Ministère de l'Ens. Supér. et de la Rech. Scient.
Université Abbes Laghrour – Khenchela
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Science de la Matière
$2^{ème}$ Année Physique
Année Universitaire: 20..../20....

Corrigé d'Examen Final
– Mécanique Quantique I –

Exercice 1: *(03 points)*

La loi de Planck,

$$U(T,\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1},$$

devient dans le domaine:

1. Infrarouge : $\nu \ll$
$$\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right) \simeq 1 + \frac{h\nu}{k_BT}, \qquad \square \ 0.50\,pt$$
$$\begin{aligned} U(T,\nu) &\simeq \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{1+\frac{h\nu}{k_BT}-1} \\ &= \frac{8\pi k_BT}{c^3}\nu^2. \qquad \square \ 0.50\,pt \end{aligned}$$
C'est la loi de Rayleigh.

2. Visible : $\nu \gg$
$$\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right) - 1 \simeq \exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right), \qquad \square \ 0.50\,pt$$
$$U(T,\nu) \simeq \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\exp\left(-\frac{h\nu}{k_BT}\right). \qquad \square \ 0.50\,pt$$
C'est la forme empirique de Wien.

3. En intégrant sur toutes les fréquences, la densité d'énergie de rayonnement pour une température T est égale à
$$\begin{aligned} U(T) &= \int_0^{+\infty} U(T,\nu)\,d\nu \\ &= \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^{+\infty}\frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1}, \end{aligned}$$
$\square$ 0.50 *pt*

en posant
$$x = \frac{h\nu}{k_BT},$$
soit
$$dx = \frac{h}{k_BT}d\nu \rightarrow d\nu = \frac{k_BT}{h}dx,$$
$$\nu^3 = \left(\frac{k_BT}{h}\right)^3 x^3,$$
la densité d'énergie s'écrit
$$U(T) = \sigma T^4,$$
avec
$$\sigma = \frac{8\pi k_B^4}{c^3h^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}. \qquad \square \ 0.50\,pt$$
C'est la loi de Stefan.

Exercice 2: *(02 points)*

$$E_{\text{inc}}^{\gamma} = W_{\text{ext}} + E_c, \qquad \square \ 0.50\,pt$$

avec
$$E_{\text{inc}}^{\gamma} = h\nu_{\text{inc}},$$
oú
$$\nu_{\text{inc}} = \frac{c}{\lambda_{\text{inc}}}.$$

1. Fréquence minimum du rayonnement pour qu'il y ait une émission d'électrons:
$$E_c = 0 : \nu_{\text{inc}} \rightarrow \nu_{\text{min}},$$
$$h\nu_{\text{min}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow \nu_{\text{min}} = W_{\text{ext}}/h. \qquad \square \ 1.00\,pt$$
La longueur d'onde seuil:
$$\nu_{\text{min}} = \frac{c}{\lambda_{\text{seuil}}} \Rightarrow \lambda_{\text{seuil}} = \frac{hc}{W_{\text{ext}}}.$$

- **A.N.**
$$\begin{aligned} \nu_{\text{min}} &= \frac{2\times 1.602\times 10^{-19}\,\text{J}}{6.626\times 10^{-34}\,\text{J s}} \\ &= 48.355\times 10^{13}\,\text{Hz}, \qquad \square \ 0.50\,pt \end{aligned}$$
sachant que
$$1\,\text{eV} = 1.602\times 10^{-19}\,\text{J}.$$

2. Energie cinétique maximum des photons-électrons:
$$h\nu_{\text{inc}} = W_{\text{ext}} + E_c^{\text{max}},$$
$$E_c^{\text{max}} = h\nu_{\text{inc}} - W_{\text{ext}}. \qquad \square \ 0.50\,pt$$

- **A.N.**

$$\begin{aligned} E_c^{\max} &= 6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\times 6\times10^{14}\,\mathrm{Hz} \\ &\quad -2\times1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J} \\ &= 7.716\times10^{-20}\,\mathrm{J} \\ &= 0.481\,65\,\mathrm{eV}. \qquad \square\ 0.50\,pt \end{aligned}$$

