: 63

T	S_2	X_2	S_1	X_4	B
X_3	-0.5	-0.5	0.5	-0.5	130
X_1	0.75	1.25	-0.25	1.75	5
S_3	-5.25	-2.75	-2.25	-5.25	765
S_4	3.75	8.25	-6.25	8.75	425
Z	77.5	12.5	37.5	87.5	25850
Z^*	(77.5-0.5k)	(12.5-0.5k)	(37.5+0.5k)	(87.5-0.5k)	25850+130K

نفترض أن هناك تغيرا مقداره (k) سيطرأ على الربح الخاص بالمنتج الثالث (X_3)، تصبح حينها دالة الهدف الجديدة :

$$\text{Max } (z^*) = 230x_1 + 180x_2 + (190+k)x_3 + 220x_4$$

لاحظ كيف تغير سطر دالة الهدف؛ حيث أضفنا إلى عناصره معاملات سطر المتغير المعني مضروبة في قيمة التغير (k).

لكي يبقى الحل الأمثل ثابتا ينبغي أن تتحقق الشروط التالية :

$87.5-0.5k > 0$، $37.5+0.5k > 0$ ، $12.5-0.5k > 0$ ، $77.5 - 0.5k > 0$

فلو كانت إحدى النتائج لا تحقق الشرط (أكبر من الصفر) لتغير الأساس (خروج المتغير من الأساس) وبالتالي يتغير الحل الأمثل، نستنتج من هذه الشروط ما يلي:

$k < 175$، $k > -75$، $k < 25$، $k < 155$

ومنه نحصل على المجال التالي :] 25 ، -75 [$k \in$ ومعنى هذا أنه لكي يبقى الحل الأمثل دون تغير (بقاء تركيبة متغيرات الأساس على حالها) ينبغي أن لا يصل التغير في سعر "الكرسي الكبير" إلى (75 ون) انخفاضا أو (26 ون) ارتفاعا؛ أي أن سعره ينبغي أن يكون محصورا في المجال:[215،116].

نفرض الآن أن المعامل الذي تغير هو الربح الخاص بالمنتج الثاني (X_2) بمقدار (K):

لكي لا يتغير الحل الأمثل هنا ينبغي أن يتحقق ما يلي :

T_p	S_2	X_2	S_1	X_4	B
X_3	-0.5	-0.5	0.5	-0.5	130
X_1	0.75	1.25	-0.25	1.75	5
S_3	-5.25	-2.75	-2.25	-5.25	765
S_4	3.75	8.25	-6.25	8.75	425
Z	77.5	12.5	37.5	87.5	25850
Z^*	77.5	12.5-k	37.5	87.5	25850

$12.5-k > 0$

$\Leftarrow k < 12.5$

أي أن الزيادة في الربح الخاص بـ "المائدة الصغيرة" ينبغي أن تكون أقل من 12.5 ون؛ وهي ذاتها تكلفة الفرصة البديلة الخاصة بهذه السلعة.

2- التغير في الموارد:

ندرس هنا أثر التغير في مورد من الموارد على البرنامج الإنتاجي الأمثل؛ لنفرض أن المورد الثاني (القصبات الحديدية) قد تغير بالمقدار (k):

T	S_2	X_2	S_1	X_4	B	
X_3	-0.5	-0.5	0.5	-0.5	130	130-0.5k
X_1	0.75	1.25	-0.25	1.75	5	5+0.75k
S_3	-5.25	-2.75	-2.25	-5.25	765	765-5.25k
S_4	3.75	8.25	-6.25	8.75	425	425+3.75k
Z	77.5	12.5	37.5	87.5	25850	25850 +77.5k

علما أن هذا المورد يمثله المتغير (S2) الذي يعني وجوده خارج الأساس أن المورد تم استخدامه كله.

ليبقى الحل الأمثل ثابتا يجب أن يتحقق ما يلي :

$$130-0.5k > 0 \Rightarrow k < 260$$

$$5+0.75k > 0 \Rightarrow k > -6.67$$

$$765-5.25k > 0 \Rightarrow k < 145.71$$

$$425+3.75k > 0 \Rightarrow k > 113.33$$

ومنه نحصل على المجال التالي : [145.7،-6.67] k Є] أي أن المخزون الأسبوعي من القصبات الحديدية ينبغي أن يكون أكبر من 133.33مترا (140-6.67) وأن لا يزيد على 285.7 مترا(140+145.7) لكي لا يتغير البرنامج الإنتاجي الأمثل.

دعنا الآن نفترض أن المورد الرابع هو الذي تغير بمقدار(k):

T	S_2	X_2	S_1	X_4	B	
X_3	-0.5	-0.5	0.5	-0.5	130	
X_1	0.75	1.25	-0.25	1.75	5	
S_3	-5.25	-2.75	-2.25	-5.25	765	
S_4	3.75	8.25	-6.25	8.75	425	425+k
Z	77.5	12.5	37.5	87.5	25850	

ليبقى الحل الأمثل ثابتا يجب أن يتحقق ما يلي:

$$425+k > 0$$
$$\Rightarrow k > -425$$
أي أن: $k \in]-425, +\infty[$،

وهذا يعني أننا نستطيع أن نوسع نشاط آلة النجارة الثانية كما نشاء، غير أنه لا يمكن أن نقلصه إلى مستوى 1975دقيقة/أسبوع (2400-425)؛ وبعبارة أخرى: إذا خفضنا وقت تشغيل آلة النجارة الثانية بأكثر من (84.8) دقيقة يوميا يتغير البرنامج الإنتاجي السابق.

3- إخراج قيد من المسألة:

نميز هنا بين وضعين: إذا كان متغير الفجوة (S) الخاص بهذا القيد داخل الأساس فليس هناك من إجراء إلا حذف ذلك السطر من جدول الحل الأمثل.

أما إذا كان متغير الفجوة الخاص بالقيد المراد حذفه خارج الأساس؛ فنقوم بالخطوات التالية:

- نعتبر عموده ' عمود ارتكاز ' مهما تكن القيمة التي تقابله في سطر دالة الهدف
- ندخله إلى الأساس آخذا مكان المتغير المقابل لأصغر قيمة موجبة ناتجة عن قسمة عمود الثوابت على ذلك العمود
- نحذف بعد ذلك سطره، ونواصل الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

لنفرض في المثال السابق أن " الخشب" لم يعد مادة نادرة بحيث تشكل قيدا بالنسبة للمصنع؛ فكيف يؤثر هذا التغير على البرنامج الإنتاجي ؟

لقد قمنا هنا باختيار المتغير الذي يمثل ذلك القيد كعمود إرتكاز ، وكما يظهر من الجدول ؛ المتغير المرشح للخروج هو (X_3).

T	S_2	X_2	S_1	X_4	B
X_3	-0.5	-0.5	0.5	-0.5	130
X_1	0.75	1.25	-0.25	1.75	5
S_3	-5.25	-2.75	-2.25	-5.25	765
S_4	3.75	8.25	-6.25	8.75	425
Z	-77.5	-12.5	- 37.5	- 87.5	-25850

نحذف السطر كما هو موضح ونجري التحويلات التي سبق شرحها ثم نواصل الحل .

T	S_2	X_2	X_3	X_4	B
~~S_1~~	~~-0.5~~	~~-0.5~~	~~0.5~~	~~-0.5~~	~~130~~
X_1	0.75	1.25	-0.25	1.75	5
S_3	-5.25	-2.75	-2.25	-5.25	765
S_4	3.75	8.25	-6.25	8.75	425
Z	-77.5	-12.5	- 37.5	- 87.5	-25850

الفصل الثاني: مسائل النقل The Transportation Problem

المبحث الأول: مقدمة حول مسائل النقل

إن "مسألة النقل" هي حالة خاصة في البرمجة الخطية؛ تتضمن بشكل عام البحث عن حل أمثل لمشكلة نقل منتج أو مجموعة منتجات من مصادر مختلفة إلى مصبات (وجهات) متعددة، حيث "تظهر مشكلات النقل عادة في تخطيط توزيع سلع و خدمات محدودة من مجموعة من المصادر (وحدات إنتاج، مخازن...إلخ) إلى مجموعة من المراكز حسب الإحتياج (نقاط بيع، مخازن، زبائن...إلخ)"[1]؛ فهو نموذج يفترض "وجود عدد من المصادر الإنتاجية(مصانع، شركات...) مقدارها (n)؛ و عدد من المراكز التسويقية مقدارها(m)، يشترط النموذج بشكله الأولي ضرورة المساواة بين حجم السلع في المصادر و حجم الطلب على السلع من قبل المراكز، و أن هدف النموذج هو تحقيق أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل"[2]، وللتوضيح نقدم المثال التالي:

مثال: 2. 1:

لنفرض أن شركة لإنتاج البلاط لها ثلاث مصانع (F_1،F_2، F_3) وتقوم بنقل منتجها إلى أربعة مخازن تمثل نقاط توزيع مختلفة (S_1،S_2، S_3، S_4).

