الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY

Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Sur la stabilité exponentielle de certains systèmes différentiels non linéaires à retards variables dans le temps

Réalisé par : **AISSAOUI Iman**
BOUCHAREB Nour Elhouda

Dirigé par : **Dr.DERDOUKH .Assma**

Membres de jury :

Dr. SAHRAOUI.A **Président**
Dr. HAMDI. N **Examinateur**

2022-2023

Remerciement

A la fin de ce travail, nous tenons à remercier, en tout premier lieu, remercions le bon Dieu tout puissant de nous avoir accordé la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à notre encadreur de mémoire **Mme A.Derdoukh** que nous la remercions d'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé dans le but de mener à bien ce travail.

Nous voudrions également remercier les membres de notre jury **Mme N.Hamdi** Qui nous fait l'honneur de présider ce jury **M A.Sahraoui** pour avoir accepté d'être examinateurs de ce mémoire.

Nous adressons nos sincères remerciements à tous les professeurs, et toutes Les personnes qui par leurs paroles, leurs conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions et ont accepté à notre rencontrer et répondre à nos questions durant nos recherches.

Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation. De ce modeste travail

MERCI !

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mon exemple éternel, mon soutien moral et

source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours

sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis

⋆ à toi mon père ⋆

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts,

la flamme de mon cœur

⋆ ma vie et mon bonheur maman que j'adore. ⋆

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé,

qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont

accompagnaient durant mon chemin d'études supérieures

⋆ à mon frères et mes sœurs⋆

Et mes collègues d'étude. Sans oublier tous les

professeurs que ce soit du primaire du moyen du

secondaire ou de l'enseignement supérieur

Dédicace

Je dédie mon mémoire

⋆A ma chère mère

A mon chèr père

Qui n'ont jamais cessé de formuler des prièresà mon égaed,de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs

⋆ A mes sœurs Asma et Rahma.

A mon chér frére Issam. ⋆

Pour ses sontrens morals et leurs conseils prècieux tout au long de mes études.

A ma joie, aux deux petits oiseaux qui ont allumè notre monde

⋆ Ouais, Eline⋆

A ma chére binôme **⋆Bouchareb Nour Elhouda⋆**

Pour sa entente et sa synithie.

A ma famille, mes proches et à ceux qui mes donnent de

L'anour et de la vivacité.

Résumé

Notre thèse présente des études sur la stabilité exponentielle des régimes de retards non linéaires variant dans le temps. Il est divisé en trois chapitres.

Le premier chapitre rappelle les principaux concepts et théories utilisés dans ce travail.

La deuxième chapitre est consacrée à la présentation des matrices de Metzler et de leurs propriétés.

Dans le dernier chapitre, nous prouvons un critère pour la stabilité exponentielle de deux types de systèmes non linéaires variant dans le temps.

Abstract

Our thesis presents studies on the exponential stability of time-varying nonlinear delay regimes. It is divided into three chapters.

Chapter one provides a reminder of the main concepts and theories used in this work.

The second is devoted to the presentation of Metzler matrices and their properties.

In the last chapter we prove a criterion for the exponential stability of two types of time-varying nonlinear systems.

ملخص

تقدم أطروحتنا دراسات حول الاستقرار الأسي لأنظمة التأخير غير الخطية المتغيرة بمرور الوقت. وهي مقسمة إلى ثلاثة فصول.

يقدم الفصل الأول تذكيرًا بالمفاهيم والنظريات الرئيسية المستخدمة في هذا العمل.

والثاني مخصص لعرض مصفوفات ميتزلر وخصائصها.

في الفصل الأخير أثبتنا معيارًا للاستقرار الأسي لنوعين من الأنظمة غير الخطية المتغيرة بمرور الوقت.

Table des matières

Notation

Notation relatives aux ensembles :

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^n$: espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.

$\mathbb{R}_+$: ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

$\mathbb{R}^{n\times m}$: ensemble des matrices à n lignes et m colonne.

$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

$C = C([-h,0];\mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions continues de $[-h,0]$ dans $\mathbb{R}^n$.

$[a,b]$: intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.

$[a,b[$: intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.

$]a,b[$: intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.

$\underline{n}$: l'ensemble des entiers naturel de $\underline{n} := \{1,2,\ldots,n\}$.

$t \in \mathbb{R}_+$: variable temporelle.

Notation relatives aux vecteur :

x^T : transposé du vecteur x.

$\|x\|$: norme euclidienne de x.

$x = (x_1,\ldots,x_n)$: vecteur d'état instantané.

$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$: dérivée de la variable x par rapport au temps.

$|.|$: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.

$\|.\|$: norme sur $\mathbb{R}^n$.

Notation relatives aux matrices :

M : matrice de Metzler.

μ(M) : l'abscisse spectrale M.

(a_{ij}) : matrice dont le coefficient de la $i^{\text{éme}}$ ligne et $j^{\text{éme}}$ colonne est a_{ij}.

A^T : transposée de la matrice A.

A$\geq 0 (\leq 0)$: les entrées de la matrice A sont non négatifs (Non positifs).

$A > 0 (< 0)$: toutes les entrÈes de la matrice A sont de la matrice A sont positives (négatives).

$A < B$ (resp : $A > B$) : signifie que $A - B$ est une matrice définie négative (resp. definie positive).

$||A||$: norme euclidienne de la matrice A.

I_n : matrice identité de $R^{n \times n}$.

Introduction

Les systèmes différentiels à retard sont une classe de systèmes dynamiques qui intègrent des retards ou des décalages temporels dans leurs équations. Un système différentiel de retard consiste en un ensemble d'équations différentielles où les dérivées des variables dépendent non seulement de l'état actuel mais également des états passés avec des retards différents.

La présence de retards introduit des effets de mémoire, car le comportement actuel du système est influencé par ses états passés. Ces effets de mémoire rendent les systèmes différentiels à retard adaptés à la modélisation de phénomènes avec des interactions dépendant du temps ou des boucles de rétroaction, où la dynamique dépend de l'histoire du système.

L'analyse des systèmes différentiels à retard pose des défis en raison de l'espace d'état de dimension infinie résultant de l'inclusion des retards. Les méthodes analytiques traditionnelles utilisées pour les systèmes différentiels ordinaires ne sont souvent pas directement applicables aux systèmes différentiels à retard.

Des méthodes numériques, telles que des schémas de discrétisation et des solveurs d'équations différentielles à retard spécialisés, sont fréquemment employées pour approximer les solutions de systèmes différentiels à retard.

Les systèmes différentiels à retard trouvent des applications dans divers domaines, notamment la biologie, les neurosciences, la physique, la chimie, l'ingénierie et l'économie. Ils sont particulièrement utiles pour modéliser des systèmes avec des retards temporels, tels que la dynamique des populations, les réseaux de neurones, les réactions chimiques avec une cinétique retardée, les systèmes de contrôle avec des retards de rétroaction et les réseaux de communication avec des retards de propagation.

La compréhension et l'analyse des systèmes différentiels à retard nécessitent des techniques et des outils spécialisés qui tiennent compte de l'historique du système et des effets de mémoire. Les chercheurs continuent de développer des méthodes et des algorithmes pour relever les défis associés à ces systèmes et pour mieux comprendre leur dynamique complexe.

L'étude de la stabilité des systèmes différentiels à retard est un aspect important de l'analyse de leur comportement dynamique.

La stabilité d'un système à retard fait référence à la propriété selon laquelle de petites perturbations ou des perturbations autour d'un point d'équilibre ne croissent pas de manière non bornée au fil du temps. L'analyse de stabilité des systèmes différentiels vise à déterminer si les solutions du système restent bornées ou convergent vers un état stable à mesure que le temps progresse.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la stabilité exponentielle de certains systèmes différentiels non linéaires variant dans le temps à retard variant dans le temps. L'approche utilisée est basée sur la théorème de Perron-Frobenius et le principe de comparaison.

Le mémoire est organisé comme suit :

1-Le premier chapitre est consacré à des définitions et des résultats préliminaires et quelques théorèmes nécessaires.

2-Le deuxième chapitre est consacré à présenter les matrices de Metzler et leurs propriétés.

3-Le troisième chapitre présente brièvement l'existence et l'unicité des solutions des systèmes différentiels à retard, et une étude bien détaillée de la stabilité de deux types des systèmes différentiels non linéaire à retard bien spécifié, avec un exemple illustratif et quelques cas particuliers.

