الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عباس لغرور خنشلة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

مطبوعة مستوفاة لمقياس

إحصاء 3

محاضرات مقدمة للسنة الثانية تسيير LMD

شعبة: علوم التسيير

تخصص: تسيير.

من إعداد: د.بغنة سهيلة.

السنة الجامعية: 2023/2022

الفهرس

الفهرس

قائمة الجداول

قائمة الأشكال

المقدمـــة

المقدمة:

يتمتع علم الإحصاء بأهمية كبيرة في الحياة العلمية والعملية للإنسان باعتباره تلك الأداة بالغة الأهمية في صنع القرار واتخاذه، إذ يعتبر علم الإحصاء الركيزة الأساسية في حياة الأفراد والمؤسسات على اختلافها، فقد ساهم التطور الحاصل في مجال الرياضيات في فهم الحياة من خلال التفسيرات التي ترتبط ارتباطا وثيقا بالواقع العملي، ويتم ذلك من خلال جمع البيانات ومن ثم تحليلها وتفسيرها وعرضها بأسلوب تحليلي مما يساهم في اتخاذ القرار الأنسب بين مجموعة من القرارات المتاحة بعد التحقق والتنبؤ من نتائج كل بديل، وينفرد بقدرته على الانخراط بالعديد من العلوم كالاجتماعية والفيزيائية والسياسية، ويمكن استخدامه في البحوث الهندسية والطبية وغيرها، وينقسم علم الاحصاء سوى لفرعين رئيسيين، وهما الإحصاء الاستدلالي والآخر الوصفي.

ونظرا للأهمية المتزايدة لعلم الإحصاء عامة وخصوصا الاحصاء الاستدلالي نقوم بوضع هذه المطبوعة بين أيدي طلبة السنة الثانية علوم تسيير بهدف تعريف الطالب بالمفاهيم المتعلقة بالإحصاء الاستدلالي وأهم الطرق والأساليب الإحصائية المستخدمة في تحليل البيانات، وقد خصص لذلك أربع فصول أساسية تماشيا مع البرنامج الوزاري المقترح من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي كالتالي:

الفصل الأول: الإطار المفاهيمي للإحصاء الاستدلالي (الاحصاء3).

الفصل الثاني: نظرية توزيع المعاينة.

الفصل الثالث: نظرية التقدير.

الفصل الرابع: اختبارات الفروض الإحصائية.

الفصل الأول:

مدخل مفاهيمي للإحصاء الاستدلالي

الفصل الأول: مدخل مفاهيمي للإحصاء الاستدلالي

يعد الإحصاء الاستدلالي من فروع الإحصاء الأكثر أهمية، بينما تلخص الإحصائيات الوصفية خصائص مجموعة البيانات، تساعدك الإحصائيات الاستدلالية على التوصل إلى استنتاجات وإجراء تنبؤات بناءا على بياناتك. كما ويستخدم الإحصاء الاستدلالي عينة عشوائية من البيانات المأخوذة من مجتمع ما لوصف وإجراء استنتاجات حوله وذلك باستناده على مجموعة من النظريات الإحصائية ولعل أبرزها نظرية الاحتمالات ونظرية العينات.

ومن خلال هذا الفصل سنحاول الإلمام بأهم المفاهيم الإحصائية التي ترتكز عليها دراسة الإحصاء 3 (الإحصاء الاستدلالي).

1. تعريف علم الإحصاء وأهميته: تعددت التعاريف الموضوعة لعلم الإحصاء لما له من العديد من الاسهامات في مختلف المجالات.

1.1. تعريف علم الإحصاء: نذكر منها:

1.1.1. **تعريف (Agresti & Finlay):** الإحصاء هو علم اكتساب المعلومات من البيانات العددية والفئوية باستخدام مجموعة من الأساليب الإحصائية لجمع البيانات وتحليلها.[1]

1.1.2. "علم الإحصاء هو طريقة للحصول على المعلومات من البيانات".

1.1.3. **وفقا** لـ (**Selligman**) "الإحصاء هو العلم الذي يتعامل مع طرق جمع البيانات الرقمية وتصنيفها وعرضها ومقارنتها وتفسيرها لإلقاء بعض الضوء على أي مجال من مجالات الاستفسار".

1.1.4. **عرفه** (**Croxton**) : "الإحصاء على أنه جمع وعرض وتحليل وتفسير البيانات الرقمية".[2]

1.1.5. **علم الإحصاء** : هو فرع من فروع الرياضيات يشمل النظريات والطرق الموجية نحو جميع البيانات ووصف البيانات والاستقراء وصنع القرارات.

1.1.6. **علم الإحصاء**: هو العلم الذي يبحث في جميع البيانات الخاصة لمختلف الظواهر، وتصنيفها في جداول منظمة وتمثيليا بيانيا على شكل رسومات أو صور توضيحية، وكذلك تحميل البيانات واستخلاص النتائج منيا واستخدامها في اتخاذ القرار المناسب، ومقارنة الظواهر ببعضها ومحاولة استنتاج علاقات بينها.

1.1.7. **تعريف "Webster"**: الإحصاء هو مجموعة الطرق والحقائق التي تختص بجمع البيانات وتلخيصها وعرضها وتحليلها وتفسير البيانات العددية الخاصة بظاهرة معينة، للوصول إلى استنتاجات وقرارات مناسبة.[3]

[1] - Agresti, A. & Finlay, B., **Statistical Methods for the Social Sciences,** 3th Edition., (Prentice Hall, 1997).

[2] -**Introduction to Statistics**, article available at: https://egyankosh.ac.in/bitstream/23456789/23443/1/Unit-1.pdf, 19/01/2022, 12:55.

[3]– طعمة.حسن ياسين، حسين. حنوش إيمان، **طرق الإحصاء الوصفي**، الطبعة الأولى، (عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع، 2009)، ص.25.

وبالتالي فإن علم الإحصاء هو العلم الذي يبحث في تصميم أساليب جمع البيانات والتقنيات المختلفة لتنظيم وتصنيف وعرض هذه البيانات، وتلخيصها في شكلها الرقمي وتحليلها بغرض اتخاذ القرارات المناسبة.

وبذلك يمكن تلخيص أهم الخطوات التي يقوم عليها علم الإحصاء في التالي:

- **جمع البيانات**: بمجرد تحديد طبيعة الدراسة، يصبح من الضروري جمع المعلومات في شكل بيانات حول قضايا الدراسة. لذلك ، فإن جمع البيانات هو الخطوة الأساسية الأولى. قد يتم جمع البيانات إما من مصدر أولي أو ثانوي أو من كلا المصدرين اعتمادًا على هدف / أهداف التحقيق.
- **التصنيف والعرض التقديمي**: بمجرد جمع البيانات، يتعين على الباحث ترتيبها في شكل يمكنهم من خلاله استخلاص بعض الاستنتاجات. يُعرف ترتيب البيانات في مجموعات وفقًا لبعض أوجه التشابه بالتصنيف.
- **الجدولة**: هي عملية تقديم البيانات المصنفة في شكل جدول. يصبح العرض التقديمي المجدول للبيانات أكثر وضوحًا وملاءمة لمزيد من التحليل الإحصائي. يمكن عرض البيانات المصنفة والمجدولة في رسوم بيانية لتسهيل فهم الاتجاهات المختلفة وكذلك تسهيل عملية المقارنة.
- **تحليل البيانات**: وهي أهم خطوة في أي استفسار إحصائي. يتم إجراء التحليل الإحصائي لمعالجة البيانات المرصودة وتحويلها بطريقة تجعلها مناسبة لاتخاذ القرار.
- **تفسير البيانات**: بعد تحليل البيانات، يحصل الباحث على معلومات جزئيًا أو كليًا عن المجتمع محل الدراسة.[1]

2.1. أهمية علم الإحصاء: تبرز أهمية علم الإحصاء من خلال الدور الذي يقوم به في العديد من مجالات الحياة، ويعكس ذلك الاتجاه الحديث للإحصاء واستخدامه بواسطة المنشآت على اختلاف أنواعها وأنشطتها في سبيل الوصول إلى قرارات حكيمة وبحيث أصبح من الممكن القول بأن الأساليب الإحصائية تستخدم غالباً في كل الدراسات والبحوث العلمية. فدعونا نناقش أهمية الإحصاء في مختلف المجالات كالتالي:[2]

1.2.1. أهمية الإحصاء في عملية التخطيط: الإحصاء هو أحد العناصر الحاسمة في عملية التخطيط، فبدون إحصاءات لا يمكن أن تكون الخطة ممكن، إذ تساعد الإحصائيات على التخطيط في مجال الأعمال والاقتصاد والمستوى الحكومي وحتى على المستوى الشخصي. للقيام بالتخطيط السليم تستخدم المؤسسات البيانات المتعلقة بالإنتاج والاستهلاك والدخل وما إلى ذلك.

[1] - سعد جلال. أحمد، **مبادئ الإحصاء النفسي–تطبيقات وتدرسيبات عملية على برنامج spss**، (القاهرة: الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، 2008)، ص.52.

[2] - Portela. Philippe , « **Importance des statistiques pour l'exploration de données et la science des données** », August 2017, available at : https://www.researchgate.net/profile/Filipe-Portela/publication/321176042_Importance_of_Statistics_for_Data_Mining_and_Data_Science/links/5fe0a8fc45851553a0dca9a9/Importance-of-Statistics-for-Data-Mining-and-Data-Science.pdf? , 12/01/2022, 19:48.

2.2.1. أهمية الإحصاء في الرياضيات: بالنظر إلى الدور الذي يلعبه الإحصاء في عملية جمع وتلخيص وتمثيل وإيجاد الاستنتاجات من مجموعة البيانات المتوفرة، محاولا التغلب على العديد من المشكلات مثل عدم تجانس البيانات وتباعدها، كما يجعل كل ذلك الإحصاء ذو أهمية تطبيقية واسعة في مختلف العلوم وخاصة الرياضيات. فعلم الإحصاء يحتوي على مفاهيم نظرية هي الاحتمالات بشكل أساسي وتتكون من مجتمع إحصائي وعينة ووحدة استعيان، واحتمال، فهو فرع أساسي من فروع الرياضيات.

3.2.1.أهمية الإحصاء في الاقتصاد: يعتبر الإحصاء والاقتصاد مترابطان مع بعضهما البعض، يستخدم كل فرع من فروع الاقتصاد تقريبا الإحصاء، أي الاستهلاك والإنتاج والتوزيع والتمويل العام، فكل هذه الفروع الاقتصادية الإحصائيات للمقارنة والعرض والتفسير وما إلى ذلك.

4.2.1. أهمية الإحصاء في العلوم الاجتماعية: يمكن تلخيصها في النقاط التالي:

- تستخدم الأدوات الإحصائية لتحليل الانحدار والارتباط في العلوم الاجتماعية لعزل تأثيرات هذه العوامل في كل ملاحظة تم اختبارها؛
- الإحصائيات تستخدم أيضا لإجراء المسوحات الاجتماعية؛
- يستخدم المسح الاجتماعي تقنيات المعاينة ونظرية التقدير؛
- تلعب الإحصائيات أيضا دورا مهما في علم الاجتماع فهي تساعد في دراسة معدل الوفيات والخصوبة والنمو السكاني وما إلى ذلك.

للإحصاء أيضا أهمية في مجال الصناعة من خلال استخدام النظرية الإحصائية في الانتاج الحربي وفي مجالات صناعات الفحم والحديد والغزل والمواد الكهربائية كما ان للإحصاء دور فعال في مجال الطب والصحة العامة في معرفة عدد المواليد وعدد الوفيات حيث تعتبر مؤشرات للمستوى الصحي العام ومؤشر لمدى تقدم البلد او تخلفه وأصبح للإحصاء أهمية كبرى في دراسة وتحليل العلاقات بين الامراض المختلفة وطرق العلاج واستخدام نظريات العروض الإحصائية اصبح الاساس في عمل شركات انتاج العقاقير والادوية . وعليه فأن الاحصاء بحد ذاته وسيلة وليس غاية فذاك يعني إمكانية استخدامه أينما وجد في البحث العلمي.

وفي مجال الزراعة يأتي دور الاحصاء في ان العلوم الزراعية تبدأ بالملاحظة وجمع بيانات عن الطبيعة في الحقل او المزرعة ثم يلي ذلك الدراسات العملية ويفيد الاحصاء في تنظيم وترتيب عملية الملاحظة والمشاهدة وجمع البيانات وتحليلها واستخلاص النتائج ولا يمكن أن يكون ذلك بغير دراسة كاملة بأساليب الاحصاء[1].

[1] – ياسين طعمة. حسن، **مرجع سابق**، ص.26.

2. **فروع علم الإحصاء**: يميل معظم الاحصائيين إلى تقسيم علم الإحصاء إلى فرعين أساسيين هما:

1.2. الإحصاء الوصفي: يشمل هذا النوع على الطرق الإحصائية التي تهتم في جمع البيانات عن ظاهرة معينة وأسلوب تنظيمها وتصنيفها وإمكانية عرضها جدوليا أو بيانيا.

2.2. الإحصاء الاستدلالي: وهو النوع الذي سنتطرق له بالتفصيل في الفصول القادمة، إذ يتناول هذا النوع الطرق الإحصائية التي تستخدم في تحليل البيانات وتفسير النتائج بهدف التوصل إلى استدلال أو استنتاج حول المصدر الذي جمعت منه البيانات، واتخاذ القرارات والتنبؤ بما ستؤول إليه الظاهرة المدروسة في المستقبل.

3. **المفاهيم الأساسية المرتبطة بالإحصاء**: هناك العديد من المفاهيم التي تقوم عليها دراسة علم الإحصاء سواءا الوصفي و الاستدلالي تتمثل في التالي:

1.3. المجتمع الاحصائي: هو مجموعة العناصر أو الأفراد التي ينصب عليها الاهتمام في دراسة معينة أو مجموعة المشاهدات والقياسات الخاصة بمجموعة من الوحدات الإحصائية والتي تخص ظاهرة من الظواهر القابلة للقياس مثل: مجتمع من الطلبة، مجتمع من الأسر.

إن الهدف الرئيسي من تحديد المجتمع الإحصائي هو تعيين حدود عملية جمع البيانات من جهة، وكذلك لعملية الاستقراء أو الاستنتاجات التي يمكن الحصول عليها من خلال إجراء الدراسة من جهة أخرى.

2.3. العينة الإحصائية: هي عبارة عن مجموعة من المشاهدات أختيرت بطريقة ما من المجتمع ففي بعض الأحيان دراسة المجتمع ككل قد يكون صعبا أو يحتاج الى وقت وجهد ومال مما يجعل الباحث الإحصائي يتوجه إلى دراسة العينة وصفاتها بدلا من دراسة المجتمع ككل ومنه يستنتج خواص المجتمع الأصلي الذي أخذت منه العينة.

ولكي تكون العينة الإحصائية مقبولة من الناحية الإحصائية لا بد أن تكون عينة ممثلة للمجتمع أي أنا تحتوي على جميع الخصائص بنفس نسب تواجدها في المجتمع الإحصائي الذي أختيرت منه، وأن تكون هذه العينة ذات دقة يمكن قياسها.

وتكون العينات بشكل عام على نوعين مهمين هما:

1.2.3. العينات الاحتمالية (العشوائية): يقصد بالعينات الاحتمالية بأنها الطريقة التي يتم بموجبها اختيار مفردات العينة من بين مفردات مجتمع الدراسة بطريقة عشوائية صدفة دون أي تدخل شخصي من قبل المسؤول عن إجراء البحث، بمعنى آخر إن اختيار مفردات العينة يخضع إلى مبدأ تكافؤ الفرص في ظهور أي مفردة من مفردات المجتمع ضمن العينة المختارة. والتي تضم: العينة العشوائية البسيطة، العينة العشوائية الطبقية، العينة العشوائية المنتظمة، العينة العنقودية، العينة العشوائية متعددة المراحل.[1]

[1] – كمال عوض. مراد، **أساسيات الإحصاء**، الطبعة الأولى، (عمان: دار البداية ناشرون وموزعون، 2009)، ص.30.

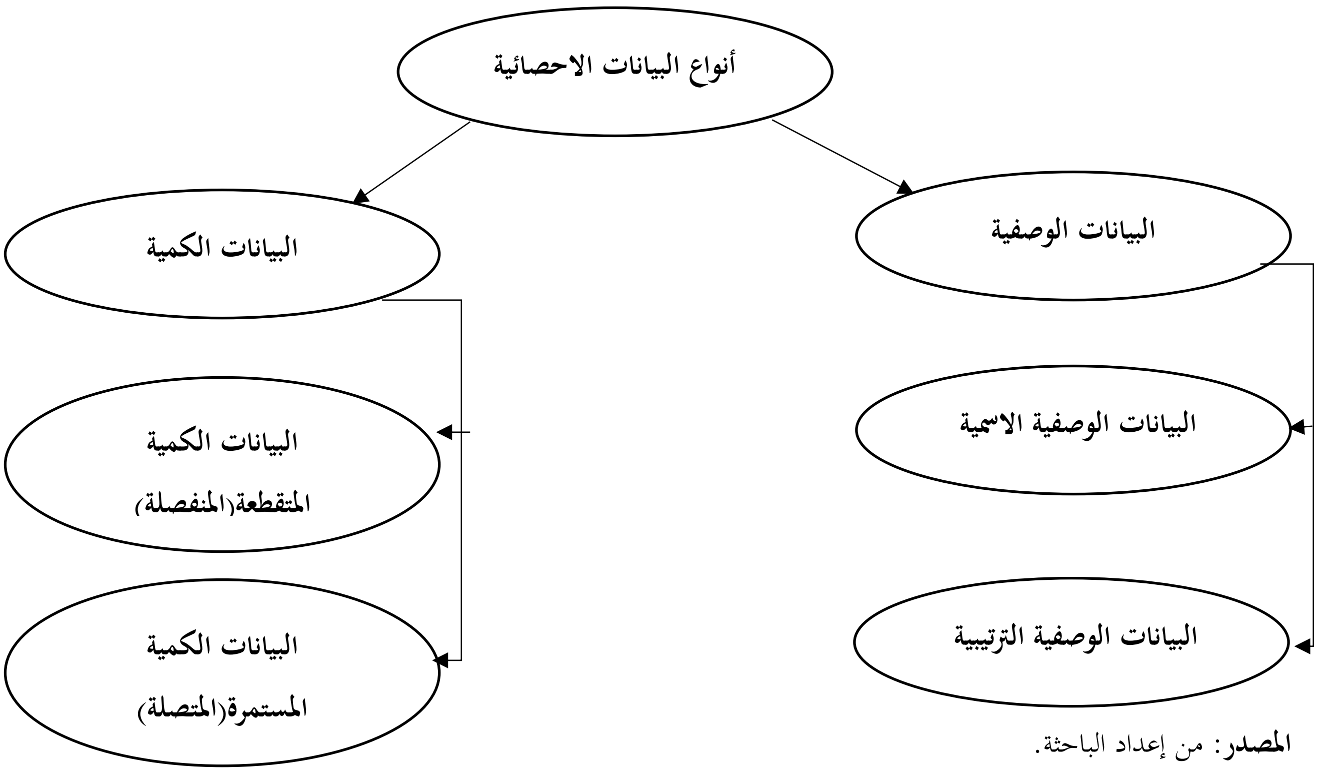
3.2.2. العينات غير الإحتمالية (غير العشوائية): تعرف العينات غير الاحتمالية بأنها الطريقة التي تتم بموجبها اختبار مفردات العينة من بين مفردات المجتمع الإحصائي بشكل لا يخضع إلى مبدأ تكافؤ الفرص في ظهور أي مفردة (أي لا يخضع لمبدأ الاحتمالات)، أي لا يخضع اختيار مفردات العينة إلى مبدأ الطريقة العشوائية. وتكون على عدة أنواع وهي: العينة القصدية، العينة الملائمة، العينة الحصصية، العينة العرضية، عينة كرة الثلج.[1]

3.3. الوحدة الإحصائية: هي الخلية الأساسية لتكوين المجتمع الاحصائي، كل وحدة من هذه الوحدات المكونة للمجتمع هي وحدة معاينة، وهذه الوحدة تختلف باختلاف الظاهرة المدروسة فقد تكون طالباً في جامعة أو قطعة أرض في قرية أو مسكناً من المساكن أو أسرة من أسر المجتمع.

3.4.البيانات الاحصائية: يهتم علم الإحصاء بجمع البيانات، يقصد بها المعلومات والبيانات الإحصائية المتعلقة بالظاهرة المطلوب قياسها ودراستها، وتختلف البيانات الإحصائية من حيث نوعها وطبيعتها باختلاف الظاهرة قيد الدراسة وباختلاف طريقة البحث والأدوات الإحصائية المستخدمة .

ويمكن تقسيم البيانات إلى مجموعتين كما هو مبين في الشكل التالي:[2]

الشكل رقم (01): تصنيف البيانات الإحصائية.



المصدر: من إعداد الباحثة.

وبالتالي تنقسم البيانات الإحصائية إلى:

[1] – المرجع نفسه، ص.30.

[2] – ياسين طعمة. حسن، حسين حنوش. إيمان، **طرق الإحصاء الوصفي**، (عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع، 2009)، ص.36.

1.4.3. البيانات الوصفية: وهي عبارة عن البيانات التي لا يمكن قياسها تصف الظاهرة محل الدراسة، وتنقسم بدورها إلى:

أ. البيانات الوصفية الاسمية: وهي بيانات غير رقمية تتكون من مجموعات متنافية، كل مجموعة لها خصائص تميزها عن المجموعة الأخرى، كما أن هذه المجموعات لا يمكن المفاضلة بينها، ومن الأمثلة على ذلك:

-النوع: متغير وصفي تقاس بياناته بمعيار اسمي " ذكر – أنثى " .

-الحالة الاجتماعية: متغير وصفي تقاس بياناته بمعيار اسمي " متزوج- أعزب – أرمل – مطلق".

-أصناف التمور: متغير وصفي يقاس بياناته بمعيار اسمي " سكري...الخ".

-الجنسية: متغير وصفي يقاس بياناته بمعيار اسمي "جزائري".

ب. البيانات الوصفية الترتيبية: وتتكون من مستويات، أو فئات يمكن ترتيبها تصاعديا أو تنازليا، ومن الأمثلة على ذلك:

-تقدير الطالب: متغير وصفي تقاس بياناته بمعيار ترتيبي "مقبول، جيد، ممتاز".

-المستوى التعليمي: متغير وصفي تقاس بياناته بمعيار ترتيبي "ابتدائي، متوسط، ثانوي، جامعي".

2.4.3. البيانات الكمية: وهي المشاهدات أو الصفات التي يمكن قياسها مباشرة بوسائل القياس المألوفة، كعدد الطلبة في جامعة ما، صفة الطول، أوزان الطلبة...الخ. والتي تنقسم بدورها إلى:

أ. البيانات الكمية المنفصلة: وهي المشاهدات أو الصفات التي تأخذ قيما متميزة عن بعضها البعض كعدد الطلبة في القسم، عدد أفراد الأسرة، عدد الأوجه التي تظهر في تجربة عشوائية عند رمي زهرة النرد ذو الأوجه الستة...الخ.

مثال 1:

عدد المرضى الذين يتم إدخالهم إلى المستشفى في اليوم متغير منفصل، لأن عددهم إما أن يكون 0 أو 1 أو 2 أو 3 وهكذا، وبالتالي فإنه يمكن عد عناصر المجال، كما توجد قفزات بين عناصره.

ب. البيانات الكمية المتصلة: وهي المشاهدات أو الصفات التي تأخذ مدى معين أو مجال معين من القيم، كأوزان منتوج البطاطا وغيرها. [1]

مثال 2:

[1] – صبحي أبو صالح.محمد، **الطرق الإحصائية**، (عمان– الأردن: دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، 2009)، ص ص.28-30.

إذا كانت سعة خزان ماء 1000 لترا وبدأنا نصب الماء في هذا الخزان، فما هو المتغير؟ وما هو مجاله، وما نوعه؟

الحل:

المتغير هو حجم الماء الموجود في الخزان في أي لحظة. كما أن هذا المتغير متصل لأنه يقيس الحجم، وهو يأخذ أي قيمة من 0 لترا إلى 1000 لترا. وعند قياس قيمة هذا المتغير في لحظة معينة نحتاج إلى قياس حجم الماء الموجود في الخزان ونسجل القيمة مقربة إلى خانة عشرية واحدة أو خانتين عشريتين حسب دقة الجهاز الذي نقيس به وتكون القيمة واقعة في الفترة من 0 إلى 1000.

4. **التوزيعات الاحتمالية الأكثر استخداما:** تتمثل في التالي:

1.4. **التوزيع الطبيعي:** يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وتأتي أهميته من الناحتين النظرية والتطبيقية. كما يستخدم لوصف الأنماط التكرارية للعديد من الظواهر الإحصائية، والتوزيع الطبيعي يدرس سلوك المتغيرات العشوائية المتصلة كالطول والوزن وغيرها.

كما أن قوانين التوزيعات الأخرى تؤول إلى التوزيع الطبيعي بكبر حجم العينة وخصوصا لنظرية الحد المركزية.

ودالة الكثافة لهذا التوزيع تكون على الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty \leq x \leq +\infty$$

حيث أن μ و σ تمثلان الوسط والانحراف المعياري على الترتيب لهذا التوزيع.

من خصائص هذا التوزيع :

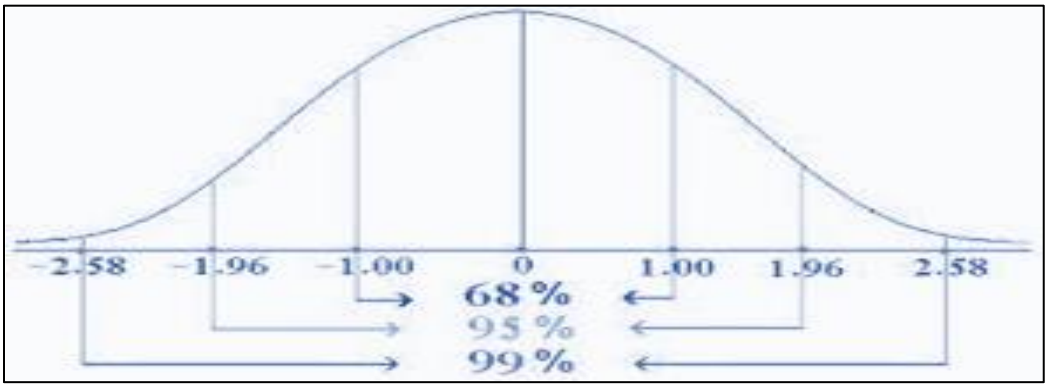
- أنه متماثل أي أنه وسطه الحسابي يساوي على التوالي الوسيط والمنوال $\bar{x} = M_e = M_0$
- يتحدد شكله بناءا على قيم μ و σ.
- المساحة تحت المنحنى $\mu - \sigma \,;\, \mu + \sigma$ تساوي 68.27% من المساحة الكلية.
- المساحة تحت المنحنى $\mu - 2\sigma \,;\, \mu + 2\sigma$ تشكل 95.45 % من المساحة الكلية.
- المساحة تحت المنحنى $\mu - 3\sigma \,;\, \mu + 3\sigma$ تشكل 99.73% من المساحة الكلية.

حيث أن μ و σ على التوالي التوقع والانحراف المعياري. ونكتب: $X \sim N(\mu, \sigma)$

ويكون الرسم البياني لدالة الكثافة للتوزيع الطبيعي العلم على النحو التالي:[1]

[1]– بوعظم.كمال، **الإحصاء الاستدلالي**، (دار زهران: عمان، 2009)، ص. 83.

الشكل رقم (02): منحنى التوزيع الطبيعي.



المصدر: من إعداد الباحثة.

مع العلم أن دالة الكثافة تتوفر على الشرطين الأساسين التاليين:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

2.4. التوزيع الطبيعي المعياري: التوزيع الطبيعي المعياري هو التوزيع الذي وسطه صفر وتباينه 1.فإذا كان المتغير العشوائي Z يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري فإن ذلك يعني أن توزيع Z هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 0$ وتباينه $\sigma^2 =$ 1.

إذ يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة وأكثرها استخداما في نظرية الاحتمالات والاحصاء الرياضي، وذلك لعدة اعتبارات:

- في الكثير من الحالات التطبيقية-اجتماعية كانت أم اقتصادية- يكون توزيع المتحول العشوائي طبيعيا، كطول الانسان، وزنه، عمره،...الخ.
- معظم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة منها أو المستمرة تؤول إلى هذا التوزيع عند توافر شروط معينة.
- تعتمد اختبارات الفروض الإحصائية ومجالات الثقة على التوزيع الطبيعي.

فإذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي ذو الوسط μ والتباين σ^2فإن توزيع المتغير العشوائي:

$$Z = (X-\mu)/\sigma$$

وتسمى كذلك بالمتغيرة المعيارية تستخذ لتكوين الجداول الإحصائية للاحتمالات:

$$F(z) = P(Z \leq z) \text{ أو } P(1 \leq Z \leq z)$$

وتتمثل خواص منحنى التوزيع الطبيعي فيما يلي:

منحنى التوزيع الطبيعي ناقوسي الشكل.

مهما كانت قيمة xفإن $f(x) \geq 0$وهذا لأن المنحنى دوما فوق محور السينات (المحور الأفقي).

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$(أي أن مجموع المساحة الكلية تحت المنحنى دوما يساوي 1).

منحناه متناظر حول المحور العمودي الذي يشمل على المحور الأفقي أي أن هذا العمود يقسم المساحة الكلية إلى قسمين متساويين بحيث: $P(x \geq \mu) = P(x \leq \mu) = \frac{1}{2}$

يمتد طرفا المنحنى إلى مالانهاية في الاتجاهين دون أن يتقاطها مع المحور الأفقي إلا في اللانهاية.

يصل إلى قمته (أعلى احتمال) عندما ، وبما أن المنحنى متناظر فإنه عند هذه النقطة نجد أن:

يتصف منحناه بأنه معتدل، أي أنه لا مدبب ولا مفلطح وغير ملتو، ولهذا يسمى أحيانا التوزيع المعتدل.

مثال 3:

إذا كان $\mathbf{Z : N(0,1)}$ أوجد ما يلي:

1. $P(z < 1.32)$
2. $P(z > 2.14)$
3. $P(0 < z < 1.65)$
4. $P(z < -1.96)$

الحل:

باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري (أنظر الملحق رقم 1) حيث العمود الأيسر يعطي قيم Z ذات خانة عشرية واحدة والصف العلوي يعطي الخانة العشرية الثانية، نقرأ

1. $P(z < 1.32)=0.9066$

نقرؤها من الجدول مباشرة.

2. $P(z>2.14)= 1-P(z \leq 2.14)=1-0.9838=0.0162$

وذلك باستعمال المتممة واستعمال الجدول.

3. $P(0<z<1.65)=P(z < 1.65) - P(z \leq 0)=0.9505-0.5000=0.4505$

وذلك بوضع الاحتمال على شكل الفرق بين مساحتين موجودتين في الجدول مباشرة.

4. $P(z<-1.96)=0.025$

3.4. توزيع كاي تربيع χ^2:

هو من أكثر التوزيعات استخداما في اختبار الفرضيات يمكن تعريفه كالتالي:

لتكن $x_1\ x_2\ ....x_v$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها تتبع التوزيع الطبيعي المعياري$(\mu = 0,\ \sigma =1)$ فالمتغيرة

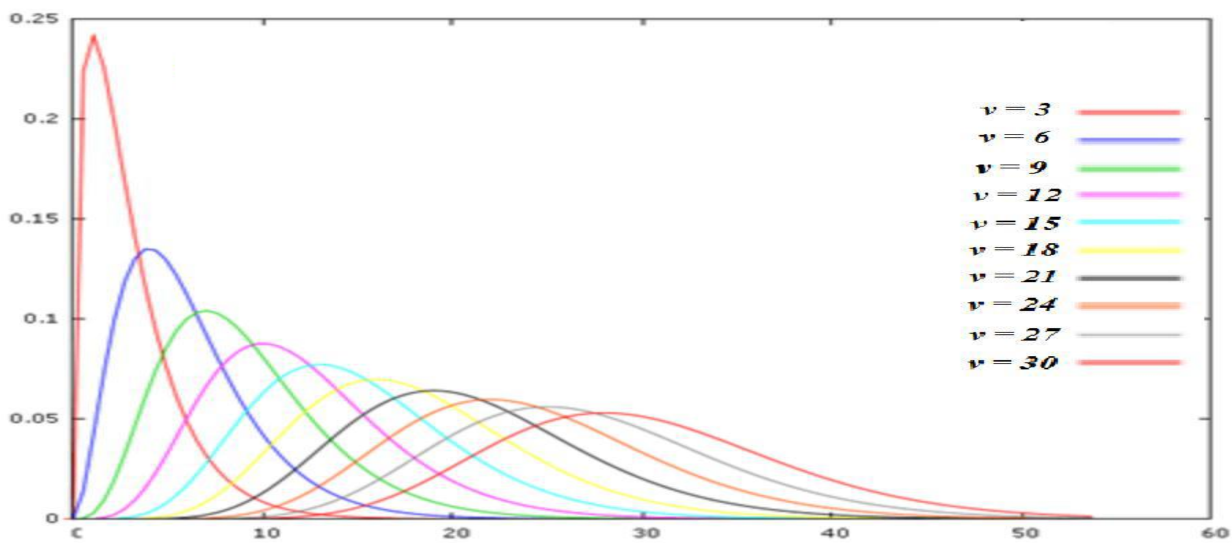
$x=x_1^2+x_2^2+....+x_v^2$ لها دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{(v/2)-1}e^{-x/2}}{2^{(v/2)}\Gamma(v\ /\ 2)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

حيث $\Gamma(a)$ هي الدالة قاما.

ويكون التمثيل البياني للتوزيع كاي تربيع كالتالي:

الشكل رقم (03): منحنى توزيع كاي تربيع.



المصدر: متوفر على الموقع الالكتروني التالي: **http://www.jybaudot.fr/Stats/khideux.html**، **2021/01/22**، **17:07**.

أما جدول قانون توزيع كاي مربع χ^2 (**أنظر الملحق رقم 02**) فهو يلخص قيم χ^2 عند درجات حرية مختلفة وباحتمالات مختلفة.

مثال:

أوجد احتمال ان تكون قيمة χ^2 عند درجة الحرية $v = 10$:

- أقل من أو تساوي 2.156
- أكبر من أو تساوي 15.987

الحل:

باعتبار العمود الأول لجدول توزيع كاي مربع يضم قيم درجات الحرية، والسطر الأول يضم الاحتمال أو مقدار المساحة في الجهة اليمنى، فإن بقية الخانات تضم قيم المغير كاي مربع والموجودة على محور الفواصل والناتجة عن تقاطع الأعمدة مع الأسطر.

ولحل الأمثلة لدينا درجة الحرية 10 فنبحث عن قيم كاي مربع التي تقابلها داخل الجدول، وفي كل مرة نجد قيمة من قيم كاي مربع نبحث عما يقابلها من احتمال أو مساحة في السطر الأول.

$$P(x \le 2.156) = 1 - P(x \ge 2.156) = 1 - 0.995 = 0.005$$
$$P(x \ge 15.987) = 0.1$$

حيث ان توزيع كاي مربع يتحول إلى التوزيع الطبيعي إذا كان $v > 30$ وإيجاد قيمة χ^2 بتعويض قيمة μ في العلاقة التالية عند احتمال معين P:

$$\chi_p^2 = \frac{1}{2}\left[\mu_P + \sqrt{2v - 1}\right]^2$$

وبالتالي يتسنى لنا المقارنة بين القيمة التي نجدها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري و القيمة المستخرجة من جدول كاي مربع، ونقارن بين النتيجتين لنلحظ التقارب بينهما.

4.4. توزيع ستيودنت:

وجد العالم ويليام سيلي قوست الملقب بـ student أنه لا يمكن إجراء عملية اختبار المعنوية على العينات الصغيرة باستخدام التوزيع الطبيعي رغم خضوع المتغير العشوائي لهذا التوزيع، لذلك وضع توزيعا آخر للعينات الصغيرة وأطلق عليه توزيع ستيودنت.

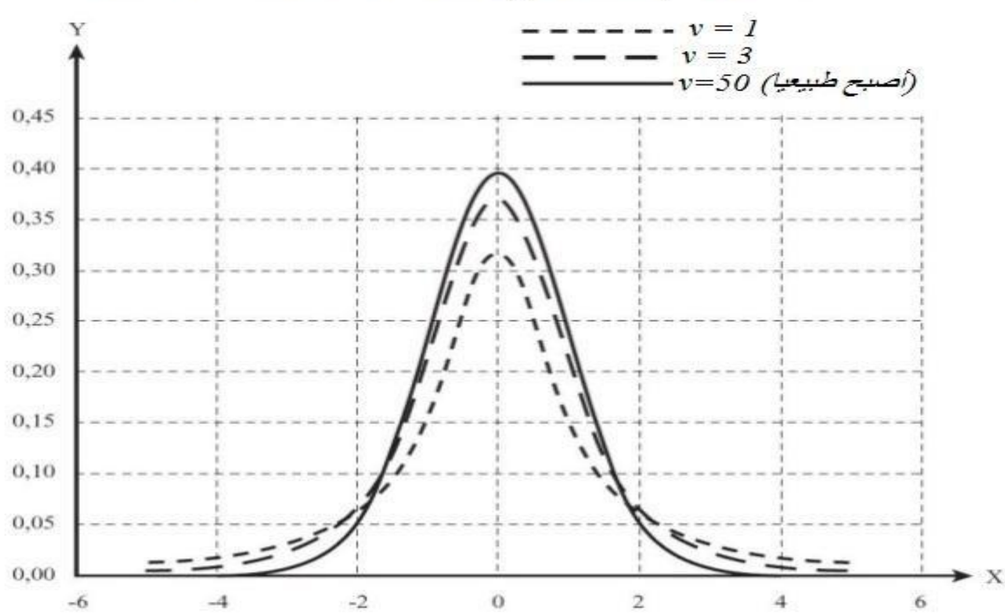
ويكون توزيع ستيودنت وفق النظرية التالية: لتكن المتغيرتان العشوائيتان المستقلتان Y وZ حيث $Y \sim N(0,1)$ و $Z \sim \chi_v^2$؛ المتغيرة $T = \frac{Y}{\sqrt{Z/V}}$ تتبع توزيع لها دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$\boldsymbol{f(t)} = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}, \left(\mathbf{1} + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v-1/2)} \quad -\infty < t < +\infty$$

فإن هذا التوزيع يتبع التوزيع t بدرجات الحرية v ونكتب: $T \sim t\nu$

ويكون تمثيله البياني كما يلي:

الشكل رقم (04): منحنى توزيع ستيودنت حسب درجات الحرية.



المصدر: متوفر على الموقع الالكتروني التالي: https://statistics.ead-minerve.fr/Web_FR/co/Distributions%20connues_FR.html ، 2021/01/22، 19:07.

ويتم تحديد قيمة T انطلاقا من جدول مع معلومية درجة الحرية ودرجة المعنوية α.

مثال:

أوجد قيمة T إذا كان $v = 6$ و $\alpha = 5\%$.

الحل:

من جدول توزيع ستيودنت (**أنظر الملحق رقم 03**) نجد عند درجة الحرية 6 ودرجة المعنوية 0.05 أن قيمة T

4.5. توزيع فيشر:

ليكن لدينا المتغيرتان العشوائيتان المستقلتان $X_1 \sim X_{v1}^2$ و $X_2 \sim X_{v2}^2$، المتغيرة: $X = \frac{X_1/V_1}{X_2/V_2}$ ، لها دالة الكثافة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} v_1^{\frac{v_1}{2}} v_2^{\frac{v_2}{2}} \quad x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1} \quad (v_1 x+v_2)^{-\frac{v_1+v_2}{2}} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

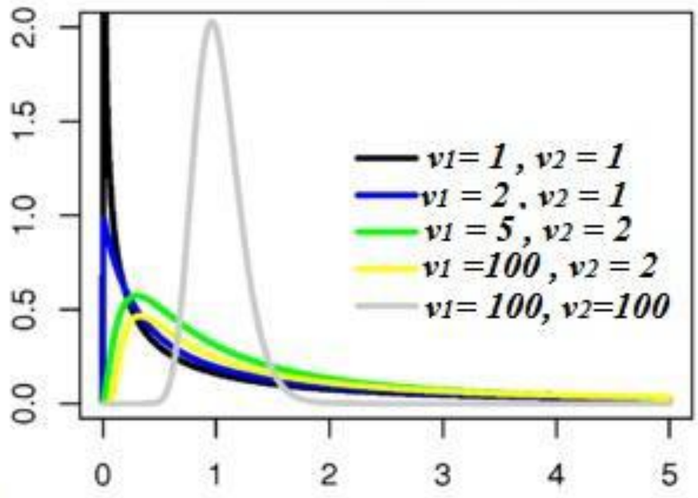
ونقول أن المتغيرة X تتبع توزيع فيشر بـ v_1, v_2 درجة حرية ونكتب: $X \sim F v_1, v_2$.[1]

حيث أن:

$$F_p(v_1,v_2)=\frac{1}{F_{1-p}(v_1,v_2)}$$

ويكون الشكل البياني لتوزيع فيشر على النحو التالي:

الشكل رقم (04): منحنى توزيع فيشر حسب درجات الحرية.



المصدر: متوفر على الموقع الالكتروني التالي: http://www.statelem.com/loi_de_fisher.php ،

كما ان جدول توزيع فيشر (أنظر الملحق رقم 04) يعطي القيم الممكنة للمتغير العشوائي F عند احتمال معين p وبدرجتي حرية v_1 و v_2، كما يمكن أن نجد جدولين حسب قيمة p أحدهما عند 95% والجدول الثاني عند قيمة الاحتمال 99%.

مثال:

أحسب ما يلي:

---

[1] – صبحي أبو صالح.محمد، **مرجع سابق**، ص.220.

$$F_{0.95}(1,10)$$

$$F_{0.99}(6,10)$$

الحل:

بالاعتماد على جدول توزيع فيشر عند احتمال 95% ودرجتي الحرية 1 و10 نجد أن:

$$F_{0.95}(1,10) = 4.96$$

وبالاعتماد على جدول توزيع فيشر عند احتمال 99% ودرجتي الحرية 6 و10 نجد أن:

$$F_{0.99}(6,10) = 5.39$$

تمارين الفصل الأول:

التمرين الأول:

- ما الفرق بين الإحصاء الاستدلالي والاحصاء الوصفي؟
- ما الفرق بين الاحصاءة والمعلمة؟
- ما الفرق بين المجتمع الاحصائي والعينة الإحصائية؟

التمرين الثاني:

بين نوع البيانات التالية:

- لون عيون أفراد عائلة عددهم7.
- رواتب 20 معلما في مدرسة ثانوية.
- نوع الدم عند الإنسان.
- عدد الساعات التي يقضيها الطالب لمدة 30 يوما للتحضير إلى امتحان عام.
- الراتب الشهري لموظف في شركة.

التمرين الثالث:

صنف المتغيرات حسب نوعها:

- عدد السيارات المباعة لدى إحدى وكالات السيارات في الأسبوع.
- وزن الطفل عند الولادة.
- مدة مكالمة هاتفية.
- عدد الودائع الجديدة لدى إحدى البنوك في الشهر.
- ضغط الدم لدى المريض.
- متوسط درجة الحرارة خلال شهر جويلية.

التمرين الرابع:

إذا كان $Z : N(0,1)$ أوجد ما يلي:

$$P(z < 1.29)$$

$$P(z > 2.56)$$

$$P(-1.96 < z \leq 1.96)$$

التمرين الخامس:

في توزيع t على درجات حرية 12 أوجد:

$$P(t > 2.681)$$

$$P(-2.179 < t < 2.179)$$

$$P(t < 3.055)$$

الفصل الثاني:

نظرية توزيع المعاينة

الفصل الثاني: نظرية توزيع المعاينة

تعتبر أسلوب المعاينة من أهم أغراض الإحصاء الاستدلالي، فمن خلال دراسة العينة يقوم الباحث بالتعميم على المجتمع ككل محل الدراسة، ترتكز هذه التعميمات على فهم السمات والتغيرات في المجتمع بنقلها عن طريق المعاينة، فعادة ما يكون اهتمامنا منصبا على معرفة سمات المجتمع (المعلمات) عن طريق إعطائها قيما عددية وذلك باستعمال سمات مشابهة لها خاصة بالعينة (الإحصاءات). وإمكانية التعميم من العينة إلى المجتمع تعتمد على كيفية أخذ العينة وحجمها وطرق دراسة صفاتها باستعمال نظرية الاحتمال.

ومن خلال هذا الفصل سنقوم بدراسة إحصاءات العينة، مفهوم توزيع المعاينة، توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي، توزيع الفرق بين متوسطين، توزيع المعاينة للنسبة والفرق بين نسبتين، توزيع المعاينة للتباين والنسبة بين تباين نسبتين.

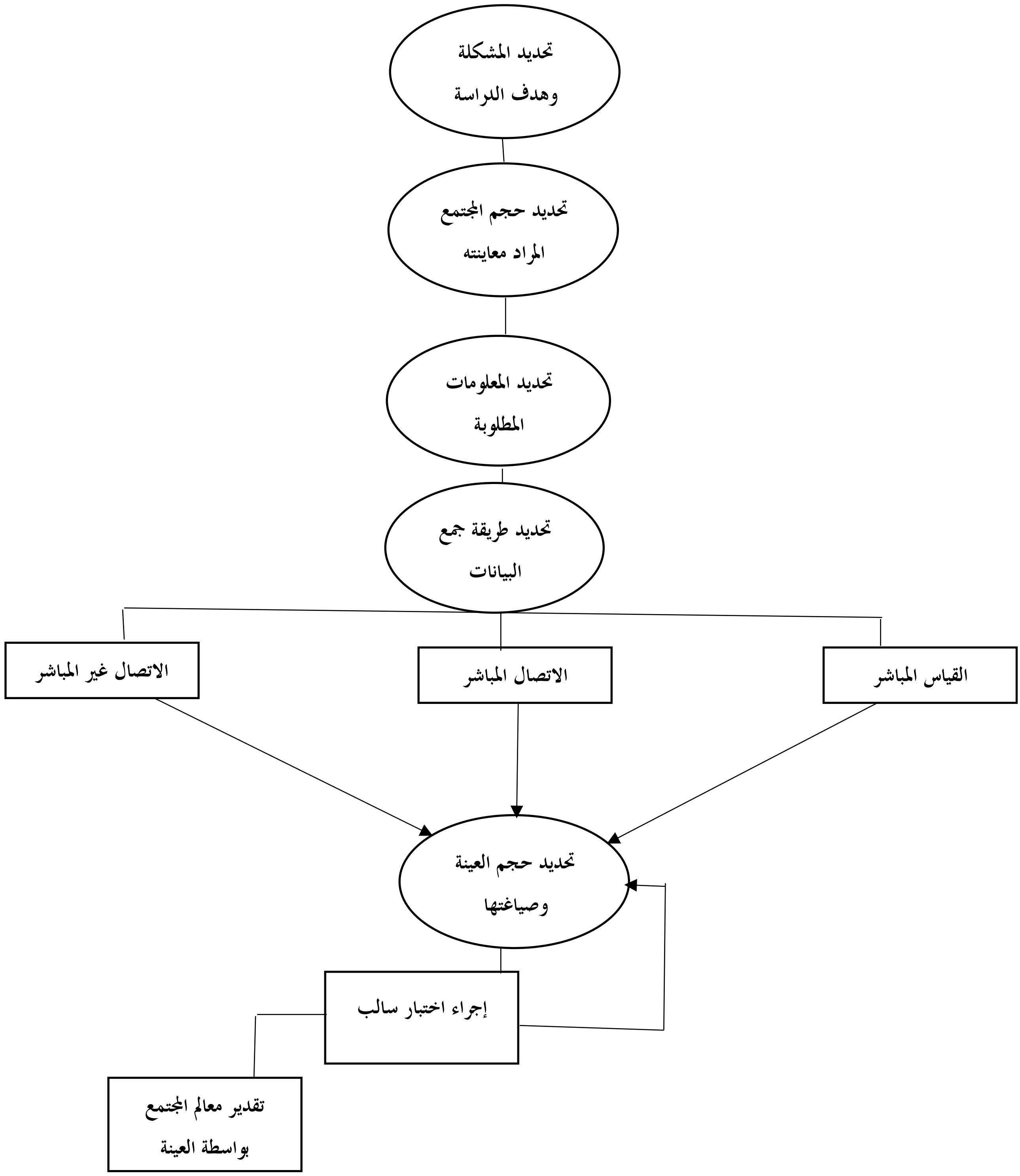
1. العينة وتصميمها:

1.1. تعريف المعاينة: هي كيفية اختيار عدد ما من وحدات المعاينة المدرجة في الإطار، وأن مجموعة الوحدات المختارة تسمى عينة، أما عددها فيدعى حجم العينة ويرمز له بالرمز:n.[1]

2.1. الخطوات الأساسية لتصميم العينة: قبل القيام بإجراء أية معاينة علينا مسبقا أن نحدد كيفية تنظيم وتنفيذ هذه المعاينة لذلك لا بد أن نتبع الخطوات الأساسية العامة المستخدمة في تصميم العينات. يمكن توضيحها من خلال الشكل التالي:

[1] – د. ليونارد، ج كازمير، ترجمة مصطفى جلال مصطفى، **الإحصاء التجاري**،(مصر: الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، 2004) ، ص.80 .

الشكل رقم (06): خطوات تصميم العينة.



المصدر: من إعداد الباحثة.

وبذلك تنقسم خطوات تصميم العينة إلى:

1.2.1. تحديد المشكلة والهدف: ويقصد بها تحديد المشكلة المراد دراستها ومعرفة فيما إذاكانت طابعا احصائيا أم لا ومن ثم يتم تحديد هدف الدراسة.

2.2.1. تعريف وتحديد المجتمع المراد معاينته: بعد تحديد المشكلة أو الموضوع محل الدراسة وهدفها، يجب على الباحث أن يعرف المجتمع المراد دراسته تعريفا دقيقا مع تحديد عناصره وتسمية وحدة المعاينة التي سيتناولها البحث، كما أنه يجب تحديد الفترة الزمنية المراد فيها إجراء هذه الدراسة.

وكما يجب التأكد من المجتمع إذاكان خاضعا لشروط المعاينة وخاصة التجانس ولا يجوز استبدال المجتمع بأي مجتمع آخر أو تحويل إجراء تلك الدراسة من اللحظة الزمنية المحددة إلى لحظة أخرى سابقة لها أو لاحقة.

3.2.1. تحديد المعلومات المطلوبة: ويقصد بها المعلومات اللازمة لإجراء الدراسة الضرورية لاستخراج النتائج الهادفة وهذا لا بد أن يرجع الباحث إلى جميع المصادر والمراجع الأخرى التي تتضمن هذه المعلومات والوقوف على ما جمع منها في الدراسات وذلك للاستفادة منها في تحديد بعض المؤشرات الإحصائية وبالإضافة إلى ذلك على الباحث أن يعد الاستمارات الإحصائية المناسبة والواضحة والمتضمنة المؤشرات الإحصائية الضرورية لهذه الدراسة وإعداد جملة من الأسئلة المفهومة والواضحة لتوجيهها على وحدات المعاينة فيما إذاكانت المعاينة تتناول أفراد المجتمع.

4.2.1. تحديد طريقة جمع البيانات: على الباحث اختيار الطريقة المثلى التي يرغب في استخدامها لجمع المعلومات ومن أهم هذه الطرق:

أ. الاتصال المباشر: كالمقابلة الشخصية وتوجيه أسئلة مباشرة للوحدات المختارة في العينة.

ب. الاتصال غير المباشر: مع وحدات العينة بواسطة توجيه الأسئلة عبر الهاتف، الفاكس، البريد الالكتروني وغيرها.

ج. القياس المباشر: حيث يقوم الباحث بإجراء القياسات اللازمة لتحديد الخصائص المراد دراستها في وحدات العينة.

كما يمكن استخدام هذه الطرق مع بعض ولكن طريقتي القياس والاتصال المباشر هما أضمن الطرق من حيث الحصول على المعلومات تكون مقبولة مع العلم أنها أكثر تكلفة من طريقة الاتصال غير المباشر.

5.2.1. تحديد حجم العينة وتكاليفها: يجب على الباحث قبل إجراء عمليات السحب تحديد حجم العينة اللازم للحصول على الدقة المطلوبة كما يطلب تحديد تكاليف هذه المعاينة. ويجرى تحديد حجم العينة بناءا على الدقة المطلوبة وعلى تباين المجتمع، حتى تكون لدى الباحث فكرة ولو عامة على هذا التباين يجب الرجوع إلى الدراسات السابقة أو إجراء اختبار سابق على ذلك المجتمع.

6.2.1. إجراء اختبار سابق: يفضل إجراء اختبار أولي على بعض النواحي التي قد تكون غامضة في البداية وذلك لإدخالها في موضوع الدراسة وتعديل الاستمارات الإحصائية عند الضرورة ويفيد هذا الاختبار المسبق في تقييم القيمة العملية للاستمارة كما أنه يفيد في تسهيل الكثير من الصعوبات التي سيواجهها الباحث عند إجراء البحث.

7.2.1. تلخيص وتحليل المعلومات: يجب أن يجري الباحث مراجعة كاملة لجميع المعلومات التي حصل عليها وتصحيح الأخطاء ومن ثم تبويب هذه البيانات ومن ثم دراستها وتحليلها.

8.2.1. تقدير معالم المجتمع بواسطة العينة: إن تقدير المعالم الأساسية للمجتمع بواسطة العينة هو الهدف الأساسي للبحوث الإحصائية (وهذا ما سيتم دراسته في الفصل الثالث بالتفصيل).[1]

3.1. مصادر الأخطاء الإحصائية: هناك نوعان من الأخطاء تتمثل في التالي:

1.3.1. أخطاء المعاينة العشوائية: تلعب الصدفة دورا كبيرا عند اختيار مفردات العينة ومن ثم يكون هناك اختلاف بين ما نحصل من نتائج العينة وبين القيم الحقيقة للمجتمع وهذا الاختلاف هو ما يطلق عليه أخطاء المعاينة العشوائية ويرجع إلى:

- **حجم العينة:** حيث أن هناك علاقة بين حجم العينة وبين أخطاء المعاينة العشوائية.
- **تباين المجتمع:** حيث يزداد حجم أخطاء المعاينة كلما كان تباين المجتمع كبيرا ولهذا يكون من الضروري اختيار أسلوب المعاينة الذي يتناسب مع المجتمع.
- **طريقة اختيار العينة:** يجب اختيار أسلوب المعاينة الذي يساعد على التحكم في مقدار أخطاء العينة.

2.3.1. أخطاء التحيز (الناتج عن الطريقة المعتمد في جمع البيانات): قد يحدث هذا النوع من الأخطاء حتى عن دراسة جميع مفردات المجتمع، حيث أنه قد يرجع إلى:

- التحيز الذي يحدث عند إجابة الأفراد على الأسئلة؛
- التحيز الذي يحدث من جامعي البيانات؛
- التحيز الذي يحدث بسبب صياغة أسئلة البحث؛
- الأخطاء التي تحدث عند تبويب البيانات أو عند تحليلها؛

[1] – بدر. سالم عيسى ، غصاب عبابنة .عماد ، **مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، (عمان، الأردن: الطبعة الثانية، دار المسيرة،، 2010)، ص.50.

ويمكن التقليل من أخطاء التحيز ببذل الجهد اللازم في كافة مراحل الدراسة وفي كافة خطواتها والعمل على مراجعة وتقييم كل خطوة يتم إنجازها حتى يمكن اكتشاف التحيز بصورة سريعة.

4.1. أشكال المعاينة: هناك نوعين هما:[1]

1.4.1. المعاينة بالإرجاع: هي التي يتم فيها اختيار كل عنصر من المجتمع أكثر من مرة، ويمكن اعتبار هذا المجتمع الذي تمت فيها المعاينة بالإرجاع بالمجتمع غير المنته أو المجتمع غير المحدود، طالما أنه يمكن أن نسحب منه عينة أيا كان حجمها.

2.4.1. **المعاينة بدون ارجاع**: هي التي يتم فيها اختيار كل عنصر من المجتمع مرة واحدة فقط، ويمكن اختيار هذا المجتمع الذي تمت فيه المعاينة بالمجتمع المنتهي أو المجتمع المحدود.

5.1. تعريف توزيع المعاينة: يعتمد الباحث الاحصائي على أسلوب المعاينة في عملية جمع البيانات ومن أسباب اختيار أسلوب المعاينة بدلا من أسلوب الحصر الشامل الذي يعتمد على جمع البيانات للمجتمع ككل هي:

- توفير الوقت والجهد؛
- تقليل التكلفة؛
- لما يكون المجتمع كبير جدا؛
- لما تكون المجتمعات متجانسة.