Exercice 3: *(09 points)*

1. La longueur d'onde observée des rayons diffusés est

$$\lambda = \delta\lambda + \lambda_0,$$

sachant que le décalage en longueur d'onde est donné par

$$\delta\lambda = \lambda_c\left(1-\cos\theta\right), \qquad \square\ 0.50\,pt$$

où la longueur d'onde de Compton est définie par

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}.$$

- **A.N.**

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \frac{6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{9.1094\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\times2.998\times10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \\ &= 0.0243\,\text{Å}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.0243\,\text{Å}\times(1-\cos37.5\,^{\circ})+0.095\times10^{-10}\,\mathrm{m} \\ &= 0.100\,\text{Å}. \qquad \square\ 0.50\,pt \end{aligned}$$

2. Les énergies des photons incidents et diffusés sont définies par

$$E_0^\gamma = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \qquad E^\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda}. \qquad \square\ 0.50\,pt$$

Les impulsions des photons incidents et diffusés sont définies par

$$p_0^\gamma = \frac{E_0^\gamma}{c} = \frac{h}{\lambda_0}, \qquad p^\gamma = \frac{E^\gamma}{c} = \frac{h}{\lambda}. \qquad \square\ 0.50\,pt$$

- **A.N.**

$$\begin{aligned} E_0^\gamma &= \frac{6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\times2.998\times10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{0.095\times10^{-10}\,\mathrm{m}} \\ &= 20.910\times10^{-15}\,\mathrm{J}, \qquad \square\ 0.25\,pt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^\gamma &= \frac{6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\times2.998\times10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{0.100\times10^{-10}\,\mathrm{m}} \\ &= 19.865\times10^{-15}\,\mathrm{J}, \qquad \square\ 0.25\,pt \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} E_0^\gamma &= 20.910\times10^{-15}\,\mathrm{J}\times\frac{1\,\mathrm{eV}}{1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}} \\ &= 0.130\,5\,\mathrm{MeV}, \qquad \square\ 0.25\,pt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^\gamma &= 19.865\times10^{-15}\,\mathrm{J}\times\frac{1\,\mathrm{eV}}{1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}} \\ &= 0.124\,\mathrm{MeV}, \qquad \square\ 0.25\,pt \end{aligned}$$

sachant que

$$1\,\mathrm{eV} = 1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J},$$

donc

$$p_0^\gamma = 0.130\,5\,\mathrm{MeV}/c, \qquad p^\gamma = 0.124\,\mathrm{MeV}/c,,$$

ou bien

$$\begin{aligned} p_0^\gamma &= \frac{20.910\times10^{-15}\,\mathrm{J}}{2.998\times10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \\ &= 6.974\,6\times10^{-23}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}, \qquad \square\ 0.25\,pt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^\gamma &= \frac{19.865\times10^{-15}\,\mathrm{J}}{2.998\times10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \\ &= 6.626\,1\times10^{-23}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}, \qquad \square\ 0.25\,pt \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{J} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}.$$

3. Energie de l'électron de recul:

A partir de la loi de conservation de l'énergie de système

$$E_0^\gamma + E_0^e = E^\gamma + E^e, \qquad \square\ 0.50\,pt$$

ou bien

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2, \qquad \square\ 0.50\,pt$$

l'énergie cinétique acquise par l'électron de recul s'écrit sous la forme

$$E^e_{\text{recul}} = E^e - E_0^e = E_0^\gamma - E^\gamma,$$

$$E^e_{\text{recul}} = (m-m_0)c^2 = h\left(\nu_0-\nu\right), \qquad \square\ 1.00\,pt$$

ce qui devient, en exprimant la conservation de l'énergie

$$E^e_{\text{recul}} = E_0^\gamma - E^\gamma = \frac{E_0^\gamma}{1+\dfrac{m_0c^2}{E_0^\gamma}}.$$

Ce qui permis d'exprimer la masse à partir de l'énergie de recul de l'électron

$$m = m_0 + \frac{E^e_{\text{recul}}}{c^2}. \qquad \square\ 0.50\,pt$$

- **A.N.**

$$\begin{aligned} E^e_{\text{recul}} &= 0.130\,5\,\text{MeV} - 0.124\,0\,\text{MeV} \\ &= 6500\,\text{eV}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} E^e_{\text{recul}} &= 6500 \times 1.602 \times 10^{-19}\,\text{J} \\ &= 10.413 \times 10^{-16}\,\text{J}. \end{aligned}$$