فإذا كانت طاقة المصانع هي على التوالي 85،40، 60 وحدة أسبوعيا (علما أن وحدة القياس هي 1000م^2) واحتياج المخازن هو:70، 25، 50 ، 40 وكانت تكاليف النقل من كل مصنع إلى كل مخزن كما يلي:

المصبات (المخازن) / المصادر (المصانع)	S1	S2	S3	S4
F1	49	54	56	29
F2	60	32	36	33
F3	45	28	31	42

المطلوب: ما هي خطة التوزيع المثلى ؟

إن هدف الشركة هو تدنية تكاليف التوزيع والتي تظهر في الجدول السابق، فمثلا يكلف نقل وحدة واحدة من المصنع الأول (F1) إلى المخزن الأول (S1): 49 دينارا.

[1] رابح بوقرة، إستعمال بحوث العمليات كنماذج مساعدة في اتخاذ القرار، دراسة حالة مؤسسة EARA التابعة لشركة Algal بالمسيلة، أطروحة لنيل شهادة دكتوراه دولة في العلوم الإقتصادية، جامعة فرحات عباس سطيف، كلية العلوم الإقتصادية و علوم التسيير،2006، ص: 105

[2] فتحي خليل حمدان و آخرون، مقدمة في بحوث العمليات، دار وائل، عمان، الأردن، ط4، 2004، ص: 115

إذا فرضنا بأن الكميات المنقولة من كل مصدر إلى كل وجهة هي X_{ij}؛ تكون لدينا دالة الهدف:

$$Min(z)=49X_{11}+54X_{12}+56X_{13}+29X_{14}+60X_{21}+32X_{22}+36X_{23}+33X_{24}+45X_{31}+28X_{32}+31X_{33}+42X_{34}$$

حيث أن X_{11} هي الكمية المنقولة من المصدر الأول إلى المصب الأول، وبضربها في التكلفة الوحدوية للنقل (49) نحصل على تكاليف نقل المنتج من ذلك المصدر إلى ذلك المصب.

ولدينا نوعان أساسيان من القيود: مجموعة تتعلق باحترام طاقة كل مصنع، وأخرى تتعلق باحترام احتياجات كل مخزن؛ فأما القيود الثلاثة الأولى فهي على الشكل:

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14} = 60$$
$$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24} =40$$
$$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34} = 85$$

وأما المجموعة الثانية فهي:

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}= 40$$
$$X_{12}+X_{22}+X_{32}= 50$$
$$X_{13}+X_{23}+X_{33}= 25$$
$$X_{14}+X_{24}+X_{34} = 70$$
$$X_{ij} \geq 0، i = 1\ldots3، j = 1\ldots4$$

وهي مسألة برمجة خطية ذات قيود على شكل معادلات؛ يمكن حلها بإضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود للحصول على الصيغة القياسية، غير أن "نموذج النقل" يسمح بحل المسألة بأسلوب بسيط دون اللجوء إلى أسلوب السمبلكس:

- نسعى أولا إلى تشكيل حل أساسي أولي Initial feasible solution؛ ويتم ذلك بعدة طرق:

  * طريقة الركن الشمالي الغربي North West Corner Method

  * طريقة أدنى تكلفة Least Cost Method

  * طريقة فوجل Vogel's Method

وسنختار هنا الطريق الثانية 'أدنى تكلفة' للحصول على الجدول المبدئي؛ و "اعتماد هذه الطريقة يتطلب الأخذ بمبدأ أقل كلفة بالخلية و هذا يعني تعبئة الخلية التي تتضمن أصغر كلفة نقل قياسا إلى تكاليف النقل بالخلايا الأخرى في الجدول"[1]؛ و عليه نحصل على الجدول التالي:

المخازن / المصانع	S1	S2	S3	S4	إجمالي الإنتاج
F1	49	54	56	29 60	60
F2	60 30	32	36	33 10	40
F3	45 10	28 50	31 25	42	85
إجمالي الطلب	40	50	25	70	185 / 185

لقد قمنا في الجدول المبدئي السابق بتوزيع الكميات المتوفرة والتي تظهر في العمود الأخير لإشباع الكميات المطلوبة والتي تظهر في السطر الأخير منطلقين من أدنى تكلفة (28) أي الخانة (F_3،S_2) أين تم إشباع طلب هذا المخزن وهو (50) وحدة وبقي لدى المصنع طاقة توريد قدرها (85−50=35) يستطيع أن يمون بها مخزنا آخر، ثم الخانة التي تليها (F_1،S_4) وهكذا؛ مع السعي إلى إشباع الطلب دون تجاهل الكمية المتاحة (الموازنة بين احتياج العمود والكمية المتوفرة في السطر).

أما إجمالي تكاليف التوزيع وفق الخطة المبدئية فهو:

$$(31x25)+(28x50)+(45x10)+(33x10)+(60x30)+(29x60)=6495$$

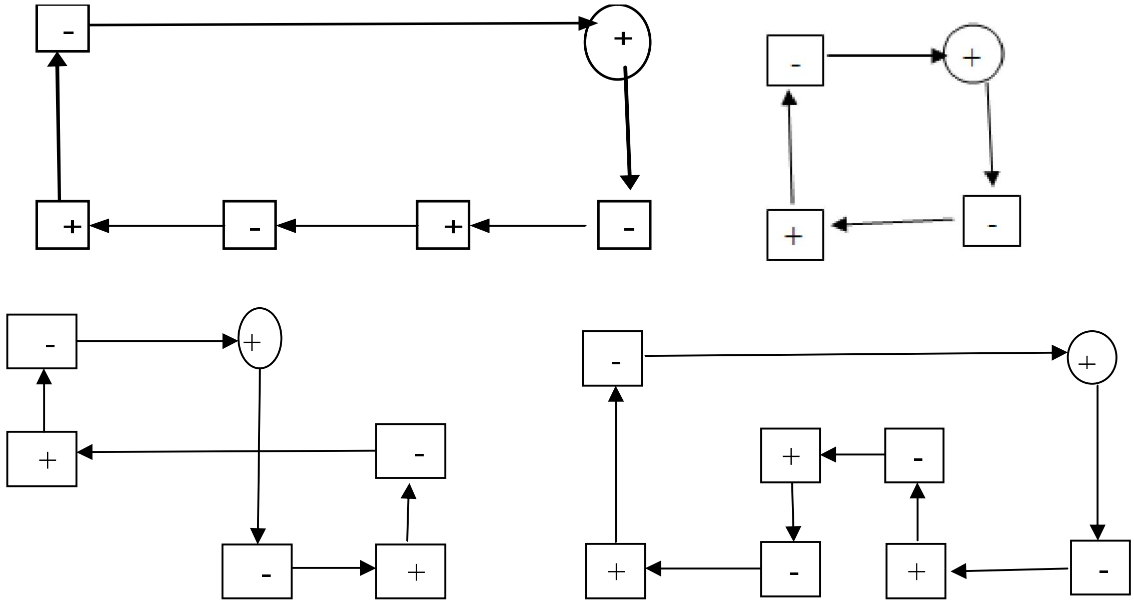
- يأتي بعد ذلك مرحلة محاولة تحسين الحل Improving the solution ومن ثم اختبار الأمثلية Optimality Test؛ وهكذا حتى الوصول إلى الحل الأمثل .