وبالتالي فتوزيع المعاينة يمثل التوزيع الاحتمالي للإحصاءة المحسوب لكل العينات الممكنة والتي حجمها n من المجتمع الاحصائي المدروس أيا كان حجمه وأيا كانت طريقة السحب (بإرجاع أو بدون إرجاع).

فبفرض أننا قمنا باختيار عينة عشوائية حجمها n من مجتمع معين، ثم بعد ذلك قمنا بحساب مقياس معين لهذه العينة وليكن على سبيل المثال المتوسط الحسابي $\bar{x}$، ثم اخترنا عينة أخرى بنفس الحجم وقمنا بحساب وسطها الحسابي وعينة ثالثة وهكذا لجميع العينات التي يمكن سحبها من المجتمع محل الدراسة.

فإنه سيتوفر لدينا عدد كبير من القيم للمتوسط الحسابي $\bar{x}$ هذه القيم تُكون مجتمع آخر عدد مفرداته أكبر بكثير من عدد مفردات المجتمع الأصلي.

[1] - Francis. Bismans., **Probabilités & statistique inférentielle, prélude à l’économétrie**, (édition Ellipses., 2016), p.58.

ومن هذا المنطلق يمكن النظر إلى هذا المقياس على أنه متغير عشوائي يأخذ قيما مختلفة، ويتبع توزيعا معينا يختلف عن توزيع المجتمع الأصلي، ويسمى هذا التوزيع بتوزيع المعاينة لهذا المقياس.

2. توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{x}$:

إذا كان x يخضع لتوزيع وسطه μ وتباينه σ^2، وكان $\bar{x}$ يمثل المتوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن:

متوسط توزيع المعاينة للمتوسط $\bar{x}$ هو $\mu_{\bar{x}} = \mu$

تباين توزيع المعاينة للمتوسط $\bar{x}$ هو $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

هذا في حالة السحب مع إرجاع

أما في حالة السحب بدون إرجاع فيبقى متوسط توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة كما هو والذي يتغير هو تباين متوسطات العينة كالتالي:

توقع $\bar{x}$ هو $\mu_{\bar{x}} = \mu$

تباين $\bar{x}$ هو $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

حيث: N هو حجم المجتمع

n هو حجم العينة

ملاحظة:

تهمل قيمة معامل التصحيح $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ في حالتين:

- حجم المجتمع كبير جدا.
- النسبة $\frac{n}{N} < 0,05$.[1]

مثال 1:

إذا كان لدينا مجتمع حجمه 5 وتباينه 8، وسحبنا منه كل العينات العشوائية ذات الحجم 2 (بدون إرجاع).

- أوجد تباين توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$.

الحل:

لدينا: N= 5، $\sigma^2 = 8$، $n = 2$

والسحب بدون إرجاع

[1] – أحمد عودة بن عبد المجيد عودة، منصور بن عبد الرحمن القاضي، **الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، الطبعة الثالثة، (مكتبة الفلاح للنشر والتوزيع، 2014)، ص.160.

فتباين توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ هو:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) / \frac{n}{N} = \frac{2}{5} > 0{,}05$$

ومنه: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{8}{2} \times \frac{5-2}{5-1} = 3$

1.2. طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي: يوجد نوعين في حالة التوزيع الطبيعي وفي حالة التوزيع غير الطبيعي كما يلي:

1.1.2. نوع توزيع المعاينة للمتوسط عندما يكون المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي:

إذا كان المجتمع الذي تتم منه المعاينة له توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 فإن متوسط العينة المسحوبة أيضا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري $\sigma_{\bar{x}}$ ونكتب:

$$x \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

ومنه: $z = \frac{(\bar{x}-\mu)}{\sigma_{\bar{x}}} \sim N(0,1)$

مثال 2:

يختار مراجع عينة عشوائية حجمها 16 من مجتمع يتكون من 1000 حساب مدين يفترض أنها تتوزع طبيعيا حيث متوسط قيمة الحساب المدين للمجتمع هو 26000 دج بانحراف معياري 4500 دج.

- ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 28250 دج ؟

الحل:

$$\mu = 26000, \sigma = 4500, N = 1000, n = 16.$$

$$P(\bar{x} < 28250) = ?$$

نهمل معامل التصحيح لأن:

$$\frac{n}{N} = \frac{16}{1000} = 0{,}016 < 0{,}05$$

ومنه :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4500}{\sqrt{16}} = 1125$$

$$x \sim N(26000{,}4500) \Rightarrow \bar{x} \sim N(26000{,}1125)$$

فنجد:

$$z = \frac{(\bar{x}-\mu)}{\sigma_{\bar{x}}} = 28250-26000/1125=2$$

$$P(2 < 28250) = P(z < 2) = 0,5 + P(0 < z < 2)$$

$$=0.5+0.4772=0.9772$$

أي أن احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 28250 هو: 0.9772

2.1.2. نوع توزيع المعاينة لمتوسط العينة عندما يكون المجتمع له توزيع غير طبيعي والتباين معلوم:

تصادفنا العديد من الحالات التي لا يمكننا فيها تحديد طبيعة توزيع المجتمع، الأمر الذي يحولنا عن تحديد توزيع المعاينة لمتوسط العينة، ومع ذلك فقد تمكن علماء الإحصاء من إثبات أن توزيع المعاينة لـ $\bar{x}$ هو التوزيع الطبيعي في حالة العينات ذات الأحجام الكبيرة أيا كان توزيع المجتمع، وهذه النتيجة الحاسمة تعرف باسم نظرية النهاية المركزية.

نظرية النهاية المركزية: إذا كان حجم العينة كبير $n \geq 30$، فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، بغض النظر عن شكل المجتمع الأصلي ذي المتوسط μ والانحراف المعياري σ، ولذلك يمكن حساب احتمال أن يكون $\bar{x}$ لعينة عشوائية من خلال القيمة الإحصائية لـ z وفق العلاقة الشهيرة[1]:

$$z = \frac{(\bar{x}-\mu)}{\sigma_{\bar{x}}}$$

$$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{x}})$$

مثال 3:

شركة مختصة في صناعة الحافلات وتقترح 70 كغ لوزن الراكب بانحراف معياري 10 كغ، إذا علمت أنها قامت بتصميم حافلة لنقل العمال حمولتها القصوى هي 2880 كغ وتتسع إلى 36 عاملا.

-فما هو احتمال أن تحمل هذه الحافلة أكبر من حمولتها؟

الحل:

نجد أن: $\bar{x} = \frac{2880}{36} = 80$

والمطلوب إيجاد: $P(\bar{x} > 80) = ?$

---

[1] – مصطفى الأشقر. أحمد، **مقدمة في الإحصاء مفاهيم وطرائق**، (عمان: دار الثقافة للنشر والتوزيع، 2009)، ص.189.

ولدينا:

- توزيع المجتمع مجهول لكن حجم العينة 36 أكبر من 30.
- وبالاستناد إلى نظرية النهاية المركزية نستنتج بأن متوسطات أوزان العمال تقترب من التوزيع الطبيعي.

$$z = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{80 - 70}{24/\sqrt{36}} = 2.5$$

$$P(\bar{x} > 80) = P(z > 2.5) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

أما **إذا المجتمع لا يتبع التوزيع الطبيعي وحجم العينة أقل من 30** فنجد:

$$\bar{x} \sim t(n-1)$$

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

3.1.2. توزيع المعاينة من مجتمع وسطه معلوم μ وتباينه σ^2 مجهول:

في كثير من التطبيقات المتعلقة بالمتوسط الحسابي $\bar{x}$ لا يكون الانحراف المعياري للمجتمع معروفا، ولذلك إذا كان **حجم العينة n أكبر من أو يساوي 30** فإننا نستعمل S (الانحراف المعياري للعينة) بدلا من σ، ويكون $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ يخضع لتوزيع يمكننا تقريبه بالتوزيع الطبيعي المعياري ما دامت $n \geq 30$، ولكن في الحالات التي يكون فيها n أقل من 30 فإن الانحرافات المعيارية للعينة تكون ذات تغير كبير لدرجة أن S لا تكون تقديرا موثوقا للانحراف المعياري σ وبالتالي $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ يخضع لتوزيع لا يمكننا تقريبه من التوزيع الطبيعي المعياري.[1]

وبالتالي كخلاصة إذا أخذت عينة عشوائية من توزيع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 غير معلوم، وإذا كان المتوسط الحسابي $\bar{x}$ لعينة حجمها n وكان الانحراف المعياري لهذه العينة S فإن المتغير:

$$\bar{x} \sim t(n-1)$$

$$T = \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

يخضع لتوزيع ستيودنت على درجات حرية v=n-1

[1] – جزماتيي. سامح ، **الاحتمالات والإحصاء**، (دمشق: مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب، 1989) ، ص ص.20-25.

كما أن تباين العينة يكون من الشكل:

$$\boldsymbol{S^2} = \frac{\sum(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^2}{\boldsymbol{n}}$$

أما إذا كان **حجم العينة أقل من 30** فنجد أن:

$$\bar{x} \sim t(n-1)$$

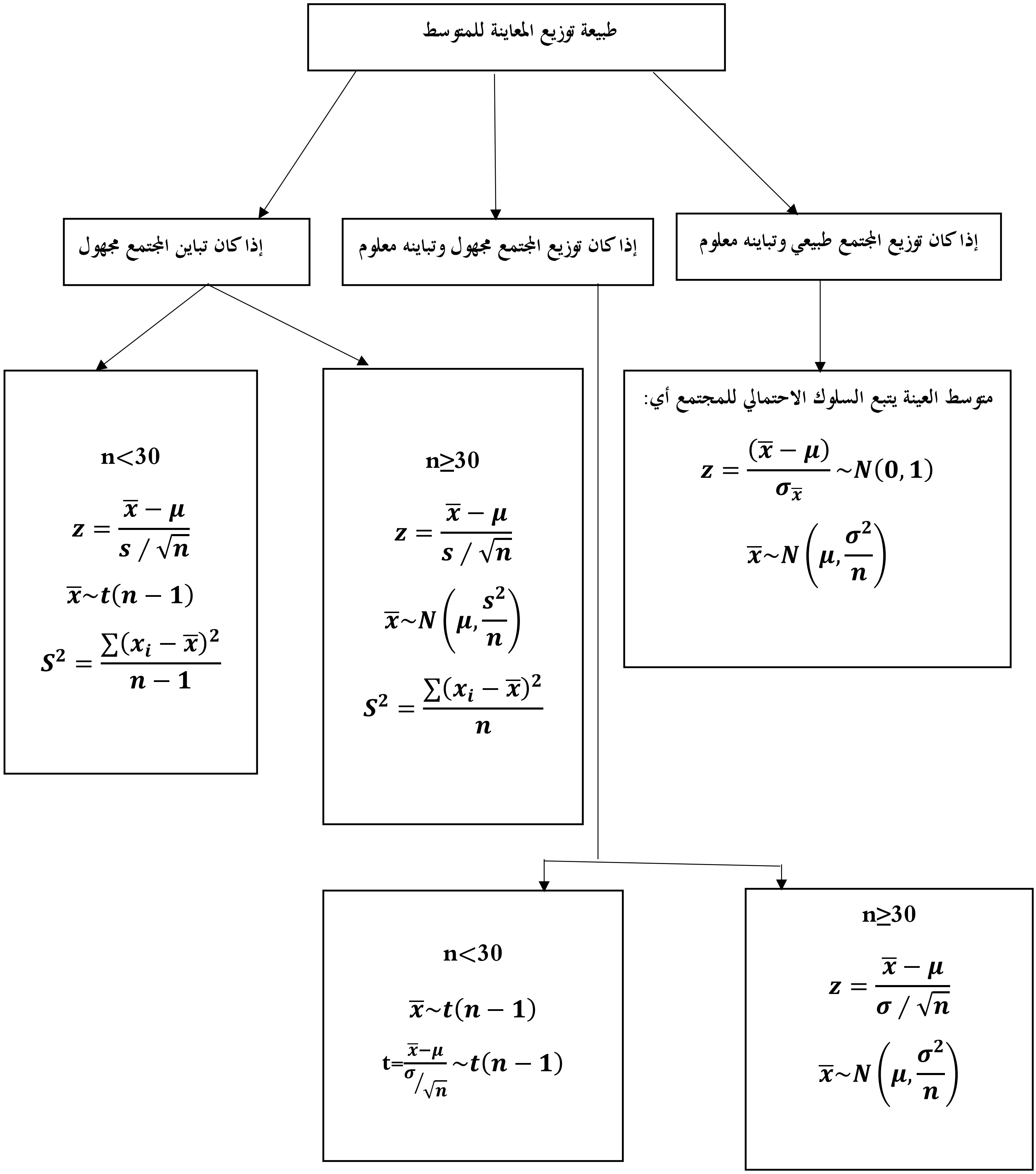
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

ويكون تباين العينة بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{S^2} = \frac{\sum(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^2}{\boldsymbol{n-1}}$$

ويمكن تلخيص حالات توزيع المعاينة للمتوسط من خلال الشكل التالي:

الشكل رقم (07): التوزيع الاحتمالي لمتوسط العينة $\overline{x}$ (طبيعة توزيع المعاينة لـ $\overline{x}$).



المصدر: من إعداد الباحثة.

3. **توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطات**: هناك حالتان:[1]

1.3. الحالة الأولى: العينتين مستقلتين: يوجد مجموعة من الطرق لتحديد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين مستقلتين عن بعضهما البعض تتمثل في التالي:

2.3. المجتمعين طبيعيين والتباين معلوم: إذا سحبت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع طبيعي متوسطه الحسابي μ_1 وتباينه σ_1^2، وعينة عشوائية ثانية حجمها n_2 من مجتمع طبيعي أيضا متوسطه الحسابي μ_2 وتباينه σ_2^2 ، والعينتان مستقلتان. فإذا كان $\bar{x}_1$ يمثل متوسط العينة الأولى، و $\bar{x}_2$ يمثل متوسط العينة الثانية، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطيهما $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين وفق الصيغة التالية:

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

ويكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي المجتمعين وفق الشكل التالي:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_l) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - u_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

مثال 4:

إذا كانت أجور عمال لشركة ما تخضع لتوزيع طبيعي متوسطه 230 دج وانحرافه المعياري 36 دج ورواتب عمال في شركة أخرى تخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه 180 دج وانحرافه المعياري 40 دج.

أخذت عينة عشوائية من العمال في الشركة الأولى حجمها 16 عامل ونرمز لمتوسطها الحسابي بالرمز $\bar{x}_1$ وأخذت عينة عشوائية من عمال الشركة الثانية حجمها 10 ونرمز لمتوسطها الحسابي بالرمز $\bar{x}_2$.

- أوجد احتمال أن يزيد $\bar{x}_1$ عن $\bar{x}_2$ بمقدار 60.

الحل:

نريد إيجاد: $P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \geq 60)$

لدينا:

[1] – صبحي أبو صالح.محمد، **مرجع سابق**، ص ص.276-278.

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - u_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

ومنه بتطبيق نظرية توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين نجد:

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \geq 60) = p\left(\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - u_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \geq \frac{60 - (240 - 180)}{\frac{(36)^2}{15} + \frac{(40)^2}{10}}\right)$$

$$= P(z \geq 0{,}645)$$

$$= 1 - P(z \leq 0.645)$$

$$= 1 - 0.7389$$

$$= 0.2611$$

3.3. المجتمعين غير طبيعيين والتباين معلوم:

إذا كان $\bar{x}_1$ المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 سُحبت من مجتمع متوسطه μ وتباينهσ_1 معلوم، وكان $\bar{x}_2$المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_2 سُحبت من مجتمع مستقل عن المجتمع

الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_1 معلوم أيضاً، وكان حجم العينتين كبير بدرجة كافية، فإن توزيع المعاينة لـ$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$

يخضع تقريبا للتوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين كما يلي:

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = (\mu_1 - u_2)$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

ويكون المتغير Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-u_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

4.3. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين في حالة تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين:

إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين فإننا نقوم بتعويضهما بتبايني العينتين s_1^2 وs_2^2، ويكون حجم العينة هو المحدد لطبيعة توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين ونميز بين حالتين:

1.3.3. في حالة حجم العينتين أكبر من أو يساوي 30: إذا كان حجم العينتين أكبر من أو يساوي 30 فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)$$

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

مثال:

إذا كان لدينا مجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$x_1\sim N(200,\sigma_1^2)$$
$$x_2\sim N(400,\sigma_2^2)$$

وسحبنا عينتان عشوائيتان حجمهما على التوالي: 46، 39 وتباينهما: 600 و200 على الترتيب.

-حدد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين؟ وأحسب احتمال الفرق أقل من أو يساوي 210؟

الحل:

لدينا:

المجتمع الأول: $\sigma_1^2=$ ؟ ،$\mu_1=200$ ،$n_1=46$ ،$s_1^2=600$

المجتمع الثاني: $\sigma_2^2=$ ؟ ، $\mu_2=400$ ،$n_2=39$ ،$s_2^2=200$

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين فإن حجم العينتين هما المحدد لطبيعة توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين، وبما أن حجم العينتين كبير أي أكبر من أو يساوي 30 فإن:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)$$

ومنه:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim N(200{,}18.178)$$

وبالتالي:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{210 - 200}{\sqrt{18.178}} = 2.34$$

$$\Rightarrow P(z \leq 2.34) = 0.99036$$

2.3.3. في حالة حجم العينتين أقل من 30: إذا كان حجم العينتين أو أحدهما أقل من 30 فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين يتبع توزيع ستيودنت ونكتب:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\Rightarrow t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

مثال:

إذا كان لدينا مجتمعان تباينهما مجهولين وغير متساويين علما أن الوسط الحسابي للمجتمع الأول يساوي 700 والثاني 500، وسحبنا عينتان عشوائيتان حجمهما على التوالي: 20، 18 وتباينهما بالترتيب: 150، 250.

- أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين؟

الحل:

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين وحجم العينتين صغير أي أقل من 30 فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين يتبع توزيع ستيودنت.

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim t(20 + 18 - 2)$$
$$\Rightarrow (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim t(36)$$
$$\Rightarrow\ t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t(36)$$

لدينا:

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 700 - 500 = 200$$

و:

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{150}{20} + \frac{250}{18}} = 4.62$$
$$\Rightarrow\ T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (200)}{4.62} \sim t(36)$$

5.3. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين في حالة تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين:

إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين فإننا نقوم بتعويضهما بتبايني العينتين s_1^2 وs_2^2، ويكون حجم العينة هو المحدد لطبيعة توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين ونميز بين حالتين:

1.4.3. في حالة حجم العينتين أكبر من أو يساوي 30: إذا كان حجم العينتين أكبر من أو يساوي 30 فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

حيث أن: s_p^2 هو التباين المشترك المرجح ويتم الترجيح بدرجة حرية الخاصة بكل عينة، لأنه من غير المقبول رياضيا تقدير قيمتين متساوتين مجهوليتين σ_1^2 وσ_2^2بقيمتين غير متساويتين (s_1^2 وs_2^2) لذلك نعبر عن التباينين بقيمة التباين المشترك المرجح.

وتكون القيمة المعيارية بالشكل التالي:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

2.4.3. في حالة حجم العينتين أقل من 30: إذا كان حجم العينتين أو أحدهما أقل من 30 فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين يتبع توزيع ستيودنت ونكتب:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim t(v)$$

$$\Rightarrow T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(v)$$

$$v = {\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \Bigg/ {\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_1 - 1}}$$

حيث أن:

$$s_P^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

مثال:

إذا كان لدينا مجتمعان تباينهما مجهولين ومتساويين علما أن الوسط الحسابي للمجتمع الأول يساوي 700 والثاني 500، وسحبنا عينتان عشوائيتان حجمهما على التوالي: 50، 45 وتباينهما بالترتيب: 150، 250.

- أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين؟

الحل:

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين وتبايني العينتين غير متساويين فإننا سنستخدم التباين المشترك المرجح ولأن حجم العينتين أكبر من 30 نستعمل التوزيع الطبيعي.

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 700 - 500 = 200$$

$$s_P^2=\frac{(50-1)150+(45-1)250}{(50-1)+(45-1)}$$

$$=\frac{7350+11000}{93}=197.31$$

$$\sigma^2{}_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sigma_{\bar{x}_1}^2+\sigma_{\bar{x}_2}^2=s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)=197.31\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{45}\right)=7.9$$

$$\Rightarrow\ (\bar{x}_1-\bar{x}_2)\sim N(200{,}7.9)$$

$$\Rightarrow z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-200}{\sqrt{7.9}}\sim N(0{,}1)$$

6.3. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين مرتبطتين:[1]

إذا كانت العينتين مرتبطتين x_nو y_n ، وسطهما وتباينهما على التوالي: μ_1 و μ_2، s_1^2 و s_2^2.

بحيث تكون مشاهدات المجتمعين متناظرة ومتساوية فإننا سنحصل على مجتمع الفروق بين مشاهدات المجتمعين معبر عنها بالمتغير العشوائي للفروقات Dn وسطه μ_D وتباينه σ_D^2 .

يستعمل هذا النوع من المعاينة للمقارنة عن طريق دراسة الفروقات بين مشاهدات عينتين مرتبطتين كمتغير عشوائي واحد بدل دراسة كل عينة على حدى. حيث أن:

- متوسط عينة فروقات واحدة يرمز لها $\bar{d}$
- وتباين عينة فروقات واحدة s_d^2
- متوسط أوساط عينات الفروق يرمز له μ_D
- وتباين عينات الفروق(المجتمع) يرمز له σ_D^2

في مثل هذه الأبحاث عادة ما يعتمد الباحث على دراسة عينة فروق فغالبا ما تكون معلمات مجتمع الفروق مجهولة وبالتالي نأخذ متوسط وتباين العينة كتقدير لهذه المعالم. نميز عند تحديد طبيعة توزيع المعاينة لمتوسط عينة الفروق بين حالتين حسب حجم العينتين:

1.5.3. في حالة حجم العينتين أكبر من أو يساوي 30: في هذه الحالة نستعمل التوزيع الطبيعي

$$\bar{d}\sim N\left(\mu_d,\frac{s_d^2}{n}\right)$$

---

[1] – عوض. عدنان، **الإحصاء التطبيقي**، (مصر: الشركة العربية المتحدة بالتعاون مع جامعة القدس المفتوحة، 2009)، ص.175.

$$z = \frac{d - \mu_D}{s_d \,/\, \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

حيث أن:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \mu_d = \mu_D$$

$$s_d^2 = \frac{\Sigma(d_i - \mu_D)}{n}$$

2.5.3. في حالة حجم العينتين أقل من 30: في هذه الحالة نستعمل توزيع ستيودنت

$$\bar{d} \sim t(n-1)$$

$$t = \frac{d - \mu_D}{s_d \,/\, \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

حيث أن:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \mu_d = \mu_D$$

$$s_d^2 = \frac{\Sigma(d_i - \mu_D)}{n-1}$$

الشكل رقم (08): طبيعة توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين.

للتوزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين

العينتين مستقلتين

σ_1^2 و σ_2^2 معلومين

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_l)\sim N\left(\mu_1-\mu_{2'}\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-u_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

في حالة حجم العينتين ≤ 30:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)$$

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

في حالة حجم العينتين < 30:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$\Rightarrow t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

في حالة حجم العينتين ≤ 30:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\sim N\left(\mu_1-\mu_2,s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\right)$$

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\sim N(0,1)$$

في حالة حجم العينتين < 30:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\sim t(v)$$

$$\Rightarrow t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\sim t(v)$$

العينتين مرتبطتين

في حالة حجم العينتين ≤ 30:

$$\bar{d}\sim N\left(\mu_d,\frac{s_d^2}{n}\right)$$

$$z=\frac{d-\mu_D}{s_d\,/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

– حالة حجم العينتين < 30:

$$\bar{d}\sim t(n-1)$$

$$t=\frac{d-\mu_D}{s_d\,/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

المصدر: من إعداد الباحثة.

4. توزيع المعاينة للنسبة والفرق بين نسبتين: [1]

توزيع معاينة النسبة هو عبارة عن التوزيع التكراري للنسب المئوية لعدد كبير من العينات العشوائية متساوية الحجم مسحوبة من مجتمع إحصائي واحد.

إذا كانت قيمة كل عنصر في مجتمع 0 أو 1 أي لا أي فشل أو نجاح فإننا نسمي كل مشاهدة من هذا المجتمع "تجربة بيرنوللي".

وعندما نأخذ عينة عشوائية من هذا المجتمع فإن المعاينة في هذه الحالة تكون من مجتمع بيرنوللي، وينصب اهتمامنا في هذه الحالة على نسبة النجاح في العينة.

تختلف نسبة النجاح في العينة من عينة إلى أخرى، فلو كان احتمال النجاح (الحصول على 1) في أي تجربة من مجتمع بيرنوللي يساوي p، وأخذت عينة عشوائية حجمها n من هذا المجتمع وعبرت عن عدد النجاح بالرمز xفإن نسبة النجاح في العينة تكون: $\bar{P} = \frac{x}{n}$

إذا أخذت عينة عشوائية أخرى من هذا المجتمع ترى أن نسبة النجاح في العينة تتغير، ولذلك فمن الواضح أن نسبة النجاح في العينة $\bar{P}$ متغير عشوائي، وللتعرف على موضوع توزيع نسبة النجاح في العينة.

فإذا فرضنا أنه يخضع إنتاج مصنع مصابيح كهربائية للفحص الدوري، فإذا وقعت أطوال حياة المصابيح ضمن حدود معينة اعتبرت المصابيح صالحة للاستعمال، وإذا خرجت عن تلك الحدود اعتبرت المصابيح غير صالحة للاستعمال، فإذا فحصت n من المصابيح ووجدت x منها صالحة فإن نسبة الإنتاج الصالح تكون $\bar{P} = \frac{x}{n}$.

إذا كررت هذه التجربة عدة مرات تغيرت قيمة $\bar{P}$، وهذا يعني أنها متغير عشوائي، والسؤال هنا: ما هو توزيع $\bar{P}$ وما هي خصائصه؟

للإجابة عن هذه الأسئلة قارن $\bar{P}$ بالمتوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n المأخوذة من مجتمع قيمة كل فرد فيه إما 0 أو 1، ولتوضيح ذلك نعرف المتغير العشوائي x_i على النحو التالي:

إذا كان المصباح الأول صالحا نضع: $x_i = 1$.

إذا كان المصباح الثاني غير صالحا نضع: $x_i = 0$.

حيث: $i = 1, 2, \dots, n$

نلاحظ أن $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ ويساوي عدد المصابيح الصالحة/ n وهذا هو $\bar{P}$.

ومن هنا فإن نسبة النجاح $\bar{P}$ هي المتوسط الحسابي لعينة ذات الحجم n مأخوذة من مجتمع بيرنوللي أي ذات الحدين الذي معلمتاه (1,p) والذي يأخذ القيمة 1 باحتمال p، والقيمة 0 باحتمال (1-p).

[1] – بوعظم.كمال، **مرجع سابق**، ص ص. 200-212.

وبتطبيق نظرية النهاية المركزية يقارب توزيع $\bar{P}$ من التوزيع الطبيعي عندما يزداد الحجم n (**توزيع المعاينة للنسبة**) ونوجز هذا فيما يلي:

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع احصائي يخضع لتوزيع بيرنوللي أي ذات الحدين (1,p) وكانت نسبة النجاح المتوفرة من العينة هي $\bar{P}$ فإن توزيع $\bar{P}$ يقترب من التوزيع الطبيعي الذي متوسطه p وتباينه $p(1-p)/n$ كلما كبرت n أي $n \geq 30$.

مثال 5:

إذا كان احتمال نجاح الطالب الذي يدرس أحد مقررات الاقتصاد هو 0.9، أخذت عينة حجمها 49طالبا من أولئك الذين يدرسون هذا المقرر، أوجد $P(\bar{P} \geq 0.8)$.