Chapitre 1

➢ Préliminaires

- ✓ **Généralitées sur les matrices**
- ✓ **Opérations sur les matrices**
- ✓ **Les inégalités entre les matrices**
- ✓ **Spectre des matrices**
- ✓ **Normes des matrices**

1

Préliminaires

1.1 Généralitées sur les matrices

Définition 1.1.1 *Soit m et n deux entiers positifs et soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, une matrice à m lignes et n colones est l'ensemble de $m \times n$ scalaires dits éléments de la matrices indexés par les élements du produit cartésien $I \times J$ avec $I = \{1, \dots, m\}$ et $J = \{1, \dots, n\}$ tel que :*

$$a_{ij} \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \quad \textit{notée} \quad \mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Les indices i et j sont dits, respectivement, ligne et colone de $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, en effet on peut interpréter le couple d'indices (i, j) comme les coordonnés de l'élément a_{ij} dans $\mathbb{K}$, et on represente la matrice a par :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- *$\mathbb{K}^m$ denote l'ensemble des vecteurs d'ordre m.*
- *$\mathbb{K}^{m \times n}$ l'ensemble de toutes les matrices d'ordre $m \times n$ avec des éléments dans $\mathbb{K}$.*

Définition 1.1.2 • *Une matrice A est dite carée si $n = m$.*

- *Une matrice* A *est dite diagonale si* A *est carée et* $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$, *et* $j \neq i$, *on a* $a_{ij} = 0$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

et notée par :

$$\mathrm{A} = \mathrm{diag}\left(\mathrm{a}_{11}, \mathrm{a}_{12}, \dots, \mathrm{a}_{\mathrm{nn}}\right).$$

- *Une matrice* A *est dite triangulaire inférieur si* A *est carée et* $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$, *et* $i < j$, *on a* $a_{ij} = 0$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Une matrice* A *est dite triangulaire supérieure si* A *est carée et* $\forall 1 \leq i, j \leq n$, *et* $i > j$, *on a* $a_{ij} = 0$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Définition 1.1.3 *La matrice tronsposée (ou la tronsposée) d'une matrice* $\mathrm{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *est la matrice notée par* $\mathrm{A}^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$, *obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de* A.

$$\textit{Si} \quad \mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \textit{alors} \quad \mathrm{A}^T = \left(a_{ji}\right)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$$

Propriétés 1.1.1 *Soient* $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *deux matrices quelconques et* $\alpha \in \mathbb{K}$ *un scalaire.*

- *La tronsposition est linéaire :*

$$(A+B)^T = A^T + B^T.$$
$$(\alpha A)^T = \alpha A^T.$$

- *La tronsposée du produit de deux matrices est égale au produit des transposées de ces deux matrices, mais dans l'ordre inverse :* $(AB)^T = B^T A^T$.
- *Si* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *est inversible, alors sa tronsposée l'est aussi, et la transposée de l'inverse de* A *est égale à l'inverse de sa transposée :* $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.
- *La tronsposée de la tronsposée d'une matrice* A *est la même matrice* A *c'est à dire :* $\left(A^T\right)^T = A$.

Définition 1.1.4 *Une matrice* A *carée est dite :*

- *Symétrique si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $A^{\mathrm{T}} = A$ *c'est à dire :* $a_{ij} = a_{ji}, \forall 1 \le i, j \le n$.
- *Antisymétrique si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $A^T = -A$ *c'est à dire :* $a_{ji} = -a_{ij}, \forall 1 \le i, j \le n$.
- *Hermitienne si* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *et* $A^* = A$ *c'est à dire :* $\overline{a_{ij}} = a_{ij}, \forall 1 \le i, j \le n$.
- *Orthogonale si* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *et* $AA^T = A^T A = I$.
- *Unitaire si* $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *et* $AA^* = A^* A = I$.
- *Normale si* $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *et* $AA^* = A^* A$.

1.2 Opérations sur les matrices

Addition matricielle

Définition 1.2.1 *soient* $\mathrm{A}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *et* $\mathrm{B}=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *deux matrices de même ordre* $m\times n$*. La somme de* A *et* B *est la matrice d'ordre* $m\times n$ *notée par* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ *telle que :* $\forall(i,j)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$, $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

Propriétés 1.2.1

- *L'addition est commutative :*

$$\forall\,\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{K}^{m\times n};\qquad \mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{B}+\mathrm{A}.$$

- *L'addition est associative :*

$$\forall\,\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\in\mathbb{K}^{m\times n};\qquad \mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})=(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C}.$$

- *La matrice nulle est l'élément neutre de l'addition :* $\forall\,\mathrm{A}\in\mathbb{K}^{m\times n}$*, si* O *est la matrice nulle de même ordre que* A*, alors :*

$$\mathrm{A}+\mathrm{O}\;=\;\mathrm{O}+\mathrm{A}=\mathrm{A}.$$

- *Tout matrice a une matrice opposée :* $\forall\mathrm{A}\in\mathbb{K}^{m\times n}$*, son opposée notée par* $-\mathrm{A}$ *est telle que :*

$$\mathrm{A}+(-\mathrm{A})=(-\mathrm{A})+\mathrm{A}=\mathrm{O}.$$

- *L'addition est une loi interne : Si* $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{K}^{m\times n}$*, leur somme* $\mathrm{A}+\mathrm{B}\in\mathbb{K}^{m\times n}$.

Multiplication par un scalaire

Définition 1.2.2 *Soient* $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *une matrice d'ordre* $m\times n$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *la* *multiplication de la matrice* A *par le scalaire* λ *et la matrice d'ordre* $m\times n$ *notée* λA *telle que* $\lambda A=\left(P_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *avec :* $\forall\,(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}$, $P_{ij}=\lambda a_{ij}$

$$\lambda A=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots & \lambda a_{mn}\end{bmatrix}$$

- *La multiplication d'une matrice par un scalaire est une loi interne.*

Sustraction des matrices

Définition 1.2.3 *Soient* $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *et* $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *deux matrices, la différence de* A *et* B *est définit par* $A-B=A+(-B)$ *tel que :*
$\forall\,(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}$, $A-B=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$

$$A-B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \ldots & a_{1n}-b_{1n}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \ldots & a_{2n}-b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \ldots & a_{mn}-b_{mn}\end{bmatrix}$$

Produit des matrices

Définition 1.2.4 *soient* $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *et* $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *deux matrices d'ordre* $m\times n$ *et* $n\times p$ *respectivement le produit de* A *et* B *par cette ordore est la matrice d'ordre* $m\times p$ *notée* $A\times B$ *telle que :* $A\times B=C=\left(c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le p}}$ *tel que*

$\forall\,(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}$:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

Propriétés 1.2.2 • *L'associativité du produit matriciele : Soient* $\mathrm{A}\in\mathbb{K}^{m\times n}$, $\mathrm{B}\in\mathbb{K}^{n\times p}$, $\mathrm{C}\in\mathbb{K}^{p\times l}$ *on a toujour* $(\mathrm{A}\times\mathrm{B})\times\mathrm{C}=\mathrm{A}\times(\mathrm{B}\times\mathrm{C})$ *et on écrira* $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}$ *au lieu de* $\mathrm{A}\times(\mathrm{B}\times\mathrm{C})=(\mathrm{A}\times\mathrm{B})\times\mathrm{C}$.

- *L'inverse de produit : Soient* $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{K}^{n\times n}$ *deux matrices carées inversibles. Alors le produit* $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ *est inversible et on a :* $(\mathrm{BA})^{-1}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1}$.
- *La multiplication par un scalaire : Soient* $\mathrm{A}\in\mathbb{K}^{m\times n}$, $\mathrm{B}\in\mathbb{K}^{n\times p}$ *et* $k\in\mathbb{R}$. *Alors :* $(k\mathrm{A})\mathrm{B}=\mathrm{A}(k\mathrm{B})=k(\mathrm{AB})$.
- *La distribuvité : Soient* $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{K}^{m\times n}$ *et* $\mathrm{C},\mathrm{D}\in\mathbb{K}^{n\times p}$ *on alors :*

$$\mathrm{A}(\mathrm{C}+\mathrm{D})=\mathrm{A}\,\mathrm{C}+\mathrm{A}\,\mathrm{D}\ \textit{et}\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C}=\mathrm{A}\,\mathrm{C}+\mathrm{B}\,\mathrm{C}.$$

1.3 Les inégalités entre les matrices

Les inégalités entre les matrices ou les vecteurs réels seront compris par compocante.

Définition 1.3.1 *Pour deux matrices réelles* $\mathrm{A}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *et* $\mathrm{B}=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *dans* $\mathbb{R}^{m\times n}$ *on écrit :*

$$\mathrm{A}\ge\mathrm{B}\ \textit{si et seulement si}\ a_{ij}\ge b_{ij},\ \forall 1\le i\le m,\ \textit{et}\,1\le j\le n.$$

- *En particulier, si* $a_{ij}>b_{ij}$, *pour* $1\le i\le m$ *et* $1\le j\le n$. *Alors on ecrit* $\mathrm{A}\gg\mathrm{B}$.
- *Une matrice* $\mathrm{A}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *dans* $\mathbb{R}^{m\times n}$ *est appelée matrice positive si ses entrées sont non négative c'est à dire :*

  $a_{ij}\ge 0,\ \forall 1\le i\le m,$ *et* $1\le j\le n$, *elle est notée par* $\mathrm{A}\ge 0$ *on désigné par* $\mathbb{R}_{+}^{m\times n}$ *l'ensembles de toutes les matrices positives.*

- *Une matrice positive est appelée non négative.*
- *Une matrice* A *est appellée une matrice strictement positive et on écrit* $A > 0$ *si tous ses entrée* a_{ij} *sont strictement positive c'est à dire :*

$$a_{ij} > 0,\ \forall 1 \leq i \leq m,\ et\, 1 \leq j \leq n.$$

Exemple 1.3.1 *Considérons les deux matrices* $A \in \mathbb{K}^{3\times 4}$, $B \in \mathbb{K}^{2\times 3}$ *telles que :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A *est une matrice strictement positive (*$A > 0$*).*

B *est une matrice positive (non négative) (*$B \geq 0$*).*

Définition 1.3.2 (valeur absolue d'une matrice) *Pour toute matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ *dans* $\mathbb{R}^{m\times n}$ *on définit :*

$$|A| = \left(\left|a_{ij}\right|\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}.$$

$$|A| = \begin{bmatrix} |a_{11}| & |a_{12}| & \dots & |a_{1n}| \\ |a_{21}| & |a_{22}| & \dots & |a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |a_{m1}| & |a_{m2}| & \dots & |a_{mn}| \end{bmatrix}$$

1.4 Spectre des matrices

Définition 1.4.1 (valeur propre) *Soit* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *est dite valeur propre de la matrice* A *s'il existe un vecteur non nul* $X \in \mathbb{R}^n$ *tel que :* $AX = \lambda X$.