ولدى محاولة تحسين الحل يطرح تساؤل مفاده :هل يمكن إستغلال الخلايا الفارغة في جدول الحل المبدئي بحيث يؤدي ذلك إلى تخفيض التكاليف الإجمالية للتوزيع؟

[1] السعدي رجال، بحوث العمليات في الإدارة-المالية-التجارة، منشورات جامعة منتوري، قسنطينة، 2005، ص: 53

من أجل تقييم الخلايا الفارغة نتبع ما يعرف ب" طريقة القفز على الصخور Stepping stone Method " والتي تقوم على إعارة وحدة واحدة من خلية مشغولة إلى خلية فارغة وملاحظة أثر ذلك على إجمالي التكاليف؛

و ينشأ نتيجة لتطبيق هذه الطريقة ما يعرف بـ "المسار"؛ و يتألف مسار كل خلية من عدة خلايا كلها مملوءة باستثناء الخلية الخاضعة للتقييم، و يتخذ المسار عدة أشكال أبرزها:



ترمز الدائرة في الأشكال أعلاه للخلية المراد تقييمها وتكون خلية فارغة و تحمل دوما إشارة موجبة؛ أما بقية المربعات فتشير إلى بقية الخلايا التي تشكل المسار و تكون كلها من الخلايا المملوءة و تتناوب بين السالب

و الموجب بحيث كل إشارة سالبة تلغيها أخرى موجبة و كل إشارة موجبة تلغيها أخرى سالبة ليبقى في النهاية التوازن قائما داخل كل سطر و كل عمود، و لتوضيح ما سبق نبدأ بتقييم الخلايا الفارغة في مثالنا:

- تقييم الخلية الفارغة (F1,S1):

	S_4	S_1	
	29 (−) 60	49 (+) 0	F_1
	33 (+) 10	60 (−) 30	F_2

لنلاحظ أن الأسهم تشكل ما يعرف ب "مسار" الخلية المعنية بالتقييم؛ و لنلاحظ أن أركان المسار هي دوما خلايا مملوءة باستثناء الخلية المراد تقييمها.

إذا نقلنا وحدة إلى(S_1،F_1) ننقص وحدة من الخلية (F_2،S_1) لنحافظ على توازن العمود(مجموع طلب S_1 ينبغي ألا يفوق 40).

وبطرح وحدة من (F_2،S_1) يختل السطر F_2؛ لذلك نضيف وحدة إلى الخلية (F_2،S_4) وهو ما يؤدي إلى اختلال العمود S_4؛ نطرح إذن وحدة من الخلية S_4،(F_1) وهكذا ينشأ المسار السابق.

أما التأثير على التكلفة فيحسب كما يلي:

$49-60+33-29 = -7$ وهذا يعني أن نقل وحدة واحدة إلى هذه الخلية يترتب عليه تخفيض التكاليف ب 07دنانير.

- تقييم الخلية الفارغة ($F2$،S_2):

S_2	S_1	
32 (+) 0	60 (−) 30	F2
28 (−) 50	45 (+) 10	F3

$+32-28+45-60=-11$

أي أن تخصيص وحدة واحدة في هذه الخلية يخفض التكاليف ب11دينار.

- تقييم الخلية الفارغة $F2$،S_3):

S_3	S_1	
36 (+) 0	60 (−) 30	F2
31 (−) 25	45 (+) 10	F3

$+36-31+45-60 = -10$

أي أن تخصيص وحدة واحدة إلى هذه الخلية يخفض التكاليف ب10دينار.

- تقييم الخلية(F_3،S_4):

	S4	S1
F2	33 (−) 10	60 (+) 30
F3	42 (+) 0	45 (−) 10

نلاحظ أن تخصيص وحدة واحدة لهذه الخلية ينجر عنه ارتفاع تكاليف التوزيع ب (+42−45+60−33 = +24) دينار.

- تقييم الخلية F_1،S_2: مسار هذه الخلية هو كما يلي:

S4	S3	S2	S1	
29 (−) 60		54 (+) 0		F1
33 (+) 10			60 (−) 30	F2
		28 (−) 50	45 (+) 10	F3

54−29+33−60+45−28 =+15

- تقييم الخلية $(F_1،S_3)$:

56-29+33-60+45-31=+14

S4	S3	S2	S1	
29 (−) 60	56 (+) 0			F1
33 (+) 10			60 (−) 30	F2
	31 (−) 25		45 (+) 10	F3

إتضح لنا من عملية تقييم الخلايا الصفرية أن الخلية $(F_2،S_2)$ تحقق أكبر تخفيض للتكاليف (أكبر قيمة ضمن القيم السالبة بالقيمة المطلقة)، لذا ينبغي استغلالها؛ لكن يثار سؤال: ما عدد الوحدات التي ينبغي نقلها لهذه الخانة؟

للإجابة؛ نرجع إلى مسار الخلية، ونبحث تحديدا عن الخلايا ذات الإشارة السالبة:

الخلايا ذات الإشارة السالبة هي: $(F_2،S_1)$ و $(F_3،S_2)$ الكميات الموجودة بها هي على التوالي: 30، 50 وحدة.

يتم اختيار الخلية ذات الكمية الأقل؛ أي$(F_2،S_1)$، ننقل محتواها (30 وحدة) إلى الخلية $(F_2،S_2)$ ونطرح نفس الكمية من$(F_3، S_2)$ ؛ ونضيفها إلى $(F_3،S_1)$ للحفاظ على التوازن، فيصبح المسار:

S_2	S_1	
32 30	60 0	F2
28 20	45 40	F3

أي نحرك تلك الكمية على مسار الخلية حيثما وجد الموجب نضيفها و حيثما وجد السالب نطرحها.

وهكذا يصبح جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي:

المخازن / المصانع	S1	S2	S3	S4	إجمالي الإنتاج
F1	49	54	56	29 / 60	60
F2	60 / 0	32 / 30	36	33 / 10	40
F3	45 / 40	28 / 20	31 / 25	42 / 0	85
إجمالي الطلب	40	50	25	70	185 / 185

وتكلفة هذه الخطة هي:

$(60x29)+(30x32)+(10x33)+(40x45)+(20x28)+(25x31) = 6165$

أي انخفضت تكاليف النقل بـ: 6495-6165 = 330 دينارا.

في الجدول الجديد؛ نقوم مجددا بتقييم الخلايا الصفرية:

- (F_1)،S_1:

	S1	S2	S3	S4
F1	49 (+)			29 (−) 60
F2		32 (−) 30		33 (+) 10
F3	45 (−) 40	28 (+) 20	31	

29-33+32-28+45-49+

= 4+

- (F_1،S_2):

	S2	S4
F1	54 (+) 0	29 (−) 60
F2	32 (−)	33 (+)

+54−32+33−29 = + 26

- (F_1،S_3):

S4	S3	S2	
29 (−) 60	56 (+) 0		F1
33 (+) 10		32 (−) 30	F2
	31 (−) 25	28 (+) 20	F3

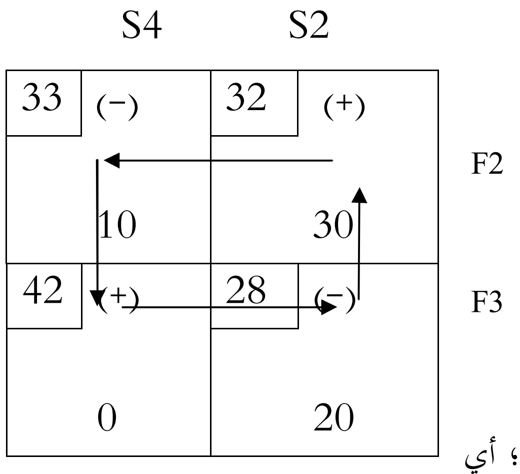
+56−31+28−32+33−29 = +25

- (F_2،S_3):

S3	S2	
36 (+) 0	32 (−) 30	F2
31 (−) 25	28 (+) 20	F3

+36−31+28−32= +1

- (F_3،S_4):



$42-28+32-33 = +13$

ومن عملية التقييم نلاحظ أنه لم تبق هناك فرصة لتحسين الحل؛ أي تخفيض التكاليف أكثر (لأن جميع مؤشرات التحسن σ_{ij} موجبة) حيث يعبر ذلك الرمز عن قيمة مؤشر التحسن للخلية الناجمة عن تقاطع السطر (i) مع العمود (j)،أما شرط الأمثلية فهو ($\forall i, \forall j : \sigma_{ij} \geq 0$) وعليه فالجدول السابق هو خطة التوزيع المثلى و تنص على:

- يحصل المخزن الرابع على كامل إنتاج المصنع الأول (60 وحدة)؛ وبما أنه يحتاج إلى (70) وحدة يكمل الباقي (10 وحدات) من عند المصنع الثاني.

- يحصل المخزن الثالث على كامل احتياجاته (25 وحدة) من المصنع الثالث؛ الذي يبقى لديه فائض (60=25-85) يوجهه إلى المخازن الأخرى.

- يحصل المخزن الثاني على كامل فائض المصنع الثاني بعد تزويده للمخزن الرابع بـ(10) وحدات (10-40 =30)؛ ولإكمال حاجته يأخذ (20) وحدة من المصنع الثالث الذي كان قد بقي لديه كما قلنا (60) وحدة؛ وبالتالي يبقى لديه بعد ذلك (40)وحدة (40 = 20-60).