الحل:

من المعلوم أن: $\bar{P} = P = 0.09$

وتباين $\bar{P}$ هو: $\frac{P(1-P)}{n} = \frac{0.9\times0.1}{49} = 0.0018$

وبتطبيق النظرية الخاصة بتوزيع المعاينة للنسبة نجد:

$$p(\bar{p} \geq 0.08) = P\left(\frac{P-0.9}{\sqrt{0.0018}} \geq \frac{0\cdot 8-0.9}{\sqrt{0.0018}}\right)$$
$$= P\left(z \geq \frac{-0.1}{0.042}\right)$$
$$= P(z \geq -2.38)$$
$$= 1-0.0087 = 0.9918$$

أما توزيع الفرق بين نسبتين فيعطى بالنظرية التالية:

إذا أخذت عينتان عشوائيتان حجماهما n_1 وn_2 من مجتمعين مستقلين يخضع الأول لتوزيع بيرنوللي ذي الحدين $(1,p_1)$ والثاني يخضع لتوزيع ذي الحدين $(1,p_2)$، فإن الفرق بين النسبتين من العينتين $\bar{P}_1 - \bar{P}_2$ يخضع تقريبا لتوزيع طبيعي متوسطه p_1-p_2 وتباينه $p_1(1-p_1)/n_1+p_2(1-p_2)/n_2$ عندما تكون n_1 وn_2 كبيرتين.

مثال 6:

إذا كانت نسبة النجاح في الامتحان التطبيقي في مقياس الإحصاء للطلبة في كلية الاقتصاد هي 0.7 وكانت نسبة النجاح في الامتحان التطبيقي في مقياس الرياضيات للطلبة في كلية الاقتصاد هي 0.65.

أخذت عينة عشوائية حجمها $n_1=70$ من الطلبة الناجحين في مقياس الإحصاء، وعينة عشوائية حجمها $n_2=35$ من الطلبة الناجحين في مقياس الرياضيات.

- فما احتمال أن تزيد نسبة النجاح في المجتمع الأول على نسبة النجاح في المجتمع الثاني بمقدار 0.10 على الأكثر؟

الحل:

المطلوب هو إيجاد: $P(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 \leq 0.10)$

وبتطبيق نظرية توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين نجد:

$$P(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 \leq 0.10)$$
$$= P\left(\frac{\overline{P_1} - \overline{P_2} - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{p1(1-p1)}{n1} + \frac{p2(1-p2)}{n2}}} \leq \frac{0.10 - (0.70 - 0.65)}{\sqrt{\frac{0.7 \times 0.30}{70} + \frac{0.65 \times 0.35}{35}}}\right)$$
$$= P(z \leq 0.51)$$
$$= 0.6950$$

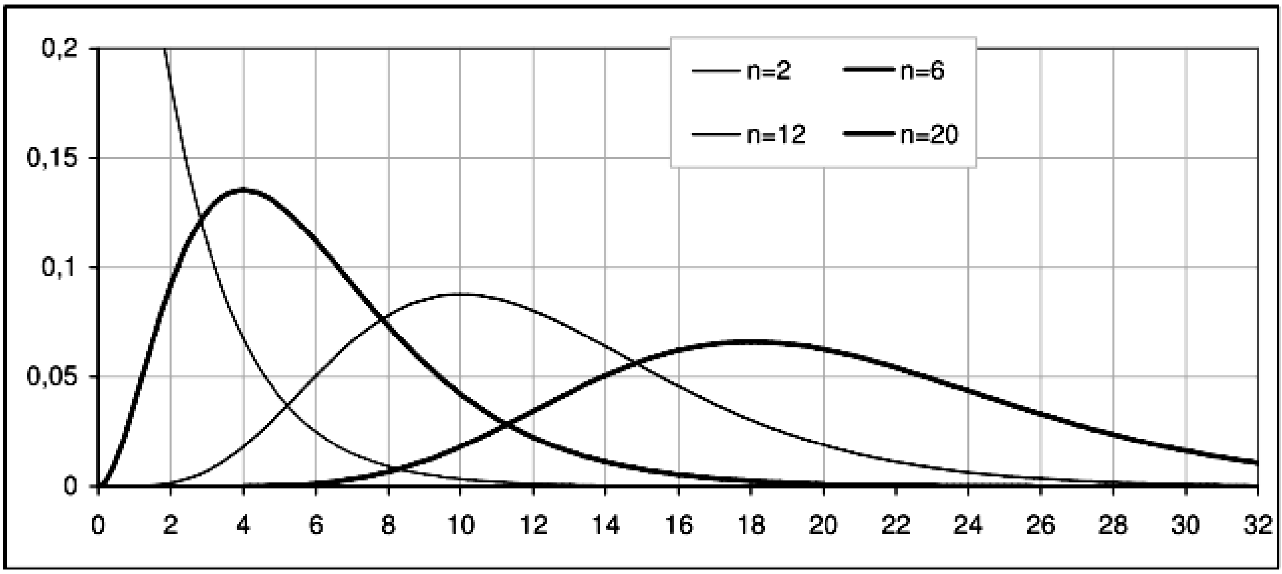
5. توزيع المعاينة للتباين والنسبة بين تبايني عينتين:

نحتاج في كثير من الأحيان في تطبيقات الإحصاء الاستدلالي لمعرفة توزيع تباين العينة، وسنعطي هذا التوزيع في حالة المعاينة من توزيع طبيعي:

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 أي $N(\mu, \sigma^2)$، وكان S^2 هو تباين العينة فإن:

$\chi^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$ يخضع لتوزيع كاي تربيع بدرجات حرية (n-1)، حيث أن المتغير χ^2 هو دالة في S^2.

كما يوضح الشكل التالي توزيع كاي مربع



Source: available at : **https://math.unice.fr/~diener/StatL2/COURS5.pdf**.

مثال 7:

أخذت عينة عشوائية حجمها n=15 من توزيع طبيعي $N(\mu,49)$، وكان S^2 تباين العينة فأوجد احتمال أن تكون S^2 أقل من 82.9.

الحل:

المطلوب إيجاد: $P(S^2 \ \leq 82.9)$

باستعمال قاعدة توزيع المعاينة للتباين نجد:

$$P(S^2 \ \leq 82.9) = P\left((n-1)S^2/\sigma^2 \leq \frac{14 \times 82.9}{49}\right)$$

$$= P(\chi^2 \leq 23.685) = 0.95$$

حيث χ^2 يخضع لدرجات حرية 14.

أما فيما يخص **توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني عينتين** فإن للمقارنة بين تبايني مجتمعين فإننا نحتاج النسبة بين تبايني عينتين مأخوذتين من هذين المجتمعين وسنعطي توزيع هذه النسبة في حالة المعاينة من مجتمعين طبيعيين مستقلين.

ليكن لدينا S_1^2 تباين عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع $N(\mu_1,\sigma_1^2)$، وليكن S_2^2 تباين عينة عشوائية حجمها n_2 من مجتمع $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ مستقل عن الأول، فإن:

$$\frac{s_1^2/s_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \frac{s_1^2\sigma_2^2}{s_2^2\sigma_1^2}$$

يخضع لتوزيع F ذي درجات الحرية $(n_1-1,\ n_2-1)$

مثال 8:

أخذت عينة عشوائية حجمها 11 من توزيع $N(\mu_1,\sigma^2)$ وأخذت عينة عشوائية حجمها 16 من توزيع $N(\mu_2,\sigma^2)$ مستقل عن الأول، أوجد: $P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq 3.80\right)$

الحل:

بما أن تباين كل من المجتمعين هو σ^2 (أي تباينا المجتمعين متساويين) فإن توزيع $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ هو توزيع F بدرجات الحرية (10,15).

ومن جدول توزيع F بدرجات الحرية (10,15) ويتم الحصول على القيم الجدولية لفيشر من خلال تقاطع درجتي حرية البسط والمقام، فنجد: $P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq 3.80\right) = 1 - 0.99 = 0.$

تمارين الفصل الثاني:

التمرين الأول:

في أحد مكاتب المحاسبة يوجد 5 موظفين وفيما يلي عدد سنوات الخبرة لهؤلاء الموظفين 6، 4، 15، 6، 10 ويرمز بـ A، B، C، D،E على الترتيب. مع العلم أن: n=2

- أحسب وسط المجتمع μ وقارن بين $\bar{x}$ و μ ؟
- أحسب التباين لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma_{\bar{x}}^2$ وقارن بين تباين المجتمع وتباين متوسطات العينات الممكنة (توزيع المعاينة للمتوسطات)؟

التمرين الثاني:

مجتمع احصائي يخضع للتوزيع الطبيعي، يتكون من المفردات التالية: (4,5,6)، نسحب مع ارجاع عينة من هذا المجتمع ذات الحجم n=3.

- أحسب الوسط والتباين للمجتمع؟
- أحسب عدد العينات الممكنة؟
- أحسب معالم العينة $(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}^2)$بطريقة الجداول؟

التمرين الثالث:

إذا كان المتغير العشوائي x له التوزيع الطبيعي N(3 ,4)

- ما هو احتمال أن يقع x بين القيمتين 3 و5؟
- ما هو احتمال أن يكون x أكبر من 1؟

التمرين الرابع:

سحبت عينتين عشوائيتين من مؤسستين تتبع التوزيع الطبيعي، وكان متوسط الأجر المدفوع من قبل المؤسسة الأولى لـ 49 عامل يساوي 23000 دج بانحراف معياري 3200 دج، أما متوسط الأجر المدفوع من قبل المؤسسة الثانية لـ 64 عاملا يساوي 21000 دج بانحراف معياري 1500 دج.

- أحسب احتمال أن متوسط الأجر المدفوع من قبل المؤسسة الأولى لها متوسط على الأقل 3000 أكثر من متوسط الأجر المدفوع من قبل المؤسسة الثانية.

التمرين الخامس:

أخذت عينة عشوائية حجمها 30 من مجتمع بيرنوللي فيه نسبة النجاح 0.7 وأخذت عينة عشوائية حجمها 45 من مجتمع آخر مستقل عن الأول ونسبة النجاح فيها 0.55.

فإذا كانت نسبة النجاح في العينة الأولى $\overline{P_1}$ وفي العينة الثانية $\bar{P}_2$.

- أوجد $(\overline{P_1} - \bar{P}_2 \geq 2)$.

الفصل الثالث:

نظرية التقدير

الفصل الثالث: نظرية التقدير

الاستنتاجات الإحصائية هي التعميمات والقرارات التي يمكنك اتخاذها بناء على معلومات أو بيانات قمت بجمعها أو كانت متوفرة لديك، فمثلا دخلت فيه حقلا فيه عدد كبير من أشجار الزيتون أو البرتقال وقمت بفصح عدد من هذه الأشجار ولاحظت أنها ذات ثمار جمة، فإنك ولا شك ستستنتج أن محصول هذه الأشجار جيد وأنها عالية الإنتاج في ذلك العام.

فقد قمنا في المثال السابق بدراسة عينة وبناء على نتائجها تقرر تعميمها على المجتمع، واعتبرنا أن ما تم الحصول عليه من نتائج من العينة صالح للمجتمع محل الدراسة.

أما إلى أي مدى ستكون التعميمات صحيحة فهو أمر يتطلب الإجابة عنه دراسة الاحتمالات وتوزيعات المعاينة واستعماله في شكل منطقي يحدد مدى دقة تمثيل العينة للمجتمع، ومدى دقة تعميم نتائج العينة عليه أيضا، ومن هنا تأتي أهمية دراسة نظرية التقدير واختبار الفرضيات.

1. مفهوم التقدير الاحصائي:

يتم التقدير باختيار عينة من المجتمع ومشاهدة مفردات تلك العينة، ومن ثم حساب المقياس المراد وتعميم ذلك على المجتمع، فلو أردت تقدير نتائج حقل من الزيتون نأخذ عينة عشوائية من عشرة زيتونات على سبيل المثال، ونزن إنتاجها جميعا ثم نقسم على 10 فنحصل على معدل إنتاج الشجرة الواحدة في العينة ونستعمل هذا المعدل في تقدير معدل إنتاج الشجرة في الحقل بأكمله.

وإذا علمت أن عدد الأشجار في الحقل فإنك تقدر الإنتاج الكامل على أنه يساوي عدد الأشجار مضروبا في معدل إنتاج الشجرة الواحدة. فللتقدير أهمية كبيرة وله مجالات تطبيقية في الزراعة والصناعة والتربية والدراسات الاجتماعية والصحية.[1]

1.1. تعريف التقدير الاحصائي: تتم عملية التقدير من خلال اختبار عينة عشوائية من مجتمع ما ومشاهدة مقررات تلك العينة ومن ثم حساب المقاييس المراد إجراؤها وتعميم ذلك المجتمع. فأي توزيع احتمالي يحتوي على معالم تحدد شكله، فمثلا في التوزيع الطبيعي يعتمد شكل التوزيع على المتوسط، الانحراف المعياري والتباين، وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة وفي هذه الحالة لا بد من تقدير هذه المعالم.[2]

2.1. شروط التقدير الجيد: هناك مجموعة من الخصائص تجعل التقدير جيدا تتمثل في التالي:

[1] -

[2] - *Boulay Jean.* Pierre, **Staistique mathématique ellipses**, (paris : 2010).

1.2.1. عدم التحيز: نقول عن إحصائية ما بأنها مقدار غير متحيز لمعلمة المجتمع إذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع.

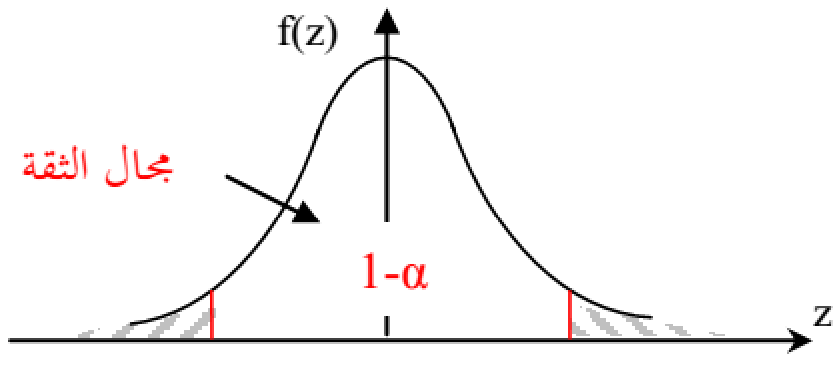
2.2.1. الكفاءة: تتعلق كفاءة مقدر ما بمقدار التباين لتوزيع المعاينة للإحصائية، فإذا كان لمقدرين نفس المتوسط نقول عن المقدر ذو توزيع المعاينة الأقل تباينا أنه أكثر كفاءة، من البديهي أن استخدام مقدرات فعالة وغير متحيزة هو الأفضل، إلا أنه قد يلجأ لمقدرات أخرى لسهولة الحصول عليها.

3.2.1. التقارب: نقول عن مقدر أنه متقارب إذا كان يؤول إلى قيمة المعلمة المقدرة عندما يؤول حجم العينة إلى ما لا نهاية.

4.2.1. درجة التأكد: لكي يكون التقدير علميا ينبغي تقييم احتمال أن تكون المعلمة تنتمي فعلا إلى المجال المحدد، لذلك نلحق بالمجال ما يسمى بدرجة او مستوى الثقة ويرمز له بـ $(1-\alpha)$ والمكمل يسمى احتمال الخطأ ويرمز له بـ α ويسمى أيضا مستوى المعنوية.

5.2.1. تعيين حدود مجال الثقة: تحدد حدود الثقة من خلال معاملات الثقة التي بدورها تحدد من خلال مستوى المعنوية (مستوى الثقة)، ففي حالة استخدام التوزيع الطبيعي للتقدير تكون القيمتين ±1.96 معاملات الثقة من أجل مستوى الثقة 95% بينما ± 2.58 تمثلان معاملات الثقة من أجل مستوى الثقة 99%.

الشكل رقم(09): مجال الثقة للتوزيع الطبيعي.



المصدر: من إعداد الباحثة.

2. أنواع التقديرات الإحصائية: هناك نوعان من التقديرات:[1]

[1]- صبحي أبو صالح. محمد، محمد عوض. عدنان، **مقدمة في الإحصاء**، (الأردن: دار المسيرة، 2005)، ص ص.209-214.

1.2.التقدير النقطي: هو تقدير إحدى معلمات المجتمع بنقطة ولذلك بإعطاء قيمة واحدة لتلك المعلمة. فلو أردت أن تقدر معدل طول حياة المصابيح الكهربائية المنتجة في مصنع معين فماذا تعمل؟ إن إحدى الطرق التي ستقوم بها هي أن تأخذ عينة عشوائية من إنتاج هذا المصنع، وتجري عليها الاختبار، وتسجل طول حياة كل مصباح منها، ثم تحسب المتوسط الحسابي لأطوال الحياة، إن القيمة التي تحصل عليها هي متوسط العينة وهي القيمة التي تستعملها كتقدير لمتوسط المجتمع.

مثال 1:

لتقدير عدد الكلمات في أحد الكتب أخذت عينة حجمها 10 صفحات عشوائيا من ذلك الكتاب، وتم عد الكلمات فيها، فكان كما يلي: 309، 310، 295، 305، 300، 297، 291، 303، 317، 283

- كم يقدر متوسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة؟
- إذا كان الكتاب يحتوي على 400 صفحة فكم تقدر عدد الكلمات فيه؟

الحل:

لدينا حجم العينة n=10، أما متوسطها الحسابي فيحسب من العلاقة: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

$$\bar{x} = (309 + 310 + 295 + 305 + 300 + 297 + 291 + 303 + 317 + 283) / 10 = 301$$

ومنه يتم تقدير متوسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة ب 301 كلمة، أي أن $\mu = 301$

أما عدد كلمات الكتاب فهو:

$$400 \times 301 = 120400$$

2.2. التقدير بفترة أو مجال الثقة للمتوسط: لا نتوقع الحصول على تقدير لمعلمة المجتمع بدون خطأ مهما كان هذا التقدير جيدا، وبعبارة أخرى ليس من المحتمل أن تحصل على تقدير يقدر معلمة المجتمع تماما. ومع أن دقة التقدير تزداد بزيادة حجم العينة فإنه ليس هناك أي سبب يبرر إمكانية الحصول على تقدير يقوم بتقدير معلمة المجتمع بدون خطأ، أي أن قيمته تساوي قيمة معلمة المجتمع بالضبط، ولذلك فإنه من المرغوب فيه إعطاء فترة معينة تتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها، إن مثل هذه الفترة تسمى فترة تقدير أو فترة الثقة.

وبالتالي فالتقدير بفترة نحصل من خلالها على مجال بحدين (حد أعلى وحد أدنى) نحصل عليهما من العينة، ونلاحظ أن فترة التقدير تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم لانهائي.

تعتبر فترة الثقة من الأدوات القوية التي تعطي معلومات عن المعلمة المجهولة باستعمال العينة.

يكون هنا التقدير محصورا في مجال يعتمد على مستوى الخطأ (المعنوية) والذي نرمز له بالرمز α، ويمكن تلخيص مستويات الخطأ وما يقابلها من مستويات الثقة في الجدول التالي:

الجدول رقم (01): أهم مستويات الثقة ومعاملاتها.

	الرمز	مستويات الثقة			
مستوى الثقة	α-1	0.99	0.98	0.95	0.90
مستوى المعنوية (الخطأ)	α	0.01	0.02	0.05	0.10
معامل الثقة	$z_C = z_{0,5-\alpha/2}$	2.58	2.33	1.96	1.645

المصدر: من إعداد الباحثة.

1.2.2. فترة الثقة لمتوسط المجتمع في حالة المعاينة من مجتمع طبيعي ذي تباين معلوم:

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع $N(\mu,\sigma^2)$ وكانت σ^2 معلومة فإن فترة ثقة للمعلمة μ هي:

$$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{a}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{a}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

حيث:

$\bar{x}$: متوسط العينة

$z_{\frac{a}{2}}$: معامل الثقة

مثال 2:

أخذت عينة عشوائية حجمها n=25 من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu, 16)$ فوجد أن 12.5= $\bar{x}$.

- أوجد فترة ثقة 95% للمعلمة المجهولة μ.

الحل:

المجتمع طبيعي وتباينه معلوم وقيمة المتوسط الحسابي معلوم ويساوي 12.5، إذا فترة ثقة 95% هي:

$$\left(12.5 - 1.96\frac{4}{5}, 12.5 + 1.96\frac{4}{5}\right)$$

أي أن: (14.068، 10.93) هي فترة ثقة 95% للمعلمة μ.

لاحظ أن العدد 1.96 حصلنا عليه من التوزيع الطبيعي المعياري جوابا للسؤال: ما هما النقطتان المتماثلتان اللتان تحصران بينهما 0.95 من المساحة تحت التوزيع الطبيعي المعياري، وكان الجواب ± 1.96.

مثال 3:

أوجد فترة ثقة 95% للوسط الحسابي μ في مجتمع طبيعي تباينه 64، إذا اخترت عينة عشوائية حجمها 9 وكام متوسطها الحسابي $\bar{x} = 32$.

الحل:

بما أن $1 - \alpha = 0.95$ إذا: $\alpha/2 = 0.025$ وبالتالي: $z_{0.5-\frac{a}{2}}$ =1.96

وبالتعويض في فترة الثقة نجد أن فترة 95% ثقة للوسط μ هي :

$$32 - 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{9}} < \mu < 32 + 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{9}}$$

ومنه:$26.773 < \mu < 37.227$ هي فترة ثقة 95% للوسط μ.

2.2.2. فترة الثقة لمتوسط المجتمع في حالة المعاينة من مجتمع غير طبيعي (حجم العينة كبير):

إن نظرية تقارب التوزيعات تعطينا حجر الأساس حيث تعطينا $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ يخضع لتوزيع طبيعي معياري تقريبا إذا كانت n كبيرة ولذلك نستطيع استعمال النظرية التالية:

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع وسطه μ وتباينه معلوم فإن فترة ثقة $(1-a)100\%$ للمعلمة μ هي تقريبا :

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{a}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{a}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

إذا كانت n كبيرة $(n \geq 30)$.

مثال 4:

عينة عشوائية حجمها n=81 من مجتمع تبانه $\sigma^2 = 36$ أعطت $\bar{x} = 33$، أوجد فترة ثقة 98% لوسط المجتمع μ.

الحل :

$1 - a = 0.98$ إذا 0.01= $\frac{a}{2}$ ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري $z_{0.99} = 2.33$ وبالتعويض في فترة الثقة نجد:

$$33 - 2.33 \times \frac{6}{9} < \mu < 33 + 2.33 \times \frac{6}{9}$$

وبالاختصار نحصل على:$31.447 < \mu < 34.53$ وهي فترة ثقة 98% للوسط μ.

وفي كثير من الأحيان σ^2لا تكون معلومة فنستعمل s^2 (تباين العينة كتقدير لـ σ^2)، حيث نتمكن من تعويض σبـ s إذا كان حجم العينة كبيرا $(n \geq 30)$.

مثال 5:

عينة عشوائية حجمها n=81 ولدينا $s = 6$، $\bar{x} = 73$. أوجد فترة ثقة 98% لوسط المجتمع μ.

الحل:

من الواضح أن تباين المجتمع غير معلوم لكن حجم العينة أكبر من 30 ولذلك نستعمل s بدلا من σ.

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد أن :

$$73 - 2.33 \times \frac{6}{9} < \mu < 73 + 2.33 \times \frac{6}{9}$$

وبالاختصار نحصل على:$71.447 < \mu < 74.553$ وهي فترة ثقة 98% للوسط μ.

3.2.2. فترة الثقة لمتوسط المجتمع في حالة العينات الصغيرة من مجتمعات مجهولة التباين:

إن تحديد فترة الثقة للمتوسط في العينات الصغيرة والمأخوذة من مجتمعات طبيعية مجهولة التباين فهو توزيع t (ستودنت). هذا التوزيع متماثل حول متوسط الصفر ولكنه منبسط عن التوزيع الطبيعي القياسي، ولهذا فإن جزءاً أكبر من مساحته تقع عند الأطراف.

ويُعطى مجال الثقة لتقدير متوسط المجتمع في هذه الحالة وفق الصيغة التالية:

$$\left(\bar{x} - t_{(1-\frac{a}{2},n-1)}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{(1-\frac{a}{2},n-1)}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

مثال 6:

تم وزن 10 سلات أخذت عشوائيا تحتوي على فاكهة الرمان كما يلي:

السلات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الوزن kg	2.4	3.2	3.6	4.1	4.3	4.7	5.3	5.4	6.5	6.9

- أحسب متوسط وزن السلات والانحراف المعياري في العينة.
- أعط مجالا لمتوسط وزن السلات في المجتمع (مستوى المعنوية 5%)

الحل:

لدينا:

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{46.4}{10} = 4.64$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{\frac{18,164}{9}} = 1.4206$$

ومنه فمجال الثقة لمتوسط المجتمع هو:

$$\left(4.64 - t_{(1-\frac{a}{2},n-1)}\frac{1.4206}{\sqrt{10}}, 4.64 + t_{(1-\frac{a}{2},n-1)}\frac{1.4206}{\sqrt{10}}\right)$$

من الجدول الاحصائي لتوزيع ستيودنت نجد:

$$t_{(1-\frac{a}{2},n-1)} = 2.262$$

مثال 7:

كانت محتويات 9 عبوات من أحد أنواع المنظفات كالتالي:

10.1، 10.3، 9.9، 9.8، 10.2 9.7، 10.0، 9.7، 10.3 لترا.

أوجد فترة ثقة 99% لمعدل محتويات العبوات لذلك النوع من المنظفات على افتراض أن محتويات العبوات يخضع للتوزيع الطبيعي.

الحل:

نحتاج لحساب المتوسط الحسابي لمحتويات العبوات $\bar{x}$ والانحراف المعياري لتلك المحتويات s للعينة المعطاة.

$$\bar{x} = \frac{10.0 + 10.3 + 10.1 + 9.9 + 9.8 + 10.2 + 9.7 + 9.7 + 10.3}{9} = 10 \text{ لتر}$$

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^z}{(n-1)} = 0.057$$

ومنه: $s = 0.24$

ومنه: نجد فترة الثقة لوسط المجتمع μ:

$$10.0 - t_{0.005}\frac{0.24}{\sqrt{9}} < \mu < 10.0 + t_{0.005}\frac{0.24}{\sqrt{9}}$$

ومنه فترة الثقة هي: $9.73 < \mu < 10.27$

2.3.تقدير النسبة: إن عملية تقدير نسبة وجود خاصية أو صفة في مجتمع ما عادة ما تتم من خلال تقدير نسبة تلك الخاصية أو الصفة في عينة عشوائية مأخوذة من هذا المجتمع، فتقدير النسبة أيضا إما أن يكون نقطيا أو بفترة، فمثلا إذا أردت أن تقدر نسبة العائلات التي تمتلك سيارة فبإمكانك أن تختار عينة عشوائية، وتحسب نسبة عدد العائلات التي تمتلك سيارة وتستعمل النسبة في العينة كتقدير نقطي للنسبة في المجتمع.

2.3.1. تقدير النسبة بنقطة: إذا كانت لدينا نسبة النجاح في تربة ذات الحدين p يكون بالإمكان تقدير p كما يلي:

نأخذ عينة عشوائية حجمها n ونفرض أن عدد النجاحات في هذه العينة x، يمكن استعمال $\bar{P} = \frac{x}{n}$ كتقدير لنسبة النجاح p ويكون التقدير النقطي للمعلمة p هو نسبة النجاح في العينة $\bar{P}$.

فعند أخذ عينة عشوائية من مجتمع بيرنوللي $(1,p)$ ولتكن العينة $x_1, x_2, \dots, x_n$ عندما يكون $x = \Sigma x_i$ هو عدد النجاحات في العينة ويكون $\bar{P} = \frac{x}{n} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

مثال 8:

لتقدير نسبة المدخنين بين طلبة احدى الجامعات قام باحث بمقابلة عينة عشوائية حجمها 100 طالب فوجد أن 30 طالبا يدخنون، فما نسبة الطلبة المدخنين في الجامعة؟

الحل:

نسبة المدخنين في العينة 30/100=0.3 نقدر نسبة المدخنين في الجامعة بنسبة المدخنين في العينة وهي 0.3.

مثال 9:

لمعرفة نسبة المواطنين الراضين عن معالجة ما الشرب بالكلور، فأخذت عينة عشوائية حجمها 1000 مواطن فوجد أن 620 منهم راضين عن ذلك.

ما هو التقدير النقطي لنسبة المواطنين الحقيقة الراضين عن ذلك؟

الحل:

النسبة في العينة هي التقدير للنسبة الحقيقة للمواطنين الراضين وهي: $\bar{P}=\frac{x}{n}$ ومنه: $\bar{P}$ =620/1000= 0.62

2.3.2. تقدير النسبة بفترة: إن التقدير النسبة بفترة هو عبارة عن إيجاد تقدير نقطي لنسبة النجاح في المجتمع p ثم إيجاد توزيع المعاينة لذلك المقدر واستعمال هذه المعلومات لإيجاد فترة ذات معامل ثقة معين تحصر نسبة النجاح p داخلها.