Définition 1.4.2 (Spectre) *soit* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, le spectre de* A *notée* $\sigma(\mathrm{A})$ *est défini par :*

$$\sigma(\mathrm{A}) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}) \text{ est non inversible}\right\}.$$

Proposition 1.4.1 *[1] Soit* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *on a :*

$$\sigma(\mathrm{A} + t\mathrm{I}_n) = t + \sigma(\mathrm{A}).$$

Preuve 1.4.1 *Sans pordre la généralité, on limite la démonstration pour le cas de* $n = 2$*. On pose* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *:*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathrm{A} + t\mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} + t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + t \end{bmatrix}$$

$$\sigma(\mathrm{A} + t\mathrm{I}_2) = \left\{\frac{1}{2}\left(-\sqrt{a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{21}a_{12} + a_{22}^2} + a_{11} + a_{22} + 2t\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{21}a_{12} + a_{22}^2} + a_{11} + a_{22} + 2t\right)\right\}$$

et on a :

$$\sigma(\mathrm{A}) = \left\{\frac{1}{2}\left(-\sqrt{a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{21}a_{12} + a_{22}^2} + a_{11} + a_{22}\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{21}a_{12} + a_{22}^2} + a_{11} + a_{22}\right)\right\}$$

et

$$t\,\mathrm{I}_2 = t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

on a : $\sigma(t\mathrm{I}_2) = \{t\}$*, la valeur propre* t *de multiplicité* 2.

Donc : $\sigma(\mathrm{A})+t=\sigma(\mathrm{A}+t\mathrm{I}_2)$.

Exemple 1.4.1 *Soit* $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ *où :*

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\0&0&1\\0&2&1\end{bmatrix}$$

on a : $\sigma(\mathrm{A})=\{2,-1\}$, *la valeur propre* 2 *de multiplicité* 2.

et

$$3\mathrm{I}_3=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

on a : $\sigma(3\mathrm{I}_3)=\{3\}$, *la valeur propre* 3 *de multiplicité* 3.

$$\sigma(\mathrm{A})+\sigma(3\mathrm{I}_3)=\{5,-2\}\text{, \textbf{\textit{(la valeur propre 5 de multiplicité 2)}}}$$

et

$$\mathrm{A}+3\mathrm{I}_3=\begin{bmatrix}5&2&0\\0&3&1\\0&2&4\end{bmatrix}$$

on a : $\sigma(\mathrm{A}+3\mathrm{I}_3)=\{5,-2\}$,*la valeur propre* 5 *de multiplicité* 2.

Donc :

$$\sigma(\mathrm{A}+3\mathrm{I}_n)=3+\sigma(\mathrm{A}).$$

Définition 1.4.3 (Rayon) *Soit* $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *une matrice inversible. On appelle rayon spectral de* A *notée* $\rho(\mathrm{A})$ *la quantité :*

$$\rho(\mathrm{A})=\max\left\{|\lambda|:\lambda\in\mathbb{C},\lambda\,\textit{valeur propre}\right\}.$$

Définition 1.4.4 (L'abcisse spectrale) *L'abcisse spectrale d'une matrice* A *est la plus grande partie réelle du spectre de la matrice* A.

$$\mu(\mathrm{A}) = \max\left\{Re\lambda : \lambda \text{ valeur propre de} \mathrm{A}\right\}.$$

$\mu(\mathrm{A})$ *est appéle aussi le module de stabilité de la matrice* A.

• *Si* $\mu(\mathrm{A}) < 0$ *on dit que la matrice* A *est stable.*

Proposition 1.4.2 *Soient* A *et* $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *tel que :* $\mathrm{A} \geq \mathrm{B}$ *alors* $\mu(\mathrm{A}) \geq \mu(\mathrm{B})$.

Exemple 1.4.2 *Calculons le rayon spectral d'une matrice. Soit*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Le calcul des valeurs propres donne : $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$, *le rayon spectrale est* $\max_{i=1,2} |\lambda_i| = 3$.

1.5 Normes des matrices

Définition 1.5.1 *Pour tout* $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n$, *on a :*

- *La norme* 1 $\|x\|_1$, *définit telle que :*

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

- *La norme euclidienne* $\|x\|_2$, *définit telle que :*

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- *La norme sup* $\|x\|_\infty$*, définit telle que :*

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\right\}.$$

Généralement, pour $p \geq 0$ *la p-norme est définie telle que :*

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.5.2 *On appelle norme matricielle sur* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *une norm* $\|.\|$ *sur* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *telle que :*

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Définition 1.5.3 *On considère* $\mathbb{R}^n$ *muni d'une norme* $\|.\|$*. On appelle norme matricielle induite (ou norme induite) sur* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *par la norme* $\|.\|$*, encore notée* $\|.\|$*, la norme sur* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *définit par :*

$$\|A\| = \sup\left\{\|Ax\|\,;\, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\right\}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Proposition 1.5.1 (Propriétés des normes induites) *Soit* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *muni d'une norme induite* $\|.\|$*. Alors pour toute matrice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, on a :*

1. $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$
2. $\|A\| = \max\left\{\|Ax\|\,;\, \|x\| = 1, x \in \mathbb{R}^n\right\},$
3. $\|A\| = \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,;\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\},$
4. $\|.\|$ *est une norme matricielle.*

Proposition 1.5.2 1. *On munit* $\mathbb{R}^n$ *de la norme* $\|.\|_\infty$ *et* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *de la norme induite correspondante, notée aussi* $\|.\|_\infty$ *par :*

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|.$$

2. *On munit* $\mathbb{R}^n$ *de la norme* $\|.\|_1$ *et* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *de la norme induite correspondante, notée aussi* $\|.\|_1$ *par :*

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|.$$

3. *On munit* $\mathbb{R}^n$ *de la norme* $\|.\|_2$ *et* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *de la norme induite correspondante, notée aussi* $\|.\|_2$ *par :*

$$\|A\|_2 = \left(\rho\left(A^T A\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier si A *est symétrique* $\|A\|_2 = \rho\,(A)$.

Exemple 1.5.1 1. *Soit la matrice* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *tel que :*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 8 \\ 10 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

On a $\|A\|_1 = \max\{21, 10, 18\} = 21.$

On a $\|A\|_\infty = \max\{16, 17, 16\} = 17.$

2. *Pour* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de A *sont :* $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$ *donc :*

$$\|A\|_2 = \rho\,(A) = 2.$$

Dans ce que suit, nous presenttons quelques définitions et théorèmes utilisées dans le travail.

Définition 1.5.4 (Fontion homogéne) *Une fonction définie sur* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *à va-*

leurs dans $\mathbb{R}$ est dite homogéne de degré k si elle vérifie,

$$\forall\ x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}: f(t\,x_1,\ldots,t\,x_n)=t^k f(x_1,\ldots,x_n).$$

Fonction homogène de dégrée 1 *si elle vérifie*

$$\forall\ x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}: f(t\,x_1,\ldots,t\,x_n)=t\,f(x_1,\ldots,x_n).$$

Dérivée de Dini

Une dérivée de Dini est une quantité qui généralise la notion de dérivée d'une fonction. Lorsque celle-ci n'est pas dérivable.

Définition 1.5.5 *Soit f fonction d'un intervalle* I *ouvert de $\mathbb{R}$ à valeur réelles et x un point de* I.
Les quatres dérivées de Dini sont respectivement les limites inférieur et supérieure du taux d'accroissement à gauche et à droite de f :

1. *Dérivée à droite supérieure :*

$$\mathrm{D}^+f(x)=\lim_{h\to 0^+}\sup\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2. *Dérivée à droite inférieure :*

$$\mathrm{D}_+f(x)=\lim_{h\to 0^+}\inf\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

3. *Dérivée à gauche supérieure :*

$$\mathrm{D}^-f(x)=\lim_{h\to 0^-}\sup\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

4. *Dérivée à gauche inférieure :*

$$D_-f(x) = \lim_{h \to 0^-} \inf \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

On dite f est dérivable en x ssi les quatres dérivées de Dini sont égales.

La Dériviée de la valeur absolue

La valeur absolue d'une expressions posséde deux expressions algébriques distinctes, selon l'expression à l'intérieur de la valeur absolue est positive ou non.