- توجه الـ (40) وحدة تلك إلى المخزن الأول ؛ وهي مساوية تماما لاحتياجه.

أما إجمالي تكاليف التوزيع حسب هذه الخطة فهو:6165 دينارا.

بعد العرض السابق يجدر أن نسجل الملاحظات التالية:

أ- على غير ما يمكن أن تدل عليه التسمية من حصر نموذج النقل في مسائل النقل؛ فـ"إن نموذج النقل يمكن أيضا أن يستعمل في حل المشاكل المتعلقة بمجالات تخطيط الإنتاج؛ تخصيص الآلات وتحديد المواقع الإنتاجية "[1].

[1] Amor farouk Benghezal، programmation linéaire، OPU، 2000، Algérie p: 139

[2] حسن ياسين طعمة و آخرون، بحوث العمليات، دار صفاء، عمان، الأردن، ط1، 2009، ص: 215

ب-يفترض نموذج النقل:

- تساوي العرض مع الطلب.
- أن تتحقق في جدول الحل المبدئي أو أي جدول عبر سيرورة الحل، المعادلة:

عدد المصادر (المصانع) + عدد المصبات(المخازن) -1= عدد الخلايا المشغولة.

فإذا اختل الشرط الأول نكون أمام حالة "اختلال توازن العرض مع الطلب Unequal Supply and Demand "، أما إذا اختل الشرط الثاني (عدد الخلايا المشغولة < عدد المصادر + عدد المصبات -1) فنكون أمام حالة "عدم الإنتظام Degeneracy " و يتعذر حينها تشكيل مسار بعض الخلايا، وهي حالات خاصة في نموذج النقل يتم تخطيها بأساليب معينة نراها فيما يلي.

المبحث الثاني: الحالات الخاصة في مسائل النقل

1- حالة عدم التوازن:

في بعض مسائل النقل يكون إجمالي الكميات المتاحة في المصادر يختلف عن إجمالي الكميات المطلوبة من طرف المصبات؛ و قد نكون أما إحدى حالتين:

- حالة العجز: و تحصل عندما يكون إجمالي الكميات المطلوبة أكبر من إجمالي الكميات المتوفرة؛ و هو ما يعني عدم إمكانية تلبية كل طلبات المصبات، و نعالج هذه الحالة بإضافة مصدر "وهمي" الكمية المتاحة فيه هي بقدر كمية العجز (أي حاصل الفرق بين إجمالي العرض و إجمالي الطلب) و تكون تكاليف النقل من هذا المصدر الوهمي أصفارا لأنه لا يحصل توزيع من هذا المصدر و ننطلق في الحل وفق الخطوات التي تم شرحها سابقا.
- حالة الفائض: و تحصل عندما يكون إجمالي الكميات المتاحة في المصادر (العرض) أكبر من إجمالي الكميات المطلوبة من طرف المصبات (الطلب)؛ و هو ما يعني بقاء فائض في واحد أو أكثر من المصادر أي كميات معروضة لا يتم توزيعها، و نعالج هذه الحالة بإضافة مصب "وهمي" (نقطة توزيع وهمية) كمية الطلب فيها بقدر الفجوة بين العرض و الطلب؛ و تكاليف التوزيع إليها أصفار لأنها لن تتلقى أية كميات بحكم أنها نقطة توزيع وهمية، و للتوضيح نقدم المثال التالي:

مثال: 2. 2

لنفترض أن مؤسسة لها (03) وحدات إنتاجية (a,b,c) تقوم بالتوزيع إلى ثلاث نقاط بيع (x,y,z)؛ الطاقة الإنتاجية في كل وحدة و احتياج كل نقطة توزيع و تكاليف النقل بين كل مصدر و مصب يظهرها الجدول التالي:

	x	y	z	O_i
a	3	5	2	40
b	4	2	6	30
c	5	3	4	50
D_j	60	70	30	120 / 160

يعبر الرمز (O_i) عن العرض في المصدر (i) و (D_j) هو طلب المصب (j)، نلاحظ وجود اختلال توازن؛ حيث هناك حالة عجز: فإجمالي الطلب في المصبات يفوق إجمالي العرض في المصادر؛ لذلك نضيف مصدرا وهميا (W^*) بكمية العجز و هي (160−120=40)؛ فيصبح الجدول كما يلي:

T_0	x	Y	Z	O_i
a	40 (3)	(5)	(2)	40
b	20 (4)	10 (2)	(6)	30
c	(5)	50 (3)	(4)	50
W^*	(0)	10 (0)	30 (0)	40
D_j	60	70	30	160 / 160

في هذا الجدول أضفنا سطرا وهميا لتحقيق التوازن تكاليفه صفرية؛ و قمنا بتشكيل الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي التي تتضمن تعبئة خلايا الجدول بداية من الخلية العلوية اليسرى مع وضع أقصى كمية ممكنة في كل خلية و مراعاة الكمية المتوفرة في السطر و المطلوبة في العمود.

لنقم بحساب التكلفة الإجمالية لخطة التوزيع الأولية:

$$Tc(T_0) = 40(3) + 20(4) + 10(2) + 50(3) + 10(0) + 30(0) = 370$$

بعد تشكيل الحل الأولي ننتقل إلى تحسينه عن طريق تقييم الخلايا الشاغرة و حساب مؤشر التحسن (σ_{ij}) لكل واحدة منها:

- تقييم الخلية الشاغرة (ay):

نقوم أولا بتشكيل "مسار" الخلية:

	x	y
a	- 3 40	+ 5
b	+ 4 20	- 2 10

نقوم بحساب مؤشر التحسن لهذه الخلية:

$$\sigma_{12} = +5 - 2 + 4 - 3 = +4$$

- تقييم الخلية الشاغرة (az):

	x	y	z
a	- 3 40	5	+ 2
b	+ 4 20	- 2 10	6
c	5	3 50	4
W^*	0	+ 0 10	- 0 30

نحسب مؤشر التحسن للخلية:

$$\sigma_{13} = +2 - 0 + 0 - 2 + 4 - 3 = +1$$

- تقييم الخلية الشاغرة (bz):

	x	y	z
a	40 (3)	(5)	(2)
b	20 (4)	- 10 (2)	+ (6)
c	(5)	50 (3)	(4)
W^*	(0)	+ 10 (0)	- 30 (0)

$$\sigma_{23} = +6 - 0 + 0 - 2 = +4$$

- تقييم الخلية (CX):

	x	y
a	40 (3)	(5)
b	- 20 (4)	+ 10 (2)
c	+ (5)	- 50 (3)

$$\sigma_{31} = +5 - 3 + 2 - 4 = 0$$

- تقييم الخلية (CZ):

	x	y	z
a	40 [3]	[5]	[2]
b	20 [4]	10 [2]	[6]
c	[5]	- 50 [3]	+ [4]
W*	[0]	+ 10 [0]	- 30 [0]

$$\sigma_{33} = +4 - 0 + 0 - 3 = +1$$

- تقييم الخلية (WX):

	x	y
a	40 [3]	[5]
b	- 20 [4]	+ 10 [2]
c	[5]	50 [3]
W*	+ [0]	- 10 [0]

$$\sigma_{41} = +2 - 0 + 0 - 4 = -2$$

نلاحظ أن تخصيص وحدة واحدة لهذه الخلية يؤدي إلى تخفيض تكاليف النقل بـ 02 وحدة نقدية، و السؤال المطروح كم عدد الوحدات الممكن جعلها في هذه الخلية؟
لمعرفة ذلك نرجع –كما رأينا سابقا– إلى مسار الخلية و تحديدا إلى الخلايا ذات الإشارة السالبة؛ نختار أصغر كمية منها (احتراما لشرط اللاسالبية) و ندورها على المسار حيثما وجد السالب نطرحها و حيثما وجد الموجب نضيفها؛ و في مثالنا أصغر كمية في الخلايا السالبة هي (10)؛ و بتدويرها على المسار السابق إضافة و طرحا نحصل على الجدول الموالي:

T_1	x	y	Z	O_i

في الجدول الجديد يمكننا التحقق من انخفاض التكاليف بحساب التكاليف الكلية و مقارنتها بتكاليف الجدول السابق:

a	40 [3]	[5]	[2]	40
b	10 [4]	20 [2]	[6]	30
c	[5]	50 [3]	[4]	50
W*	10 [0]	[0]	30 [0]	40
D_j	60	70	30	160 / 160

$$Tc(T_1) = 40(3) + 10(4) + 20(2) + 50(3) = 350$$

نلاحظ أن التكاليف انخفضت بـ (20) وحدة نقدية عن المستوى السابق؛ و سبق أن وجدنا مؤشر التحسن الخاص بالخلية التي أدخلناها إلى الحل هو (–2) و وضعنا فيها الكمية (10) أي يفترض أن يكون مقدار الانخفاض الكلي (10× –2 = –20) و هو ما يؤكد الحساب السابق.