إذا كان من المتوقع أن لا تكون نسبة النجاح غير المعلومة p قريبة جدا من الصفة أو الواحد، وكان حجم العينة nكبيرا فإن بإمكانك استعمال النظرية التي تفيد أن توزيع $z=\frac{\bar{P}-P}{\sqrt{\mathrm{p}(1-\mathrm{p})/\mathrm{n}}}$ يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري إذا كانت nكبيرة.

فإذا توفرت هذه الشروط أمكنك وضع العبارة الاحتمالية التالية:

$$p\left(-z_{\frac{a}{2}}<z<z_{\frac{a}{2}}\right)=1-\alpha$$

من الصعب استعمال العبارة الاحتمالية السابقة بصيغتها المعطاة لإيجاد فترة ثقة للنسبة p، وذلك لأن p في المقام غير معلومة، ولذلك نستعمل $\bar{P}=\frac{x}{n}$ فنحصل على فترة الثقة التقريبية للنسبة p كما يلي:

$$\left(\bar{P}-z_{1-\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{p})}{n}}<p<\bar{P}+z_{1-\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{p})}{n}}\right)$$

هذا إذا كانت المعاينة تتم مع مجتمع غير منته (غير محدود) أي في حالة السحب بالإرجاع. أما إذا كانت المعاينة تتم من مجتمع منته (محدود) أي أن السحب بدون إرجاع فإن مجال الثقة لنسبة المجتمع تعطى وفق العلاقة التالية:

$$\left(\bar{P}-z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{p})}{n}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}<p<\bar{P}+z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{p})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

مثال 10:

لإيجاد فترة ثقة 95 % لنسبة عدد طلاب أحد المدارس الأساسية الذين لديهم ضعف في البصر، أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب ووجد أن من لديهم ضعف في البصر كان 15 طالب.

- أوجد فترة الثقة المطلوبة؟

الحل:

$$1-\alpha = 95\% \Rightarrow \frac{1-\alpha}{2} = 47.5\%$$

كما أن: فترة الثقة تحت المنحنى محصورة بين القيمتين 1,96 - = Z و1,96 + = Z .

وأيضا يجب إيجاد $\bar{P}$:

$$\bar{P} = \frac{x}{n} = \frac{15}{100} = 0.15.$$

وبتطبيق القانون الخاص بفترة الثقة للنسبة نجد:

$$\left(\bar{P} - z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{p})}{n}} < p < \bar{P} + z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{p})}{n}}\right)$$

ومنه:

$$\left(0.15 - 1.96\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{100}} < p < 0.15 + 1.96\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{100}}\right)$$

ومنه فترة الثقة للنسبة هي:

$$= [0.08; 0.22]$$

مثال11:

أخذت عينة عشوائية حجمها 200 طالبا من كلية العلوم الاقتصادية من قسم الجذع المشترك فوجد أن 40 منهم متحصلون على شهادة البكالوريا تخصص علوم تجريبية.

- قدر نسبة طلبة الجذع المشترك الحاصلين على شهادة البكالوريا تخصص علوم تجريبية.
- أوجد فترة ثقة 99 % للنسبة الحقيقية للطلبة الحاصلين على شهادة البكالوريا شعبة علوم تجريبية.

الحل:

بالنسبة لنسبة طلبة الجذع المشترك الحاصلين على شهادة البكالوريا تخصص علوم تجريبية هي:

$$\bar{P} = \frac{x}{n} = \frac{40}{200} = 0.2$$

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يمكن التقريب للتوزيع الطبيعي وسنتبع نفس الخطوات السابقة في تحديد فترة الثقة كما يلي:

$$1 - \alpha = 99\%$$

ومنه:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$$

وبتطبيق القانون الخاص بفترة الثقة للنسبة نجد:

$$0.2 - 2.58\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{200}} < p < 0.2 + 2.58\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{200}}$$

ومنه فترة الثقة للنسبة هي:

$$= [0.127; 0.273]$$

4.2. فترات الثقة للفرق بين وسطين: يمكننا الاستعانة بنظريات المعاينة للفرق بين متوسطين.[1]

1.4.2. فترة الثقة للفرق بين وسطي مجتمعين مستقلين: هناك مجموعة من الحالات للفرق بين وسطي المجتمعين في حالة فترة الثقة تتمثل فيما يلي:

أ. **تباينا المجتمعين معلومين وحجم العينات كبير:** إذا كان $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ حيث أن x_1 و x_2 عينتين عشوائيتين فإن:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

وتكون فترة الثقة للفرق بين المتوسطين في هذه الحالة كما يلي:

[1] – مصطفى الأشقر. أحمد، **مرجع سابق**، ص ص.220-225..

$$(\bar{x}_{1-}\bar{x}_2) - z_{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_{1-}\bar{x}_2) + z_{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

مثال 12:

أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, 32)$ وأخذت عينة عشوائية ثانية من مجتمع طبيعي حجمها 10 $N(\mu_2, 70)$ مستقل عن الأول فإذا أعطت العينة الأولى المتوسط الحسابي $\bar{x}_1 = 47$ والمتوسط الحسابي للعينة الثانية $\bar{x}_1 = 35$.

أ- أوجد فترة ثقة % 95للفرق بين وسطي العينتين.

ب- أوجد فترة ثقة % 90للفرق بين وسطي العينتين.

الحل:

أ- بما أن شروط النظرية متحققة فإن:

$1-\alpha = 0.95$ إذا: $\alpha = 0.05$، $z_{0.975} = 1.96$ وتكون فترة الثقة:

$$(47-35) - 1.96\left(\sqrt{\frac{32}{16}+\frac{70}{10}}\right) < \mu_1-\mu_2 < (47-35) + 1.96\left(\sqrt{\frac{32}{16}+\frac{70}{10}}\right)$$

فنحصل على فترة الثقة التالية:

$$[7.12,17.88]$$

ب- $1-\alpha = 0.90$ إذا: $\alpha = 010$، $z_{0.95} = 1.64$ وتكون فترة الثقة:

$$[-16.92, -7.08]$$

ب. تباينا المجتمعين مجهولين وحجم العينات كبير: إذا كانت لدينا عينتين عشوائيتين تباين كل منهما غير معلوم ووسطهما معلوم شريطة أن تكون حجم العينتين كبير فإنه يمكن استعمال تباين كل عينة أي s_1^2 كتقدير لـ σ_1^2 و s_2^2 كتقدير لـσ_2^2.

وتكون فترة الثقة للفرق بين المتوسطين في هذه الحالة كما يلي:

$$(\bar{x}_{1-}\bar{x}_2) - z_{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\right) \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{x}_{1-}\bar{x}_2) + z_{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\right)$$

ت. تباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين وحجم العينات صغير: إذا كان لدينا عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$، وكانت لدينا عينة عشوائية أخرى من مجتمع طبيعي $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$، مستقل عن الأول وكان تبايني العينتين مجهولين ولكن متساويين فإن فترة الثقة للفرق بين الوسطين هي:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\, s_c \left(\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\, s_c \left(\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

مثال:

نفترض أن لدينا متغيرين عشوائيين x_1 و x_2 لمجتمعين مختلفين بتباين متساوي ومتوسطات مختلفة، قمنا بسحب عينتين عشوائيتين مستقلتين من المجتمعين محل الدراسة، حيث أن حجم العينة الأولى يساوي 12 وحجم العينة الثانية هو8<&

ث. تباينا المجتمعين مجهولين وغير متساويين وحجم العينات صغير: إذا كان لدينا عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$، وكانت لدينا عينة عشوائية أخرى من مجتمع طبيعي $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$، مستقل عن الأول وكان تبايني العينتين مجهولين ولكن غير متساويين فإن فترة الثقة للفرق بين الوسطين هي:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{c, n_1+n_2-2} \left(\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right) \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{c, n_1+n_2-2} \left(\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right)$$

ج. **تباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين وحجم العينات كبير**: عندما يكون تباينا المجتمعين مجهولين وحجم العينات كبير أي: $n_1, n_2 \geq 30$ فتكون علاقة فترة الثقة للفرق بين الوسطين هي:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \backsim N\left(\mu_1 - \mu_2\right), s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \Rrightarrow z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \backsim N\,(0.1)$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_c \left(\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\right) \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_c \left(\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\right)$$

2.4.2. تقدير فترة الثقة لوسطي مجتمعين مرتبطين: نفرق بين حالتين حسب حجم العينة كما يلي:

أ. **في حالة حجم عينة الفروق صغير**: في هذه الحالة نستعمل توزيع ستيودنت

$$n_1 = n_2 = n < 30, \bar{d} \backsim t(n-1) \Rightarrow T = \left(\frac{d - u_D}{s_d/\sqrt{n}}\right) \backsim t(n-1)$$

ومنه فترة الثقة للفرق بين وسطي المجتمعين تكون بالشكل التالي:

$$\bar{d} - t_{c,n-1}\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu_D \leq \bar{d} + t_{c,n-1}\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right)$$

مثال:

من أجل اختبار الفرق في نجاعة صنفين من الأدوية في علاج أحد أمراض الأطفال أخذت عينة من 20 طفلا ثم وضع الأطفال في مجموعتين بحيث أن كل طفلين متقابلين كان لهما عمر واحد، بهذا أصبح هناك عينة مزدوجة من 10 أطفال.

بعد هذا حسب الزمن الذي يستغرقه شفاء كل طفل باستخدام صنف معين من الأدوية فوجدت النتائج المبينة في الجدول التالي:

الزمن بالساعات الذي استغرقتها عملية المعالجة بصنفين من الأدوية في عينة مزدوجة من الأطفال.

رقم الطفل	الزمن في صنف الدواء الأول x_1	الزمن في صنف الدواء الثاني x_2	$d = x_1 - x_2$
1	55	47	8
2	60	55	5
3	54	51	3
4	52	51	1
5	57	57	0
6	61	52	9
7	55	49	6
8	51	48	3
9	50	45	5
10	57	50	7
المجموع	/	/	47

المطلوب:

-أوجد مجال الثقة 99 % للفرق بين زمني العلاج بصنفي الأدوية في المجتمع.

الحل:

من بيانات الجدول أعلاه نجد:

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{47}{10} = 4.7$$

$$s_d^2 = \frac{\Sigma(d_i - \mu_D)}{n-1} = 8.68$$

ولإيجاد مجال الثقة لا بد من إيجاد قيمة $t_{c,n-1}$:

لدينا معامل الثقة هو 99 % ومنه فمستوى المعنوية يساوي: 0.01، وعند درجة الحرية: $n-1 = 10-1 = 9$

نجد أن القيمة $t_{0.005،9}$ انطلاقا من جدول توزيع ستيودنت تساوي: 2.8213

ومنه مجال الثقة للفرق بين وسطي المجتمعين تكون بالتعويض في العلاقة التالية:

$$\bar{d} - t_{c,n-1}\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu_D \leq \bar{d} + t_{c,n-1}\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right)$$

$$1.67 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 7.73$$

ب. في حالة حجم عينة الفروق كبير: نجد في هذه الحالة أن توزيع المجتمع يقترب من التوزيع الطبيعي لكون العينات كبيرة الحجم.

$$n_1 = n_2 = n \geq 30, \bar{d} \sim \mathrm{N}\left(\mu_\mathrm{D}, \frac{\mathrm{s_d^2}}{\mathrm{n}}\right) \Rightarrow Z = \left(\frac{d - u_D}{s_d/\sqrt{n}}\right) \sim N(0,1)$$

ومنه فترة الثقة للفرق بين وسطي المجتمعين تكون بالشكل التالي:

$$\bar{d} - z_c\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu_D \leq \bar{d} + z_c\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right)$$

5.2. فترات الثقة للفرق بين نسبتين: في تقديرنا لنسبة حالات النجاح (احتمال حدوث ظاهرة معينة) في المجتمع P نأخذ عادة عينة عشوائية من المجتمع ونحسب نسبة النجاح في تلك العينة $\bar{P}$ فتكون هي بمثابة التقدير النقطي لـ P.

ليكن لدينا الآن مجتمعان ولنرمز لنسبة النجاح في المجتمع الأول بـ P_1 ونسبة النجاح في المجتمع الثاني بـ P_2.

ونقوم بسحب عينتين عشوائيتين مستقلتين من المجتمعين على التوالي: $\bar{P}_1$ و$\bar{P}_2$.

ولدينا:

الوسط الحسابي للفرق بين نسبتي العينتين $\bar{P}_1 - \bar{P}_2$.

الانحراف المعياري للفرق بين نسبتي العينتين هو:

$$\sigma_{\bar{P}_1-\bar{P}_2} = \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

وإذا كان حجم العينتين كبير فإن توزيع المجتمعين يقترب من التوزيع الطبيعي.

من هنا نستنتج مجال الثقة للفرق بين نسبتي المجتمعين عندما تكون العينتين مستقلتين وحجمهما كبير هو:

$$(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \pm z_c(\sigma_{\bar{P}_1-\bar{P}_2})$$

مثال:

في استطلاع للرأي حول موضوع سياسي معين أخذت عينة عشوائية من مدينة أولى وأخرى من مدينة ثانية، فإذا كان عدد عناصر العينتين هو 650 و480 وعدد المجيبين بنعم في العينتين هو 450 و360 على التوالي فأوجد مجال الثقة % 95 للفرق في نسبة الموافقين في المدينتين.

الحل:

المجال المطلوب هو:

$$(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \pm z_c(\sigma_{\bar{P}_1-\bar{P}_2})$$

أي:

$$(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \pm z_c(\sqrt{\frac{\bar{P}_1(1-\bar{P}_1)}{n_1} + \frac{\bar{P}_2(1-\bar{P}_2)}{n_2}})$$

$$\Rightarrow= \left(\frac{450}{650} - \frac{360}{480}\right) \pm z_{0.025}(\sqrt{\frac{0.69(1-0.69)}{650} + \frac{0.75(1-0.75)}{480}})$$

$$\Rightarrow= -0.06 - 0.045 \leq (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \leq -0.06 + 0.045$$

ومنه فمجال الثقة للفرق بين نسبتي العينتين هو:

$$[-0.105, -0.015]$$

6.2. فترة الثقة لتباين المجتمع:[1] بالإضافة إلى تقدير متوسط ونسبة خاصية معينة فإنه من المفيد الحصول على فترة ثقة للتباين، كما رأينا في توزيع المعاينة للتباين إذا كان لدينا مجتمع يتوزع طبيعيا بتباين معلوم σ^2 وسحبنا منه عينة عشوائية n فإن المتغير العشوائي $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ فنفس العلاقة سنستعملها في تقدير فترة التباين المجتمع عندما يكون مجهولا، فمن جدول كاي مربع نستطيع الحصول على قيمتين للمتغير χ^2 عند درجة حرية معينة $n-1$ بحيث تكون المساحة على يمين القيمة الكبرى تساوي المساحة على يسار القيمة الصغرى وتساوي $\frac{\alpha}{2}$، فإذا رمزنا لكل قيمة للمساحة على يمينها فإننا سنرمز للقيمة الكبرى بالرمز $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ وللقيمة الصغرى بالرمز $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$، بحيث أن المساحة الكلية تساوي الواحد. أي أنه لإيجاد فترة ثقة $100(1-\alpha)\%$ للتباين σ^2 فإننا نعلم من جداول توزيع كاي مربع أن النقطتين $\chi^2\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]$ و $\chi^2\left[1-\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]$ تحصران بينهما مساحة $(1-\alpha)$ تحت توزيع كاي مربع بدرجات حرية $(n-1)$ أي أن:

$$P\left(\chi^2\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right] \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2\left[1-\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]\right) = (1-\alpha)$$

وبالتبسيط الجذري نجد:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left[1-\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]}$$

وهذا يؤدي إلى النظرية:

إذا كانت لدينا عينة عشوائية مأخوذة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي فإن فترة ثقة التباين σ^2 هي:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left[1-\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]}\right)$$

حيث أن: S^2 هي تباين العينة:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{(n-1)} = \sum\frac{x_i^2-n\bar{x}^2}{(n-1)}$$

ونجد فترة الثقة للانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي لجذور فترة الثقة للتباين.

[1] – كانافوس. جورج ، ميلر. دون (ترجمة سلطان محمد عبد المجيد، محمد توفيق البلقيني)، الإحصاء للتجاريين مدخل حديث، (المملكة العربية السعودية: دار المريخ، الرياض، 2004)، ص ص.302-305.

مثال:

بافتراض أنه أخذت عينة عشوائية من مجموعة من الأطفال حديثي الولادة في المستشفى في إحدى المدن حجمها 20 فكان تباينها $s^2 = 15$.

المطلوب:

-أوجد فترة ثقة 95% للتباين σ^2

الحل:

لدينا: $1-\alpha = 0.95$ إذا: $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ و $1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$ بدرجات حرية $20-1 = 19$

وبالتالي:

$$\chi^2[0.025;19] = 8.907$$

$$\chi^2[0.975;19] = 32.852$$

وحسب النظرية فإن فترة الثقة هي:

$$\left[\frac{19\times 19}{32.852};\frac{19\times 15}{8.905}\right]$$

أي هي:

$$[8.675,31.997]$$

أما فترة ثقة 95 % للانحراف المعياري فهي:

$$\left[\sqrt{8.675},\sqrt{31.997}\right]$$

أي هي:

$$[2.94,5.66]$$

7.2. فترة الثقة للنسبة بين تباينين:[1] حسب ما رأينا في الفصل السابق في نظرية المعاينة أن توزيع المعاينة للفرق بين تباينين يخضع لتوزيع فيشر F_{n_1-1,n_2-1} لهذا إذا أردنا إيجاد فترة ثقة $100(1-\alpha)\%$ للنسبة $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ حيث أن:

[1] – محمد طشطوش. سليمان، أساسيات الإحصاء الرياضي، (الأردن: دار اليازوري دروب للنشر، حمادة للدراسات الجامعية، 2012)، ص .137.

$$F_{n_1-1,n_2-1}=\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

أي إذا أردنا إيجاد الاحصائيتينU وL: بحيث أن:

$$P\left(L\leq\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\leq U\right)=(1-\alpha)$$

فإننا نعود إلى توزيع فيشر ونلاحظ أن:

$$P\left(F\left[\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1\right]\leq F\leq F\left[1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1\right]\right)=(1-\alpha)$$

وبتعويض $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ بدلا من F تصبح العبارة كالتالي:

$$P\left(F\left[\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1\right]\leq\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\leq F\left[1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1\right]\right)=(1-\alpha)$$

وبالضرب في $\frac{s_2^2}{s_1^2}$ تصبح عبارة الاحتمال لدينا كالتالي:

$$P\left(\frac{s_2^2}{s_1^2}F\left[\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1\right]\leq\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\leq\frac{s_2^2}{s_1^2}F\left[1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1\right]\right)=(1-\alpha)$$

وبالتالي نقول كنظرية أنه إذا أخذت عينة عشوائية x_1 من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي، وأخذت عينة عشوائية ثانية x_2 من مجتمع أيضا يتبع التوزيع الطبيعي ومستقل عن المجتمع الأول فإن فترة ثقة $100(1-\alpha)\%$ ، للنسبة $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ هي:

$$\left(\frac{s_2^2}{s_1^2}F\left[\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1\right],\frac{s_2^2}{s_1^2}F\left[1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1\right]\right)$$

مثال:

بافتراض أن أجور عمال في المصنع رقم 1 تتوزع طبيعيا أخذت عينة عشوائية من المجتمع حجمها 9، فأعطت التباين $s_1^2=654$، وأن أجور عمال في مصنع رقم 2 تتوزع أيضا طبيعيا وأخذت عينة عشوائية من المجتمع حجمها 12، فأعطت التباين $s_2^2=127.3$.

المطلوب:

-أوجد فترة 90% ثقة للنسبة $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$.

الحل:

بما أن المجتمعين مستقلين عن بعضهما البعض، ولدينا $1-\alpha = 0.90$ إذا: $\frac{\alpha}{2} = 0.05$

ومن جداول توزيع فيشر F نجد أن:

$$F[0.05; 8.11] = \frac{1}{F[0.95; 8.11]} = \frac{1}{3.31} = 0.30$$

$$F[0.95; 8.11] = 2.95$$

إذا ففترة الثقة تكون بالتعويض في العلاقة التالية:

$$\left(\frac{s_2^2}{s_1^2}\ F\left[\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right], \frac{s_2^2}{s_1^2}\ F\left[1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right]\right)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{127}{65\cdot 4}\times 0.3, \frac{127}{65\cdot 4}\times 2.95\right]$$

وبالتالي فترة الثقة للنسبة بين تبايني المجتمعين عند معامل الثقة $\%90$ هي:

$$[0.588, 5.742]$$

كما تجدر الإشارة إلى أن إيجاد فترة ال ثقة للنسبة بين تبايني المجتمعين في البحث عن وجود تجانس بين المجتمعين، فكلما كانت النسبة قريبة من 1 كان المجتمعان أكثر تجانسا أي لهما نفس التباين تقريبا.

تمارين الفصل الثالث:

التمرين الأول:

لدينا مصنع لإنتاج مربى المشمش، أخذت عينة بحجم 10 من علب هذا مصنع وتم وزنها بدقة فكانت النتائج كما يلي: 195 غ، 198 غ، 205 غ، 200 غ، 202 غ، 199 غ، 203 غ، 200 غ، 206 غ ،197 غ.

إذا علمت أن وزن علب المصنع يتوزع طبيعيا.

المطلوب:

- أعط تقديرا نقطيا للمتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجتمع.
- أوجد مجال الثقة للمتوسط بمستوى ثقة 99%.
- إذا تم سحب عينة جديدة حجمها 100 علبة وتبين أن متوسطها هو 200غ وتباينها هو 3.42، أوجد مجال الثقة الجديد للمتوسط.

التمرين الثاني:

قام قسم البحوث بإحدى شركات الطيران بإجراء دراسة لمعرفة عدد المقاعد الشاغرة على رحلات طيرانها، فتم سحب عينة عشوائية من 150 رحلة، فوجد أن الوسط الحسابي للأماكن الشاغرة بها هو 20 مقعدا بانحراف معياري قدره 8 مقاعد.

المطلوب:

-إيجاد تقدير نقطة لمتوسط المقاعد الشاغرة.

-إيجاد تقدير فترة ثقة 95% لمتوسط الأماكن الشاغرة.

التمرين الثالث:

تم اختيار 400 طالب من جامعة خنشلة لمعرفة نسبة المدخنين بين طلبة الجامعة، وتبين أن 70 طالب منهم يدخنون.

المطلوب:

- قدر نسبة الطلبة الذين يدخنون في جامعة خنشلة (علما أن: $\bar{P} = 0.175$).
- أوجد فترة ثقة 99% لنسبة الطلبة المدخنين.

التمرين الرابع:

أجريت دراسة على نوعين من المصابيح الكهربائية A وB، فتبين أن متوسط العمر لعينة تحتوي على 8 مصابيح من نوع A هو 1380 ساعة بانحراف معياري هو 120 ساعة، بينما متوسط العمر لعينة تحتوي على 17 مصباح من نوع B هو 1080 ساعة بانحراف معياري هو 140 ساعة، فإذا علمت أن عمر المصابيح ولكلا النوعين A وB يتبع التوزيع الطبيعي بنفس التباين.

المطلوب:

- أوجد مجال ثقة 99% للفرق بين وسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$.

التمرين الخامس:

توضح البيانات التالية عدد الأخطاء المطبعية المرتكبة من قبل 5 أشخاص قبل وبعد الاشتراك في برنامج تدريب خاص بالطباعة.

قبل التدريب	**8**	**7**	**4**	**10**	**4**
بعد التدريب	**7**	**5**	**6**	**7**	**3**

المطلوب:

- إيجاد مجال الثقة للفرق بين الوسط الحسابي للأخطاء قبل وبعد الاشتراك في برنامج التدريب عند مستوى المعنوية 0.5 وذلك بافتراض أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا.

التمرين السادس:

في استطلاع للرأي حول منتوج جديد طرحته المؤسسة في السوق تم اختيار عينة عشوائية من الزبائن حجمها 100 من إحدى الفضاءات التجارية فوجد أن 55 بالمئة منهم يفضلون هذا المنتوج.

المطلوب:

- أوجد فترة ثقة 99 بالمئة للنسبة بين جميع الزبائن.

التمرين السابع:

إذا كانت إدارة إحدى المؤسسات لإنتاج المعجنات أمام مشكلة اتخاذ القرار بشأن شراء نوعين من الآلات التي تستخدم لتعبئة منتوجها في أكياس، خاصة وأن هاتين الآلتين متشابهتين في جميع الأوجه، الأمر الذي دفع الإدارة إلى اتخاذ قرار شراء الآلة التي لها أقل تباين في الكمية المعبئة في الأكياس، علما أن وزن الكيس المعبأ عن طريق كل آلة يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسطات وتباينات مجهولة.

فلجأت إلى اختيار عينة من إنتاج كل آلة فكانت النتائج حسب الجدول التالي:

الآلة رقم 1	52.1	50	51	50.1	48	49	47.5	51.8	50
الآلة رقم 2	48.2	49	47.9	50	51	49.5	50.9	49.2	49

المطلوب:

- أوجد فترة الثقة للنسبة بين تباين الآلتين عند معامل الثقة 99%.

الفصل الرابع:

اختبار الفرضيات

الفصل الرابع: اختبار الفرضيات

تعد عملية اختبار الفرضيات أحد فروع الإحصاء الاستدلالي، وتأتي استكمالا لعملية تقدير معلمات المجتمع والتي قمنا بدراستها في الفصل السابق، والواقع أن عملية اختبار الفرضيات من أهم الاعمال التي تواجه الباحثين في مجالات مختلفة. إذ أننا بالإضافة لتقدير معلمة المجتمع بأن نعطيها قيمة معينة أو نحدد لها مجال معين للثقة، نحتاج إلى اتخاذ قرار حول صحة فرضية معينة أو عدم صحتها، أي أننا نحتاج إلى اختبار الفرضيات المتعلقة بمعلمات المجتمع.

سندرس في هذا الفصل كيف نستعمل البيانات التي نحصل عليها من عينة عشوائية واحدة من أجل اختبار فرضيات حول الوسط الحسابي ونسبة العينة والتباين في المجتمع، وكيف نستعمل البيانات الخاصة بعينتين عشوائيتين في مجتمعين من أجل اختبار فرضيات حول الفرق بين الوسطين الحسابيين والفرق بين النسبتين وحول التباينين في المجتمعين.

1. مفهوم الاختبار الاحصائي للفرضيات:

لنفترض أن شركة تريد أن تصنع صنفا جديدا من الدواء للوقاية من لسع البعوض بدلا من الصنف القديم الذي كان يصنع، وبما أن الصنف الجديد هو أعلى تكلفة من الصنف القديم فإن الشركة تريد أن تتأكد من أن الصنف الجديد يقي من الأمراض مدة أطول من الصنف القديم. لنفرض أن مدة الوقاية من المرض في الصنف القديم هي في المتوسط 10 ساعات، من أجل اتخاذ قرار حول تصنيع الدواء الجديد تضع الشركة لنفسها فرضيتين الفرضية الصفرية وهي تتمثل في أن كل من الصنفين القديم والجديد لهما نفس المفعول والفرضية البديلة يفترض هنا أن الصنف الجديد له أثر وقائي أعلى من الصنف القديم. هذ المثال البسيط يقودنا إلى تعريف الفرضية الإحصائية.

1.1. تعريف الفرضية الإحصائية: هي كل عبارة عن إحدى معلمات المجتمع تكون قابلة للاختبار وبالتالي تكون صحتها أو عد صحتها بحاجة إلى قرار.[1]

كما أننا نميز بين نوعين من الفرضيات الإحصائية هي الفرضية الصفرية والفرضية البديلة:[2]

2.1. الفرضية الصفرية: أو ما يطلق عليها بفرض العدم، والتي تتضمن الهدف المطلوب اختباره ويرمز لها عادة بالرمز H_0 وتكون على شكل معادلة او مساواة. كما تعتبر الفرضية الصفرية هي الفرض القائم، إذ نفترض انها صحيحة حتى يثبت العكس. ففي حالة قبولها يعني عدم وجود ما يدعو إلى رفض نتائج العينة، أي أن العينة متوافقة مع الفرضية. إذ أنها الفرضية التي تبنى على أمل ان يتخذ قرار بعد صحتها، فكل فرضية إحصائية نريد اختبارها فهي فرضية صفرية.

مثال:

[1] – صبحي أبو صالح. محمد ، محمد عوض. عدنان، **مرجع سابق**، ص. 233.

[2] – فلاح المنيزل. عبد الله، **الإحصاء الاستدلالي وتطبيقاته في الحاسوب باستخدام الرزم الإحصائية**، (الأردن: اثراء للنشر والتوزيع، 2008)، ص ص. 45-54.