Définition 1.5.6 *La fonction signe, notée sgn est une fonction qui extrait le signe d'un nombre réel.*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad sgn(x) = \begin{cases} -1 & : si\ x < 0 \\ 0 & : si\ x = 0 \\ 1 & : si\ x > 0 \end{cases}$$

La fonction sgn peut s'écrire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad sgn(x) = \begin{cases} 0 & : si\ x = 0 \\ \frac{x}{|x|}\ ou\ \frac{|x|}{x} & : si\ x \neq 0 \end{cases}$$

Propriétés 1.5.1 1. *Toute nombre réel peut être exprimé comme le produit de sa valeur absolue et de son signe*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x = sgn(x)|x|.$$

2. *La fonction signe discontinue en* 0 *puisque :*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} sgn(x) = -1,\ et\ sgn(0) = 0.$$

et

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} sgn(x) = 1, \ et\ sgn(0) = 0.$$

3. *La fonction signe peut être vue comme la dérivée en tout réel différent de* 0 *de la fonction valeur absolue :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{d\,|x|}{d\,x} = sgn(x)$$

Dérivation par intégration

Soient f une fonction et h un réel.

$$\begin{aligned}\frac{d\,f}{d\,x}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[f(x+h)-f(x)\Big]\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{d}{d\,s} f(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Définition 1.5.7 (Fonction uniformément continue) *Soit* $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *on dit* f *est uniformément continue sur* I *si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0,\ \forall \big(x, y\big) \in\ \mathrm{I}^2 : \Big|x - y\Big| < \delta \Rightarrow \Big|f(x) - f(y)\Big| < \varepsilon.$$

Définition 1.5.8 (Fonction Lipschitzienne) *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{R}_+$. *On dit que* f *est lipschitzienne de rapport* k *si pour tous* $x, y \in \mathrm{I}$,

$$\Big|f(x) - f(y)\Big| \leq k\,\Big|x - y\Big|$$

La fonction est dite contractante si on peut trouver $0 < k < 1$.

Théorème 1.5.1 (d'Arzéla Ascoli) *Soient* X *un espace topologique,* Y *un espace* *semi-métrique, et* F *un sous-ensemble d'applications continues de* X *dans* Y. *pour que* F *soit relativement compact dans* $C(X,Y)$ *(muni de la topologie de la convergence compacte), il suffit que les deux conditions suivantes sioent vérifiées :*

1. F *est équicontinu,*
2. *Pour tout* $x \in X$, *l'ensemble* $\mathrm{F} = \left\{f(x), f \in \mathrm{F}\right\}$ *est relativement compact dans* Y.

Si X *est localement compact, ces conditions sont aussi nécessaires.*

Chapitre 2

➢ Matrice de Metzler

- ✓ Définitions et exemples
- ✓ Propriétés des matrices de Metzler

2
Matrice de metzler

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1 *On appelle* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tel que :* $\mathrm{M} = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *matrice de Metzler si tout ses éléments non diagonaux sont non négatifs, c'est à dire si :*

$$m_{ij} \geq 0, \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j.$$

- *On dit que* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est une matrice Metzler stricte si :*

$$\begin{cases} m_{ij} \geq 0, & \forall\, 1 \leq i, j \leq n, \text{ tel que } i \neq j, \\ m_{ij} < 0, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Exemple 2.1.1 *Considérons les deux matrices :* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \mathrm{N} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *telles que :*

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathrm{N} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

M *est une matrice de Metzler.*

N *est une matrice de Metzler stricte.*

Remarque 2.1.1 *Toute matrice positive est une matrice de Metzler.*

Proposition 2.1.1 *[1] Soient* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $t \in \mathbb{R}$, M *est une matrice de Metzler si, et seulement si il existe un réel* t *tel que la matrice* $M + tI_n$ *est une matrice positive.*

Preuve 2.1.1 • *Supposons que* $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *est une matrice de Metzler donc on a :* $m_{ij} \ge 0$ *tel que* $i \neq j$*, si on prend* $t \ge \max_{1\le i\le n} |m_{ii}|$*, alors :*
$m_{ii} + t \ge m_{ii} + \max|m_{ii}| \ge 0$*, alors la matrice* $M + tI$ *est une matrice positive.*
• *Soient* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tel que :* $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *et* $t \in \mathbb{R}$*. Supposons que la matrice* $(M + tI_n)$ *est positive.*

$$M + tI_n = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} m_{11}+t & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22}+t & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn}+t \end{bmatrix} \ge 0.$$

Donc $m_{ij} + t \ge 0, \forall 1 \le i, j \le n$ *et* $m_{ij} \ge 0$ *tel que :* $i \neq j$*, alors* M *est une matrice de Metzler.*

2.2 Propriéte des matrices de Metzler

Théorème 2.2.1 *Soit* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *une matrice de Metzler :*

$$\rho(M) = \mu(M) \in \sigma(M)$$

Proposition 2.2.1 *[1] Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice de Metzler, on a :*

$$\rho(\mathrm{M}+t\mathrm{I}_n)-t=\mu(\mathrm{M}).$$

Preuve 2.2.1 *D'aprés le Théorème (2.1) on a : $\rho(\mathrm{M}+t\mathrm{I}_n)=\mu(\mathrm{M}+t\mathrm{I}_n)$.*

$$\begin{aligned}
\rho(\mathrm{M}+t\mathrm{I}_n) &= \mu(\mathrm{M}+t\mathrm{I}_n)\\
&= \max\left\{Re\lambda : \lambda\in\sigma(\mathrm{M}+t\mathrm{I}_n)\right\}\\
&= \max\left\{Re\lambda : \lambda\in\sigma(\mathrm{M})+t\right\}\\
&= \max\left\{Re\lambda : \lambda\in\sigma(\mathrm{M})\right\}+t\\
&= \mu(\mathrm{M})+t
\end{aligned}$$

Alors :

$$\rho(\mathrm{M}+t\mathrm{I}_n)-t=\mu(\mathrm{M}).$$

Théorème 2.2.2 *[6] Supposons que $\mathrm{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ soit une matrice de Metzler. Alors*

(i) $\mu(\mathrm{M})$ *est une valeur propre de* M *et il existe un vecteur propre non négatif* $x\neq 0$ *tel que* $\mathrm{M}x=\mu(\mathrm{M})x$.

(ii) Étant donné $\alpha\in\mathbb{R}$, il existe un vecteur non nul $x\geq 0$ tel que $\mathrm{M}x\geq\alpha x$ si et seulement si $\mu(\mathrm{M})\geq\alpha$.

(iii) $(t\,\mathrm{I}_n-\mathrm{M})^{-1}$ *existe et est positif si et seulement si $t>\mu(\mathrm{M})$.*

(iv) Étant donné $\mathrm{B}\in\mathbb{R}_+^{n\times n}, \mathrm{C}\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Alors

$$|\mathrm{C}|\leq\mathrm{B}\Longrightarrow\mu(\mathrm{M}+\mathrm{C})\leq\mu(\mathrm{M}+\mathrm{B}).$$

Théorème 2.2.3 *[5] Soit $\mathrm{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice de Metzler. Alors les énoncés suivants sont équivalents*

(i) $\mu(\mathrm{M})<0$.

(ii) $\mathrm{M}p \ll 0$ *pour un certain* $p \in \mathbb{R}_+^n$.

(iii) M *est inversible et* $\mathrm{M}^{-1} \leq 0$.

(iv) *Pour* $b \in \mathbb{R}^n$ *donné,* $b \gg 0$*, il existe* $x \in \mathbb{R}_+^n$*, tel que* $\mathrm{M}x + b = 0$..

(v) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$*, le vecteur ligne* $x^T \in \mathrm{M}$ *a au moins une entrée négative.*

Chapitre 3

➢ Etude de la stabilité exponentielle de certains types des systèmes différentiels à retards

- ✓ Système à retard
- ✓ Présentation du premier système
- ✓ Notion de la stabilité exponentielle
- ✓ L’étude de la stabilité du premier système
- ✓ Présentation du deuxième système
- ✓ L’étude de la stabilité du deuxième système

3

Etude de la stabilité exponentielle de certains types des systèmes différentiels à retards