في الجدول الجديد نعيد تقييم الخلايا الشاغرة بالطريقة السابق شرحها (تحديد مسار كل خلية و حساب مؤشر التحسن)؛ فنحصل على النتائج التالية:

$$\sigma_{12} = +5 - 2 + 4 - 3 = +4$$
$$\sigma_{13} = +2 - 0 + 0 - 3 = -1$$
$$\sigma_{23} = +6 - 0 + 0 - 4 = +2$$
$$\sigma_{31} = +5 - 3 + 2 - 4 = 0$$
$$\sigma_{33} = +4 - 0 + 0 - 4 + 2 - 3 = -1$$
$$\sigma_{42} = +0 - 2 + 4 - 0 = +2$$

نلاحظ من خلال مؤشرات التحسن أن الحل السابق ليس هو الحل الأمثل بحكم وجود خلايا ذات مؤشرات سالبة يمكن إدخالها إلى الحل فتنخفض التكاليف مجددا؛ و لكن نلاحظ وجود تكافؤ بين مؤشر الخلية (3.1) و مؤشر الخلية (3.3) فما هي الخلية التي نختار إدخالها إلى الحل؟

لنرجع إلى مسار كل خلية:

- مسار الخلية (3.1):

نلاحظ أن الخلايا ذات الإشارة السالبة هي (wz) و (wx) و أصغر الكميتين هي (30) و هي الكمية التي يمكن تخصيصها للخلية (3.1) أي (az). سنقارن بين هذه الكمية و الكمية المتعلقة بالخلية الأخرى:

T_1	x	y	z	O_i
a	- 40 (3)	(5)	+ (2)	40
b	10 (4)	20 (2)	(6)	30
c	(5)	50 (3)	(4)	50
W^*	+ 10 (0)	(0)	- 30 (0)	40
D_j	60	70	30	160 / 160

- مسار الخلية (3.3):

نلاحظ أن الخلايا ذات الإشارة السالبة هي (wz) و (cy) و(bx) أصغر كمية ضمنها هي (10) و هي الكمية التي يمكن تخصيصها للخلية (3.3) أي الخلية (cz).

T_1	x	y	z	O_i
a	40 (3)	(5)	(2)	40
b	- 10 (4)	+ 20 (2)	(6)	30
c	(5)	- 50 (3)	+ (4)	50
W^*	+ 10 (0)	(0)	- 30 (0)	40
D_j	60	70	30	160 / 160

نلاحظ مما سبق أن الخليتين متكافئتان في تخفيض التكلفة الوحدوية و لكن الخلية (3.1) تستوعب كمية أكبر و هو ما ينجم عنه تخفيض إجمالي أكبر في التكاليف؛ لذلك سنقوم بإدخالها إلى الحل فنحصل على الجدول الموالي:

T_2	x	y	z	O_i
a	10 [3]	[5]	30 [2]	40
b	10 [4]	20 [2]	[6]	30
c	[5]	50 [3]	[4]	50
W^*	40 [0]	[0]	[0]	40
D_j	60	70	30	160 / 160

في الجدول الجديد نقوم باختبار الخلايا الشاغرة مجددا فنحصل على النتائج التالية:

$$\sigma_{12} = +5 - 2 + 4 - 3 = +3$$
$$\sigma_{23} = +6 - 4 + 3 - 2 = +3$$
$$\sigma_{31} = +5 - 3 + 2 - 4 = 0$$
$$\sigma_{33} = +4 - 3 + 2 - 4 + 3 - 2 = 0$$
$$\sigma_{42} = +0 - 0 + 4 - 2 = +2$$
$$\sigma_{43} = +0 - 0 + 3 - 2 = +1$$

و بما أن جميع مؤشرات التحسن موجبة أو معدومة فقد وصلنا إلى الحل الأمثل، نلاحظ أن نقطة التوزيع (X) لا تحصل على كل احتياجها إذ يبقى لديها عجز قدره (40) أما التكاليف الإجمالية فهي:

$$Tc(T_2) = 10(3) + 30(2) + 10(4) + 20(2) + 50(3) = 320$$

ملاحظة: في الحالة المقابلة (حالة الفائض) نضيف عمودا وهميا يعبر عن نقطة توزيع وهمية بكمية الفجوة و نواصل الحل بالكيفية نفسها.

2- حالة عدم الإنتظام Degeneracy:

و تحصل عندما يكون عدد الخلايا المشغولة أقل من (m+n-1) فيتعذر حينها إيجاد مسار بعض الخلايا الشاغرة و من ثم يتعذر الإنتقال إلى الجدول الموالي؛ و نعالج هذه الحالة عن طريق تشغيل خلية من الخلايا الشاغرة -أو عدة خلايا حسب الحاجة- بكمية ضئيلة جدا قدرها (ε) و نواصل الحل ثم نهمل تلك الكمية في جدول الحل الأمثل إن بقيت و نعتبر خليتها شاغرة؛ و للتوضيح نقدم المثال التالي:

مثال: 2. 3

لنفترض أن لدى مؤسسة ثلاث وحدات إنتاجية تقوم بالتوزيع إلى ثلاث نقاط توزيع وفق ما يبينه النموذج التالي:

T_0	x	y	Z	O_i
a	2 1200	2	4	1200
b	8	8 300	2	300
c	6 ε	10 300	4 200	500
D_j	1200	600	200	2000 / 2000

في هذا الجدول الأولي نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة أربعة و هو أقل من المقدار $(m+n-1=3+3-1=5)$ و هو ما يجعل من المتعذر إيجاد مسار بعض الخلايا الشاغرة؛ لذلك قمنا بتشغيل الخلية (cx) بكمية ضئيلة قدرها (ε) وضعناها في خلية بحيث يمكن تجاوز إشكال تعذر المسار لبعض الخلايا الشاغرة، التكاليف الكلية لهذا التوزيع الأولي هي:

$$Tc(0)=1200(2)+300(8)+300(10)+200(4)=8600$$

لنقم الآن بتحديد مسار كل خلية شاغرة و حساب مؤشر التحسن الخاص بها:

$$\sigma_{12}=+2-10+6-2=-4$$
$$\sigma_{13}=+4-4+6-2=+4$$
$$\sigma_{21}=+8-8+10-6=+4$$
$$\sigma_{23}=+2-4+10-8=0$$

نلاحظ أن إدخال الخلية (ay) يمكننا من تخفيض التكاليف الإجمالية بـ (04) وحدات نقدية مقابل كل وحدة من السلعة مخصصة لهذه الخلية؛ نرجع إلى مسار الخلية و نحدد الخلايا ذات الإشارة السالبة و هي في مثالنا: الخلية (cy) و فيها (300)؛ و الخلية (ax) و فيها (1200)؛ نختار أصغر كمية منها و نقوم بتدويرها على المسار إضافة و إنقاصا فنحصل على الجدول الموالي:

T_1	x	y	z	O_i
a	2 / 900	2 / 300	4	1200
b	8	8 / 300	2	300
c	6 / 300	10	4 / 200	500
D_j	1200	600	200	2000 / 2000

لنلاحظ في هذه المرحلة أن عدد الخلايا المشغولة صار (05) و هو يحقق الشرط $(m+n-1=3+3-1=5)$ ما يعني زوال حالة عدم الإنتظام.