En partant de la masse relativiste de l'électron

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

on déduit

$$m^2 v^2 = \left(m^2 - m_0^2\right) c^2, \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

ou bien

$$p_e^2 = (m + m_0)\,(m - m_0)\,c^2, \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

et comme

$$m + m_0 = 2m_0 + m - m_0,$$

on trouve

$$p_e^2 = (2m_0 + m - m_0)\,(m - m_0)\,c^2,$$

soit encore

$$p_e^2 = \left(2m_0 + \frac{E^e_{\text{recul}}}{c^2}\right) E^e_{\text{recul}}, \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

on trouve finalememt l'impulsion en fonction de l'énergie de recul de l'électron

$$p_e = \sqrt{\left(2m_0 + \frac{E^e_{\text{recul}}}{c^2}\right) E^e_{\text{recul}}}. \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

- **A.N.**

$$\begin{aligned} p_e &= \sqrt{2 \times 9.1094 \times 10^{-31}\,\text{kg} + \frac{10.413 \times 10^{-16}\,\text{J}}{(2.998 \times 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1})^2}} \\ &\quad \times \sqrt{10.413 \times 10^{-16}\,\text{J}}, \\ &= 43.7 \times 10^{-24}\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}, \end{aligned}$$

sachant que

$$\text{J} = \text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-2}.$$

La vitesse de l'électron de recul s'écrit, en fonction de la masse de l'électron,

$$v = \frac{p_e}{m},$$

mais

$$p_e^2 = \left(m^2 - m_0^2\right) c^2 \Leftrightarrow m^2 c^2 = m_0^2 c^2 + p_e^2,$$

soit

$$m^2 = m_0^2 + \frac{p_e^2}{c^2},$$

donc on obtient

$$v = \frac{p_e}{\sqrt{m_0^2 + \frac{p_e^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_0^2}{p_e^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

$\square$ 0.50 *pt*

- **A.N.**

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{9.1094 \times 10^{-31}\,\text{kg}}{4.535\,5 \times 10^{-23}\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}}\right)^2 + \frac{1}{(2.998 \times 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1})^2}}} \\ &= 4.911\,6 \times 10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 49\,116\,\frac{\text{km}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

En partant de la projection suivant x de la quantité de mouvement

$$mv \sin\varphi = -\frac{h\nu}{c} \sin\theta, \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

on a

$$p_e \sin\varphi = -p^\gamma \sin\theta,$$

d'où

$$\varphi = \arcsin\left(-\frac{p^\gamma}{p_e} \sin\theta\right). \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

- **A.N.**

$$\begin{aligned} \varphi &= \arcsin\left(-\frac{66.26\,1 \times 10^{-24}}{45.35\,5 \times 10^{-24}} \sin 37.5\,^\circ\right) \\ &= -1.096\,0\,\text{rad}. \end{aligned}$$

Notant que

$$3.141\,6\,\text{rad} \rightarrow 180\,^\circ,$$

donc

$$\varphi \simeq -62.8\,^\circ.$$

Comme

$$\begin{aligned} 1\,^\circ &\rightarrow 60\,' \\ 0.8\,^\circ &\rightarrow 48\,' \end{aligned}$$

soit

$$\varphi \simeq -62\,^\circ 48\,'.$$

Exercice 4: *(06 points)*

1.

$$\begin{aligned}
[A, BC] &= A.BC - BC.A && \square \quad 0.50\,pt \\
&= ABC - BAC + BAC - BCA \\
& && \square \quad 0.50\,pt \\
&= [A, B]\, C + B\, [A, C]\,. && \square \quad 0.50\,pt
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
& [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] \\
= \; & A\, [B, C] - [B, C]\, A + B\, [C, A] \\
& - [C, A]\, B + C\, [A, B] - [A, B]\, C \\
& && \square \quad 0.50\,pt \\
= \; & A\, (BC - CB) - (BC - CB)\, A \\
& + B\, (CA - AC) - (CA - AC)\, B \\
& + C\, (AB - BA) - (AB - BA)\, C \\
& && \square \quad 0.50\,pt \\
= \; & ABC - ACB - BCA + CBA \\
& + BCA - BAC - CAB + ACB \\
& + CAB - CBA - ABC + BAC \\
= \; & 0. && \square \quad 0.50\,pt
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
[A, B]^{+} &= (AB - BA)^{+} && \square \quad 0.50\,pt \\
&= (AB)^{+} - (BA)^{+} && \square \quad 0.50\,pt \\
&= B^{+}A^{+} - A^{+}B^{+} && \square \quad 0.50\,pt \\
&= \left[B^{+}, A^{+}\right]. && \square \quad 0.50\,pt
\end{aligned}$$

– Fin –