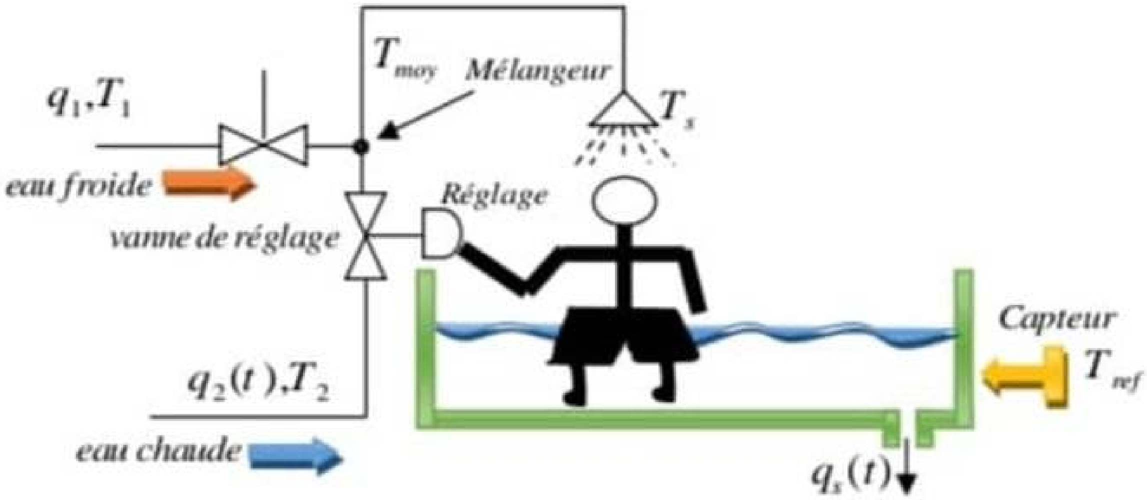
3.1 Système à retard

Une équation différentielle à retard est une équation différentielle dont la dérivée par rapport au temps présent de la solution dépend d'une donnée (de cette solution) sur un temps antérieur. Une équation différentielle à retard est un modèle spécifique d'équations différentielles fonctionnelles dans lesquelles la partie fonctionnelle de l'équation est l'évaluation d'une fonctionnelle sur une étape antérieure (le passé) au processus. Ce type d'équations a connu ces dernières décennies un grand intérrêt. Les investigateurs de toute les disciplines, physique, biologie, économie, logistiques, informatique et autres, trouvent leurs models bien exprimés par des équations à retard qu'avec des EDO.

Exemple d'un système à retard

Douche écossaise : [2] L'exemple le plus classique des systèmes à retard est celui de la douche écossaise, présenté sur la figure, où la température de l'eau (supposée être homogène) résulte du mélange entre l'eau de la source froide de débit q_1 et de température T_1, et celui de la source chaude de débit (supposé variable) $q_2(t)$ et de température T_2. La température T_{moy} représente la température de l'eau à la sortie du mélangeur.

En vue d'un confort idéal, l'utilisateur souhaite obtenir aussi rapidement que possible, en tenant compte du retard produit par le transport à travers le tuyau, la température désirée T_{ref}.



Douche écossaise

Pour simplifier davantage, nous supposons que le changement de position du robinet se fait immédiatement et que le débit de l'eau froide est constant, alors le débit de sortie peut être considéré comme une variable d'entrée, qui peut être exprimé par la relation suivante :

$$\forall\ t \geq 0,\ q_s(t) = q_1 + q_2(t).$$

En supposant que le mélange au niveau du mélangeur est instantané, la température à la sortie du mélangeur peut être alors exprimée comme suit :

$$T_s(t) = \frac{q_1\ T_1 + q_2(t)\ T_2}{q_1 + q_2(t)} \text{df.}$$

Soit h le temps nécessaire pour que l'eau puisse aller de la sortie du mélangeur à la sortie de la douche (ou temps de retard de transport) (Figure).

A l'instant t, l'utilisateur sent la température de l'eau sortant du mélangeur à l'instant $(t-h)$, ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$T_s(t) = T_{\text{moy}}(t-h) \text{ et } dot\, T_s(t) = -k(T_{\text{moy}}(t-h) - T_{\text{ref}}), \ k \in \mathbb{R}.$$

La fonction Histoire

Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|$ et soit $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach de toutes fonctions continues définies sur l'intervale $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$, normé par la norme maximun $\left\|\phi\right\| = \max_{\theta\in[a,b]}\left\|\phi(\theta)\right\|$, en particulier, en écrit C au lien de $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ où h est un nombre positif non nul, et on note $C_r := \left\{\phi \in C : \left\|\phi\right\| \le r\right\}$ pour un $r > 0$ donné.

Définition 3.1.1 *Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et soit*

$$x \in C([t_0-h, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n), \quad t \in [t_0, t_0+\sigma],$$

On définit une nouvelle fonction x_t de C par

$$x_t(s) = x(t+s), \quad s \in [t_0-h, t_0].$$

pour $t_0 = 0$:

$$x_t(s) = x(t+s), \quad s \in [-h, 0].$$

Remarque 3.1.1 *Pour tout t fixé, la fonction x_t est obtenue en considérant la restriction de la fonction x sur l'intervalle $[t-h, t]$, translaté de $[-h,0]$.*

Exemple 3.1.1 $x(t) = t^2+1,\ t_0 = 0,\ \sigma = 2,\ h = 1$, *alors :* $t \in [0,2],\ s \in [-1,0]$,
$x_t(s) = x(t+s) = (t+s)^2+1$,
pour $t = 1$, on a : $x_1(s) = (1+s)^2+1$.

Définition 3.1.2 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}\times C$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction* *continue. On appelle équation différentielle fonctionnelle à retard égal à h sur U une relation de la forme*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{3.1}$$

où

$$x_t(s) = x(t+s), \qquad s \in [-h, 0].$$

On la désigne parfois par EDFR, *le nombre h est appelé le retard. Le cas de $h = 0$ correspond au cas des équations différentielles ordinaires. [4]*

L'exixtance et l'unicité

Théorème 3.1.1 (Existence) *[3] Considérons l'équation (3.1) et supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f(t, \phi)$ une application continue sur Ω. Si $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution de l'équation (3.1) passant par (t_0, ψ).*

Théorème 3.1.2 (Unicité) *[3] Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$, (t_0, ψ) $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, $f(t, \phi)$ est Lipschitzienne par rapport à ϕ sur tout sous ensemble compact de Ω. Si $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution unique pour l'équation (3.1) passant par (t_0, ψ).*

Types de retards

Les retards apparaissant dans les systèmes ou processus réels sont le plus souvent dus à des phénomènes de transfert d'information ou de matière. Différents types de retards peuvent affecter l'état, l'entrée (commande) ou la sortie (observation) d'un système. Ces retards peuvent être constants, variables, distribués ou une combinaison des différents types de retards.

$*$ **Retard constant :** Les premières études sur les systèmes à retards concernaient, principalement, les systèmes à retards constants. Dans la plupart des cas réellement rencontrés, seule une partie récente du passé exerce une influence sur le comportement du système. On parle alors de systèmes à retards bornés s'il existe un nombre réel $h > 0$ tel que les fonctionnelles de l'état x_t et de sa dérivée $\dot{x}_t$ soient définies sur l'intervalle $[-h, 0]$.

$*$ **Retard majoré :** Dans ce cas, on suppose connaître la valeur maximale du retard :

$$0 \leq h(t) \leq h_{\max}$$

$*$ **Retard variable borné :** Comme la constance du retard est une hypothèse rarement vérifiée dans la réalité, le cas des retards variables (connus ou inconnus) a fait lui aussi l'objet de nombreuses recherches. On définit alors les retards variables bornés comme suit :

$$0 < h_1 \leq h(t) \leq h_2$$

Une grande partie des modèles de systèmes à retards suppose que le retard varie dans un intervalle $[0, h_2]$. Le fait d'autoriser le retard à prendre la valeur 0 revient à supposer qu'à un moment donné ce transfert se fait de manière instantanée.

$*$ **Retard dépendent de l'état :** Dans l'étude de la dynamiques des populations et les problèmes épidémiques, le retard dépend souvent de l'état présent $(h(x(t)))$ et parfois même de l'état retardé.

$*$ **Retard variable avec contrainte sur la dérivée :** Comme le retard variable est borné on peut penser à introduire une contrainte sur la dynamique de sa variation, autrement dit, une contrainte sur sa dérivée telle que :

$$\dot{h}(t) \leq d < 1$$

où d est un réel positif.

$\ast$ **Retard variable continu par morceaux :** Ces retards apparaissent notamment lors de l'échantillonnage d'un signal. Ce cas particulier autorise notamment la dérivée du retard à prendre la valeur critique 1 : $\dot{h}(t) \leq 1$.

$\ast$ **Retard distribué :** Si l'on suppose que l'état x_t est une fonction continue sur l'intervalle $[-h, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, nous pouvons alors définir les retards distribués par :

$$\dot{x}(t) = \int_{t-h}^{t} f(t, x(\theta)) \mathrm{d}\theta, \quad h \geq 0$$

ou encore, les retards ponctuels ou discrets :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - h_x)), \quad h_x \geq 0$$

$\ast$ **Retard inconnu :** Aucune hypothèse sur le retard n'est considérée.

Qu'il soit constant ou variant dans le temps, il peut prendre toutes les valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

3.2 Presentation du premier système

Considerons le système différentiel non linéaire à retard variant dans le temps de la forme :

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}(t)x(t) + \mathrm{F}\left(t; x(t), x(t - h_1(t)), \ldots, x(t - h_m(t)), \int_{-h(t)}^{0} \mathrm{B}(s)x(t+s)\mathrm{d}s \right), \tag{3.2}$$

où $t \geq \sigma \geq 0$ et :

(i) $h_k(.), h(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $k \in \underline{m}$, sont des fonctions données telles que $0 < h_k(t) < h_k$, $0 < h(t) < h$, $h \geq h_k$, $\forall\ k \in \underline{m}$ pour certains nombres positifs $h, h_k, k \in \underline{m}$.