التكلفة الإجمالية لخطة التوزيع الجديدة هي:

$$Tc(1)=900(2)+300(2)+300(8)$$
$$+300(6)+200(4)=7400$$

نقوم مجددا بتقييم الخلايا الشاغرة:

$$\sigma_{13}=+4-4+6-2=+4$$
$$\sigma_{21}=+8-8+2-2=0$$
$$\sigma_{23}=+2-4+6-2+2-8=-4$$
$$\sigma_{32}=+10-6+2-2=+4$$

نلاحظ أن إدخال الخلية (bz) إلى الحل يخفض التكاليف؛ نرجع إلى الخلايا ذات الإشارة السالبة في مسار الخلية و هي: (cz) فيها: 200، (by) فيها:300، (ax) فيها: 900، و بتحريك أصغر كمية (200) على المسار إضافة و إنقاصا نحصل على الجدول الموالي:

T_2	X	y	z	O_i
a	2 / 700	2 / 500	4	1200
b	8	8 / 100	2 / 200	300
c	6 / 500	10	4	500
D_j	1200	600	200	2000 / 2000

التكاليف الإجمالية للخطة الجديدة هي:

$$Tc(2)=700(2)+500(2)+100(8)$$
$$+200(2)+500(6)=6600$$

في الجدول الجديد نقوم مجددا بتقييم الخلايا الشاغرة:

$$\sigma_{13}=+4-2+8-2=+8$$
$$\sigma_{21}=+8-8+2-2=0$$
$$\sigma_{32}=+10-2+2-6=+4$$
$$\sigma_{33}=+4-6+2-2+8-2=+4$$

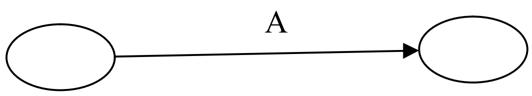
لنلاحظ أنه الحل الأمثل.

الفصل الثالث: التحليل الشبكي Network Analysis

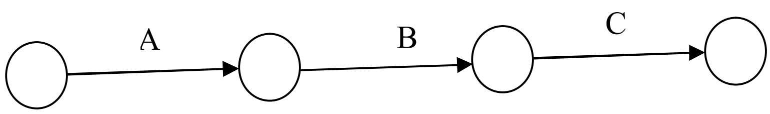
تهتم نظرية التحليل الشبكي بتخطيط و تسيير تنفيذ الأنشطة المؤلفة لبرنامج أو مشروع ما (مشروع إنشائي، برنامج القيام بحملة تسويقية، برنامج تدريبي لمجموعة عمال،...)؛ و ينبغي لاستعمالها القيام بما يلي:[1]

- تقسيم المشروع إلى مختلف الأنشطة المكونة له؛
- تحديد الوقت للازم لتنفيذ كل نشاط على حدة؛
- ترتيب مختلف الأنشطة حسب تسلسلها الزمني و تتابعها أي تحديد النشاط السابق و النشاط الموالي لكل نشاط.

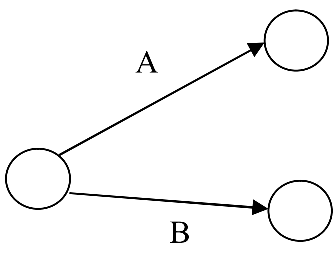
يمكن بعدها رسم مخطط شبكي معبر عن البرنامج أو المشروع المراد تنفيذه باستخدام ترميزات خاصة حيث تعبر الدائرة عن "حادث" و السهم عن "نشاط"؛ فمثلا ليكن لدينا نشاط ما (A) له حادث بداية و حادث نهاية؛ يمكن تمثيله كما يلي:



يمكن لأنشطة مشروع ما أن تكون متسلسلة بحيث لا يبدأ النشاط (B) إلا بعد انتهاء النشاط (A) و لا يبدأ (C) إلا بعد انتهاء (B) و مثال ذلك لا يمكن البدء في صب الأساس إلا بعد انتهاء نشاط الحفر كما لا يمكن البدأ في البناء إلا بعد انتهاء صب الأساس؛ كما في الشكل:



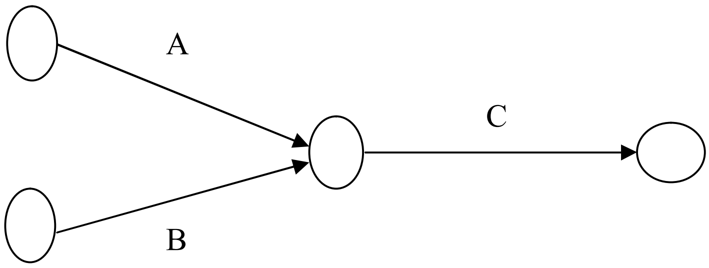
و يمكن أن تكون أنشطة متوازية تشترك في حادث البداية (النشاطان A و B ينطلقان في وقت واحد على التوازي):



أو أنشطة متوازية تشترك في حادث النهاية:

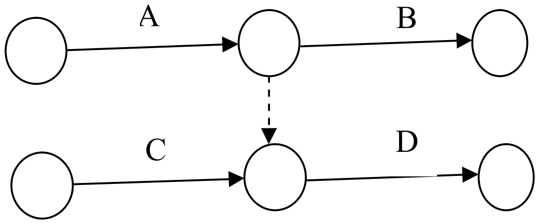
---

[1] حمودي حاج صحراوي، رياضيات المؤسسة، دار جيطلي، الجزائر، 2014، ص: 150



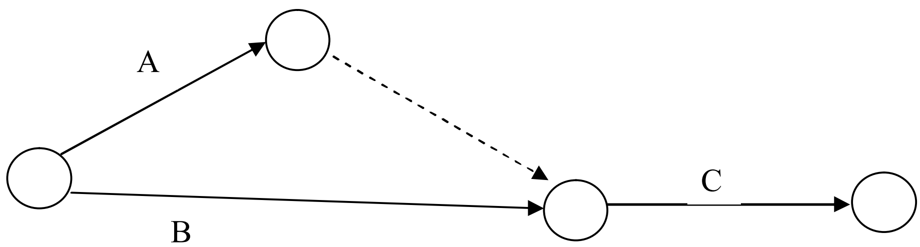
نلاحظ أن النشاطين (A) و (B) متوازيان يشتركان في حادث النهاية و ينبغي انتهاؤهما قبل انطلاق النشاط (C).

كما يمكن أن نضيف ما يسمى بـ "النشاط الوهمي" و هو نشاط مدته صفر و تكلفته صفر يضاف لاعتبارات تتعلق بطبيعة العلاقات بين الأنشطة كما في الشكل:



يعني الشكل أعلاه أن النشاطين (B,D) متوازيان و لكنهما لا يشتركان في حادث البداية لأن بداية النشاط (D) تتطلب انتهاء كل من (A) و (C) بينما لا يحتاج انطلاق النشاط (B) إلا إلى انتهاء النشاط (A).

و قد يشترك النشاطان (A,B) في حادث البداية و يكونان متوازيين و كلاهما يسبق نشاطا ثالثا (C) فيستدعي ذلك إضافة نشاط وهمي كما في الشكل الموالي:



ملاحظة: خطوط الشبكة لا تتقاطع، كما أن لكل شبكة نقطة بداية واحدة و نقطة نهاية واحدة.

بعد رسم شبكة المشروع يمكن أن نطبق عليها واحدا من أساليب التحليل الشبكي و أشهرها: أسلوب المسار الحرج (CPM) و أسلوب (PERT).

المبحث الأول: أسلوب المسار الحرج (CPM) Critical Path Method

يقوم هذا الأسلوب على تحديد مختلف المسارات في الشبكة انطلاقا من نقطة البداية حتى نقطة النهاية و حساب طول كل مسار؛ و يكون أطول مسار هو "المسار الحرج" و تسمى الأنشطة المكونة له "الأنشطة الحرجة" و هي الأنشطة المتحكمة في أجل انتهاء المشروع؛ و عليه فإن المدة اللازمة لإنجاز المشروع هي ذاتها مدة المسار الحرج

و كل تأخر في أداء نشاط حرج يترتب عليه تأخر في إنجاز المشروع أما تخفيض زمن إنجاز المشروع فيتطلب تخفيض مدة إنجاز نشاط واحد على الأقل من الأنشطة الحرجة.

بعد رسم الشبكة و تحديد المسارات المختلفة و المسار الحرج يمكن تشكيل ما يعرف بـ "رزنامة الأنشطة" أو "جدول المراقبة الزمنية" الذي يسمح بمراقبة تنفيذ الأنشطة.