من خلال المثال فالسابق الخاص بالصنف الجديد للدواء الخاص بالوقاية من لسع البعوض، وهي التي تفترض هنا أن الصنفين من الدواء لهما نفس الأثر الوقائي، أي أن الدواء الجديد سيقي من يتناوله من آثار لسع البعوض مدة 10 ساعات كما كان يفعل الصنف القديم. لأنها تمثل حالة عدم التغيير فتكون الفرضية الصفرية للوسط الحسابي μ وهو فترة الوقاية باستخدام الدواء الجديد بـ:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

حيث: $\mu_0 = 10$

3.1. الفرضية البديلة: تعتبر الفرضية البديلة فرضية البحث بعد إعادة عرضها لتلائم الاعتبارات الاحصائية. كما أنها تمثل الفرضية التي نقبلها ونعتبرها صحيحة إذا تم رفض الفرضية الصفرية كنتيجة لاختبار ونرمز لها احصائيا بالرمز H_a .

وهي من يتحكم في نوع الاختبار، سواء كان من طرف واحد (اليمين او اليسار) او اختبار ذو طرفين (اليمين واليسار). ويقصد بذلك كون الانحراف عن فرضية العدم باتجاه واحد أو أنها موزعة على اتجاهين، وهذا يعتمد على صيغة فرضية العدم، فإذا كانت الإشارة محددة مسبقا بأكبر أو أقل فهذا يعني أن الاختبار من جانب واحد، حيث في حالة رفض الفرضية الصفرية فالمتوقع أن يكون اتجاه الفرضية البديلة معلوما. أما في الحالة التي تكون فيها الفرضية الصفرية مع إشارة المساواة، ففي حالة رفضها فإن الفرضية البديلة ستكون مجهولة الاتجاه، وبذلك ستتوزع على جانبي التوزيع، مما يعني أن الاختبار ثنائي الاتجاه.

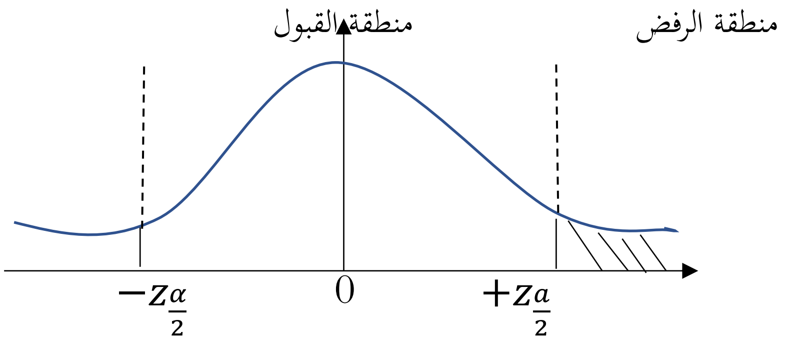
فالفرضية البديلة يمكن أن تحدد قيمة معينة للمعلمة تحت الدراسة كما تسمح أن تأخذ المعلمة قيما متعددة.

مثال:

بالرجوع إلى مثال الدواء نجد أنه إذا افترضنا أن الدواء الجديد يعطي مناعة لمدة تزيد عن μ_0 (هنا في حالة اختبار الفرضيات للوسط الحسابي) فإن الفرضية البديلة هي ذات جانب واحد تكون بالشكل:

$$H_a : \mu > \mu_0$$

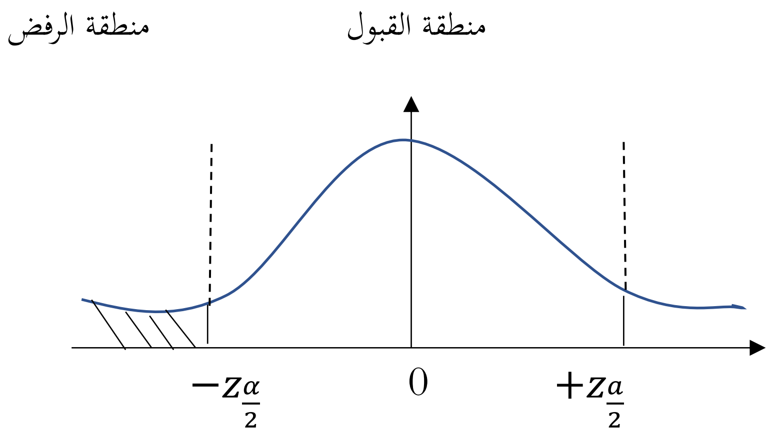
الشكل رقم (10): اختبار الفرض البديل من الطرف الأيمن.



وهناك فرضية بديلة من جانب واحد أيضا (الدواء الجديد أقل فعالية من الدواء القديم) تكون بالشكل التالي:

$$H_a: \mu < \mu_0$$

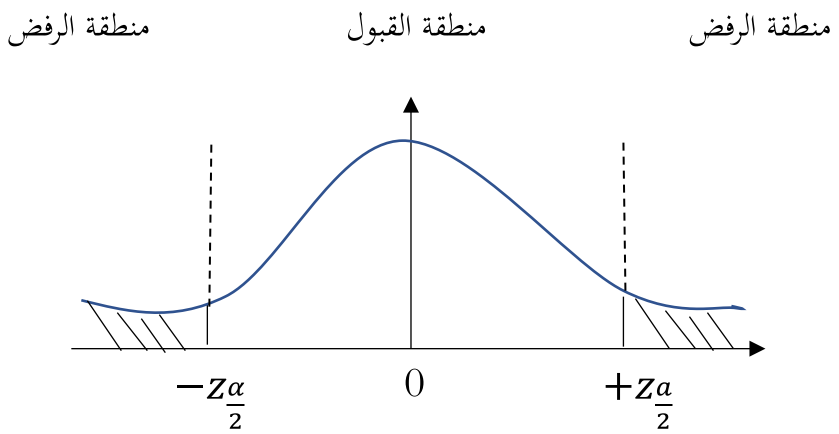
الشكل رقم (11): اختبار الفرض البديل من الطرف الأيسر.



وقد تكون الفرضية البديلة من الجانبين (فعالية الدواء الجديد تختلف عن فعالية الدواء القديم) وتكون بالشكل التالي:

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

الشكل رقم (12): اختبار الفرض البديل من الاتجاهين.



حيث أن منطقة الرفض ومنطقة القبول تشير إلى رفض أو قبول الفرض الصفري.

4.1. إحصاء الاختبار: من أجل رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة أو العكس نحتاج إلى إجراء اختبار.

فلنفترض أن الشركة المنتجة للدواء في المثال السابق قد أخذت عينة عشوائية من 49 شخص ممن استخدم الدواء الجديد وقدرت الوسط الحسابي للوقاية التي حصلت لدى كل فرد ب 11 ساعة كما قدرت الانحراف المعياري للعينة ب 2 ساعة، وبالتالي لا بد من طرح سؤال حول ما إذا كان هذه المدة للدواء الجديد ناتجة فقط عن أخطاء إحصائية أم لا؟ وللإجابة عن هذا السؤال لا بد من حساب إحصاء الاختبار z وهو متغير عشوائي تحسب قيمته انطلاقا من بيانات

العينة، ومن خلال هاته القيمة نقرر ما إذا كان هناك سبب قوي لرفض الفرضة الصفرية وقبول الفرضية البديلة أو العكس. وتعطى علاقة إحصاء الاختبار بالعلاقة التالية:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

وبما أن قيمة الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم في هذا المثال فإننا نقوم بتعويضه بالانحراف المعياري للعينة، فيكون:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2}{7} = 0.29$$

وباعتبار الفرضية الصفرية هي: $\mu = 10$ فإن إحصاء الاختبار يأخذ القيمة التالية:

$$z = \frac{11 - 10}{0.29} = 3.45$$

وبعد أن يتم حساب إحصاء الاختبار فغنه يتعين علينا اتخاذ القرار برفض أو قبول الفرضية الصفرية من خلال تحديد منطقة القبول ومنطقة الرفض انطلاقا من قيمة z.(سيتم توضيحها في خطوات اختبار الفرضيات)

2. الأخطاء التي يمكن ارتكابها في اتخاذ القرارات الإحصائية عند رفض أو قبول الفرضية الصفرية:

هناك نوعين من الأخطاء التي يمكن أن نقع فيهما عند اتخاذ قرار حول رفض أو عدم رفض فرض العدم (وبالتالي قبول أو رفض الفرضية البديلة)، وبالتالي يعتمد القرار الذي يتم اتخاذه بشأن الفرض الذي يتم اختباره على المعلومات التي تعطيها العينة العشوائية التي يتم سحبها أي أن قبول الفرضية الصفرية (رفض الفرضية البديلة) أو رفض الفرضية الصفرية (قبول الفرضية البديلة) يعتمد على النتيجة التي تعطيها العينة العشوائية.

1.2. الخطأ من النوع الأول: وهو الخطأ الذي نقع فيه عندما نرفض الفرضية الصفرية H_0 بالرغم من صحتها، سنرمز لاحتمال وقوع هذا الخطأ بالرمز α ونسميه مستوى دلالة الاختبار أو مستوى المعنوية.

حيث تمثل α الحد الأعلى للوقوع في الخطأ من النوع الأول، فهي تعيين منطقة أو مساحة الرفض تحت منحنى توزيع إحصاء الاختبار.

2.2. الخطأ من النوع الثاني: وهو الخطأ الذي نقع فيه عندما نقبل الفرضية الصفرية بالرغم من عدم صحتها، ونرمز إلى احتمال هذا الخطأ بالرمز β.

ويمكن تلخيص الأخطاء الإحصائية في الجدول التالي:

الجدول رقم (02): أنواع الأخطاء الإحصائية.

القرار الاحصائي / H_0	H_0 صحيح	H_0 غير صحيح
رفض الفرضية الصفرية	**خطأ من الدرجة الأولى**	**قرار مقبول**
قبول الفرضية الصفرية	**قرار مقبول**	**خطأ من الدرجة الثانية**

المصدر: من إعداد الباحثة.

حيث أن منطقة رفض الفرضية الصفرية هي عبارة عن مجموعة قيم إحصاء الاختبار التي من أجلها نرفض الفرضية الصفرية. أما منطقة القبول فتتكون من قيم مجموعة إحصاء الاختبار التي من أجلها لا نرفض الفرضية الصفرية. ويتعلق حجم المنطقة الأولى وحجم المنطقة الثانية بمستوى الدلالة α الذي نختاره للاختبار.

أما عن المنطقة الحرجة للاختبار (التي تعكس القيمة الحرجة) هي مجموعة قيم إحصاء الاختبار التي تؤدي إلى رفض الفرضية الصفرية، كل حد من حدود المنطقة الحرجة يسمى قيمة حرجة لإحصاء الاختبار.

3. خطوات إجراء اختبار الفرضيات الإحصائية:

بالنسبة لخطوات إجراء عملية اختبار الفرضيات والتي تخص في أساسا اختبار صحة الفرضية الصفرية من عدمها، أي الوصول إلى اتخاذ قرار احصائي للفصل في المسألة المطروحة والتي تختلف من مسألة إلى أخرى، حيث أن هناك خمس خطوات لاختبار الفروض الإحصائية تتمثل في التالي:

1.3. صياغة الفرضيات: حيث نقوم بتحديد الفرضية الصفرية والفرضية البديلة بشكل صحيح.

2.3. تحديد مستوى المعنوية.

3.3. تحديد القيمة الجدولية والمعيارية: في هذه الخطوة نقوم بتحديد التوزيع المستخدم في الاختبار من أجل حساب القيم الحرجة المعيارية والتي تسمى أيضا بالقيم الجدولية ونرمز لها بـZ_t ، كما نقوم أيضا بحساب قيمة المعيار، وهو القيمة التي تحسب من معطيات العينة مستخدمين علاقة خاصة، تتحدد تبعا لطبيعة التوزيع المستخدم، ونرمز له بـ Z_C.

حيث أن القيمة الجدولية تحدد على حسب نوع الاختبار وقيمة α كما يبينه الجدول التالي:

الجدول رقم (03): أمثلة عن القيم الجدولية تبعا لنوع الاختبار ومستوى المعنوية.

نوع الاختبار	مستوى المعنوية α	معامل الثقة $(1-\alpha)$	القيمة الجدولية
اختبار من طرفين	$5\%=0.05$	$95\%=0.95$	± 1.96
	$1\%=0.01$	$99\%=0.99$	± 1.96
اختبار من طرف واحد (الجهة اليمنى)	$5\%=0.05$	$95\%=0.95$	1.64
	$1\%=0.01$	$99\%=0.99$	-1.64
اختبار من طرف واحد (الجهة اليسرى)	$5\%=0.05$	$95\%=0.95$	2.33
	$1\%=0.01$	$99\%=0.99$	-2.33

المصدر: من إعداد الباحثة.

4.3. اتخاذ القرار: في هذه الخطوة نقارن بين المعيار z_c والقيم الجدولية z_t لتقرير قبول H_0 أو رفضها، وذلك كما يلي :

– إذا كان الاختبار من جهتين أي نرفض H_0 إذا كان المعيار z_c يقع في منطقة الرفض، وهذا في حالة ما إذا كان المعيار z_c أكبر من القيمة الجدولية الموجبة أو أصغر من القيمة الجدولية السالبة.

– إذا كان الاختبار أحادي الاتجاه ونحو اليمين، نرفض H_0 ، وهذا في حالة ما إذا كان المعيار z_c أكبر من القيمة الجدولية.

– إذا كان الاختبار أحادي الاتجاه ونحو اليسار، نرفض H_0 ، وهذا في حالة ما إذا كان المعيار z_c أصغر من القيمة الجدولية.

حيث تعتمد قاعدة القرار على تحديد طبيعة إحصاء الاختبار بناء على طبيعة التوزيع، فبعد معرفة طبيعة التوزيع تتحدد طبيعة إحصاء الاختبار ثم يتم تحديد قاعدة القرار من خلال المجال الذي يتحدد بناء على نوع الاختبار الإحصائي.

5.3. حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاء الاختيار: تستنتج القيمة الجدولة لإحصاء الاختبار بالاعتماد على الجداول الإحصائية المتوفرة (جدول التوزيع الطبيعي، جدول توزيع ستيودنت، جدول فيشر...)، أما القيمة الفعلية فتحسب انطلاقا من المعطيات المتوفرة في المسألة.

6.3. المقارنة واتخاذ القرار: مقارنة القيمتين الجدولية والمحسوبة واتخاذ القرار إما برفض الفرضية الصفرية في حالة عدم انتماء القيمة المحسوبة لمجال قبول فرضية العدم وبالتالي قبول الفرضية البديلة، أو بقبولها في حالة العكس.

4. اختبار الفرضيات حول وسط المجتمع μ : [1]

من خلال ما سبق تعرفنا على الخطوات العامة لإجراء اختبار للفرضيات، وسنتطرق من خلال هذا العنصر إلى اختبار الفرضيات للوسط الحسابي للمجتمع تحديدا. وذلك من خلال مجموعة من الحالات تتمثل التالي:

1.4. في حالة المجتمع طبيعي ذو تباين معلوم: إذا كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بتباين معلوم فإن توزيع الاختبار يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بصرف النظر عن حجم العينة وتكون خطوات الاختبار كما يلي:

أ. نشكل كلا من الفرضية الصفرية والفرضية البديلة وتكتب كما يلي:

بالنسبة للفرضية الصفرية:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

أما الفرضية البديلة فتكون أحد الأشكال التالية:

$$H_a: \mu > \mu_0$$
$$H_a: \mu < \mu_0$$
$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

ب. تحديد مستوى المعنوية: وهي عبارة عن دلالة الاختبار والتي من خلالها نحدد قيمة Z_t.

ج. تحديد وحساب قيمة إحصاء الاختبار: وذلك انطلاقا من البيانات المتوفرة لدينا في المسألة المطروحة، والتي تكون بالشكل التالي:

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

د. نحدد منطقة الرفض ومنطقة القبول في اختبار الفرضية الصفرية ويكون ذلك من خلال استخراج قيمة Z_t من جدول التوزيع الطبيعي ثم النظر في الفرضية البديلة.

ر. اتخاذ القرار حول رفض أو قبول الفرضية الصفرية، فإذا وقعت قيمة إحصاء الاختبار في منطقة القبول فإننا نقبل الفرضية الصفرية ونرفض الفرضية البديلة، أما إذا وقعت قيمة إحصاء الاختبار في منطقة الرفض فإننا نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة.

حيث أن:

[1] – ياسين طعمة . حسين، **أساليب الإحصاء التطبيقي**، (الأردن: دا ر الصفاء، 2010)، ص ص.198-200.

- إذا كان: $z_c > z_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيمن (في حالة $\mu > \mu_0$).
- إذا كان: $z_c < -z_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيسر (في حالة $\mu < \mu_0$).
- إذا كان: $-z_{\frac{\alpha}{2}} < z_c < z_{\frac{\alpha}{2}}$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانبين (في حالة $\mu \neq \mu_0$).

مثال:

سحبت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي تباينه يساوي 36 وذلك لاختبار الفرضية التالية:

$$H_0: \mu = \mu_0 = 25$$

$$H_a: \mu \neq \mu_0 \neq 25$$

- ما هو القرار السليم عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ الذي يجب اتخاذه، إذا علمت أن المتوسط الحسابي للعينة هو 24.

الحل:

أ. **الفرضية الصفرية:** تتمثل في:

$$H_0: \mu = \mu_0 = 25$$

ب. الفرضية البديلة:

$$H_a: \mu \neq \mu_0 \neq 25$$

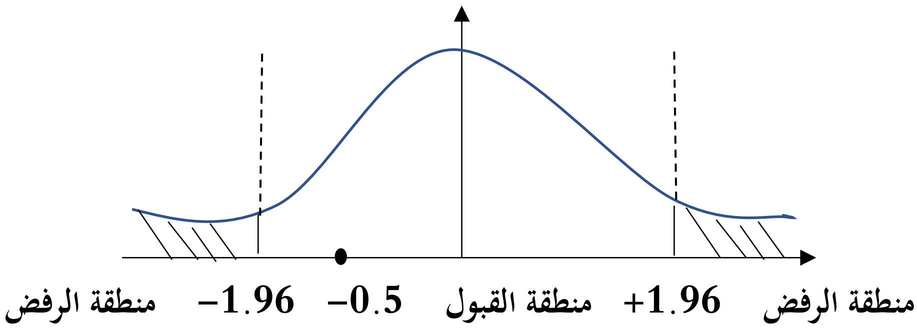
ت. تحديد مستوى المعنوية وقيمة z_t:

انطلاقا من كون مستوى المعنوية هو 5% فإن قيمة z_t تساوي: 1.96.

ث. **تحديد قيمة z_c:** انطلاقا من العلاقة التالية:

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{24 - 25}{6 / \sqrt{9}} = -0.5$$

ج. **اتخاذ القرار الاحصائي:** انطلاقا من قيمة z_t وقيمة z_c وبما أن الرفض يكون من الجهتين (كون عبارة الفرضية البديلة $\mu \neq \mu_0$) فإن التمثيل البياني لمناطق الرفض والقبول تكون بالشكل التالي:



نلاحظ من خلال الشكل أعلاه أن قيمة z_c وقعت في منطقة القبول و $-z_{\frac{\alpha}{2}} < z_c < z_{\frac{\alpha}{2}}$ وبالتالي فإن القرار الاحصائي في هذه الحالة هو قبول الفرضية الصفرية ورفض الفرضية البديلة، أي:

$$\mu = \mu_0 = 25$$

مثال:

إذا علمت أن الوقت الذي ينتظره الزبون في أحد المصارف يتبع توزيعا طبيعيا بوسط حسابي يساوي 25 دقيقة، وانحراف معياري يساوي 8 دقائق، واتبع المصرف نظام عمل جديد لتقليل وقت انتظار الزبون، وبعد اتباع هذا النظام أختيرت عينة عشوائية تشمل 100 شخص، فكان متوسط الوقت الذي ينتظره الزبون هو 22 دقيقة.

المطلوب:

- اختبر نظام العمل الجديد وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

الحل:

نقوم باتباع خطوات اختبار الفرضيات للمتوسط كما يلي:

أ. **الفرضية الصفرية**: تكون من الشكل:

$$H_0: \mu = \mu_0 = 25$$

ب. الفرضية البديلة:

$$H_a: \mu < \mu_0 < 25$$

وهذا يعني أن الرفض للفرضية الصفرية يكون من جانب واحد وهو الجانب الأيسر.

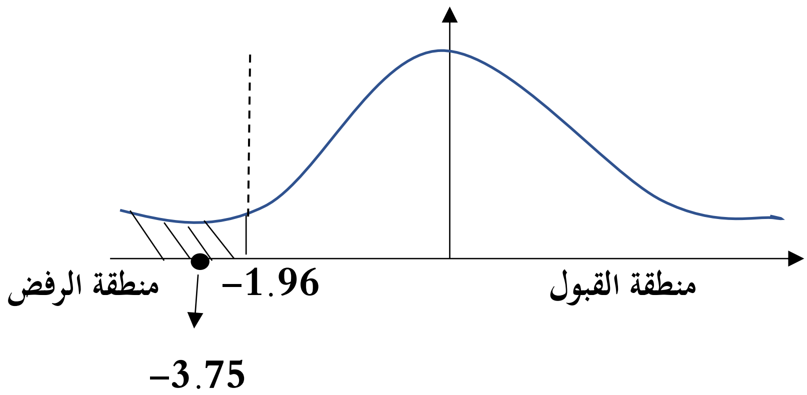
ت. تحديد مستوى المعنوية وقيمة z_t:

انطلاقا من كون مستوى المعنوية هو 5% فإن قيمة z_t تساوي: 1.96.

ث. **تحديد قيمة z_c:** انطلاقا من العلاقة التالية:

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma \,/\, \sqrt{n}} = \frac{22 - 25}{8 \,/\, \sqrt{100}} = -3.75$$

ج. **اتخاذ القرار الاحصائي**: انطلاقا من قيمة Z_t وقيمة Z_c وبما أن الرفض من الجهة اليسرى $Z_c < -Z_t$ (كون عبارة الفرضية الصفرية $\mu < \mu_0$) فإن التمثيل البياني لمناطق الرفض والقبول تكون بالشكل التالي:



نلاحظ من خلال الشكل أعلاه أن قيمة Z_c وقعت في منطقة الرفض وبالتالي فإن القرار الاحصائي في هذه الحالة هو رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة، أي:

$$\mu < \mu_0 < 25$$

مثال:

إذا كان وزن انتاج شجيرات الطماطم له وسط حسابي يساوي 12 وتباين يساوي 4، فقام المنتج باستخدام نوع جديد من السماد وتم اختيار عينة عشوائية تتكون من 36 شجيرة فوجد أن: $\bar{x} = 13.5$.

المطلوب:

- اختبر ما إذا كان النوع الجديد من السماد أدى إلى زيادة الوسط الحسابي لإنتاج شجيرات الطماطم عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

الحل:

باتباع خطوات اختبار الفرضيات للوسط الحسابي للمجتمع نجد أن:

أ. **الفرضية الصفرية**: تكون من الشكل:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 12$$

ب. **الفرضية البديلة:**

$$H_a : \mu > \mu_0 > 12$$

وهذا يعني أن الرفض للفرضية الصفرية يكون من جانب واحد وهو الجانب الأيمن.

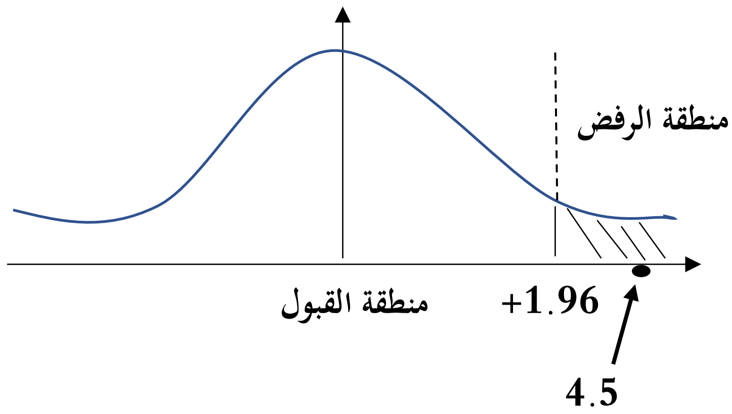
ت. تحديد مستوى المعنوية وقيمة z_t:

انطلاقا من كون مستوى المعنوية هو 5% فإن قيمة z_t تساوي: 1.96.

ث. **تحديد قيمة z_c**: انطلاقا من العلاقة التالية:

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma \,/\, \sqrt{n}} = \frac{13.5 - 12}{2 \,/\, \sqrt{36}} = 4.5$$

ج.**اتخاذ القرار الاحصائي**: انطلاقا من قيمة z_t وقيمة z_c وبما أن الرفض من الجهة اليمنى (كون عبارة الفرضية الصفرية $\mu > \mu_0$) فإن التمثيل البياني لمناطق الرفض والقبول تكون بالشكل التالي:



نلاحظ من خلال الشكل أعلاه أن قيمة z_c وقعت في منطقة الرفض و $z_c > z_t$ وبالتالي فإن القرار الاحصائي في هذه الحالة هو رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة، أي:

$$\mu > \mu_0 > 12$$

2.4. في حالة تباين المجتمع مجهول وحجم العينة كبير: باعتبار أن المجتمع ذو تباين مجهول فإن حجم العينة هو المحدد لطبيعة التوزيع بالنسبة لاختبار الفرضية، ووفقا لنظرية النهاية المركزية (كما رأينا سابقا في توزيع المعاينة) فإن توزيع الاختبار يقترب من التوزيع الطبيعي باعتبار أن حجم العينة أكبر من 30 (أي كبير). وبالتالي فاختبار الفرضيات للوسط الحسابي للمجتمع تتبع نفس خطوات اختبار الفرضيات في حالة أن المجتمع طبيعي والتباين معلوم. وتكون إحصاء الاختبار من الشكل:

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s \,/\, \sqrt{n}}$$

حيث أنه تم تعويض الانحراف المعياري للمجتمع بالانحراف المعياري للعينة ولذلك لكونه مجهولا.

مثال:

يخضع إنتاج أشجار التفاح في بستان كبير إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط 150 حبة تفاح للشجرة، أراد صاحب البستان الذي استعمل نوعا جديدا من السماد في الفترة الأخيرة أن يختبر إذا ما زاد انتاج التفاح، تبعا لذلك أخذ عينة من 64 شجرة، فوجد أن الوسط الحسابي لعدد حبات التفاح هو 156حبة للشجرة في العينة بانحراف معياري 12 حبة.

المطلوب:

- قم باختبار ما إذا كان هناك زيادة في الإنتاج عند مستوى المعنوية 5%.

الحل:

باتباع خطوات اختبار الفرضيات للوسط الحسابي للمجتمع نجد أن:

أ. **الفرضية الصفرية**: تكون من الشكل:

$$H_0: \mu = \mu_0 = 150$$

ب. الفرضية البديلة:

$$H_a: \mu > \mu_0 > 150$$

وهذا يعني أن الرفض للفرضية الصفرية يكون من جانب واحد وهو الجانب الأيمن.

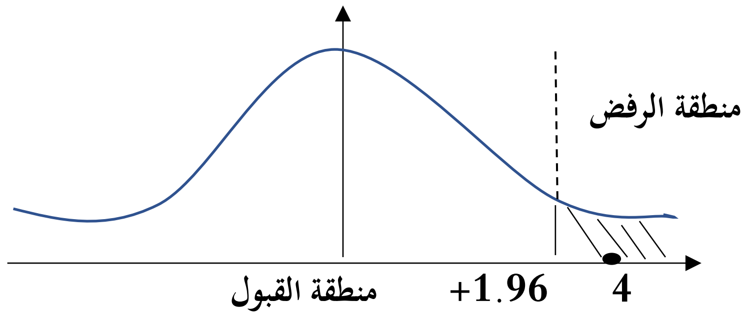
ت. تحديد مستوى المعنوية وقيمة z_t:

انطلاقا من كون مستوى المعنوية هو 5% فإن قيمة z_t تساوي: 1.96.