(ii) $A(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \underline{m}$ et $B(.) : [-h, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ sont des fonctions continues données.

(iii) $F(.;.,\ldots,.) : \mathbb{R}_+ \times \overbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}^{(m+2)\text{fois}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue telle que $F(t;0,\ldots,0) = 0$, $\forall t \geq 0$ et $F(t; u_1, \ldots, u_{m+2})$ est localement Lipschitzienne et continue par rapport à $u_1, \ldots, u_{m+2}$ sur chaque sous ensemble compact de $\mathbb{R}_+ \times \overbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}^{(m+2)\text{fois}}$.

• D'aprés les théorèmes de l'existance et l'unicité [3] les conditions (i)-(iii) implique pour un $\sigma \geq 0$ fixé et $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ donnée que cette solution est continue sur $[\sigma - h, \gamma[$ pour certains $\gamma > \sigma$ et satisfait le système (3.2) pour tout $t \in [\sigma, \gamma[$, elle est noté par $x(.;\sigma, \phi)$. il existe une solution unique locale du système (3.2) vérifiant la condition initiale

$$x(s + \sigma) = \phi(s), \quad s \in [-h, 0] \tag{3.3}$$

• Si l'intervalle $[\sigma - h, \gamma[$ est l'intervalle maximum d'existence de la solution $x(;\sigma, \phi)$ alors $x(;\sigma, \phi)$ est dit non continuable. L'existence d'une solution non continuable découle du lemme de Zorn et l'intervalle maximal d'existence doit être ouvert. [5]

3.3 Notion de la stabilité exponentielle

Définition 3.3.1 (Stabilité exponentielle locale) *La solution du système (3.1) est dite localement exponentiellement stable, s'il existe des nombres positifs r, K, β tel que : pour chaque $\sigma \in \mathbb{R}_+$ et chaque $\phi \in C_r$, la solution $x(.;\sigma, \phi)$ de (3.2) et*

(3.1) existe sur $[\sigma - h, \infty[$ *et satifait de plus la condition :*

$$\left\| x(t,\sigma,\phi) \right\| \leq K\, e^{-\beta(t-\sigma)}, \quad \forall\, t \geq \sigma.$$

Définition 3.3.2 (Stabilité exponentielle globale) *La solution du système (3.1) est dite globalement exponentiellement stable, s'il existe des nombres positifs* K, β *tel que pour chaque* $\sigma \in \mathbb{R}_+$ *et chaque* $\phi \in C$*, la solution* $x(.;\sigma,\phi)$ *de (3.2) et (3.1) existe sur* $[\sigma - h, \infty[$ *et satisfait de plus la condition :*

$$\left\| x(t,\sigma,\phi) \right\| \leq K\, e^{-\beta(t-\sigma)} \left\| \phi \right\|, \quad \forall\, t \geq \sigma.$$

Quand le solution du système (3.1) est exponentiellement stable, globalement exponentiellement stable alors, on dite aussi que le système (3.1) est localement exponentiellement stable, globalement exponentiellement stable respectivement.

3.4 L'étude de la stabilité du premier système

Théorème 3.4.1 *[5] Soit* $\mathrm{A}(t) := \left(a_{ij}(t)\right),\ t \geq 0$*. Supposons qu'il existe* $\mathrm{A}_0 := \left(a_{ij}^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $\mathrm{A_k} := \left(a_{ij}^{(k)}\right) \in \mathbb{R}_+^{n\times n},\ k \in \underline{m+2}$ *de sorte que :*

$$\begin{aligned} a_{ii}(t) &\leq a_{ii}^{(0)}, \quad \forall\, t \geq 0, i \in \underline{n}; \\ \left| a_{ij}(t) \right| &\leq a_{ij}^{(0)}, \quad \forall\, t \geq 0, \forall i \neq j,\ i, j \in \underline{n} \end{aligned} \tag{3.4}$$

et

$$|\mathrm{F}(t; u_1, \ldots, u_{m+2})| \leq \sum_{k=1}^{m+2} \mathrm{A}_k \left| u_k \right|, \quad \forall\, t \geq 0;\ \forall u_1, \ldots, u_{m+2} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Si

$$\mathrm{M} := \mathrm{A}_0 + \sum_{k=1}^{m+1} \mathrm{A}_k + \int_{-h}^{0} \mathrm{A}_{m+2} \left|\mathrm{B}(s)\right| \,\mathrm{dx}$$

satisfait une des conditions équivalentes (i)–(v) du Théorème (2.3) alors le système (3.2) est localement exponentiellement stable.

De plus, si la fonction F *est homogène positive de degré un par rapport à* $u_1, u_2, \ldots, u_{m+2}$*, alors le système (3.2) est globalement exponentiellement stable.*

Preuve 3.4.1 *Puisque* M *est une matrice de Metzler, les assertions (i)–(v) du Théorème (2.3) sont équivalents. Nous montrons d'abord que le système (3.2) est localement exponentiellement stable à condition que (iv) du Théorème (2.3) soit vérifié. Soit* $\phi \in C$ *une fonction donné et soit* $x(t) =: x(t;\sigma,\phi)$*,* $t \in [\sigma - h, \gamma[$ *une solution non continuable de (3.2)–(3.3). Nous divisons la preuve en trois étapes :*

•*Étape 1 : Il existe* $\beta > 0$ *tel que pour tout* $\sigma \geq 0$ *et tout* $r > 0$ *et tout* $\phi \in C_r$*, on a :*

$$\left\| x(t;\sigma,\phi) \right\| \leq K\ e^{-\beta(t-\sigma)}, \quad \forall\ t \in [\sigma, \gamma[, \tag{3.6}$$

où K *dépend de* β, r*.*

D'après (iv) du Théorème (2.3), il existe $p \in \mathbb{R}_+^n$ *tel que :*

$$\left(\mathrm{A}_0 + \sum_{k=1}^{m+1} \mathrm{A}_k + \int_{-h}^{0} \mathrm{A}_{m+2} \left|\mathrm{B}(s)\right| \,\mathrm{dx} \right) p \ll 0 \tag{3.7}$$

Par continuité, (3.7) est également vrai pour certains $p = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$*,* $\alpha_i > 0,\ \forall\ i \in \underline{n}$*. De plus, (3.7) implique que :*

$$\left(\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 + \sum_{k=2}^{m+1} e^{\beta h} \mathrm{A}_k + \int_{-h}^{0} \mathrm{A}_{m+2} \left|\mathrm{B}(s)\right| \,\mathrm{dx} \right) p \ll -\beta \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)^T \tag{3.8}$$

pour un $\beta > 0$ suffisamment petit. Fixons $r > 0$ et choisissons $K > 0$ tel que :

$$\left|\phi(t)\right| \ll K\ e^{-\beta t} p,\ pour\ tout\ t \in [-h, 0],\ et\ pour\ tout\ \phi \in C_r.$$

Définissons $u(t) := K\ e^{-\beta(t-\sigma)} p,\ t \in [\sigma - h, \infty)$.

Soit $x(t) := x(t; \sigma, \phi),\ t \in [\sigma - h, \gamma[$. Alors, on a $|x(t)| \ll u(t),\ \forall t \in [\sigma - h, \sigma]$.

Nous montrons que $|x(t)| \leq u(t)$ pour tout $t \in [\sigma, \gamma[$.

Supposons au contraire qu'il existe $t_0 > \sigma$ tel que $|x(t_0)| \nleq u(t_0)$.

Posons : $t_1 := \inf\left\{t \in]\sigma, \gamma[: |x(t)| \nleq u(t)\right\}$. Par continuité, $t_1 > \sigma$ et il existe un indice $i_0 \in \underline{n}$ tel que :

$$\begin{aligned} &|x(t)| \leq u(t), \quad \forall t \in [\sigma, t_1[; \quad \left|x_{i_0}(t_1)\right| = u_{i_0}(t_1), \\ &\left|x_{i_0}(t)\right| > u_{i_0}(t), \quad \forall t \in]t_1, t_1 + \varepsilon[, \end{aligned} \tag{3.9}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Pour tout $i \in \underline{n}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|x_i(t)| &= sgn(x_i(t))\ \dot{x}_i(t) \\ &\leq a_{ii}(t)|x_i(t)| + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|a_{ij}(t)\right|\left|x_j(t)\right| \\ &+ \left|F_i\left(t; x(t), x(t-h_1(t)), \cdots, x(t-h_m(t)), \int_{-h(t)}^{0} B(s)x(t+s)\,\mathrm{d}s\right)\right|. \end{aligned}$$

pour presque tout $t \in [\sigma, \gamma[$. Alors (3.4) implique

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|x_i(t)| \leq a_{ii}^{(0)}|x_i(t)| &+ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}^{(0)}\left|x_j(t)\right| \\ &+ \left|F_i\left(t; x(t), x(t-h_1(t)), \cdots, x(t-h_m(t)), \int_{-h(t)}^{0} B(s)x(t+s)\,\mathrm{d}s\right)\right|, \end{aligned}$$

pour presque tout $t \in [\sigma, \gamma[$. Il s'ensuit que pour tout $t \in [\sigma, \gamma[$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{+}|x_i(t)| &:= \limsup_{h \to 0^{+}} \frac{|x_i(t+h)| - |x_i(t)|}{h} \\
&= \limsup_{h \to 0^{+}} \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} \frac{d}{ds} |x_i(s)| \, \mathrm{d}s \\
&\leq a_{ii}^{(0)} |x_i(t)| + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij}^{(0)} \left| x_j(t) \right| \\
&+ \left| F_i \left(t; x(t), x(t-h_1(t)), \cdots, x(t-h_m(t), \int_{-h(t)}^{0} B(s) x(t+s) \, \mathrm{d}s \right) \right|,
\end{aligned}$$

où D^{+} *désigne la dérivée supérieure droite de Dini.*

Soit $\mathrm{A}_{m+2} |\mathrm{B}(s)| := (c_{ij}(s)),\ s \in [-h, 0]$. *Compte tenu de (3.5), on a pour tout* $t \in [\sigma, \gamma[$ *:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{+}|x_i(t)| \leq a_{ii}^{(0)} |x_i(t)| &+ \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij}^{(0)} \left| x_j(t) \right| + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} \left| x_j(t) \right| \\
&+ \sum_{k=2}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \left| x_j(t - h_k(t)) \right| + \sum_{j=1}^{n} \int_{-h(t)}^{0} c_{ij}(s) \left| x_j(t+s) \right| \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