مثال 3. 1:

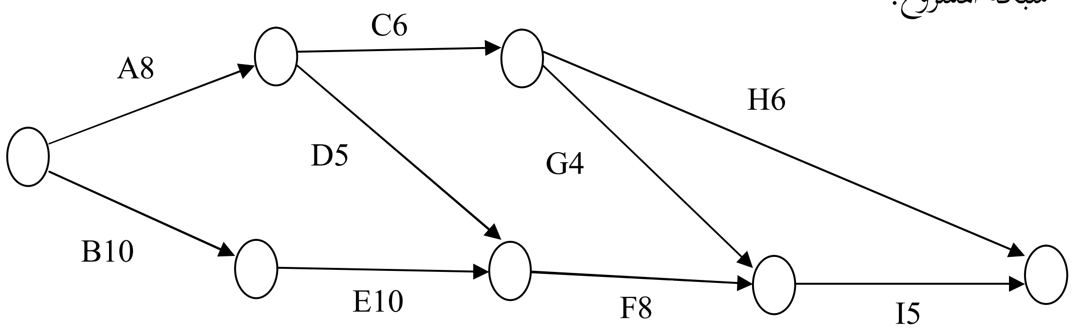
ليكن لدينا مشروع يتألف من الأنشطة المبينة في الجدول التالي:

النشاط	النشاط السابق مباشرة	المدة (يوم)
A	-	8
B	-	10
C	A	6
D	A	5
E	B	10
F	D, E	8
G	C	4
H	C	6
I	G, F	5

المطلوب:

- أرسم شبكة المشروع
- حدد المسار الحرج
- ما هي المدة اللازمة لإنجاز المشروع؟
- شكل رزنامة النشاطات (جدول المراقبة الزمنية)

- شبكة المشروع:



- تحديد المسارات:

المسار	طول المسار
ACH	8+6+6 = 20
ACGI	8+6+4+5 = 23
ADFI	8+5+8+5 = 26
BEFI	10+10+8+5 = **33**

نلاحظ أن أطول المسارات هو (**BEFI**) و هو المسار الحرج؛ أي أن أدنى مدة لإنجاز المشروع هي (33) يوما؛ و الأنشطة المؤلفة لذلك المسار هي الأنشطة الحرجة.

- رزنامة الأنشطة:

رزنامة الأنشطة هي جدول يحتوي أربعة أزمنة مختلفة لكل نشاط : البداية المبكرة، البداية المتأخرة، النهاية المبكرة، النهاية المتأخرة، و كذلك "الهامش" و هو الزمن الذي يسمح فيه بتأخر النشاط دون أن يؤدي إلى تأخر انجاز المشروع؛ و يسمح هذا الجدول بمراقبة تنفيذ أزمنة المشروع؛ و تحدد مختلف الأزمنة كما يلي:

1- البداية المبكرة (ES) Earliest Start:

هي أقرب وقت يمكن أن ينطلق فيه النشاط؛ و يكون مساويا للصفر للأنشطة التي لا يسبقها أي نشاط؛ أما البداية المبكرة لباقي الأنشطة فهي البداية المبكرة للنشاط السابق زائدا مدة إنجاز النشاط السابق؛ و في حالة تعدد الأنشطة السابقة لنشاط ما نأخذ المدة الأكبر.

$$ES_{i+1} = ES_i + d_i$$

حيث:

ES_{i+1}: البداية المبكرة للنشاط (i+1) ؛ ES_i : البداية المبكرة للنشاط السابق؛ d_i: مدة تنفيذ النشاط السابق.

2-النهاية المبكرة (EF) Earliest Finish:

هي أقرب وقت يمكن إنجاز النشاط خلاله و تساوي البداية المبكرة للنشاط زائدا مدة إنجازه:

$$EF_i = ES_i + d_i$$

3-النهاية المتأخرة (LF) Latest Finish:

تعبر عن أقصى مدة متاحة لإنجاز النشاط دون تأخير أجل إنجاز المشروع و تساوي أدنى مدة يستغرقها المشروع للأنشطة التي لا يأتي بعدها أي نشاط (المربوطة بنقطة النهاية)؛ أما بالنسبة للأنشطة الأخرى فتساوي النهاية المتأخرة للنشاط اللاحق نقصا مدة ذلك النشاط و في حال تعدد الأنشطة اللاحقة تؤخذ أدنى مدة:

$$LF_i = LF_{i+1} - d_{i+1}$$

4-البداية المتأخرة (LS) Latest Start:

تعبر عن أقصى تأخير في انطلاق النشاط دون تأخير إنجاز المشروع و تساوي البداية المتأخرة للنشاط اللاحق ناقصا مدة إنجازه:

$$LS_i = LS_{i+1} - d_{i+1}$$

5-الهامش الإجمالي (TF) Total Float:

يعبر عن المدة التي يمكن أن يتأخر بها نشاط دون تأثير على أجل انتهاء المشروع؛ "لكن مع إمكانية تأخر انطلاق النشاط الموالي و هو الفرق بين البداية المتأخرة و البداية المبكرة لذلك النشاط أو الفرق بين النهاية المتأخرة و النهاية المبكرة، و كل نشاط لديه هامش إجمالي معدوم يعتبر نشاطا حرجا"[1] :

$$TF_i = LS_i - ES_i = LF_i - EF_i$$

[1] حمودي حاج صحراوي، مرجع سابق، ص: 156.

بالرجوع إلى مثالنا نشكل رزنامة النشاطات كما يلي (مع ترتيب عمليات حساب مختلف الأزمنة كما يظهر):

النشاط	النشاط الأسبق مباشرة	المدة (يوم)	البداية		النهاية		الهامش الإجمالي(TF)
			ES (1)	LS (4)	EF(2)	LF (3)	
A	-	8	0	7	8	15	7
B	-	10	0	0	10	10	**0**
C	A	6	8	18	14	24	10
D	A	5	8	15	13	20	7
E	B	10	10	10	20	20	**0**
F	D,E	8	20	20	28	28	**0**
G	C	4	14	24	18	28	10
H	C	6	14	27	20	33	13
I	G,F	5	28	28	33	33	**0**

لنلاحظ أن الأنشطة الحرجة تأخذ القيمة صفر في عمود الهامش الإجمالي و هو ما يعني أنه غير مسموح بتأخر أي نشاط منها لأن ذلك ينعكس على موعد انتهاء المشروع، نلاحظ من الجدول أن النشاط (A) له هامش إجمالي قدره (7) و هو ما يعني إمكانية تأخر انطلاق هذا النشاط لسبعة أيام دون أن يتأخر إنجاز المشروع عن الموعد المحدد (33 يوما).

المبحث الثاني: تقنية تقييم و مراجعة البرامج (شبكة PERT) Program Evaluation and Review Technique:

في أسلوب المسار الحرج (CPM) افترضنا أن زمن أداء كل نشاط معروف و محدد؛ و كثيرا ما لا تتحقق هذه الفرضية في الواقع؛ إذ يتميز الوقت اللازم لأداء الأنشطة بالعشوائية، لذلك تقوم تقنية (PERT) على الفكرة السابقة (المسار الحرج) و لكن مع إدخال العشوائية في زمن تنفيذ الأنشطة وفق الخطوات التالية:

- نفترض ثلاثة أزمنة لكل نشاط: الوقت المتفائل (to) Optimistic Time و يعبر عن أدنى مدة يمكن خلالها أداء النشاط، الوقت المتشائم (tp)Pesimistic Time و يعبر عن أقصى مدة يمكن أن يستغرقها النشاط، الوقت الأكثر احتمالا (tm) Most Likely Time و هو الوقت الأكثر احتمالا لتنفيذ النشاط، من الواضح أن: $tp \geq tm \geq to$.

- نقوم بحساب الزمن المتوقع لإنجاز كل نشاط (te) بالعلاقة:

$$te = \frac{tp + 4tm + to}{6}$$

- ننقل الأزمنة المتوقعة على الشبكة و استنادا إليها نحدد أطول مسار (المسار الحرج) الذي هو مجموع الأزمنة المتوقعة للأنشطة الحرجة؛ إن طول المسار الحرج المحسوب باستخدام الأزمنة المتوقعة يعطي الزمن المتوقع لإنجاز المشروع (Te) و يعبر عن الزمن الذي يمكن أن يستغرقه المشروع باحتمال (50%).