ث. **تحديد قيمة z_c**: انطلاقا من العلاقة التالية:

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s \;/\; \sqrt{n}} = \frac{156 - 150}{12 \;/\; \sqrt{64}} = 4$$

ج.اتخاذ القرار الاحصائي: انطلاقا من قيمة z_t وقيمةz_c وبما أن الرفض من الجهة اليمنى (كون عبارة الفرضية الصفرية $\mu > \mu_0$) فإن التمثيل البياني لمناطق الرفض والقبول تكون بالشكل التالي:



نلاحظ من خلال الشكل أعلاه أن قيمة z_c وقعت في منطقة الرفض و $z_c > z_t$، وبالتالي فإن القرار الاحصائي في هذه الحالة هو رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة، أي:

$$\mu > \mu_0 > 150$$

4.3. اختبار الفرضيات للوسط الحسابي للمجتمع في حالة التباين مجهول وحجم العينة صغير: إذا المجتمع تباينه مجهول وحجم العينة التي تم اختيارها صغير أي أقل من 30، فإن توزيع اختبار الفرضية يصبح يتبع توزيع ستيودنت، وتصبح عبارة إحصاء الاختبار بالشكل التالي:

$$T_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s \,/\, \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

وبالتالي تكون خطوات اختبار الفرضيات في هذه الحالة كما يلي:

نشكل كلا من الفرضية الصفرية والفرضية البديلة وتكتب كما يلي:

بالنسبة للفرضية الصفرية:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

أما الفرضية البديلة فتكون أحد الأشكال التالية:

$$H_a: \mu > \mu_0$$

$$H_a: \mu < \mu_0$$

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

ب. تحديد مستوى المعنوية: وهي عبارة عن دلالة الاختبار والتي من خلالها نحدد قيمة T_t.

ج. تحديد وحساب قيمة إحصاء الاختبار: وذلك انطلاقا من البيانات المتوفرة لدينا في المسألة المطروحة، والتي تكون بالشكل التالي:

$$T_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

د. نحدد منطقة الرفض ومنطقة القبول في اختبار الفرضية الصفرية ويكون ذلك من خلال استخراج قيمة T_t من جدول توزيع ستيودنت ثم النظر في الفرضية البديلة.

ر. اتخاذ القرار حول رفض أو قبول الفرضية الصفرية، فإذا وقعت قيمة إحصاء الاختبار في منطقة القبول فإننا نقبل الفرضية الصفرية ونرفض الفرضية البديلة، أما إذا وقعت قيمة إحصاء الاختبار في منطقة الرفض فإننا نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة.

حيث أن:

- إذا كان: $\boldsymbol{T_c} > T_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيمن (في حالة $\mu > \mu_0$).
- إذا كان: $\boldsymbol{T_c} < -T_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيسر (في حالة $\mu < \mu_0$).

إذا كان: $-T_{\frac{\alpha}{2}} < \boldsymbol{T_c} < T_{\frac{\alpha}{2}}$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانبين (في حالة $\mu \neq \mu_0$).[1]

مثال:

قمنا باختيار عينة عشوائية حجمها 16 من مجتمع ذو تباين مجهول ووسط حسابي يساوي 34، وكانت بيانات العينة: $s = 8$ و$\bar{x} = 30$.

ولتكن الفرضيتان كما يلي:

$$H_0: \mu = \mu_0 = 34$$
$$H_a: \mu < \mu_0 < 34$$

فلاختبار صحة الفرضية الصفرية من عدمها عند مستوى المعنوية 1% لا بد من تحديد قيمة T_t، حيث أن درجة الحرية: $v = n - 1 = 15$ ومن خلال جدول توزيع ستيودنت تكون قيمة T_t عند درجة الحرية 15 و مستوى المعنوية 0.01 تساوي: 2.602.

أما قيمة T_c فهي:

$$T_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{30 - 34}{8\sqrt{16}} = -2$$

وبما أن قيمة T_c وقعت في منطقة القبول فإننا نقبل الفرضية الصفرية ونرفض الفرضية البديلة باعتبار أن:

[1] – فلاح المنيزل. عبد الله، **مرجع سابق**، ص ص. 91-95.

$$T_c < -2.602$$

وبالتالي:

$$\mu < \mu_0 < 34$$

مثال:

إذا كان معدل نسبة النيكوتين المثبتة على أحد أنواع السجائر هي 7.0 ملغ، نأخذ 16 سيجارة من هذا النوع فكان الوسط الحسابي لنسبة النيكوتين تساوي 75.0 ملغ بانحراف معياري 04.0 ملغ.

المطلوب:

- فهل تعتبر هذه السجائر ذات معدل نسبة نيكوتين أعلى من المثبت على العلبة عند مستوى المعنوية 10%.

الحل:

باتباع خطوات اختبار الفرضيات للوسط الحسابي للمجتمع في حالة التباين مجهول وحجم العينة صغير نجد أن:

أ. **الفرضية الصفرية**: تكون من الشكل:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 0.7$$

ب. الفرضية البديلة:

$$H_a : \mu > \mu_0 > 0.7$$

وهذا يعني أن الرفض للفرضية الصفرية يكون من جانب واحد وهو الجانب الأيمن.

ت. تحديد مستوى المعنوية وقيمة T_t:

انطلاقا من كون مستوى المعنوية هو 5% ودرجة الحرية: $v = n - 1$ فإن قيمة T_t تساوي: 1.753.

ث. **تحديد قيمة T_c**: انطلاقا من العلاقة التالية:

$$T_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s \,/\, \sqrt{n}} = \frac{0.75 - 0.7}{0.04 \,/\, \sqrt{16}} = 5$$

ج. اتخاذ القرار الاحصائي: انطلاقا من قيمة T_t وقيمة T_c وبما أن الرفض من الجهة اليمنى (كون عبارة الفرضية الصفرية $\mu > \mu_0$)، و قيمة T_c وقعت في منطقة الرفض و $T_c > T_t$ وبالتالي فإن القرار الاحصائي في هذه الحالة هو رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة، أي:

$$\mu > \mu_0 > 0.7$$

5. اختبار الفرضيات حول نسبة المجتمع P:

في كثير من المجالات يطلب إجراء اختبارات بخصوص النسبة مثلا: تهتم المصانع بنسب الوحدات المعيبة المنتجة وذلك لتحديد ما إذا كانت نسب المعيب من كل سلعة تتماشى مع المواصفات الموضوعة لها سابقا، وللقيان بهذا الاختبار يتم اختيار عينة عشوائية وحساب النسبة للعينة ومقارنة هذه النسبة مع النسبة في المجتمع، وذلك من اجل اتخاذ القرار بشأن رفض أو قبول الفرضية الصفرية.

حيث يتعلق هذا الاختبار بنسبة مفردات المجتمع التي تتصف بخاصية ما P، حيث يؤكد الاختبار أو ينفي صحة فرضية معينة بخصوص هاته النسبة. ويرمز قيمة النسبة الافتراضية بـ P_0 وتكون خطوات اختبار الفرضية كما يلي:

أ. نشكل كلا من الفرضية الصفرية والفرضية البديلة وتكتب كما يلي:

بالنسبة للفرضية الصفرية:

$$H_0: P = P_0$$

أما الفرضية البديلة فتكون أحد الأشكال التالية:

$$H_a: P > P_0$$

$$H_a: P < P_0$$

$$H_a: P \neq P_0$$

ب. تحديد مستوى المعنوية: والتي من خلالها نحدد قيمة Z_t (القيمة الجدولية).

ت. تحديد وحساب قيمة إحصاء الاختبار: وذلك انطلاقا من البيانات المتوفرة لدينا في المسألة المطروحة، والتي تكون بالشكل التالي:

$$z_c = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}}$$

ج. نحدد منطقة الرفض ومنطقة القبول في اختبار الفرضية الصفرية ويكون ذلك من خلال استخراج قيمة Z_t من جدول التوزيع الطبيعي ثم النظر في الفرضية البديلة.

د. اتخاذ القرار حول رفض أو قبول الفرضية الصفرية، فإذا وقعت قيمة إحصاء الاختبار في منطقة القبول فإننا نقبل الفرضية الصفرية ونرفض الفرضية البديلة، أما إذا وقعت قيمة إحصاء الاختبار في منطقة الرفض فإننا نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة.

حيث أن:

- إذا كان: $Z_c > Z_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيمن (في حالة $P > P_0$).
- إذا كان: $Z_c < -Z_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيسر (في حالة $P < P_0$).
- إذا كان: $-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z_c < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانبين (في حالة $P \neq P_0$).

مثال:

أبدت إدارة التسويق في مؤسسة ما فكرا جديدا يسمى "البيع بروح الفريق" وفيه تستخدم الهاتف في عرض السلع على الزبائن قبل البيع، يدعي فريق البيع أنه يمكنه زيادة نسبة مكالمات البيع الناجحة إلى أكثر من 18 %، وهي نسبة البيع الحالية والمحققة، ارتأت الإدارة أن تستخدم فريق البيع ولكن في البداية اشترطت أن تكون نسبة مكالمات البيع الناجحة يجب أن تتعدى النسبة الحالية للمبيعات. في اختبار ما، جرب فريق البيع مع عينة من 100 مكالمة بيع نجح في إتمام 22 عملية بيع.

المطلوب:

- قم باختبار إذا كانت هذه العينة تظهر أن هناك تحسنا قد حدث مع فريق البيع عند مستوى معنوية 0.05.

الحل:

باتباع خطوات اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع نجد أن:

أ. **الفرضية الصفرية:** تكون من الشكل:

$$H_0: P = P_0 = 0.18$$

ب. الفرضية البديلة:

$$H_a: P > P_0 > 0.18$$

وهذا يعني أن الرفض للفرضية الصفرية يكون من جانب واحد وهو الجانب الأيمن.

ت. تحديد مستوى المعنوية وقيمة Z_t:

انطلاقا من كون مستوى المعنوية هو 5% فإن قيمة Z_t تساوي: 1.96.

ث. تحديد قيمة Z_c: انطلاقا من العلاقة التالية:

$$z_c = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} = \frac{0.22 - 0.18}{\sqrt{\frac{0.18(1-0.18)}{100}}} = 1.05$$

ج.**اتخاذ القرار الاحصائي**: انطلاقا من قيمة $\boldsymbol{z_t}$ وقيمةz_c وبما أن الرفض من الجهة اليمنى (كون عبارة الفرضية الصفرية $P > P_0$)، و قيمةz_c وقعت في منطقة القبول و$z_c < z_t$ وبالتالي فإن القرار الاحصائي في هذه الحالة هو قبول الفرضية الصفرية ورفض الفرضية البديلة، أي:

$$P = P_0 = 0.18$$

6. اختبار الفرضيات حول تباين المجتمع $\boldsymbol{\sigma^2}$:

لاختبار الفرضيات حول التباين نسلك نفس الخطوات المتبعة في اختبار الفرضيات السابقة، غير أن مجال قبول أو رفض الفرضية الصفرية يتحدد بالاعتماد على توزيع كاي تربيع بدرجات حرية (n-1)، وتكون دالة الاختبار هي:

$$\chi_c^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$$

وتكون خطوات اختبار الفرضية للتباين بالشكل التالي:

أ. **تحديد الفرضية الصفرية**: تكون على الشكل التالي:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

ب. **تحديد الفرضية البديلة**: حيث أن منطقة الرفض تتحدد وفقا للفرضية البديلة، وهنا لدينا ثلاث حالات:

- إذا كان: $\chi_c^2 > \chi_{1-\alpha}^2$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيمن (في حالة $\sigma^2 > \sigma_0^2$).
- إذا كان: $\chi_c^2 < \chi_{1-\alpha}^2$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيسر (في حالة $\sigma^2 < \sigma_0^2$).
- إذا كان: $\chi_{\alpha/2}^2 < \chi_c^2 < \chi_{1-\alpha/2}^2$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانبين (في حالة $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$).[1]

مثال:

تدعي لجنة مختصة أن منتجات شركة صناعة العطور لها مدة استعمال بعد إنتاجها يزيد انحرافها المعياري عن شهرين، ولاختبار هذا الادعاء أخذت عينة حجمها 20 فكان متوسط مدة استعمالها هو 3 سنوات وانحرافها المعياري 3 أشهر.

المطلوب:

[1] – شاكر مصلح. الحمدي، **الإحصاء وتصميم الاختبارات**، (الأردن: دار أسامة للنشر والتوزيع، 2011)، ص ص.102-108.

- هل النتائج المتوصل إليها من خلال العينة تفقد هذا الادعاء أم تؤيده عند مستوى معنوية 0.05.

الحل:

باتباع خطوات اختبار الفرضيات لتباين المجتمع نجد أن:

أ. **الفرضية الصفرية**: تكون من الشكل:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 2$$

ب. الفرضية البديلة:

$$H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2 > 2$$

وهذا يعني أن الرفض للفرضية الصفرية يكون من جانب واحد وهو الجانب الأيمن.

ت. تحديد مستوى المعنوية وقيمة $\boldsymbol{\chi^2_{1-\alpha}}$:

انطلاقا من كون مستوى المعنوية هو 5% فإن قيمة $\boldsymbol{\chi^2_{1-\alpha}}$ عند درجة الحرية 20-1 وتساوي 19 ومن خلال جدول توزيع كاي مربع نجد أنها تساوي: 30.14.

ث. تحديد قيمة $\boldsymbol{\chi^2_c}$: انطلاقا من العلاقة التالية:

$$\chi_c^2 = (n-1)S^2/\sigma^2 = 19 \times 3^2/2^2 = 42.75$$

ج. اتخاذ القرار الاحصائي: انطلاقا من قيمة $\boldsymbol{\chi^2_{1-\alpha}}$ وقيمة χ_c^2 وبما أن الرفض من الجهة اليمنى (كون عبارة الفرضية الصفرية $\sigma^2 > \sigma_0^2$)، و $\chi_c^2 > \chi_{1-\alpha}^2$ وبالتالي فإن القرار الاحصائي في هذه الحالة هو رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة، أي:

$$\sigma^2 > \sigma_0^2 > 2$$

7. اختبار الفرضيات حول الفرق بين وسطي المجتمعين $(\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2})$:

سنتناول من خلال هذا الجزء مجموعة من الحالات لاختبار الفرضيات بين وسطي المجتمعين بحسب مواصفات العينتين العشوائيتين اللتان تسحبان من المجتمعين وبحسب خواص المجتمعين.

1.7. العينتان مستقلتان وكبيرتا الحجم:

إذا رمزنا بـ $\bar{x}_1$ و$\bar{x}_2$ لمتوسطي العينتين وبـ n_1 وn_2 لعدد عناصر كل منهما على التوالي وبـ μ_1 وμ_2 لوسطي المجتمعين، وبـ σ_1^2 و σ_2^2 لتبيانهما على التوالي فإن الفرضية الصفرية تكون:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$$

أما إحصاء الاختبار فتكون من الشكل:

$$z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

ولتعيين منطقة الرفض للفرضية الصفرية لدينا كذلك ثلاث حالات بحسب وضعية الفرضية البديلة H_a:

- إذا كان: $z_c > z_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيمن (في حالة $\mu_1 - \mu_2 > d_0$).
- إذا كان: $z_c < -z_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيسر (في حالة $\mu_1 - \mu_2 < d_0$).
- إذا كان: $-z_{\frac{\alpha}{2}} < z_c < z_{\frac{\alpha}{2}}$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانبين (في حالة $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$).

ملاحظة: في حال ما إذا كان كل من تبايني المجتمعين مجهولين فإننا نقوم بتعويضهم بتبايني العينتين.

مثال:

في متجر لبيع لعب الأطفال اعتقد صاحب المتجر أنه إذا غير مكان عرض إحدى المنتجات من الألعاب داخل المتجر إلى واجهته فإن مبيعاته من ذلك الصنف من الألعاب تزداد. ولاختبار ذلك سجل مبيعاته من هذه الألعاب في 40 يوما لا على التعيين عندما كانت تعرض المنتجات في داخل المتجر، وسجلها في 30 يوما لا على التعيين عندما جعل عرض المنتجات في واجهة المتجر. فكان وسطا المبيعات في اليوم الأول:

$$\bar{x}_1 = 90$$
$$\bar{x}_2 = 95$$

وكان الانحرافان المعياريان للعينتين على التوالي:

$$s_1^2 = 9$$

$$s_2^2 = 7.5$$

المطلوب:

- اختبر إذا كانت هذه النتائج تدعم اعتقاد صاحب المصنع؟

الحل:

باتباع خطوات اختبار الفرضيات للفرق بيم متوسطي مجتمعين نجد:

أ. **الفرضية الصفرية**: تكون من الشكل:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

إذ ان الإجابة بنعم تعني رفض الفرضية الصفرية القائلة ان وسطي المبيعات متساويان

ب. الفرضية البديلة:

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

وهذا يعني أن الرفض للفرضية الصفرية يكون من جانب واحد وهو الجانب الأيمن.

أ. **حديد مستوى المعنوية وقيمة z_t**:

انطلاقا من كون مستوى المعنوية هو 5% فإن قيمة z_t تساوي: 1.96.

ب. تحديد قيمة z_c: انطلاقا من العلاقة التالية:

$$z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(95 - 90) - 0}{\sqrt{\frac{9}{40} + \frac{7.5}{30}}} = 2.53$$

ت. اتخاذ القرار الاحصائي: انطلاقا من قيمة z_t وقيمة z_c وبما أن الرفض من الجهة اليمنى (كون عبارة الفرضية الصفرية $\mu_1 - \mu_2 > d_0$)، و $z_c > z_t$ وبالتالي فإن القرار الاحصائي في هذه الحالة هو رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة، أي:

$$\mu_1 - \mu_2 > 0$$

2.7. العينتان مستقلتان وصغيرتا الحجم: في هذه الحالة باعتبار أن العينتين حجمهما صغير أي أقل من 30 أو إحداهما أقل من 30، مسحوبتين من مجتمعين مستقلين، ولدينا $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ متوسطي العينتين و. n_1 و n_2 لعدد عناصر كل منهما على التوالي و μ_1 و μ_2 لوسطي المجتمعين، ولدينا σ_1^2 و σ_2^2 لتبيانهما على التوالي فإن الفرضية الصفرية تكون على الشكل:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$$

وهنا باعتبار أن أغلب الحالات يكون تبايني المجتمعين مجهولين وبما أن حجم العينتين صغير أو أحدهما صغير فإن المجتمعين يتبعان توزيع ستيودنت عند درجات حرية:

$$v=\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_1-1}}$$

ويكون إحصاء الاختبار من الشكل:

$$T_c=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$$

أما اتخاذ القرار حول رفض أو قبول الفرضية الصفرية، فإذا وقعت قيمة إحصاء الاختبار في منطقة القبول فإننا نقبل الفرضية الصفرية ونرفض الفرضية البديلة، أما إذا وقعت قيمة إحصاء الاختبار في منطقة الرفض فإننا نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة.

حيث أن:

- إذا كان: $\boldsymbol{T_c} > T_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيمن (في حالة $\mu_1-\mu_2>d_0$).
- إذا كان: $\boldsymbol{T_c} < -T_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيسر (في حالة $\mu_1-\mu_2<d_0$).

إذا كان: $-T_{\frac{\alpha}{2}} < \boldsymbol{T_c} < T_{\frac{\alpha}{2}}$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانبين (في حالة $\mu_1-\mu_2\neq d_0$).

3.7. العينتان مستقلتان وصغيرتا الحجم والمجتمعان لهما نفس التباين: إذا افترضنا أن المجتمعين اللذين نأخذ منهما العينتين لهما نفس التباين فإننا نقدر هذا التباين بالتباين التجميعي للعينتين s_p^2:

$$s_P^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

ويكون إحصاء الاختبار من الشكل:

$$T_c=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d_0}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\sim t(v)$$

$$v=n_1+n_2-2$$

مثال:

إذا كانت لدينا البيانات التالية حول عينتين مسحوبتين عشوائيا كما يلي:

العينة الثانية	العينة الأولى
$\bar{x}_2 = 37$	$\bar{x}_1 = 30$
$n_2 = 15$	$n_1 = 12$
$s_2^2 = 7.5$	$s_1^2 = 7$

وبافتراض أن المجتمعين لهما نفس التباين فإننا نقدر هذا التباين بالتباين التجميعي للعينتين عند مستوى المعنوية 0.05:

$$s_P^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(12-1)7 + (15-1)7.5}{12+15-2} = 53.06$$

ولتكن الفرضيتين H_0 وH_a كما يلي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 < 0$$

أما قيمة T_t عند مستوى المعنوية 0.05 ودرجة الحرية $v = 25$ فهي تساوي: 1.708.

فنجد أن احصاء الاختبار تساوي:

$$T_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(30-37)-0}{\sqrt{53.06\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right)}} = 2.48$$

وبما أن: $T_c < -T_t$ و T_c وقعت في منطقة الرفض فإننا نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة.

4.7. العينتين مرتبطتين: إذا كانت العينتين مرتبطتين $\bar{x}_1$و $\bar{x}_2$ ، وسطهما وتباينهما على التوالي: μ_1 وμ_2، s_1^2 وs_2^2. بحيث تكون مشاهدات المجتمعين متناظرة ومتساوية فإننا سنحصل على مجتمع الفروق بين مشاهدات المجتمعين (تطرقنا لها في الفصل الثاني).

في هذه الحالة تكون الفرضية الصفرية من الشكل:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$$

أما إحصاء الاختبار فيكون من الشكل:

- **في حالة حجم العينتين أكبر من 30:**

$$z_c = \frac{d - \mu_D}{s_d \,/\, \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- **في حالة العينتين صغير أو أحدهما صغير:**

$$T_c = \frac{d - \mu_D}{s_d \,/\, \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

8. اختبار فرضية حول الفرق بين نسبتين من مجتمعين $(\boldsymbol{P_1 - P_2})$:

نفترض أننا سحبنا عينة عشوائية كبيرة الحجم من كل من المجتمعين، نرمز بـP_1 وP_2 لهذه النسبة في كل من المجتمعين وبـ $\overline{P_1}$ و$\overline{P_2}$ للنسبة في كل من العينتين، وليكن n_1 وn_2 عدد عناصر كل من العينتين، وبالتالي تكون الفرضية الصفرية من الشكل:

$$H_0: P_1 - P_2 = d_0$$

ويكون إحصاء الاختبار كما يلي:

$$z_c = \frac{\overline{P_1} - \overline{P_2} - d_0}{\sqrt{\dfrac{\overline{P_1}(1-\overline{P_1})}{n_1} + \dfrac{\overline{P_2}(1-\overline{P_2})}{n_2}}}$$

أما بالنسبة للفرضية البديلة فتكون في ثلاث حالات ممكنة تتمثل في:

- إذا كان: $z_c > z_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيمن (في حالة $P_1 - P_2 > d_0$).
- إذا كان: $z_c < -z_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيسر (في حالة $P_1 - P_2 < d_0$).
- إذا كان: $-z_{\frac{\alpha}{2}} < z_c < z_{\frac{\alpha}{2}}$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانبين (في حالة $P_1 - P_2 \neq d_0$).

9. اختبار الفرضية حول النسبة بين تبايني المجتمعين:

المقارنة بين التباينات للمجموعات العامة كما سبق أن ذكرنا تلعب دورا هاما في التطبيقات العملية خاصة في التعرف على الأجهزة ذات الدقة المتناهية أو الصالحة للاستعمال أو للتعرف على أفضل الطرق القياسية المستخدمة. فمن المعروف أن أفضل الاجهزة والطرق القياسية هي التي تعطى قياسات بحيث يكون التشتت لها أقل ما يمكن.

ليكن لدينا S_1^2 تباين عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع $N(\mu_1, \sigma_1^2)$، وليكن S_2^2 تباين عينة عشوائية حجمها n_2 من مجتمع $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول، فإن إحصاء الاختبار تكون من الشكل:

$$F_C = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

أما قيمة F_t فتكون عند درجتي حرية $n_1 - 1$ و $n_2 - 1$ عند مستوى معنوية معين من خلال جدول توزيع فيشر.

وتكون لدينا الفرضية الصفرية من الشكل:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

ويكون لدينا لاتخاذ القرار الحالات التالية:

- إذا كان: $F_C > F_t$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجانب الأيمن (في حالة $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$).

إذا كان: $F_{\frac{a}{2}} < F_c$ فإن رفض الفرضية الصفرية يكون من الجاانب الأيمن فقط (في حالة $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$).[1]

[1] – الشيخ. ساوس، **مبادئ الإحصاء الاستدلالي دروس وتمارين**، (الجزائر: منشورات دار الخلدونية،2018).

تمارين الفصل الرابع:

التمرين الأول:

- ماذا يقصد باختبار الفروض؟ وما هو الاجراء العام؟
- ماذا يقصد بالخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني؟
- ما الفرق بين مستوى المعنوية ومستوى أو معامل الثقة؟

التمرين الثاني:

يرغب منتج للأسلاك الصلبة اختبار ما إذا كانت الأسلاك التي ينتجها لديها فوة مقاومة للكسر قدرها 5000 Ib، فقوة مقاومة الكسر أقل من 5000 Ib لن تكون ملائمة، وقوة مقاومة للكسر أكبر من 5000 Ib ترفع التكاليف بدون مبرر، يأخذ المنتج عينة عشوائية من 64 قطعة، حيث أن متوسط قوة مقاومة الكسر هو 5100 Ib والانحراف المعياري هو 480 Ib.

المطلوب:

- هل يجب أن يقبل المنتج فرض أن الأسلاك الصلبة لها قوة مقاومة للكسر 5000 Ib عند مستوى المعنوية 5%؟ علما أن: ($z_{0.05} = \pm 1.96$).

التمرين الثالث:

قام أحد مخابر صناعة الأدوية بتجربة دواء جديد لمعالجة مرض القلب على عينة مكونة من 100 مريض تبين ان تأثيره كان إيجابي على 70 مريض مع العلم انه يتوفر دواء لنفس المرض نسبة نجاحه في معالجة المرضى هي 0.6.

المطلوب:

- اختبر عند مستوى المعنوية 1 % إن كان الدواء الجديد أفضل من النوع المتوفر في الصيدليات.

التمرين الرابع:

لدينا اختبار لقياس قدرة الطفل على تعلم كلمات جديدة، والمطلوب معرفة ما إذا كان متوسط درجات هذا الاختبار لأطفال إحدى المجتمعات يختلف عنه لأطفال مجتمع أخر، افترض أن درجات أطفال هاتين المجتمعين تتبع التوزيع الطبيعي بحيث لهما نفس التباين، أعطى الاختبار لمجموعتين عشوائيتين مستقلتين من الأطفال بعمر 4 سنوات البيانات التالية:

المجموعة الأولى	المجموعة الثانية
$\bar{x}_1 = 99$	$\bar{x}_2 = 108$
$n_1 = 15$	$n_2 = 10$

$s_2^2 = 40$	$s_1^2 = 45$

المطلوب:

- اختبر الفرض تساوي قدرات أطفال المجموعتين على تعلم كلمات جديدة، عند مستوى معنوية0.05 .

التمرين الخامس:

يدعي مدير أحد المصانع أن منتجاته لا يزيد الانحراف المعياري لأطوالها عن 0.2 سم، أراد أحد الزبائن أن يتأكد من هذا الادعاء فنظر في عينة عشوائية فيها 10 عناصر من المنتجات فوجد أن الانحراف المعياري في تلك العينة كان 0.4 سم.

المطلوب:

- اختبر إن كانت هذه النتيجة تعطينا مبررا قويا لرفض ادعاء البائع؟

الخاتمـــة

الخاتمة:

من خلال ما سبق اتضح لنا مدى أهمية الإحصاء الاستدلالي بداية بالفصل الأول الذي يوضح دور الإحصاء الاستدلالي من خلال كون الباحث عند قيامه بأخذ عينة عشوائية وجمع البيانات عن أفراد المجتمع من أجل الخروج بمجموعة من النتائج البحثية فيما يتعلق بالمشكلة البحثية أو الظاهرة المدروسة. كما أنه يقوم بالأساس على أخذ عينة عشوائية ممثلة لخصائص المجتمع، ومن ثم يمكن للباحث استنتاج النتائج وتعميمها على مجتمع الدراسة. وكما أننا تطرقنا إلى أهم أنواع التوزيعات الاحتمالية التي يقوم عليها الإحصاء الاستدلالي (التوزيع الطبيعي المعياري، توزيع ستيودنت، توزيع كاي مربع، توزيع فيشر).

ثم قمنا بتفصيل موضوع التوزيع المعاينة بمختلف أنواعه من توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي إلى غاية النسبة بين تباينين، حيث في أغلب الحالات يتبع توزيع المعاينة التوزيع الطبيعي من خلال توفر مجموعة من الشروط في العينة والمجتمع الذي أخذت منه تلك العينة العشوائية والتي تعنى بتمثيل المجتمع ككل محل الدراسة.