En particulier, il résulte de (3.8) et (3.9) que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^+\left|x_{i_0}(t_1)\right| &\overset{(3.9)}{\leq} a^{(0)}_{i_0 i_0} K\, e^{-\beta(t_1-\sigma)}\alpha_{i_0} + \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} a^{(0)}_{i_0 j} K\, e^{-\beta(t_1-\sigma)}\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} a^{(1)}_{i_0 j} K\, e^{-\beta(t_1-\sigma)}\alpha_j \\
&+ \sum_{k=2}^{m+1}\sum_{j=1}^{n} a^{(k)}_{i_0 j} K\, e^{-\beta(t_1-\sigma)} e^{\beta h}\alpha_j + \sum_{j=1}^{n}\int_{-h}^{0} c_{i_0 j} K\, e^{-\beta(t_1-\sigma)} e^{-\beta s}\alpha_j \mathrm{d}s, \\
&= K\, e^{-\beta(t_1-\sigma)}\left(\sum_{j=1}^{n} a^{(0)}_{i_0 j}\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} a^{(1)}_{i_0 j}\alpha_j + \sum_{k=2}^{m+1}\sum_{j=1}^{n} a^{(k)}_{i_0 j} e^{\beta h}\alpha_j \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^{n}\int_{-h}^{0} c_{i_0 j} e^{-\beta s}\alpha_j \mathrm{d}s\right) \\
&\overset{(3.8)}{<} -\beta\, K\, e^{-\beta(t_1-\sigma)}\alpha_{i_0} = \mathrm{D}^+ u_{i_0}(t_1).
\end{aligned}$$

Cependant, cela contredit (3.9). Par consequent

$$\left|x(t;\sigma,\phi)\right| \leq u(t) = K\ e^{-\beta(t-\sigma)}p, \quad \forall\sigma\geq 0;\ \forall\phi\in C_r; \quad \forall\ t\in[\sigma,\gamma[.$$

Par la monotonie des normes vectorielles, cela donne

$$\left\|x(t;\sigma,\phi)\right\| \leq K_1\, e^{-\beta(t-\sigma)}, \quad \forall\sigma\geq 0;\ \forall\phi\in C_r; \quad \forall\ t\in[\sigma,\gamma[,$$

pour certains $K_1 > 0$.

•*Étape2 : Nous montrons que* $\gamma=\infty$ *et donc le système (3.2) est localement exponentiellement stable. En cherchant une contradiction, on suppose que* $\gamma<\infty$. *Alors il résulte de (3.6) que* $x(.;\sigma,\phi)$ *est borné sur* $[\sigma,\gamma[$. *De plus, ceci avec (3.2) et (3.5) implique que* $\dot{x}(.)$ *est borné sur* $[\sigma,\gamma[$. *Ainsi* $x(.)$ *est uniformément continue sur* $[\sigma,\gamma[$. *Donc,* $\lim_{t\to\gamma^-} x(t)$ *existe et* $x(.)$ *peut être prolongée à une fonction continue sur* $[\sigma,\gamma[$. *De plus, la fermeture de* $\left\{x_t : t\in[\sigma,\gamma[\right\}$ *est un ensemble compact dans* C, *d'après le théorème d'Arzéla–Ascoli.*

Notez que $\{(t, x_t) : t \in [\sigma, \gamma[\} \subset [\sigma, \gamma] \times$ *la fermeture de* $\{x_t : t \in [\sigma, \gamma[\}$. *Ainsi, la fermeture de* $\{(t, x_t) : t \in [\sigma, \gamma[\}$ *est un ensemble compact dans* $\mathbb{R}_+ \times C$. *Puisque* (σ, x_σ) *appartient à cet ensemble compact, on peut trouver une solution de le système (3.2) passant par ce point à droite de* γ. *Cela contredit l'hypothèse de non-continuité sur* $x(.)$. *Ainsi* γ *doit être égal à* ∞.

•*Étape3 : Enfin, nous montrons que le système (3.2) est globalement exponentiellement stable a condition que* F *soit homogène positive de degré un par rapport à* $u_1, \ldots, u_{m+2}$. *Soit* $\phi \in C$ *donné. Puisque* F *est homogène positive de degré un par rapport à* $u_1, \ldots, u_{m+2}$, *il s'ensuit que* $\frac{1}{\|\phi\|} x(.; \sigma, \phi)$ *est la solution de le système (3.2) vérifiant la condition initiale* $x(t+\sigma) = \frac{1}{\|\phi\|}\phi(t),\ t \in [-h, 0]$. *Puisque* $\frac{1}{\|\phi\|}\phi \in C_1$, *on a :*

$$\left\| \frac{1}{\|\phi\|} x(t; \sigma, \phi) \right\| \leq K\ e^{-\beta(t-\sigma)}, \quad \forall t \geq \sigma,$$

où de maniére équivalente $\|x(t; \sigma, \phi)\| \leq K\ e^{-\beta(t-\sigma)} \|\phi\|$, $\forall t \geq \sigma$ *ici* K, β *sont indépendants de* ϕ *et donc le système (3.2) est globalement exponentiellement stable.*

Exemple 3.4.1 *Considérons l'équation différentielle avec des retards variant dans le temps.*

$$\dot{x}(t) = (-2 + \sin t) x(t) + \sqrt{a e^{-t} x(t)^2 + b(\cos\sqrt{t})^2 x(t-h(t))^2 + c\Big(\int_{-h(t)}^{0} e^s x(t+s) ds\Big)^2} \qquad (3.10)$$

où $a, b, c \geq 0$ *sont des paramètres et* $h(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est une fonction continue donnée vérifiant* $0 < h(t) \leq h$, $\forall\ t \geq 0$ *pour un certain* $h > 0$.

L'équation (3.10) est de la forme (3.2) avec $a(t) := -2+\sin t$; *et*

$\mathrm{F}(t; u_1, u_2, u_3) = \sqrt{a e^{-t} u_1^2 + b(\cos\sqrt{t})^2 u_2^2 + c\ u_3^2},\ \forall\ t \geq 0,\ u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}.$

De plus :

$$\begin{aligned} a(t) &= -2+\sin t \quad \textit{et on a}\ -1 \leq \sin t \leq 1 \\ &\leq -2+1 \\ &\leq -1 \qquad \forall\ t \geq 0 \end{aligned}$$

et F *est homogène positif de degré un par rapport à* u_1, u_2, u_3 *et satisfait*

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(t; u_1, u_2, u_3) &= \sqrt{a e^{-t} u_1^2 + b(\cos\sqrt{t})^2 u_2^2 + c\ u_3^2} \\ &\leq \sqrt{a e^{-t} u_1^2} + \sqrt{b(\cos\sqrt{t})^2 u_2^2} + \sqrt{c\ u_3^2} \\ &\leq \sqrt{a e^{-t}}\,|u_1| + \sqrt{b}(\cos\sqrt{t})|u_2| + \sqrt{c}\,|u_3| \\ &\leq \sqrt{a}\,|u_1| + \sqrt{b}\,|u_2| + \sqrt{c}\,|u_3| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(t; \alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) &= \sqrt{a e^{-t}(\alpha u_1)^2 + b(\cos\sqrt{t})^2(\alpha u_2)^2 + c\,(\alpha u_3)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2(a e^{-t} u_1^2 + b(\cos\sqrt{t})^2 u_2^2 + c\ u_3^2)} \\ &= |\alpha| \sqrt{a e^{-t} u_1^2 + b(\cos\sqrt{t})^2 u_2^2 + c\ u_3^2} \\ &= |\alpha|\ \mathrm{F}(t; u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

Donc F *est homogène positive de degré un*

$$\mathrm{F}(t; \alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) = \alpha \mathrm{F}(t; u_1, u_2, u_3)$$