- نحسب تباين المشروع و ذلك بحساب تباين كل نشاط من الأنشطة الحرجة بالقانون:

$$\sigma_c^2 = \frac{(tp - to)^2}{36}$$

ثم نجمع التباينات للحصول على تباين المشروع (σ_p^2):

$$\sigma_p^2 = \sum \sigma_c^2$$

- نحسب الإنحراف المعياري للمشروع (σ_p) الذي هو جذر التباين:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$$

- نحسب احتمال انتهاء المشروع خلال مدة معينة و لتكن (TD) عن طريق حساب الإحصائية (Z) التي تعطى بالصيغة التالية:

$$Z = \frac{TD - Te}{\sigma_p}$$

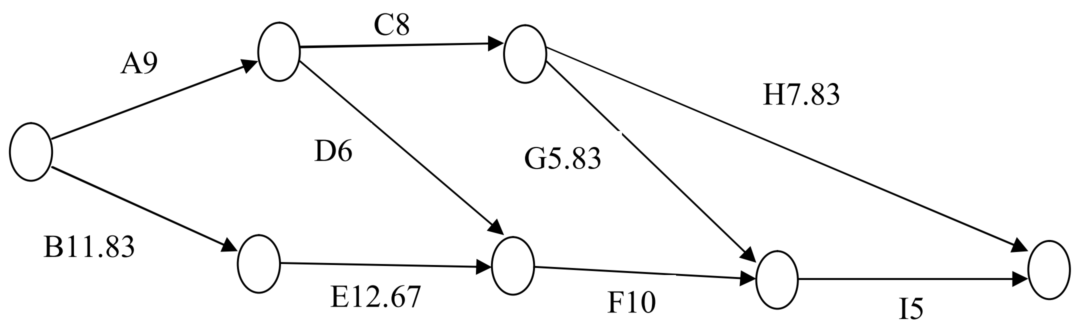
- نقرأ الإحتمال المقابل للقيمة (Z) من جدول التوزيع الطبيعي.

مثال 3. 2:

لنعد إلى المثال السابق (3. 1) و لنفترض أن أزمن النشاطات غير معروفة بدقة فصارت لدينا المعطيات التالية:

النشاط	النشاط السابق مباشرة	الزمن (يوم)			الزمن المتوقع للنشاط (te)	التباين σ_i^2
		المتفائل(to)	الأكثر احتمالا (tm)	المتشائم (tp)		
A	–	8	9	10	9	
B	–	10	12	13	11.83	0.25
C	A	6	8	10	8	
D	A	5	6	7	6	
E	B	10	13	14	12.67	0.44
F	D, E	8	10	12	10	0.44
G	C	4	6	7	5.83	
H	C	6	8	9	7.83	
I	G, F	5	5	5	5	0
المجموع						1.13

في الجدول أعلاه صار لدينا لكل نشاط ثلاثة أزمنة؛ لذلك قمنا بحساب الزمن المتوقع لكل نشاط بالصيغة التي سبق الإشارة إليها، و سننقل الأزمنة المتوقعة للأنشطة على شبكة المشروع من أجل تحديد المسار الحرج و المدة المتوقعة لإنجاز المشروع؛ ثم نحسب تباين الأنشطة الحرجة (أنظر آخر عمود في الجدول أعلاه) و بجمعها نحصل على تباين المشروع و جذر التباين هو الإنحراف المعياري للمشروع.



- المسارات على هذه الشبكة و أطوالها هي كما يلي:

المسار	طول المسار
ACH	9+8+7.83 = 24.83
ACGI	9+8+5.83+5 = 27.83
ADFI	9+6+10+5 = 30
BEFI	11.83+12.67+10+5 = **39.5**

لنلاحظ أن المسار الحرج في المثال الجديد هو (**BEFI**) و الأنشطة المؤلفة له هي الأنشطة الحرجة؛ هذا يعني أن الزمن المتوقع لانتهاء المشروع هو:

Te= 39.5

أي أن المشروع يستغرق تقريبا (40) يوما باحتمال قدره (50%).

بعد ذلك نقوم بحساب تباين الأنشطة الحرجة من أجل حساب تباين المشروع و انحرافه المعياري (أنظر الجدول السابق):

لدينا: تباين المشروع هو (1.13)، أي أن الإنحراف المعياري للمشروع هو:

$$\sigma_p = \sqrt{1.13} = 1.06$$

- الآن يمكننا حساب احتمال انتهاء المشروع خلال مدة معينة مطلوبة (TD)؛ إذا كانت هذه المدة هي مثلا (42 يوما) فإننا نحسب الإحصائية (Z) كما يلي:

$$Z = \frac{42 - 39.5}{1.06} = 2.36$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي نجد مقابل القيمة (Z=2.36) : 0.99

أي أن احتمال انتهاء المشروع خلال (42 يوما) هو:

$P(T = 42) = 0.99$ أي: 99%

ملاحظة: يمكن أن يؤدي إدخال الأزمنة العشوائية في الشبكة نفسها إلى تغير المسار الحرج و بالتالي تغير الأنشطة الحرجة نظرا لتغير الأزمنة التي تحسب على أساسها أطوال المسارات.

ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

قائمة المراجع:

1- أحمد رجب عبد العال، بحوث العمليات في المحاسبة، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، 2002.

2- جلال العبد و إسماعيل السيد، الأساليب الكمية في الإدارة، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2003.

3- حسن ياسين طعمة و آخرون، بحوث العمليات، دار صفاء، عمان، الأردن، ط1، 2009.

4- حمودي حاج صحراوي، رياضيات المؤسسة، دار النشر جيطلي، الجزائر،2014.

5- حنفي محمود سليمان، المنهج المتكامل في الإدارة، دار الجامعات المصرية، الإسكندرية، مصر، 1979.

6- ريتشارد برونسون :نظريات ومسائل في بحوث العمليات ، سلسلة ملخصات شوم ، ترجمة د/حسن حسني الغباري ، الدار الدولية للنشر والتوزيع .القاهرة، 1988.

7- السعدي رجال، بحوث العمليات في الإدارة-المالية-التجارة، منشورات جامعة منتوري، قسنطينة، 2005.

8- فؤاد الشيخ سالم و آخرون، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، المنظمة العربية للعلوم الإدارية، عمان، الأردن، 1983.

9- فتحي خليل حمدان و آخرون، مقدمة في بحوث العمليات، دار وائل، عمان، الأردن، ط4، 2004.

10- فريد عبد الفتاح زين الدين، بحوث العمليات و تطبيقاتها في حل المشكلات و اتخاذ القرارات، الجزء الأول، كلية التجارة، جامعة الزقازيق، مصر، 1997.

11- عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، دار وائل، عمان، الأردن، ط2، 2006.

12- علي فؤاد حمدي، الإتجاهات الحديثة في الإدارة البرمجة الخطية و بيرت، دار النهضة العربية، بيروت، لبنان، 1982.

13- محمد أسعد عبد الوهاب النيداني، مقدمة في بحوث العمليات .مكتبة ومطبعة الإشعاع الفنية .مصر، 1998.

14- محمد توفي ماضي، الأساليب الكمية في مجال إدارة الإنتاج والعمليات، المكتب العربي الحديث،1992 .

15- محمد راتول، بحوث العمليات ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004 .

16- مرعي عبد الحق، المعلومات المحاسبيةو بحوث العمليات في اتخاذ القرارات، مؤسسة شباب الجامعة، مصر، 1993.

17- منعم زمرير الموسوي، مقدمة في بحوث العمليات، منشورات الجامعة المفتوحة، طرابلس، ليبيا، 1995.

أطروحات دكتوراه:

18- بوشنافة احمد ،أساليب التحليل الكمي في عملية اتخاذ القرارات الإدارية ، حالة المؤسسة العمومية الاقتصادية الجزائرية .أطروحة مقدمة لنيل شهادة دكتوراه دولة في علوم التسيير ، جامعة الجزائر 2001.

19- رابح بوقرة، إستعمال بحوث العمليات كنماذج مساعدة في اتخاذ القرار، دراسة حالة مؤسسة EARA التابعة لشركة Algal بالمسيلة، أطروحة لنيل شهادة دكتوراه دولة في العلوم الإقتصادية، جامعة فرحات عباس سطيف، كلية العلوم الإقتصادية و علوم التسيير،2006.

مراجع أجنبية:

20- Amor farouk Benghezal، programmation linéaire، OPU، Algérie 2000.
21- Anderson، Sweeney، Williams، An Introduction to Management Science Quantitative Approaches to Decision Making، seventh edition، west publishing company، USA، 1996.
22- Arnold kaufmann: Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle.T1.Dunod، paris، 1970.
23- Boualem Benmazouz, Recherche Opérationnelle de gestion, Algérie, Atlas Edition, 1995.
24- C.woodford and c.phillips, Numerical Methods with worked examples, Chapman and Hall, London ,1997.
25- Hamdi .A.Taha، Operations Research، an Introduction، third edition، Mac millan publishing Co.Inc، New York، USA، 1982.
26- Jacher.J.Gardelle:Programmation linéaire.Dunod، paris، 1978.
27- Luc Boyer et autres, Précis d'Organisation et de Gestion de la Production, Les éditions d'organisation, Paris, 1982.
28- Robert Faure، précis de recherche opérationnelle، dunod، paris1978.