أما بالنسبة لتقدير معلمات المجتمع من خلال فصل نظرية التقدير والذي يقوم تقدير المعلمات انطلاقا من إحصاءات العينة والتي يتم اختيارها لتمثيل المجتمع انطلاقا من تقدير الوسط الحسابي إلى تقدير التباين والنسبة بين تباينيين مرورا بالنسبة والفرق بين نسبتين، حيث ينقسم التقدير بما يتوفر عليه من شروط على نوعين أساسيين وهما التقدير بنقطة والتقدير بفترة.

وكآخر فصل تم التطرق إلى اختبار الفرضيات والخطوات الأساسية التي لاب بد من اتباعها لاختبار الفرضية الصفرية مقابل الفرضية البديلة والتوصل إلى اتخاذ قرار احصائي انطلاقا من القيم الحرجة والتوزيعات الاحتمالية المتبعة في كل نوع من اختبار الفرضيات والذي بدوره تطرقنا فيه إلى اختبار الفرضيات للمتوسط والفرق بين متوسطين و اختبار الفرضيات النسبة والفرق بين نسبتين و اختبار الفرضيات التباين والنسبة بين تبايني على اختلاف توزيعات المجتمع وعناصره.

وبالتالي يعمل الإحصاء الاستدلالي (الإحصاء 3) أساسا على:

- تبسيط البيانات المتوفرة لدى الباحث الاحصائي والتعامل مع كافة المتغيرات الإحصائية بسلاسة ودقة؛
- فهم خصائص العينة، ومن ثم فهو يتيح لهم فهم خصائص المجتمع ببساطة؛
- ساعد الباحثين في تعميم النتائج الخاصة بالدراسة، ويسهل عملية اتخاذ القرار الاحصائي من خلال اختبار الفرضيات كآخر مرحلة.

قائمـة المراجـع

قائمة المراجع:

المراجع باللغة العربية:

1. بدر، سالم عيسى. غصاب عبابنة، عماد. **مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، عمان، الأردن: الطبعة الثانية، دار المسيرة،، 2010.
2. بن عبد المجيد عودة، أحمد عودة. بن عبد الرحمن القاضي، منصور. **الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، الطبعة الثالثة، مكتبة الفلاح للنشر والتوزيع، 2014.
3. بوعظم،كمال. **الإحصاء الاستدلالي**، دار زهران: عمان، 2009.
4. جزماتيي، سامح. **الاحتمالات والإحصاء**، دمشق: مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب، 1989.
5. د، ليونارد. ج كازمير. ترجمة مصطفى جلال مصطفى، **الإحصاء التجاري**، مصر: الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، 2004.
6. سعد جلال، أحمد. **مبادئ الإحصاء النفسي–تطبيقات وتدرسيبات عملية على برنامج spss**، القاهرة: الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، 2008.
7. شاكر مصلح، الحمدي. **الإحصاء وتصميم الاختبارات**، الأردن: دار أسامة للنشر والتوزيع، 2011.
8. الشيخ، ساوس. **مبادئ الإحصاء الاستدلالي دروس وتمارين**، الجزائر: منشورات دار الخلدونية،2018.
9. صبحي أبو صالح، محمد. **الطرق الإحصائية**، عمان– الأردن: دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، 2009.
10. صبحي أبو صالح، محمد. محمد عوض، عدنان. **مقدمة في الإحصاء**، الأردن: دار المسيرة، 2005.
11. طعمة،حسن ياسين. حسين، حنوش إيمان. **طرق الإحصاء الوصفي**، الطبعة الأولى، عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع، 2009.
12. عوض، عدنان. **الإحصاء التطبيقي**، مصر: الشركة العربية المتحدة بالتعاون مع جامعة القدس المفتوحة، 2009.
13. فلاح المنيزل، عبد الله. **الإحصاء الاستدلالي وتطبيقاته في الحاسوب باستخدام الرزم الإحصائية**، الأردن: اثراء للنشر والتوزيع، 2008.
14. كانافوس، جورج . ميلر، دون. (ترجمة سلطان محمد عبد المجيد، محمد توفيق البلقيني)، **الإحصاء للتجاريين مدخل حديث**، المملكة العربية السعودية: دار المريخ، الرياض، 2004.
15. كمال عوض، مراد. **أساسيات الإحصاء**، الطبعة الأولى، عمان: دار البداية ناشرون وموزعون، 2009.
16. محمد طشطوش، سليمان. أساسيات **الإحصاء الرياضي**، الأردن: دار اليازوري دروب للنشر، حمادة للدراسات الجامعية، 2012.
17. مصطفى الأشقر، أحمد. **مقدمة في الإحصاء مفاهيم وطرائق**، عمان: دار الثقافة للنشر والتوزيع، 2009.

18.ياسين طعمة ، حسين. **أساليب الإحصاء التطبيقي**، الأردن: د ا ر الصفاء، 2010.

19.ياسين طعمة، حسن. حسين حنوش، إيمان. **طرق الإحصاء الوصفي**، عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع، 2009.

المراجع باللغة الأجنبية:

1. Agresti, A. & Finlay, B. **Statistical Methods for the Social Sciences,** 3th Edition., Prentice Hall, 1997.
2. Boulay Jean, Pierre. **Staistique mathématique ellipses**, paris : 2010.
3. Francis, Bismans. **Probabilités & statistique inférentielle, prélude à l'économétrie**, édition Ellipses., 2016.
4. -**Introduction to Statistics**, article available at: https://egyankosh.ac.in/bitstream/23456789/23443/1/Unit-1.pdf, 19/01/2022, 12:55.
5. Portela, Philippe . « **Importance des statistiques pour l'exploration de données et la science des données** », August 2017

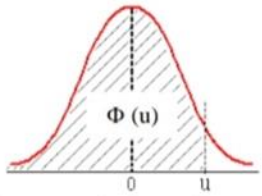
الملاحــــق

الملحق رقم (01): جداول التوزيع الطبيعي.

UFR DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION — UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2 — UNIVERSITÉ DE LYON

Table de Loi Normale

Fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite : $U \rightarrow N(0\,.\,1)$.
Probabilité de trouver une valeur inférieure à u.
$\Phi(u) = P(U \leq u)$; $\Phi(-u) = P(U \leq -u) = 1 - \Phi(u)$



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	**0.89617**	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965

Exemple : $\Phi(1.26) = P(U \leq 1.26) = 0.89617 = 89.62\%$

UFR de sciences économiques et de gestion

Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

Fractiles de la Loi Normale : U → N(0 , 1)

Si la probabilité $P < 0.5$ lire la table de la colonne de gauche et ligne supérieure. Le fractile est négatif.

P	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.01	
0	infini	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	**0.99**
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0748	2.0537	**0.98**
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957	1.8808	**0.97**
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624	1.7507	**0.96**
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	**0.95**
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632	1.5548	**0.94**
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833	1.4758	**0.93**
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118	1.4051	**0.92**
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469	1.3408	**0.91**
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	**0.90**
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	**0.89**
0.11	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800	1.1750	**0.88**
0.12	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	**0.87**
0.13	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	**0.86**
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0451	1.0407	1.0364	**0.85**
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	**0.84**
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	**0.83**
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	**0.82**
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	**0.81**
0.19	0.8779	0.8742	0.8706	0.8669	0.8632	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	**0.80**
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	**0.79**
0.21	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	**0.78**
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	**0.77**
0.23	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	**0.76**
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	**0.75**
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464	0.6433	**0.74**
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	**0.73**
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	**0.72**
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	**0.71**
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	**0.70**
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987	0.4958	**0.69**
0.31	0.4958	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	**0.68**
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	**0.67**
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	**0.66**
0.34	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880	0.3853	**0.65**
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	**0.64**
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	**0.3425**	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	**0.63**
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	**0.62**
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	**0.61**
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	**0.60**
0.40	0.2533	0.2508	**0.2482**	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	**0.59**
0.41	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045	0.2019	**0.58**
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	**0.57**
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535	0.1510	**0.56**
0.44	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	**0.55**
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	**0.54**
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	**0.53**
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	**0.52**
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	**0.51**
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	**0.50**
	0.01	**0.009**	**0.008**	**0.007**	**0.006**	**0.005**	**0.004**	**0.003**	**0.002**	**0.001**	**0**	**P**

Si la probabilité $P > 0.5$, lire la table de la colonne de droite et ligne inférieure. Le fractile est positif.

Exemples : $\Phi(u) = P(U \leq u) = P = 0.6340 \Rightarrow u = 0.3425$; $\Phi(u) = P(U \leq u) = P = 0.4020 \Rightarrow u = -0.2482$

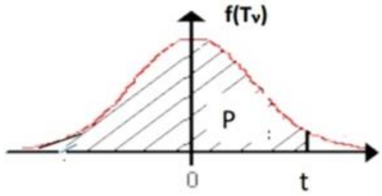
الملحق رقم (02): جداول توزيع ستيودنت.

UFR DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION — UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2 — UNIVERSITÉ DE LYON

Table de la Loi de Student

Fractiles de la loi de Student à ν degrés de liberté. Probabilité P de trouver une valeur inférieure ou égale à t

$P = F(t) = P(T_\nu \le t)$



ν \ P	0,9250	0,9300	0,9350	0,9400	0,9450	0,9500	0,9550	0,9600	0,9650	0,9700	0,9750	0,9900	0,9950
1	4,1653	4,4737	4,8288	5,2422	5,7297	6,3138	7,0264	7,9158	9,0579	10,5789	12,7062	31,8205	63,6567
2	2,2819	2,3834	2,4954	2,6202	2,7604	2,9200	3,1040	3,3198	3,5782	3,8964	4,3027	6,9646	9,9248
3	1,9243	1,9950	2,0719	2,1562	2,2494	2,3534	2,4708	2,6054	2,7626	2,9505	3,1824	4,5407	5,8409
4	1,7782	1,8375	1,9016	1,9712	2,0475	2,1318	2,2261	2,3329	2,4559	2,6008	2,7764	3,7469	4,6041
5	1,6994	1,7529	1,8104	1,8727	1,9405	2,0150	2,0978	2,1910	2,2974	2,4216	2,5706	3,3649	4,0321
6	1,6502	1,7002	1,7538	1,8117	1,8744	1,9432	2,0192	2,1043	2,2011	2,3133	2,4469	3,1427	3,7074
7	1,6166	1,6643	1,7153	1,7702	1,8297	1,8946	1,9662	2,0460	2,1365	2,2409	2,3646	2,9980	3,4995
8	1,5922	1,6383	1,6874	1,7402	1,7973	1,8595	1,9280	2,0042	2,0902	2,1892	2,3060	2,8965	3,3554
9	1,5737	1,6185	1,6663	1,7176	1,7729	1,8331	1,8992	1,9727	2,0554	2,1504	2,2622	2,8214	3,2498
10	1,5592	1,6031	1,6498	1,6998	1,7538	1,8125	1,8768	1,9481	2,0283	2,1202	**2,2281**	2,7638	3,1693
11	1,5476	1,5906	1,6365	1,6856	1,7385	1,7959	1,8588	1,9284	2,0067	2,0961	2,2010	2,7181	3,1058
12	1,5380	1,5804	1,6256	1,6739	1,7259	1,7823	1,8440	1,9123	1,9889	2,0764	2,1788	2,6810	3,0545
13	1,5299	1,5718	1,6164	1,6641	1,7154	1,7709	1,8317	1,8989	1,9742	2,0600	2,1604	2,6503	3,0123
14	1,5231	1,5646	1,6087	1,6558	1,7064	1,7613	1,8213	1,8875	1,9617	2,0462	2,1448	2,6245	2,9768
15	1,5172	1,5583	1,6020	1,6487	1,6988	1,7531	1,8123	1,8777	1,9509	2,0343	2,1314	2,6025	2,9467
16	1,5121	1,5529	1,5962	1,6425	1,6921	1,7459	1,8046	1,8693	1,9417	2,0240	2,1199	2,5835	2,9208
17	1,5077	1,5482	1,5911	1,6370	1,6863	1,7396	1,7978	1,8619	1,9335	2,0150	2,1098	2,5669	2,8982
18	1,5037	1,5439	1,5867	1,6322	1,6812	1,7341	1,7918	1,8553	1,9264	2,0071	2,1009	2,5524	2,8784
19	1,5002	1,5402	1,5827	1,6280	1,6766	1,7291	1,7864	1,8495	1,9200	2,0000	2,0930	2,5395	2,8609
20	1,4970	1,5369	1,5791	1,6242	1,6725	1,7247	1,7816	1,8443	1,9143	1,9937	2,0860	2,5280	2,8453
21	1,4942	1,5338	1,5759	1,6207	1,6688	1,7207	1,7773	1,8397	1,9092	1,9880	2,0796	2,5176	2,8314
22	1,4916	1,5311	1,5730	1,6176	1,6655	1,7171	1,7734	1,8354	1,9045	1,9829	2,0739	2,5083	2,8188
23	1,4893	1,5286	1,5703	1,6148	1,6624	1,7139	1,7699	1,8316	1,9003	1,9782	2,0687	2,4999	2,8073
24	1,4871	1,5263	1,5679	1,6122	1,6596	1,7109	1,7667	1,8281	1,8965	1,9740	2,0639	2,4922	2,7969
25	1,4852	1,5242	1,5657	1,6098	1,6571	1,7081	1,7637	1,8248	1,8929	1,9701	2,0595	2,4851	2,7874
26	1,4834	1,5223	1,5636	1,6076	1,6547	1,7056	1,7610	1,8219	1,8897	1,9665	2,0555	2,4786	2,7787
27	1,4817	1,5205	1,5617	1,6056	1,6526	1,7033	1,7585	1,8191	1,8867	1,9632	2,0518	2,4727	2,7707
28	1,4801	1,5189	1,5600	1,6037	1,6506	1,7011	1,7561	1,8166	1,8839	1,9601	2,0484	2,4671	2,7633
29	1,4787	1,5174	1,5583	1,6020	1,6487	1,6991	1,7540	1,8142	1,8813	1,9573	2,0452	2,4620	2,7564
30	1,4774	1,5159	1,5568	1,6004	1,6470	1,6973	1,7520	1,8120	1,8789	1,9546	2,0423	2,4573	2,7500
50	1,4620	1,4996	1,5394	1,5818	1,6271	1,6759	1,7289	1,7870	1,8516	1,9244	2,0086	2,4033	2,6778
60	1,4582	1,4956	1,5352	1,5772	1,6222	1,6706	1,7232	1,7808	1,8448	1,9170	2,0003	2,3901	2,6603
70	1,4555	1,4927	1,5321	1,5740	1,6187	1,6669	1,7192	1,7765	1,8401	1,9118	1,9944	2,3808	2,6479
100	1,4507	1,4876	1,5267	1,5682	1,6125	1,6602	1,7120	1,7687	1,8315	1,9024	1,9840	2,3642	2,6259
5000	1,4398	1,4760	1,5144	1,5550	1,5985	1,6452	1,6957	1,7510	1,8123	1,8812	**1,9604**	2,3271	2,5768

Exemples : $\nu = 10$ d.d.l. $P(T_{10} \le t) = 0.975 \Rightarrow t = +2.2281$ et $P(T_{10} \le -t) = 0.025 \Rightarrow t = -2.2281$

Approximation par une loi normale : pour $n = \nu \approx 5000$ d.l.l. on a $P(T_{5000} \le t) = 0.975 \Rightarrow t = +1.9604$

UFR de sciences économiques et de gestion

Université Lumière Lyon 2

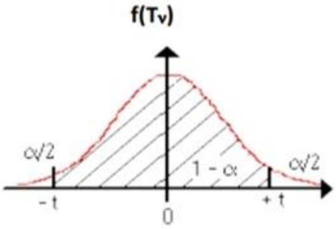
Université de Lyon

Table de la Loi de Student Symétrique

Fractiles de la loi de Student à ν degrés de liberté : valeur du fractile t ayant la probabilité α d'être dépassée en valeur absolue :

$P(|T_\nu| > t) = 1 - P(|T_\nu| \leq t) = \alpha$

$P(|T_\nu| \leq t) = P(-t \leq T_\nu \leq t) = 1 - \alpha$.



ν \ α	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.706	31.821	63.656	127.32	636.58
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.92	4.3027	6.9645	9.925	14.089	31.6
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408	7.4532	12.924
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.941	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041	5.5975	8.6101
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.015	2.5706	3.3649	4.0321	4.7733	6.8685
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	4.3168	5.9587
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.896	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995	4.0294	5.4081
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.306	2.8965	3.3554	3.8325	5.0414
9	0.1293	0.261	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.383	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6896	4.7809
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	**1.8125**	**2.2281**	2.7638	3.1693	3.5814	4.5868
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.201	2.7181	3.1058	3.4966	4.4369
12	0.1283	0.259	0.3947	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.681	3.0545	3.4284	4.3178
13	0.1281	0.2586	0.394	0.5375	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.3725	4.2209
14	0.128	0.2582	0.3933	0.5366	0.6924	0.8681	1.0763	1.345	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.3257	4.1403
15	0.1278	0.2579	0.3928	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467	3.286	4.0728
16	0.1277	0.2576	0.3923	0.535	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.252	4.0149
17	0.1276	0.2573	0.3919	0.5344	0.6892	0.8633	1.069	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.2224	3.9651
18	0.1274	0.2571	0.3915	0.5338	0.6884	0.862	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.1966	3.9217
19	0.1274	0.2569	0.3912	0.5333	0.6876	0.861	1.0655	1.3277	1.7291	2.093	2.5395	2.8609	3.1737	3.8833
20	0.1273	0.2567	0.3909	0.5329	0.687	0.86	1.064	1.3253	1.7247	2.086	2.528	2.8453	3.1534	3.8496
21	0.1272	0.2566	0.3906	0.5325	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.1352	3.8193
22	0.1271	0.2564	0.3904	0.5321	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.1188	3.7922
23	0.1271	0.2563	0.3902	0.5317	0.6853	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.104	3.7676
24	0.127	0.2562	0.39	0.5314	0.6848	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.797	3.0905	3.7454
25	0.1269	0.2561	0.3898	0.5312	0.6844	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.0782	3.7251
26	0.1269	0.256	0.3896	0.5309	0.684	0.8557	1.0575	1.315	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.0669	3.7067
27	0.1268	0.2559	0.3894	0.5306	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.0565	3.6895
28	0.1268	0.2558	0.3893	0.5304	0.6834	0.8546	1.056	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.047	3.6739
29	0.1268	0.2557	0.3892	0.5302	0.683	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.462	2.7564	3.038	3.6595
30	0.1267	0.2556	0.389	0.53	0.6828	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.75	3.0298	3.646
50	0.1263	0.2547	0.3875	0.5278	0.6794	0.8489	1.0473	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	2.937	3.496
60	0.1262	0.2545	0.3872	0.5272	0.6786	0.8477	1.0455	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	2.9146	3.4602
70	0.1261	0.2543	0.3869	0.5268	0.678	0.8468	1.0442	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479	2.8987	3.435
80	0.1261	0.2542	0.3867	0.5265	0.6776	0.8461	1.0432	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	2.887	3.4164
infini (loi normale)	0.1257	0.2533	0.3853	0.5244	0.6744	0.8416	1.0364	1.2816	1.6449	**1.96**	2.3264	2.5759	2.8072	3.2908

Exemples : ν = 10 d.d.l. $P(|T_{10}| \leq t) = P(-t \leq T_{10} \leq t) = 0.95 \Rightarrow t = \pm 2.2281$

$P(T_{10} \leq t) = 0.95 \Rightarrow t = +1.8125$

الملحق رقم (03): جدول توزيع كاي–مربع.

UFR DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION

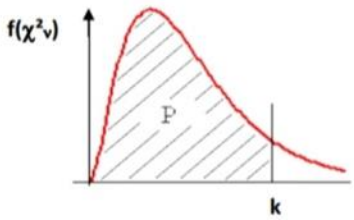
UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2

UNIVERSITÉ DE LYON

Table de la loi du χ^2_ν

Fractiles F_P de la loi de khi-deux à ν degrés de liberté

$P = F(k) = P(\chi^2_\nu \le k)$



ν \ P	0.010	0.020	0.025	0.050	0.100	0.150	0.200	0.800	0.900	0.950	0.975	0.980	0.990
1	0.000	0.001	0.001	0.004	0.016	0.036	0.064	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.64
2	0.020	0.040	0.051	0.103	0.211	0.325	0.446	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21
3	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	0.798	1.005	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.35
4	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.366	1.649	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.28
5	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	1.994	2.343	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.09
6	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	2.661	3.070	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.81
7	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.358	3.822	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.48
8	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.078	4.594	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.09
9	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	4.817	5.380	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.67
10	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	5.570	6.179	13.442	15.987	**18.307**	20.483	21.161	23.21
11	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.336	6.989	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.73
12	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.114	7.807	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.22
13	4.107	4.765	5.009	5.892	7.042	7.901	8.634	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.69
14	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	8.696	9.467	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.14
15	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	9.499	10.307	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.58
16	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	10.309	11.152	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.00
17	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	11.125	12.002	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.41
18	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	11.946	12.857	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.81
19	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	12.773	13.716	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.19
20	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	13.604	14.578	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.57
21	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	14.439	15.445	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.93
22	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	15.279	16.314	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.29
23	10.196	11.293	11.689	13.091	14.848	16.122	17.187	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.64
24	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	16.969	18.062	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.98
25	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	17.818	18.940	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.31
26	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	18.671	19.820	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.64
27	12.879	14.125	14.573	16.151	18.114	19.527	20.703	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.96
28	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	20.386	21.588	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.28
29	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	21.247	22.475	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.59
30	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	22.110	23.364	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.89
40	22.164	23.838	24.433	26.509	29.051	30.856	32.345	47.269	51.805	55.758	59.342	60.436	63.69
50	29.707	31.664	32.357	34.764	37.689	39.754	41.449	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.15
60	37.485	39.699	40.482	43.188	46.459	48.759	50.641	68.972	74.397	79.082	83.298	84.580	88.38
70	45.442	47.893	48.758	51.739	55.329	57.844	59.898	79.715	85.527	90.531	95.023	96.388	100.42
80	53.540	56.213	57.153	60.391	64.278	66.994	69.207	90.405	96.578	101.88	106.63	108.07	112.33

Exemple : $\nu = 10$ d.d.l. $P = P(\chi^2_{10} \le F_P) = 0.95 \Rightarrow F_P = 18.307$

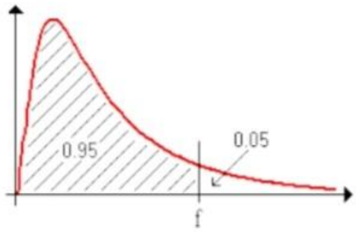
Approximation : Pour $\nu > 100$ d.l.l. $\chi^2(\nu) \cong N(\nu;\sqrt{2\nu})$ ou $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1} \cong N(0.1)$

الملحق رقم (04): جداول توزيع فيشر.

UFR de sciences économiques et de gestion — Université Lumière Lyon 2 — Université de Lyon

Table : Loi de Fisher-Snedecor

$f(F_{(\nu_1\,;\,\nu_2)})$



Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor $F_{(\nu_1\,;\,\nu_2)}$ ayant la probabilité 0.05 d'être dépassée.

ν_1 : degrés de liberté du numérateur

ν_2 : degrés de liberté du dénominateur

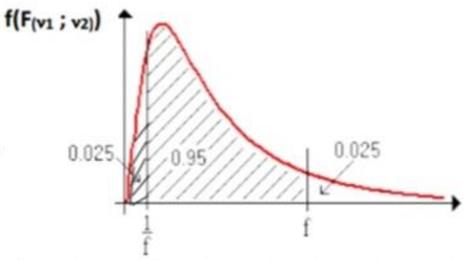
$F(f) = P\,(F_{(\nu_1\,.\,\nu_2)} \leq f) = 95\%$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98	243.90	244.69	245.36	245.95	246.47
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	**4.74**	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99
10	4.96	4.10	3.71	3.48	**3.33**	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.60
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.51
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.16
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20	2.18	2.15	2.13	2.11
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.07
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07	2.05
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13	2.10	2.08	2.06	2.04
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.08	2.05	2.03	2.01
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.99
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.10	2.07	2.04	2.01	1.99	1.97
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	2.02	1.99	1.97	1.95
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.95	1.93
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02	1.99	1.96	1.94	1.92
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.90

Exemple : $\nu_1 =$ 5 d.d.l. et $\nu_2 =$ 10 d.d.l. $P\,(F_{5\,.\,10} \leq f) = 0.95 \Rightarrow f = 3.33$

UFR de sciences économiques et de gestion
Université Lumière Lyon 2
Université de Lyon

Table : Loi de Fisher-Snedecor



Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor

$F_{(\nu 1\,;\,\nu 2)}$ ayant la probabilité 0.025 d'être dépassée.

ν_1 : degrés de liberté du numérateur

ν_2 : degrés de liberté du dénominateur

$F(f) = P\,(\,F_{(\nu 1\,.\,\nu 2)} \le f\,) = 97.50\%$

ν_2 ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.6	963.3	968.6	973.0	976.7	979.8	982.5	984.9	986.9
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.41	39.42	39.43	39.43	39.44
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34	14.30	14.28	14.25	14.23
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	8.72	8.68	8.66	8.63
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	**6.62**	6.57	6.52	6.49	6.46	6.43	6.40
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.33	5.30	5.27	5.24
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.63	4.60	4.57	4.54
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.16	4.13	4.10	4.08
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.83	3.80	3.77	3.74
10	6.94	5.46	4.83	4.47	**4.24**	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.58	3.55	3.52	3.50
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.39	3.36	3.33	3.30
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.24	3.21	3.18	3.15
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	3.01	2.98	2.95	2.92
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.92	2.89	2.86	2.84
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89	2.85	2.82	2.79	2.76
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82	2.79	2.75	2.72	2.70
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73	2.70	2.67	2.64
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72	2.68	2.65	2.62	2.59
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.64	2.60	2.57	2.55
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64	2.60	2.56	2.53	2.51
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53	2.50	2.47
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57	2.53	2.50	2.47	2.44
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.50	2.47	2.44	2.41
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.48	2.44	2.41	2.38
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42	2.39	2.36
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.51	2.47	2.43	2.39	2.36	2.34
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.37	2.34	2.32
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.48	2.43	2.39	2.36	2.32	2.30
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.28

Exemples : $\nu_1 = 5$ d.d.l. et $\nu_2 = 10$ d.d.l. $P\,(F_{97.5\%\,;\,5\,.\,10} \le f\,) = 0.975 \Rightarrow f = 4.24$

$P\,(\,F_{2.5\%\,;\,5\,.\,10} \le f'\,) = 0.025$

$P\,(F_{97.5\%\,;\,10\,.\,5} \le f\,) = 0.975 \Rightarrow f = 6.62 \qquad \Rightarrow f' = 1/f = 1/6.62 = 0.151$

UFR DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION

UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2

UNIVERSITÉ DE LYON

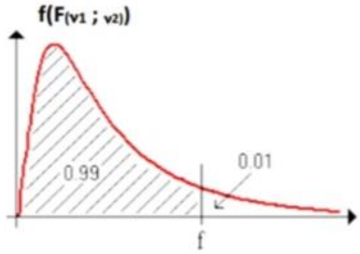


Table : Loi de Fisher-Snedecor

Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor $F_{(v_1 ; v_2)}$ ayant la probabilité 0.01 d'être dépassée.

v_1 : degrés de liberté du numérateur

v_2 : degrés de liberté du dénominateur

$F(f) = P\ (\ F_{(v1\ .\ v2)}\ \leq\ f\ ) = 99\%$

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4052	4999	5403	5624	5763	5858	5928	5980	6022	6055	6083	6106	6125	6143	6156
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42	99.42	99.43	99.43
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.98	26.92	26.87
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37	14.31	14.25	14.20
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89	9.82	9.77	9.72
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66	7.60	7.56
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41	6.36	6.31
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61	5.56	5.52
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05	5.01	4.96
10	10.04	7.56	6.55	5.99	**5.64**	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65	4.60	4.56
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.34	4.29	4.25
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.10	4.05	4.01
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.91	3.86	3.82
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.75	3.70	3.66
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.61	3.56	3.52
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.50	3.45	3.41
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.40	3.35	3.31
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.32	3.27	3.23
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.24	3.19	3.15
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.09
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.12	3.07	3.03
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.07	3.02	2.98
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	3.02	2.97	2.93
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.98	2.93	2.89
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99	2.94	2.89	2.85
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.90	2.86	2.81
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.99	2.93	2.87	2.82	2.78
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.84	2.79	2.75
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79	2.74	2.70
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.61	2.56	2.52

Exemple : $v_1 =$ 5 d.d.l. et $v_2 =$ 10 d.d.l. $P\ (\ F_{5\ .\ 10}\ \leq\ f\ )\ =\ 0.99\ \Rightarrow\ f = 5.64$