Pour tout $t \geq 0$ *et* $u_i, v_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} |\mathrm{F}(t; u_1, u_2, u_3) - \mathrm{F}(t; v_1, v_2, v_3)| \leq & \Big|\sqrt{a}\,|u_1| + \sqrt{b}\,|u_2| + \sqrt{c}\,|u_3| \\ & -\sqrt{a}\,|v_1| - \sqrt{b}\,|v_2| - \sqrt{c}\,|v_3|\Big| \\ \leq & \sqrt{a}\,|u_1 - v_1| + \sqrt{b}\,|u_2 - v_2| \\ & + \sqrt{c}\,|u_3 - v_3| \end{aligned}$$

donc : $|A_0(t)| < A_0$ *et* $|F(t; u_1, u_2, u_3)| \leq \sum_{k=1}^{3} A_k |u_k|$ *et* $A_1 = \sqrt{a}$,$A_2 = \sqrt{b}$ *et* $A_3 = \sqrt{c}$, *On note :*

$$M = A_0 + \sum_{k=1}^{3} A_k + \int_{-h}^{0} \sqrt{c}\,|B(s)|\,ds$$

$$M = -1 + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \int_{-h}^{0} \sqrt{c}\,e^{s}\,ds$$

par conséquent toutes les hypothéses de Théorème (3.4) sont vérifiées. Ainsi (3.10) est globalement exponentiellement stable si $\mu(M) < 0$

$$\mu(-1 + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \int_{-h}^{0} \sqrt{c}\,e^{s}\,ds) < 0$$

ou équivalent de

$$-1 + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}(1 - e^{-h}) < 0$$

Remarque 3.4.1 *Il est important de noter que si* $F(t; u_1, \ldots, u_{m+2})$ *est globalement de lipschitz et continu par rapport à* $u_1, \ldots, u_{m+2}$ *sur* $\mathbb{R}_+ \times \overbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}^{(m+2)fois}$ *et* $F(t; 0, \ldots, 0) = 0$, $\forall\ t \geq 0$, *alors puis (3.5) tient automatiquement pour certains* $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \underline{m+2}$.

Cas particulier

En particulier, lorsque $A(.)$ *est une fonction constante à valeur matricielle, nous obtenons ce qui suit.*

Théorème 3.4.2 *[5] Soit* $A(t) \equiv A := (a_{ij}), \forall\ t \geq 0$. *Supposons qu'il existe* $A_k := (a_{ij}^{(k)})$, $k \in \underline{m+2}$ *de sorte que (3.5) soit vérifiée.*

Si

$$\mathrm{M} := daig(a_{11},\ldots,a_{nn}) + \left|\mathrm{A} - daig(a_{11},\ldots,a_{nn})\right| + \sum_{k=1}^{m+1} \mathrm{A}_k + \int_{-h}^{0} \mathrm{A}_{m+2}\,|\mathrm{B}(s)|\,ds$$

satisfait une des conditions équivalentes (i)–(v) du Théorème (2.3) alors le système (3.2) est localement exponentiellement stable. De plus, si la fonction F *est homogène positive de degré un par rapport à* $u_1,\ldots,u_{m+2}$*, alors le système (3.2) est globalement exponentiellement stable.*

Preuve 3.4.2 *Puisque* M *est une matrice de Metzler (i)-(v) du Théorème (2.3) sont équivalents comme la démonstration du Théorème (3.4) il existe* $p = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n_+$, $\forall \beta > 0$ *telle que :*

$$\left[daig(a_{11},\ldots,a_{nn}) + \left|\mathrm{A} - daig(a_{11},\ldots,a_{nn})\right| + \sum_{k=1}^{m} e^{\beta h}\,|\mathrm{A}_k| + \int_{-h}^{0} e^{-\beta s}\,|\mathrm{B}(s)|\,ds\right] p \leq -\beta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^T$$

choissions $K > 0$ *tel que* $\left|\phi(t)\right| < K e^{-\beta t},\ t \in [-h,0]$*, et pour tout* $\phi \in C_r$*, on définit :* $u(t) := K e^{-\beta t} p,\ t \in [-h,0]$ *et soit* $x(t) := x(t,\phi),\ \forall t > 0$. *Ensuite nous avons :* $|x(t)| < u(t),\ \forall t > 0,\ i \in \underline{n}$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|x_i(t)| &= sgn(x_i(t))\,\dot{x}_i(t) \\
&\leq a_{ii}^{(0)} x_i(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}^{(0)} \left|x_j(t)\right| \\
&+ \left|F_i\left(t; x(t), x(t-h_1(t)),\ldots,x(t-h_m(t)), \int_{-h(t)}^{0} B(s)x(t+s)\,\mathrm{d}s\right)\right|.
\end{aligned}$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
D^{+}|x_i(t)| &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{|x_i(t+h)|\,|x_i(t)|}{h} \\
&= \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} \frac{d}{d}|x_i(s)|\;\mathrm{d}s \\
&\leq a_{ii}^{(0)}|x_i(t)| + \sum_{j=1,\,j\neq i}^{n} a_{ij}^{(0)}\left|x_j(t)\right| \\
&+ \left|F_i\left(t; x(t), x(t-h_1(t)), \cdots, x(t-h_m(t)), \int_{-h(t)}^{0} B(s)x(t+s)\,\mathrm{d}s\right)\right|,
\end{aligned}
$$

en continue les mêmes étapes de la démonstration du Théorème (3.4)

3.5 Présentation du deuxième système

On considère maintenant un système différentiel avec des retards de la forme :

$$
\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{A}_k(t)x(t-h_k(t)) + \mathrm{G}\left(t; \int_{-h(t)}^{0} B(s)x(t+s)\mathrm{d}s\right), \qquad (3.11)
$$

où

(i) $h_k(.), h(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ k \in \underline{m}$ sont données des fonctions telles que $0 < h_k(t) < h_k,\ 0 < h(t) < h,\ h \geq h_k,\ \forall k \in \underline{m}$ pour certains nombres positifs $h, h_k, k \in \underline{m}$.

(ii) $\mathrm{A}(.), \mathrm{A}_k(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}, k \in \underline{m}$ et $\mathrm{B}(.) : [-h, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ sont données des fonctions continues.

(iii) $\mathrm{G}(.;.) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue donné vérifiant $\mathrm{G}(t;0) = 0,\ \forall\ t \geq 0$ est Lipschtiz continue par rapport au second argument sur chaque sous-ensemble compact de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

Alors la suite est immédiate à partir du Théorème (3.4). [5]

3.6 L'étude de la stabilité du deuxième système

Théorème 3.6.1 *[5] Soit* $A(t) = (a_{ij}(t))$, $\forall\, t \geq 0$. *Supposons qu'il existe* $A_0 = (a_{ij}^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $A_k \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $k \in \underline{m+1}$ *telle que*

$$a_{ii}(t) \leq a_{ii}^{(0)} \quad , \forall\, t \geq 0; \quad \left|a_{ij}(t)\right| \leq a_{ij}^{(0)}, \quad \forall t \geq 0, \forall i \neq j,\ i, j \in \underline{n},$$

et

$$|A_k(t)| \leq A_k, \quad \forall\, t \geq 0\ k \in \underline{m}; \quad |G(t;u)| \leq A_{m+1}\,|u|, \quad \forall\, t \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Si $M = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k + \int_{-h}^{0} A_{m+1}\,|B(s)|\,ds$ *vérifie une des conditions équivalentes (i)-(v) du Théorème (2.3) alors le système (3.11) est localement exponentiellement stable. De plus si la fonction* G *est homogène positive de degré un par rapport au second argument alors le système (3.11) est globalement exponentiellement stable.*

Nous suivans les mêmes étapes de la démonstration du Théorème (3.4)

Conclusion

A la fin de cette mémoire nous concluons que même si la partie linéaire des systèmes différentiels à retard dépendant du temps et on peut trouver la borne linéaire de la partie non linéaire par des matrices positives, alors la stabilité du système peut être obtenu par la théorie (Perron-Frobenius) et le principe de comparaison, plutôt que d'appliquer la méthode Lyapunov-Razumikhin qui cherche des fonctions qui doivent remplir certaines conditions pour y parvenir.

Cette méthode peut également être généralisée à un très grand nombre de systèmes variant dans le temps et non linéaires à retard.

Bibliographie

[1] E. BILEL, *Doctorat de 3ième Cycle*, PhD thesis, Université de Montpellier, France, 2022.

[2] F. BOURAHALA, *Contribution à la commande et à la stabilisation des systèmes non-linéaires avec retard*, PhD thesis, 2018.

[3] J. K. HALE AND S. M. V. LUNEL, *Introduction to functional differential equations*, vol. 99, Springer Science & Business Media, 2013.

[4] B. KARIMA, *On the existence and stability of solutions for certain functional differential and delay integro-differential equations by the fixed point technique*, PhD thesis, Badji Mokhtar University, 2018.

[5] P. H. A. NGOC, *On exponential stability of nonlinear differential systems with time-varying delay*, Applied Mathematics Letters, 25 (2012), pp. 1208–1213.

[6] N. K. SON AND D. HINRICHSEN, *Robust stability of positive continuous time systems*, Numerical functional analysis and optimization, 17 (1996), pp. 649–659.